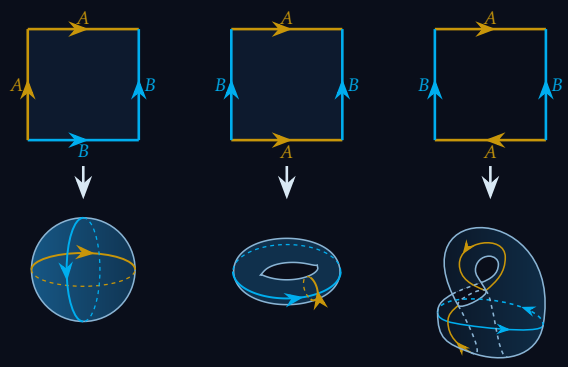
# Análisis Global

*Una introducción al análisis no lineal y sus métodos variacionales en variedades riemannianas*




$$\int_M \left\langle \nabla^s F, G \right\rangle_{g,h_E} d\lambda_g = (-1)^s \int_M \left\langle F, \left(\mathrm{tr}_g \circ \nabla\right)^s G \right\rangle_{g,h_E} d\lambda_g + \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{s-1-j} \int_{\partial M} \left\langle \nabla^j F, \iota_\nu \left( \left(\mathrm{tr}_g \circ \nabla\right)^{s-1-j} G \right) \right\rangle_{g,h_E} d\lambda_{\widetilde{g}}$$

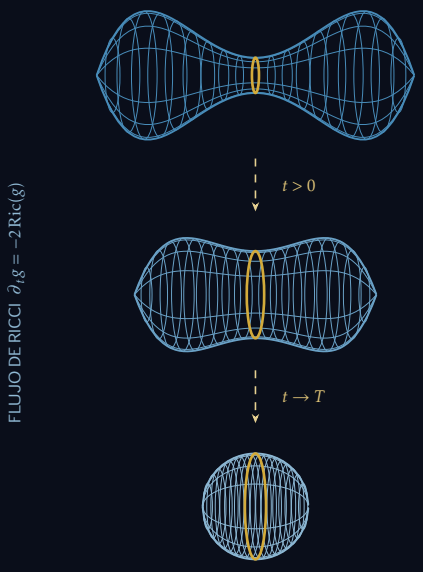
*Fórmula de integración por partes en haces vectoriales*


AUTORES

Carlos Daniel Velázquez Mendoza

María de los Ángeles Sandoval Romero

Romulo Diaz Carlos



Facultad de Ciencias UNAM

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Ciudad Universitaria, CDMX

Primera Edición

2026

> *"It is well known that geometry presupposes not only the concept of space but also the first fundamental notions for constructions in space as given in advance. It only gives nominal definitions for them, while the essential means of determining them appear in the form of axioms. The relationship of these presumptions is left in the dark; one sees neither whether and in how far their connection is necessary, nor a priori whether it is possible. From Euclid to Legendre, to name the most renowned of modern writers on geometry, this darkness has been lifted neither by the mathematicians nor the philosophers who have laboured upon it."*
>
> — **Bernhard Riemann**

# Lista de símbolos

**Conjuntos y convenciones generales**

$\mathbb{K}$ Campo escalar, igual a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$\mathbb{N}$ Conjunto de los números naturales

$\mathbb{N}_0$ Conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z}$ Conjunto de los números enteros

$\mathbb{R}^n$ Espacio euclidiano real de dimensión $n$

$\mathbb{C}^n$ Espacio vectorial complejo de dimensión $n$

$\mathbb{H}^n$ Semiespacio euclidiano superior de dimensión $n$

$\mathbb{S}^n$ Esfera unitaria de dimensión $n$

$e_j$ $j$-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$

$B_d(x,r)$ Bola abierta de centro $x$ y radio $r$ para la métrica $d$

$\overline{B}_d(x,r)$ Bola cerrada de centro $x$ y radio $r$ para la métrica $d$

$A \Subset U$ El conjunto $A$ está compactamente contenido en $U$

$\operatorname{supp}(f)$, $\operatorname{supp}(\mathbf{f})$ Soporte de la función $f$ o de la sección $\mathbf{f}$

$\mathbf{1}_A$ Función indicadora del conjunto $A$

$\operatorname{span}(A)$ Subespacio vectorial generado por $A$

$\sum_{i=1}^{k} a_i$ Suma de los términos $a_i$

$\prod_{i=1}^{k} a_i$ Producto de los términos $a_i$

$\bigsqcup_{j\in I} A_j$ Unión disjunta de la familia $(A_j)_{j\in I}$

$\binom{n}{k}$ Coeficiente binomial

$\alpha$ Multiíndice, cuando el contexto es el cálculo en coordenadas

$D^\alpha u$ Derivada parcial de $u$ asociada al multiíndice $\alpha$

**Topología y análisis funcional**

$(X, \tau)$ Espacio topológico $X$ con topología $\tau$

$\overline{A}$ Cerradura del conjunto $A$

$\sim$ Relación de equivalencia

$\overline{X}^{\|\cdot\|}$ Completación del espacio normado $(X, \|\cdot\|)$

$X'$ Dual topológico del espacio vectorial topológico $X$

$V^*$ Dual algebraico del espacio vectorial $V$

$\overline{V}$ Espacio vectorial complejo conjugado de $V$

$\mathrm{Hom}(V, W)$ Espacio de transformaciones lineales de $V$ en $W$

$\mathcal{L}(X, Y)$ Espacio de operadores lineales continuos de $X$ en $Y$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Producto interno o emparejamiento de dualidad, según el contexto

$\|\cdot\|$ Norma del espacio considerado

$\|\cdot\|_{L^p(X)}$ Norma del espacio de Lebesgue sobre el espacio de medida $X$

$x_j \rightharpoonup x$ Convergencia débil de $x_j$ hacia $x$

$x_j \overset{*}{\rightharpoonup} x$ Convergencia débil-$*$ de $x_j$ hacia $x$

$\sigma(X, Y)$ Topología débil sobre $X$ inducida por la dualidad con $Y$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Espacio de medida con $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ y medida $\mu$

$\lambda_n$ Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

$L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ Espacio de Lebesgue sobre el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$

$M_{m\times n}(\mathbb{K})$ Matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$

$A^T$ Transpuesta de la matriz $A$

$A^*$ Adjunto hermitiano de una matriz; para operadores, sólo cuando el contexto fija los productos de Hilbert

$T^\dagger$ Adjunto hilbertiano acotado de $T$ cuando debe distinguirse del adjunto formal diferencial

$\mathcal{D}(A)$ Dominio del operador lineal $A$

$\mathcal{G}(A)$ Gráfica del operador lineal $A$

$M^\perp$ Complemento ortogonal del subconjunto $M$ en un espacio de Hilbert

$\mathcal{K}(X, Y)$ Espacio de operadores lineales compactos de $X$ en $Y$

$\mathcal{L}^m(X_1,\dots,X_m;Y)$ Espacio de operadores $m$-lineales continuos de $X_1\times\cdots\times X_m$ en $Y$

$\mathcal{L}^m_s(X;Y)$ Subespacio de operadores $m$-lineales continuos y simétricos

$D^m f(x)$ Derivada de Fréchet de orden $m$ de $f$ en $x$

$\delta^m f(x)$ Derivada de Gâteaux de orden $m$ de $f$ en $x$

$\mathrm{Car}(\Omega\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\ell)$ Funciones de Carathéodory con los dominios y codominios indicados

$\delta_j f(x)$ Derivada parcial de Gâteaux de $f$ respecto de la $j$-ésima variable

$D_j f(x)$ Derivada parcial de Fréchet de $f$ respecto de la $j$-ésima variable

$\mathcal{N}_f$ Operador de Nemytski o de superposición asociado a $f$

$\mathrm{Iso}(X,Y)$ Conjunto de isomorfismos lineales continuos de $X$ sobre $Y$

$(X_0,X_1)_{\theta,q}$ Espacio de interpolación real del par compatible $(X_0,X_1)$

$[X_0,X_1]_\theta$ Espacio de interpolación compleja del par compatible $(X_0,X_1)$

$K(t,u;X_0,X_1)$ Funcional $K$ de Lions–Peetre

$J(t,u;X_0,X_1)$ Funcional $J$ de Lions–Peetre

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Clase de Schwartz en $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ Espacio de distribuciones temperadas

$\mathcal{F}u=\widehat{u}$ Transformada de Fourier de $u$ con normalización unitaria

$X/Y$ Espacio cociente del espacio normado $X$ por el subespacio cerrado $Y$

$BC^j(U,F)$, $BC^\infty(U,F)$ Funciones de clase $C^j$ con derivadas acotadas hasta orden $j$; la clase infinita es la intersección de todos los órdenes

$BUC^j(U,F)$, $BUC^\infty(U,F)$ Subespacios de $BC^j$ cuyas derivadas hasta orden $j$ son uniformemente continuas

**Geometría diferencial**

$C^k(M,N)$ Mapeos de clase $C^k$ entre las variedades suaves $M$ y $N$

$C^k_c(M)$ Funciones de clase $C^k$ y soporte compacto en $M$

$C^\infty(M)$ Funciones reales suaves en $M$

$TM$ Haz tangente de la variedad suave $M$

$T^*M$ Haz cotangente de la variedad suave $M$

$T_pM$ Espacio tangente de $M$ en el punto $p$

$\mathfrak{X}(M)$ Espacio de campos vectoriales suaves en $M$

$\partial_i$ Campo vectorial coordenado $\frac{\partial}{\partial}x^i$

$\mathbf{d}x^i$ Campo covectorial coordenado

$df$ Diferencial de la función $f$

$T^{(k,l)}(TM)$ Haz de tensores $k$-contravariantes y $l$-covariantes

$F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$ Componentes coordenadas de un tensor de tipo $(k,l)$

$\otimes$ Producto tensorial

$\wedge$ Producto cuña

$\bigwedge^k(T^*M)$ Haz de $k$-tensores alternantes

$\Omega^k(M)$ Espacio de $k$-formas diferenciales en $M$

$d\omega$ Derivada exterior de la forma diferencial $\omega$

$F\restriction_A$ Restricción de $F$ al subconjunto $A$

$\partial M$ Frontera de una variedad con frontera $M$

**Geometría riemanniana**

$(M,\mathbf{g})$ Variedad riemanniana $M$ con métrica $\mathbf{g}$

$g_{ij}$ Coeficientes locales de la métrica riemanniana $\mathbf{g}$

$g^{ij}$ Coeficientes de la matriz inversa de $(g_{ij})$

$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{g}}$ Producto interno inducido por la métrica $\mathbf{g}$

$|\cdot|_{\mathbf{g}}$ Norma puntual inducida por la métrica $\mathbf{g}$

$\lambda_{\mathbf{g}}$ Medida de Riemann–Lebesgue asociada a $\mathbf{g}$

$d\lambda_{\mathbf{g}}$ Elemento de integración respecto de la medida de Riemann–Lebesgue

$dV_{\mathbf{g}}$ Forma de volumen de $\mathbf{g}$ cuando se ha fijado una orientación

$d_{\mathbf{g}}$ Distancia riemanniana

$L_{\mathbf{g}}(\gamma)$ Longitud riemanniana de la curva $\gamma$

$\operatorname{inj}(M,\mathbf{g})$ Radio de inyectividad de la variedad riemanniana

$\operatorname{grad}_{\mathbf{g}} f$ Gradiente riemanniano de $f$

$\operatorname{div}_{\mathbf{g}} X$ Divergencia riemanniana del campo $X$

$\Delta_{\mathbf{g}}$ Operador de Laplace–Beltrami, $\operatorname{div}_{\mathbf{g}}\operatorname{grad}_{\mathbf{g}}$

$\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}}$ Tensor de curvatura de Riemann de la métrica $\mathbf{g}$

$\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$ Tensor de Ricci de la métrica $\mathbf{g}$

$R = R_{\mathbf{g}}$ Curvatura escalar de la métrica $\mathbf{g}$

**Haces vectoriales y secciones**

$\mathbf{E} \longrightarrow M$ Haz vectorial $\mathbf{E}$ sobre la variedad $M$

$\mathbf{E}^*$ Haz vectorial dual de rango finito de $\mathbf{E}$, conforme a la convención finito–dimensional

$\overline{\mathbf{E}}$ Haz vectorial complejo conjugado de $\mathbf{E}$

$\Gamma(\mathbf{E})$ Espacio de secciones suaves de $\mathbf{E}$

$\Gamma^k(\mathbf{E})$ Espacio de secciones de clase $C^k$ de $\mathbf{E}$

$\Gamma_c^k(\mathbf{E})$ Secciones de clase $C^k$ y soporte compacto de $\mathbf{E}$

$\Gamma_c(\mathbf{E})$ Secciones suaves de soporte compacto de $\mathbf{E}$

$\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ Métrica fibrada en el haz vectorial $\mathbf{E}$

$\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbf{E}} : \overline{\mathbf{E}} \to \mathbf{E}^*$ Isomorfismo complejo–lineal de Riesz, $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbf{E}}(\overline{v})(w) = \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(w, v)$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$ Producto interno puntual inducido por $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$

$|\cdot|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$ Norma puntual inducida por $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$

$\nabla^{\mathbf{E}}$ Conexión en el haz vectorial $\mathbf{E}$

$\nabla_i$ Derivada covariante en la dirección del campo coordenado $\partial_i$

$\nabla^k \mathbf{F}$ $k$-ésima derivada covariante del campo tensorial o sección $\mathbf{F}$

$\nabla_w^k \mathbf{F}$ $k$-ésima derivada covariante débil de $\mathbf{F}$

$\boldsymbol{\mathcal{D}}(M, \mathbf{E})$ Espacio de secciones de prueba del haz $\mathbf{E}$

$\boldsymbol{\mathcal{D}}'(M, \mathbf{E}, W)$ Distribuciones $W$-valuadas en el haz vectorial $\mathbf{E}$

$\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ Haz dual topológico de un haz vectorial de Banach $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

$V_e\mathbf{E}$, $V\mathbf{E}$ Espacio vertical en $e \in \mathbf{E}$ y subhaz vertical de $T\mathbf{E}$

$w_e^{\mathrm{V}}$ Levantamiento vertical de $w \in \mathbf{E}_{\pi_{\mathbf{E}}(e)}$ en $e$

$K^{\nabla^{\mathbf{E}}} : T\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ Mapeo de conexión inducido por $\nabla^{\mathbf{E}}$

$H_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E}$, $H^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E}$ Espacio horizontal en $e$ y subhaz horizontal inducido por $\nabla^{\mathbf{E}}$

$X_e^{\mathrm{H}}$ Levantamiento horizontal de $X \in T_{\pi_{\mathbf{E}}(e)}M$ en $e$

$\pi^*\nabla^{\mathbf{E}}$ Conexión pullback sobre $\pi^*\mathbf{E}$

$\nabla^{\mathrm{H}}$, $\nabla^{\mathrm{V}}$ Derivadas covariantes horizontal y vertical sobre el cotangente

**Espacios de Sobolev**

$L^p(\Omega)$ Espacio de Lebesgue en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$L^p(M)$ Espacio de Lebesgue respecto de la medida $\lambda_{\mathbf{g}}$

$L^p(M, \mathbf{E})$ Espacio de secciones $p$-integrables del haz $\mathbf{E} \longrightarrow M$

$L^p(M, \mathbb{R}^n)$ Espacio de funciones medibles de $M$ en $\mathbb{R}^n$ cuya norma fibrada euclidiana es $p$-integrable

$W^{m,p}(\Omega)$ Espacio de Sobolev de orden $m$ en $\Omega$

$W^{m,p}(M)$ Espacio de Sobolev de orden $m$ en la variedad $M$

$W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ Espacio de Sobolev de secciones del haz $\mathbf{E}$

$W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$ Espacio de Sobolev local de secciones del haz $\mathbf{E}$

$W^{m,p}_0(M)$ Cerradura de $C^\infty_c(\operatorname{Int} M)$ en $W^{m,p}(M)$

$W^{m,p}_0(M, \mathbf{E})$ Cerradura de $\Gamma_{c,\operatorname{Int}(M)}(\mathbf{E})$ en $W^{m,p}(M, \mathbf{E})$

$H^{s,p}(M)$ Espacio de potenciales de Bessel de orden $s$ en la variedad $M$

$H^{s,p}(M, \mathbf{E})$ Espacio de Sobolev de Bessel de secciones, definido por localización uniforme

$H^s_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$ Espacio de Sobolev local de secciones del haz $\mathbf{E}$

$H^{s,p}_L(M)$ Escala intrínseca de Bessel asociada a $L = \Delta_B = -\Delta$

$H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E})$ Escala intrínseca de Bessel asociada al laplaciano de conexión $L_{\mathbf{E}}$

$p^*$ Exponente crítico de Sobolev correspondiente al contexto

Tr, $\mathbf{Tr}^{\mathbf{E}}$ Operadores de traza para funciones y para secciones del haz $\mathbf{E}$, respectivamente

$H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ Espacio de potenciales de Bessel de orden $s$

$W^{s,p}(\Omega)$ Espacio de Sobolev–Slobodeckij de orden no entero $s$

$W^{s,p}(M, \mathbf{E})$ Espacio intrínseco de Sobolev–Slobodeckij de secciones del haz $\mathbf{E}$, definido mediante derivadas covariantes y transporte paralelo

$[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ Seminorma de Gagliardo–Slobodeckij

$B^s_{p,q}(M)$, $B^s_{p,q}(M, \mathbf{E})$ Espacios de Besov de funciones y de secciones sobre $M$

$F^s_{p,q}(M)$, $F^s_{p,q}(M, \mathbf{E})$ Espacios de Triebel–Lizorkin de funciones y de secciones sobre $M$

$J^s = (I - \Delta)^{\frac{s}{2}}$ Operador de Bessel de orden $s$

**Operadores diferenciales**

$\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ Operadores diferenciales parciales de orden a lo sumo $m$ de $\mathbf{E}$ en $\mathbf{F}$

$P^*_h$ Adjunto formal hermitiano del operador diferencial $P$, respecto de las métricas fibradas y la medida riemanniana

$P'$ Transpuesto formal complejo–bilineal, $P' \colon \Gamma(\mathbf{F}^*) \to \Gamma(\mathbf{E}^*)$

$\sigma_m(P)$ Símbolo principal de orden $m$ del operador $P$

$d^{\mathbf{E}}$ Derivada exterior con valores en el haz $\mathbf{E}$

$\delta^{\mathbf{E}}$ Adjunto formal hermitiano de $d^{\mathbf{E}}$

$\Delta_B$ Laplaciano de Bochner de signo positivo, $(\nabla)_h^*\nabla$

$\Delta_H$ Laplaciano de Hodge

$\Delta_{p,g}$ $p$-laplaciano asociado a la métrica $g$

$S^m_{1,0}$ Clase de símbolos de Hörmander de orden $m$ y tipo $(1,0)$

$S^m_{\mathrm{cl}}$ Clase de símbolos clásicos de orden $m$

$\Psi^m(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ Operadores pseudodiferenciales de orden $m$ de secciones de $\mathbf{E}$ en secciones de $\mathbf{F}$

$\mathrm{WF}(u)$ Frente de onda de la distribución $u$

$S^{-\infty}(U\times\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$ Símbolos regularizantes euclidianos

$\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ Operadores regularizantes propiamente soportados sobre $M$

$\Psi^m_{\mathrm{u},\rho}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ Etapa de radio $\rho$ del cálculo pseudodiferencial uniforme

$\Psi^{-\infty}_{\mathrm{u}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ Operadores uniformemente regularizantes de propagación finita

**Geometría en dimensión infinita**

$X, Y$ Espacios de Banach que actúan como espacios modelo

$DI(u)$ Derivada de Fréchet del funcional $I$ en $u$

$T'M$ Haz cotangente topológico de una variedad de Banach

$dF_p$ Diferencial de un mapeo entre variedades de Banach

$T_p^{\mathrm{kin}}M$ Espacio tangente cinemático de la variedad de Banach $M$

$T_p^{\mathrm{op}}M$ Espacio tangente operacional de la variedad de Banach $M$

$T_pN$ Espacio tangente de la subvariedad de Banach $N$ en $p$

$\mathrm{GL}(E)$ Grupo de operadores lineales continuos e invertibles del espacio de Banach $E$

$\flat_{\mathbf{g}}$, $\sharp_{\mathbf{g}}$ Morfismos musicales inducidos por una métrica riemanniana fuerte

$F_x$, $F_x^*$ Norma Finsler en $T_xM$ y su norma dual en el dual topológico $T_x'M$

$d_F$ Distancia de longitud inducida por una estructura Banach–Finsler

$W^{r,p}(M,N)$ Variedad Sobolev de mapeos de $M$ en $N$

$\mathcal{A}^r(\mathbf{P})$ Espacio afín Sobolev de conexiones en un haz principal $\mathbf{P}$

$\mathcal{G}^{r+1}(\mathbf{P})$ Grupo gauge completado en regularidad Sobolev

$\mathrm{Diff}^s(M)$ Completación Sobolev del grupo de difeomorfismos

$H^\infty = \bigcap_{s \geq s_0} H^s$ Núcleo suave de una escala de Hilbert

$\varprojlim H^s$ Límite proyectivo de una escala de Hilbert

$\mathrm{Met}^r(M)$ Espacio abierto de métricas riemannianas de regularidad Sobolev $r$

$C^j_b(M, \mathbf{E})$ Secciones de clase $C^j$ cuyas derivadas covariantes hasta orden $j$ son acotadas

$C^{\infty,r}_b(M, N)$ Mapeos suaves cuyas derivadas covariantes de $df$ hasta orden $r-1$ son acotadas

$\mathrm{Met}(I, B_k)(M)$ Métricas completas con radio de inyectividad positivo y curvatura acotada hasta orden $k$

**Métodos variacionales**

$I$ Funcional variacional o funcional de energía

$DI(u) = 0$ Condición de punto crítico del funcional $I$

$J^{-1}(c)$ Conjunto de nivel $c$ del funcional $J$

$\mathcal{N}$ Variedad de Nehari asociada a un funcional

$I \restriction_{\mathcal{N}}$ Restricción del funcional $I$ a la variedad de Nehari

$T_u\mathcal{N}$ Espacio tangente de la variedad de Nehari en $u$

$\lambda$ Multiplicador de Lagrange, cuando aparece en una restricción variacional

$K_c$ Conjunto de puntos críticos de nivel $c$

$I^{\leq a}$ Subnivel cerrado $\{u \mid I(u) \leq a\}$

$I^{<a}$ Subnivel abierto $\{u \mid I(u) < a\}$

$(PS)_c$ Condición de Palais–Smale en el nivel $c$

$\Phi_t$ Mapeo de tiempo $t$ de un flujo de deformación

# Índice

**Introducción** **XXIII**

**I Variedades riemannianas** **1**

**Preámbulo de la Parte I** **3**

**1 Nociones fundamentales de variedades suaves** **5**
1.1 Del cálculo a la geometría diferencial . . . . . 5
1.1.1 Derivadas parciales de orden superior . . . . . 8
1.2 Variedades suaves . . . . . 17
1.3 Mapeos suaves . . . . . 25
1.4 El haz tangente . . . . . 28
1.5 Inmersiones, submersiones y encajes . . . . . 40
1.6 Subvariedades . . . . . 44
1.7 Haces vectoriales y el haz cotangente . . . . . 50
1.8 Curvas integrales y flujos . . . . . 80
1.9 Grupos de Lie y acciones suaves . . . . . 95
1.10 Campos tensoriales y formas diferenciales . . . . . 106

**2 Variedades riemannianas** **127**
2.1 Métricas riemannianas . . . . . 128
2.2 Trazas de tensores . . . . . 132
2.3 Producto fibrado de campos tensoriales . . . . . 133
2.4 Conexiones . . . . . 138
2.5 Haces hermitianos y conjugación de conexiones . . . . . 171
2.6 Haces principales y conexiones principales . . . . . 173
2.6.1 Transporte paralelo y holonomía . . . . . 184
2.7 Derivada covariante a lo largo de curvas y transporte paralelo . . . . . 188
2.7.1 Descomposición horizontal–vertical inducida por una conexión . . . . . 203
2.8 Geodésicas . . . . . 207
2.8.1 El mapeo exponencial . . . . . 214
2.8.2 Coordenadas normales geodésicas . . . . . 217

2.9 La función distancia riemanniana . . . 220
2.10 Curvatura . . . 227
2.11 Subvariedades riemannianas . . . 235
2.12 Vecindades tubulares y coordenadas de Fermi . . . 238
2.12.1 Coordenadas de Fermi . . . 241
2.13 Campos de Jacobi y teoría de comparación . . . 243
2.14 Integración en variedades riemannianas . . . 253
2.15 La medida de Riemann–Lebesgue . . . 264
2.16 Gradiente, divergencia y laplaciano de Laplace–Beltrami . . . 272
2.17 Geometría de Clifford y estructuras spinoriales . . . 276
2.17.1 Álgebras de Clifford . . . 277
2.17.2 Los grupos Pin($n$) y Spin($n$) . . . 278
2.17.3 Módulos complejos de espinores . . . 281
2.17.4 El haz de marcos ortonormales y las estructuras spinoriales . . . 282
2.17.5 La conexión spinorial . . . 284
2.17.6 Módulos y conexiones de Clifford . . . 284
2.17.7 Estructuras Spin$^c$ . . . 285

**II Análisis no lineal en espacios euclidianos 287**

**Preámbulo de la Parte II 289**

**3 Espacios de Sobolev en abiertos de $\mathbb{R}^n$ 291**
3.1 Derivadas débiles . . . 292
3.2 Espacios de Sobolev . . . 295
3.3 Encajes de Sobolev . . . 298
3.3.1 Densidad y extensión por cero . . . 310
3.4 El Teorema de Rellich-Kondrashov en espacios euclidianos . . . 315
3.4.1 Encajes globales y localización en $\mathbb{R}^n$ . . . 318
3.5 Encajes de Sobolev en espacios de Hölder . . . 320
3.6 Encajes localizados en el semiespacio . . . 330
3.6.1 Resumen de los dominios y los encajes . . . 337
3.7 El teorema de traza en el semiespacio . . . 337

**4 Distribuciones y análisis de Fourier 343**
4.1 El espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . 345
4.2 Límites proyectivos . . . 347
4.3 La topología de $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . 354
4.4 Espacios LF . . . 362
4.5 Distribuciones: el dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . 372
4.6 Orden de una distribución . . . 377
4.7 Derivadas distribucionales . . . 383
4.8 Funciones de rápido decrecimiento y la clase de Schwartz . . . 394
4.9 Distribuciones temperadas . . . 397

4.10 Convolución y regularización . . . 398
4.11 La transformada de Fourier . . . 400
4.11.1 La transformada en $L^2$ y en la escala $L^p$ . . . 404
4.11.2 Fourier en distribuciones temperadas . . . 405
4.12 Descomposición diádica de Littlewood–Paley . . . 406

**5 Espacios de interpolación 409**
5.1 Pares compatibles de espacios de Banach . . . 409
5.2 El método real: el funcional $K$ . . . 410
5.3 Interpolación de operadores . . . 413
5.4 El método $J$ . . . 415
5.5 Reiteración . . . 417
5.6 Dualidad para la interpolación real . . . 423
5.7 El método complejo . . . 424
5.7.1 Traslaciones, regularización y estimaciones de frontera . . . 431
5.7.2 Sumas de espacios y funciones con valores en Banach . . . 434
5.7.3 Reiteración compleja . . . 436
5.8 Espacios de Lorentz como espacios de interpolación . . . 443

**6 Regularidad intermedia 447**
6.1 Potenciales de Bessel y los espacios $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ . . . 448
6.1.1 La escala hilbertiana euclidiana y la localización . . . 450
6.1.2 Multiplicación, regularización y conmutadores . . . 452
6.2 Espacios de Slobodeckij . . . 457
6.2.1 La identidad de interpolación de Slobodeckij . . . 460
6.3 Los espacios de Besov y de Triebel–Lizorkin . . . 463
6.3.1 Las herramientas de multiplicadores . . . 463
6.3.2 Identificaciones fundamentales e interpolación . . . 471
6.4 Multiplicadores, cambios de coordenadas y localización . . . 479
6.5 Abiertos, operadores de extensión y comparación de las escalas . . . 488
6.6 Encajes de Sobolev de orden real . . . 495
6.7 Trazas de orden fraccionario . . . 501

**III Análisis no lineal en variedades riemannianas 507**

**Preámbulo de la Parte III 509**

**7 Espacios de Sobolev en variedades riemannianas 511**
7.1 Definición y propiedades básicas . . . 514
7.2 La desigualdad de Kato . . . 526
7.3 Encajes de Sobolev en variedades riemannianas compactas . . . 533
7.4 El Teorema de Rellich-Kondrashov en variedades riemannianas compactas . . . 536

**8 Operadores diferenciales parciales sobre haces vectoriales 541**
8.1 Motivación y propiedades básicas . . . 541
8.2 Adjuntos hermitianos formales . . . 580
8.3 Operadores asociados a conexiones de Clifford . . . 601
8.3.1 Fórmulas de Bochner y Lichnerowicz . . . 603
8.3.2 Operadores torcidos y Spin$^c$ . . . 604

**9 Espacios de Sobolev en haces vectoriales: enfoque intrínseco 607**
9.1 Derivadas covariantes débiles y espacios de Sobolev en haces vectoriales . . . 607
9.1.1 Propiedades fundamentales: convexidad uniforme, reflexividad y separabilidad . . . 614
9.1.2 Compatibilidad con restricciones y expresiones locales de las derivadas covariantes en haces vectoriales . . . 629
9.1.3 La fórmula de integración por partes para haces vectoriales y el adjunto formal . . . 632
9.1.4 Equivalencia de normas: una aplicación de la fórmula de integración por partes en haces vectoriales . . . 649
9.1.5 Caracterización local de los espacios de Sobolev en haces vectoriales . . . 664
9.1.6 El teorema de aproximación de Meyers–Serrin en haces vectoriales . . . 677
9.2 Encajes de Sobolev y el teorema de Rellich–Kondrashov para haces vectoriales . . . 682
9.2.1 Encajes en espacios de secciones de Hölder . . . 686
9.2.2 Independencia de los espacios de Sobolev en el caso compacto . . . 699
9.3 Interpolación: desigualdad de Gagliardo–Nirenberg . . . 702
9.4 Espacios de Sobolev en variedades con frontera . . . 705
9.4.1 El operador de traza . . . 716
9.4.2 Espacios de Sobolev–Slobodeckij intrínsecos y traza exacta . . . 718
9.4.3 Encajes para secciones en variedades compactas con frontera . . . 731
9.5 La desigualdad débil de Kato . . . 741
9.6 La desigualdad de Poincaré, caso compacto . . . 749

**10 Distribuciones en haces vectoriales 757**
10.1 El espacio de secciones de prueba . . . 757
10.2 Distribuciones en haces vectoriales . . . 768
10.2.1 Operadores diferenciales parciales y distribuciones . . . 775
10.2.2 Propiedades locales . . . 787
10.2.3 Productos externos y secciones dependientes de parámetros . . . 799
10.2.4 Tensorización de espacios de prueba . . . 805
10.2.5 El teorema del núcleo de Schwartz . . . 812

**11 Símbolo principal y operadores elípticos 815**
11.1 El símbolo principal . . . 815
11.1.1 Cálculo simbólico elemental . . . 818
11.2 Operadores elípticos . . . 820
11.3 Estimaciones elípticas en haces vectoriales . . . 821
11.3.1 Una desigualdad de interpolación . . . 821
11.3.2 Sistemas con coeficientes constantes . . . 822

11.3.3 Congelación de coeficientes . . . 824
11.3.4 Globalización en una variedad cerrada . . . 828
11.4 Regularidad elíptica . . . 829
11.4.1 Realizaciones mínima y maximal en una variedad cerrada . . . 833
11.5 Potencias del laplaciano de Bochner . . . 835

**12 Espacios de Sobolev fraccionarios en haces vectoriales y el núcleo del calor: enfoque intrínseco 837**
12.1 El laplaciano de conexión en $L^2(M,\mathbf{E})$ . . . 838
12.1.1 La realización determinada por la forma de energía . . . 838
12.1.2 El semigrupo espectral y el semigrupo escalar . . . 844
12.1.3 La desigualdad de Kato–Simon . . . 846
12.2 El núcleo del calor covariante . . . 849
12.2.1 Regularización y continuidad de las evaluaciones . . . 849
12.3 Extensión del semigrupo a $L^p(M,\mathbf{E})$ . . . 855
12.3.1 El semigrupo escalar en la escala $L^p$ . . . 855
12.3.2 El semigrupo covariante en $L^p(M,\mathbf{E})$ . . . 857
12.4 Potenciales de Bessel y espacios de orden real . . . 860
12.4.1 Potenciales de Bessel . . . 860
12.4.2 El núcleo de Bessel . . . 862
12.4.3 Definición de la escala fraccionaria . . . 865
12.4.4 Caracterización espectral en $L^2$ . . . 868

**13 Espacios de Sobolev en variedades de geometría acotada 875**
13.1 Variedades riemannianas de geometría acotada . . . 876
13.2 Regularidad uniforme como formulación coordenada de la geometría acotada . . . 909
13.3 Espacios de Sobolev fraccionarios, de Besov y de Triebel–Lizorkin en variedades riemannianas de geometría acotada . . . 923
13.3.1 Comparación con las definiciones intrínsecas . . . 931

**14 Teoremas de traza en geometría acotada 977**
14.1 El modelo euclidiano y sus propiedades de compatibilidad . . . 977
14.2 Pares de geometría acotada y estimaciones uniformes de Fermi . . . 980
14.3 Traza sobre una subvariedad interior . . . 992
14.4 Variedades con frontera de geometría acotada . . . 996
14.5 Versión para haces vectoriales de geometría acotada . . . 1018
14.6 Encajes de Sobolev en geometría acotada . . . 1035

**IV Teoría del índice 1047**

**Preámbulo de la Parte IV 1049**

**15 Operadores pseudodiferenciales 1051**
15.1 Del inverso de Fourier a las clases de símbolos . . . 1052
15.1.1 Convenciones y primer modelo . . . 1052

15.1.2 Símbolos de tipo $(1,0)$ . . . 1053
15.1.3 Símbolos clásicos y expansiones asintóticas . . . 1054
15.1.4 Integrales oscilatorias y cuantización . . . 1057
15.1.5 Amplitudes y reducción a símbolos . . . 1059
15.1.6 Ejemplos fundamentales . . . 1061
15.2 Núcleos, soporte propio y cálculo simbólico . . . 1063
15.2.1 El núcleo y la diagonal . . . 1063
15.2.2 Composición . . . 1066
15.2.3 Transpuesto y adjunto formal . . . 1068
15.2.4 Cambios de coordenadas . . . 1070
15.3 Operadores pseudodiferenciales sobre variedades . . . 1071
15.3.1 Definición local e independencia de las elecciones . . . 1071
15.3.2 El símbolo principal global . . . 1072
15.3.3 El conormal de la diagonal . . . 1074
15.4 Cuantización riemanniana mediante la exponencial . . . 1078
15.5 Inversión elíptica y análisis microlocal . . . 1091
15.5.1 Criterios de elipticidad . . . 1091
15.5.2 Construcción bilateral de una parametrix . . . 1093
15.5.3 Frente de onda en un abierto euclidiano . . . 1096
15.5.4 Invariancia y definición global . . . 1098
15.5.5 Acción pseudodiferencial y regularidad microlocal . . . 1099
15.5.6 Frente de onda del núcleo . . . 1103
15.6 Acción en Sobolev, cálculo uniforme y teoría de Fredholm . . . 1104
15.6.1 La estimación de Calderón–Vaillancourt . . . 1105
15.6.2 Acción sobre las escalas de Sobolev . . . 1106
15.6.3 Cálculo pseudodiferencial uniforme de propagación finita . . . 1111
15.6.4 Variedades cerradas: compacidad y clases de Schatten . . . 1127
15.6.5 Operadores elípticos y Fredholm . . . 1132
15.6.6 Estabilidad analítica del índice . . . 1133
15.7 Potencias complejas, calor e índice analítico . . . 1135
15.7.1 Corte espectral y cálculo mínimo con parámetro . . . 1137
15.7.2 Construcción de las potencias complejas . . . 1148
15.7.3 Coincidencia con el cálculo espectral . . . 1155
15.7.4 Bessel, el laplaciano fraccionario y el calor . . . 1157
15.7.5 Del calor al índice . . . 1160

**16 Operadores de Fredholm e índice analítico 1163**
16.1 Operadores de Fredholm y parametrices módulo compactos . . . 1163
16.2 Estabilidad y cálculo del índice . . . 1167
16.3 Familias continuas y estabilización finita . . . 1169
16.4 Operadores elípticos sobre variedades cerradas . . . 1171
16.5 Dependencia respecto del símbolo principal . . . 1173

**17 K-teoría de haces vectoriales y clase del símbolo 1175**
17.1 Completación de Grothendieck . . . 1176
17.1.1 Producto, pullback y homotopía . . . 1178
17.2 Grupos reducidos, pares y soporte compacto . . . 1179
17.2.1 Suspensión y la sucesión exacta . . . 1183
17.3 Producto externo . . . 1184
17.4 La clase de un símbolo elíptico . . . 1184
17.5 Operaciones con clases de símbolos . . . 1187

**18 Periodicidad de Bott, isomorfismo de Thom e índice euclidiano 1193**
18.1 La clase de Bott y las convenciones de orientación . . . 1194
18.2 La clase de Thom . . . 1196
18.3 Encajes y extensión por cero . . . 1198
18.4 Operadores euclidianos iguales a la identidad en el infinito . . . 1200
18.5 Dos operadores modelo . . . 1203
18.5.1 El operador localizado que representa a $b$ . . . 1203
18.5.2 El oscilador y la clase de Thom . . . 1204
18.6 Producto de operadores e índice multiplicativo . . . 1207
18.7 El teorema del índice en el espacio euclidiano . . . 1214
18.7.1 Una extensión: el índice de familias . . . 1215
18.8 Compatibilidad con encajes en variedades cerradas . . . 1218

**19 El teorema del índice en variedades cerradas 1221**
19.1 El índice topológico . . . 1222
19.2 Excisión y producto del índice analítico . . . 1224
19.3 El operador normal de Bott . . . 1226
19.4 El teorema de Atiyah–Singer . . . 1242
19.5 Forma cohomológica . . . 1243
19.6 Tres operadores geométricos . . . 1245
19.6.1 El operador de Euler–de Rham . . . 1245
19.6.2 El operador de Dolbeault . . . 1247
19.6.3 El operador de Dirac torcido . . . 1248

**V Ecuaciones de evolución geométrica 1253**

**Preámbulo de la Parte V 1255**

**20 Ecuaciones parabólicas geométricas en variedades cerradas 1257**
20.1 Estimaciones de producto y espacios de energía . . . 1258
20.2 Sistemas lineales fuertemente parabólicos . . . 1263
20.3 Ecuaciones cuasilineales . . . 1271
20.4 Principios del máximo . . . 1279

**21 Flujo de Ricci** **1285**
21.1 Variaciones de la métrica y del funcional de Einstein–Hilbert . . . 1286
21.2 Invariancia por difeomorfismos y degeneración del símbolo . . . 1289
21.3 El sistema de Ricci–DeTurck . . . 1290
21.4 Ecuaciones de evolución . . . 1297
21.5 Principio del máximo y estimaciones a priori . . . 1303
21.6 Reescalamientos y flujo normalizado . . . 1309
21.7 Métricas de Einstein, superficies y solitones . . . 1311

**22 Compactación, singularidades y teoría de Perelman** **1315**
22.1 Convergencia suave apuntada . . . 1316
22.2 Reescalamientos y modelos de singularidad . . . 1325
22.3 Calor con métrica dependiente del tiempo . . . 1326
22.4 El funcional $\mathcal{F}$ . . . 1327
22.5 La entropía $\mathcal{W}$ y la cantidad $\mu$ . . . 1329
22.6 Longitud, distancia y volumen reducidos . . . 1335
22.7 El teorema de no colapso . . . 1352
22.8 Pinzamiento de Hamilton–Ivey y $\kappa$–soluciones . . . 1356
22.9 Teoremas estructurales de cirugía y conclusión topológica . . . 1358

**VI Geometría en dimensión infinita** **1365**

**Preámbulo de la Parte VI** **1367**

**23 Cálculo diferencial en espacios de Banach** **1369**
23.1 Diferenciabilidad de Fréchet . . . 1369
23.2 Derivadas de orden superior y fórmula de Taylor . . . 1385
23.2.1 Ejercicios . . . 1393
23.3 Teoremas fundamentales del cálculo diferencial . . . 1393
23.4 Multiplicadores de Lagrange . . . 1401
23.4.1 Ejercicios . . . 1402

**24 Variedades de Banach** **1405**
24.1 Variedades de Banach . . . 1406
24.2 Complementabilidad y descomposiciones lineales . . . 1416
24.3 Subvariedades de Banach . . . 1419
24.4 Ejemplos fundamentales de subvariedades de Banach . . . 1421
24.5 Inmersiones, submersiones y encajes . . . 1423
24.6 Rango constante y teoremas de la preimagen . . . 1428
24.7 Conjuntos de nivel regulares . . . 1433
24.8 Funciones flan y particiones suaves de la unidad . . . 1436
24.8.1 La construcción global en una variedad de Banach . . . 1438
24.8.2 Criterios y ejemplos de espacios modelo . . . 1443
24.8.3 Consecuencias geométricas . . . 1447

**25 Haces vectoriales, conexiones y flujos en variedades de Banach** **1449**
25.1 Haces vectoriales de Banach . . . 1449
25.2 Haces tangente y cotangente . . . 1459
25.3 Campos vectoriales y curvas integrales . . . 1463
25.4 Flujos en variedades de Banach . . . 1465
25.5 Conexiones lineales en haces de Banach . . . 1468
25.6 Derivada a lo largo de curvas y transporte paralelo . . . 1472

**26 Geometría de Hilbert y estructuras de Finsler** **1477**
26.1 Variedades de Hilbert y métricas fuertes o débiles . . . 1477
26.2 Conexión, geodésicas y variación en el caso fuerte . . . 1480
26.3 Estructuras de Banach–Finsler . . . 1490
26.4 Finsler clásico en dimensión finita . . . 1495
26.4.1 Funcionales de Minkowski y tensores verticales . . . 1495
26.4.2 Spray, conexión no lineal y conexión de Chern . . . 1497
26.4.3 Primera variación y distancia dirigida . . . 1502
26.5 Resultados globales y fronteras entre teorías . . . 1507

**27 Geometría uniforme y espacios funcionales geométricos** **1511**
27.1 Control uniforme de la variedad base: regularidad uniforme y geometría acotada . . . 1512
27.2 Espacios uniformes y uniformidades de Eichhorn . . . 1512
27.2.1 Estructuras uniformes . . . 1512
27.2.2 Las uniformidades de Eichhorn . . . 1517
27.3 Variedades Sobolev de mapeos . . . 1525
27.4 Espacios de métricas, conexiones y teoría calibre . . . 1531
27.4.1 Métricas riemannianas . . . 1532
27.4.2 Conexiones y transformaciones calibre . . . 1537
27.5 Grupos de difeomorfismos, escalas de Hilbert e ILH . . . 1546
27.5.1 El grupo Sobolev a regularidad fija . . . 1547
27.5.2 Escalas de Hilbert y torres ILH . . . 1550

**28 Aplicaciones geométricas en dimensión infinita** **1555**
28.1 Mapeos armónicos . . . 1556
28.2 Yang–Mills y reducción calibre . . . 1560
28.3 Fluidos incompresibles como geodésicas . . . 1566
Pérdida de regularidad y elección de las variables . . . 1578

## VII Métodos variacionales en variedades riemannianas 1581

**Preámbulo de la Parte VII** **1583**

**29 Formulación variacional de problemas elípticos** **1585**
29.1 Funciones de Carathéodory y operadores de superposición . . . 1586
29.2 Soluciones clásicas, fuertes y débiles . . . 1591

29.3 Funcionales de energía y puntos críticos . . . 1592

**30 El método directo del cálculo de variaciones 1597**
30.1 Semicontinuidad inferior . . . 1597
30.2 Resolución de un problema sublineal . . . 1601
30.3 Ejercicios . . . 1603

**31 Palais–Smale, pseudogradientes y deformaciones 1609**
31.1 Subniveles, puntos críticos y condición de Palais–Smale . . . 1609
31.2 Construcción de pseudogradientes en espacios de Banach . . . 1611
31.3 El lema de deformación en un espacio de Banach . . . 1612
31.3.1 Un lema cuantitativo sin Palais–Smale . . . 1613
31.3.2 El lema general de Struwe . . . 1614
31.3.3 Relación entre los dos lemas de deformación . . . 1618
31.4 La formulación intrínseca Banach–Finsler . . . 1619
31.5 Motivación y teorema del paso de la montaña . . . 1624
31.5.1 Caminos, barreras y nivel minimax . . . 1624
31.5.2 El teorema abstracto y su demostración . . . 1625
31.5.3 Modelo: el $p$-laplaciano de Beltrami con potencia pura . . . 1627

**32 Restricciones variacionales y método de Nehari 1631**
32.1 Método de Nehari . . . 1631
32.2 La variedad de Nehari en un caso modelo . . . 1634
32.3 Reducción radial de Szulkin y Weth . . . 1635
32.4 Paso de la montaña y Nehari en el modelo de potencia . . . 1638
32.4.1 Comparación conceptual . . . 1640
32.4.2 Coincidencia exacta de los niveles . . . 1641
32.5 Una ecuación quasilineal en un haz vectorial . . . 1643
32.5.1 Estimaciones preliminares . . . 1645
32.5.2 El funcional de energía . . . 1647
32.5.3 Geometría radial y variedad de Nehari . . . 1650
32.5.4 Reducción radial y existencia del minimizador . . . 1654
32.5.5 Ejemplos de operadores comprendidos por el resultado . . . 1657
32.6 Ejercicios . . . 1658

**Apéndices 1659**

**A Topología 1661**
A.1 Espacios topológicos . . . 1661
A.2 Espacios cubrientes . . . 1663
A.3 Haces complejos y equivalencia estable . . . 1664
A.4 K-teoría relativa y soporte compacto . . . 1665
A.5 Periodicidad de Bott y orientación compleja . . . 1668
A.6 Morfismos directos en K-teoría . . . 1670

A.7 Clases características y comparación de Thom . . . 1671
A.8 Cohomología de de Rham, estructuras spin y clase de Euler . . . 1673

**B Análisis matemático 1677**
B.1 Análisis real y espacios métricos . . . 1677
B.2 Espacios normados . . . 1682
B.2.1 Operadores lineales continuos . . . 1683
B.2.2 Principios fundamentales de la teoría de operadores . . . 1685
B.2.3 El teorema de Hahn–Banach y la dualidad . . . 1688
B.2.4 Operadores adjuntos y compactos en espacios de Banach . . . 1691
B.3 Espacios de Hilbert . . . 1696
B.3.1 Ortogonalidad y proyecciones . . . 1697
B.3.2 Sistemas ortonormales y representación de Riesz . . . 1699
B.3.3 Operadores adjuntos en espacios de Hilbert . . . 1700
B.3.4 Operadores compactos autoadjuntos . . . 1702
B.3.5 Regularidad débil y fuerte de mapeos con valores en un espacio de Hilbert . . . 1704
B.4 Formas cerradas, cálculo espectral y semigrupos de contracción . . . 1707
B.4.1 Formas cerradas y realización de Friedrichs . . . 1707
B.4.2 Cálculo espectral para operadores autoadjuntos . . . 1710
B.4.3 Semigrupos fuertemente continuos en espacios de Banach . . . 1712
B.4.4 Potenciales de Bessel asociados a un semigrupo . . . 1717
B.5 Espacios de medida . . . 1723
B.5.1 Medidas con signo . . . 1726
B.6 Integración de Lebesgue y de Bochner . . . 1729
B.6.1 La integral de Riemann con valores en un espacio de Banach . . . 1729
B.6.2 La integral de Lebesgue . . . 1732
B.6.3 La integral de Bochner . . . 1737
B.7 Los espacios $L^p$ . . . 1741
B.8 Desigualdades integrales y herramientas de análisis armónico . . . 1751
B.9 Molificadores euclidianos . . . 1766
B.10 Espacios vectoriales topológicos . . . 1768
B.10.1 Espacios de Fréchet . . . 1784
B.10.2 Topologías iniciales y finales . . . 1785
B.11 Topologías débiles . . . 1787
B.11.1 Topologías iniciales definidas por operadores lineales . . . 1787
B.11.2 Topologías débiles asociadas a dualidades . . . 1788
B.11.3 Topología débil-$*$ y convergencia puntual . . . 1793
B.11.4 Compacidad débil y reflexividad . . . 1794
B.12 Productos tensoriales topológicos y espacios nucleares . . . 1797
B.12.1 Las topologías proyectiva, inyectiva e inductiva . . . 1797
B.12.2 Espacios nucleares . . . 1802
B.13 Ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach . . . 1811

**C Álgebra lineal** **1817**
C.1 Formas bilineales y matrices . . . . . 1817

**D Convenio de suma de Einstein** **1823**
D.1 Convenio de suma de Einstein . . . . . 1823

**Glosario** **1825**

**Créditos de imágenes** **1831**

**Bibliografía** **1833**

# Introducción

Al comenzar a estudiar una ecuación diferencial sobre una variedad ocurre algo familiar: elegimos una carta y, durante un momento, el problema se convierte en uno definido sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. Allí podemos derivar, integrar y utilizar muchas de las herramientas del análisis euclidiano. La dificultad aparece cuando queremos salir de esa carta. Entonces debemos saber qué parte del cálculo dependía de las coordenadas, qué cantidades tienen un significado intrínseco y cómo reunir las estimaciones obtenidas localmente para deducir una conclusión sobre toda la variedad.

El análisis global estudia precisamente este paso de lo local a lo global. Las coordenadas no desaparecen: siguen siendo una herramienta indispensable para calcular. Lo importante es entender qué información sobrevive al cambiar de carta y cómo la geometría modifica los argumentos que ya conocemos en $\mathbb{R}^n$. Una conexión nos permite derivar secciones de un haz; una métrica permite medirlas e integrarlas; los espacios de Sobolev hacen posible trabajar con soluciones que no son suaves; la teoría espectral y el calor relacionan operadores locales con información global; los métodos variacionales convierten muchas ecuaciones en problemas de energía sobre espacios de dimensión infinita.

Éste es el punto de vista que guía el libro. Más que presentar por separado geometría diferencial, análisis funcional y ecuaciones en derivadas parciales, queremos ver cómo estas teorías se encuentran cuando se estudia un problema concreto sobre una variedad. Por ello, a lo largo del texto volveremos continuamente al mismo esquema: formular primero el objeto de manera intrínseca, llevarlo después a coordenadas cuando sea necesario calcular y, finalmente, comprobar qué hipótesis permiten regresar de las estimaciones locales a una afirmación global.

Buena parte del libro nació del trabajo docente desarrollado en los cursos del Posgrado en Ciencias Matemáticas *Análisis no lineal en variedades riemannianas I y II* y *Métodos variacionales en variedades riemannianas I y II*. Estos cursos estuvieron a cargo de la Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero, quien los impartió conjuntamente, en la parte dedicada al análisis no lineal en variedades, con el M. en C. Carlos Daniel Velázquez Mendoza y, en la parte variacional, con el Dr. Romulo Diaz Carlos.

En el aula, muchos argumentos pueden completarse con una explicación en el pizarrón, un ejemplo o una referencia a algo visto unas semanas antes. Al convertir ese material en un libro fue necesario dejar esas conexiones por escrito. De ahí proviene el interés por señalar con cuidado las hipótesis de cada resultado, recuperar los pasos intermedios de las demostraciones y mostrar de manera explícita dónde entra la geometría en un argumento que, a primera vista, podría parecer puramente analítico.

**Nota al lector.** Este manuscrito es un trabajo en curso y aún puede ser objeto de correcciones menores y ajustes editoriales. Los comentarios, sugerencias y correcciones serán muy bienvenidos.

## Del cálculo local a la geometría intrínseca

El punto de partida es el cálculo diferencial. Newton y Leibniz desarrollaron, con lenguajes distintos, herramientas para estudiar velocidades, tangentes, áreas y acumulaciones. Con el tiempo, esas ideas fueron adquiriendo una formulación cada vez más precisa: primero en una variable, después en varias variables y finalmente en espacios más generales. La derivada dejó de verse sólo como una regla de cálculo y pasó a entenderse como la aproximación lineal que describe, en primer orden, el comportamiento de un objeto no lineal.

La geometría diferencial obligó después a responder una pregunta nueva: ¿qué significa derivar cuando el espacio sobre el que trabajamos es curvo? Gauss mostró que la curvatura de una superficie puede reconocerse a partir de mediciones hechas dentro de la propia superficie, sin recurrir al espacio ambiente. Riemann llevó esta idea a dimensión arbitraria y propuso describir la geometría mediante una forma de medir infinitesimalmente longitudes y ángulos. Más tarde, Poincaré puso en primer plano otra dificultad: conocer bien cada región pequeña de un espacio no basta necesariamente para comprender su forma global. Las obras de Gauss, Riemann y Poincaré marcan así el paso del cálculo sobre figuras encajadas a una geometría intrínseca y, después, al estudio de propiedades verdaderamente globales [65, 121, 118].


Isaac Newton
(1642–1727)


G. W. Leibniz
(1646–1716)


C. F. Gauss
(1777–1855)


B. Riemann
(1826–1866)


H. Poincaré
(1854–1912)

**Figura 1.** Del cálculo infinitesimal a la geometría global. Newton y Leibniz establecieron los lenguajes fundamentales del cálculo; Gauss descubrió el carácter intrínseco de la curvatura de superficies; Riemann extendió la geometría métrica a dimensión arbitraria; Poincaré convirtió la organización global de los espacios en un problema matemático central.

### Gauss, Riemann y la mirada intrínseca

En las *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1828, Gauss estudió la geometría de una superficie a partir de su primera forma fundamental y estableció que la curvatura gaussiana es intrínseca. La lección de habilitación de Riemann de 1854, publicada póstumamente en 1868, cambió la escala del problema: una métrica podía pensarse en espacios de cualquier dimensión, y la curvatura pasaba a ser una propiedad del propio espacio. El lenguaje tensorial y las conexiones desarrollados después por Christoffel, Ricci, Levi–Civita y Cartan dieron forma operativa a esa visión. En este libro esa historia reaparece de manera concreta: primero se construyen los espacios tangentes y los tensores; después se introducen la métrica, la conexión, las geodésicas y la curvatura; finalmente esas estructuras se convierten en coeficientes, operadores y energías.

Esta evolución histórica también explica el orden que seguiremos. La derivada covariante, el laplaciano, las normas de Sobolev y el símbolo principal se introducirán, siempre que sea posible, como objetos intrínsecos. Las coordenadas aparecerán cuando hagan falta para calcular, comparar con un modelo euclidiano o demostrar una estimación. No buscamos evitar el cálculo local, sino usarlo sin confundir la expresión coordenada con el objeto geométrico que representa.

## La aparición de los espacios funcionales

La geometría no es la única dificultad. Cuando la incógnita de una ecuación es una función o una sección, el conjunto de posibles soluciones ya no vive en un espacio de dimensión finita. Para estudiar una sucesión minimizante necesitamos saber en qué sentido puede converger; para hablar de derivadas débiles necesitamos un espacio que registre al mismo tiempo tamaño y regularidad; para aplicar métodos variacionales necesitamos una estructura en la que tengan sentido continuidad, compacidad y diferenciación. Éste fue uno de los cambios fundamentales del análisis durante el siglo XX. Fréchet introdujo en 1906 una teoría sistemática de espacios métricos y del cálculo funcional [62], y Banach organizó en 1932 una parte decisiva del análisis lineal alrededor de los espacios normados completos [18]. Las funciones podían estudiarse entonces como puntos de un espacio que, aunque fuera infinito-dimensional, poseía una geometría y una topología adecuadas.

Sobolev mostró que una función puede tener derivadas en un sentido compatible con la integración por partes aun cuando no sea diferenciable clásicamente, y sus teoremas de encaje relacionaron el número de derivadas integrables con la regularidad de la función [136]. Poco después, Laurent Schwartz desarrolló la teoría de distribuciones, que permite tratar rigurosamente objetos singulares como la delta de Dirac y extender la diferenciación a una clase mucho más amplia [131]. A partir de estas ideas se volvió natural comenzar con soluciones débiles, obtener estimaciones y preguntar después si la propia ecuación obliga a recuperar regularidad.

### Sobolev y Schwartz: regularidad sin suavidad clásica

El cambio conceptual no consistió en abandonar las derivadas, sino en reconocerlas a través de sus efectos integrales. En un espacio de Sobolev, la derivada se identifica mediante una fórmula de integración por partes; en la teoría de distribuciones, esa misma fórmula se convierte en la definición de derivación. Esta perspectiva permite empezar con datos poco regulares, obtener estimaciones a priori y demostrar después que la solución posee más regularidad de la que parecía disponible. La ruta que seguiremos reproduce este aprendizaje: derivadas débiles, espacios de Sobolev, distribuciones, Fourier, interpolación, regularidad fraccionaria y, más adelante, sus versiones geométricas.

## Qué hace global al análisis global

En este contexto, el adjetivo *global* no quiere decir simplemente que la variedad sea grande o que no pueda cubrirse con una sola carta. Quiere decir que la respuesta puede depender de la manera en que todo el espacio está organizado. Una ecuación elíptica se escribe localmente, pero la dimensión de su núcleo puede contener información topológica; una desigualdad de Sobolev se demuestra en cartas, pero sus constantes pueden depender del volumen, la curvatura o de lo que ocurre en el infinito; una geodésica satisface una ecuación ordinaria, pero que pueda prolongarse para todo tiempo es una propiedad global; el flujo de Ricci es una ecuación parabólica para una métrica, pero el estudio de sus singularidades termina revelando la topología de la variedad.

Esta relación entre análisis y topología se volvió especialmente clara con la teoría de Hodge, la teoría de Morse y el estudio de operadores elípticos. El teorema de Atiyah–Singer llevó después esa relación a una forma mucho más general: el índice analítico de un operador elíptico coincide con un índice construido a partir de su símbolo y de la topología de la variedad [11]. Para llegar a esa afirmación aparecen de manera natural el análisis microlocal, el cálculo pseudodiferencial y la $K$–teoría. En lugar de presentarlos como temas separados, los desarrollaremos como partes de una misma cadena de ideas.

Otra manera de obtener información global consiste en dejar evolucionar la geometría. Hamilton introdujo en

1982 el flujo de Ricci para deformar una métrica de acuerdo con su curvatura de Ricci [75]. DeTurck identificó poco después el calibre que permite reconocer detrás de la invariancia por difeomorfismos un sistema estrictamente parabólico [43]. Dos décadas más tarde, Perelman introdujo cantidades monótonas, el principio de no colapso y nuevas herramientas para estudiar singularidades y completar el programa de geometrización en dimensión tres [114, 116, 115]. Este ejemplo resume bien el espíritu del análisis geométrico: la geometría sugiere una ecuación, el análisis permite controlar sus soluciones y el comportamiento de esas soluciones termina dando información sobre el espacio original.

### Atiyah–Singer: un puente entre dos maneras de contar

Para un operador de Fredholm, el índice es la diferencia entre la dimensión del espacio de soluciones y la dimensión del espacio de obstrucciones. A primera vista es un número analítico: se obtiene resolviendo una ecuación. El teorema de Atiyah–Singer afirma que ese mismo entero puede calcularse a partir de datos topológicos del símbolo principal. El resultado no borra la distancia entre análisis y topología; explica por qué ambos describen el mismo fenómeno desde extremos distintos. Por ello la parte dedicada a la teoría del índice no comienza con la fórmula final: construye primero el cálculo pseudodiferencial, la teoría de Fredholm, la clase del símbolo, la periodicidad de Bott y el isomorfismo de Thom.

## Un panorama contemporáneo

Las preguntas anteriores siguen abiertas en muchas direcciones y hoy forman una parte amplia del análisis global y geométrico. La teoría elíptica y espectral estudia cómo la geometría influye en el núcleo de un operador, su espectro y el calor. En variedades no compactas, la geometría acotada permite recuperar estimaciones locales con constantes que no dependen del punto. Cuando hay frontera aparecen la traza, los términos de borde y la necesidad de controlar con precisión la dirección normal. Los espacios de mapeos, de conexiones y de métricas llevan naturalmente a geometría en dimensión infinita, mientras que los flujos geométricos utilizan evolución, reescalamiento y compactación para estudiar curvatura y singularidades.

Entre los problemas recientes que se relacionan directamente con los temas del libro se encuentran nuevas formas de aproximar por objetos suaves en espacios de Sobolev sobre variedades [33], el desarrollo de escalas de Sobolev, Besov y potenciales de Bessel en variedades con frontera, geometría acotada o singularidades [6], las caracterizaciones de trazas que incorporan la conexión y la curvatura [127], y las formulaciones intrínsecas de la integración por partes y de los espacios de Sobolev en haces vectoriales [41]. Son ejemplos distintos, pero comparten una misma preocupación: precisar qué hipótesis geométricas permiten trasladar al contexto global una herramienta analítica conocida.

Por esta razón, a lo largo del libro no trataremos como intercambiables situaciones que requieren argumentos distintos. La compacidad puede sustituir controles uniformes en el infinito; una frontera introduce trazas y términos de borde; la curvatura de una conexión reaparece cuando se conmutan derivadas; una métrica débil en dimensión infinita no posee automáticamente las propiedades de una métrica fuerte. Distinguir estas hipótesis no es sólo una cuestión de precisión en los enunciados: muchas veces es exactamente lo que permite entender por qué una demostración funciona.

## Cómo está pensada la exposición

El libro está escrito para que, siempre que sea posible, pueda seguirse el recorrido completo de una herramienta desde el caso euclidiano hasta su versión geométrica. Primero se formula el resultado local con las hipótesis que realmente necesita; después se estudia qué ocurre al multiplicar por funciones de corte, cambiar de coordenadas o pasar de una trivialización a otra; finalmente se globaliza. Cuando intervienen haces vectoriales aparecen además las métricas fibradas y las conexiones; cuando la geometría no es compacta hay que controlar las constantes de manera uniforme; cuando existe frontera, las cartas adaptadas y las coordenadas de Fermi permiten separar la dirección normal de las tangenciales.

Por la misma razón, muchas demostraciones se desarrollan con más detalle de lo que sería necesario en un texto concebido únicamente como obra de consulta. Cuando un argumento se localiza, se indican los cortes, los soportes y las normas que se están comparando; si se usa una partición de la unidad, se muestra cómo entran sus términos; si la prueba depende de un resultado externo, se señala en qué punto se utiliza. La idea es que la cadena lógica pueda reconstruirse desde el propio texto y que las frases "el argumento es local" o "se sigue por partición de la unidad" no oculten los pasos donde realmente está el contenido.

Los capítulos largos pueden leerse con distintos niveles de profundidad. Una primera lectura permite seguir la motivación, las definiciones y los resultados principales; una lectura más detenida permite reconstruir las pruebas y localizar dónde intervienen la métrica, la conexión, la compacidad o la frontera. Los ejemplos y ejercicios sirven después para comprobar que las construcciones no son sólo formales. Más que memorizar una lista de teoremas, interesa reconocer unas cuantas ideas que reaparecen a lo largo del libro bajo formas diferentes.

## Organización de la obra

La primera parte reúne el lenguaje geométrico que utilizaremos en todo el libro. Comienza con variedades suaves, mapeos, espacios tangentes, subvariedades, haces vectoriales, flujos, formas diferenciales y grupos y álgebras de Lie. Después aparecen las métricas riemannianas, los haces principales y asociados, las conexiones, el transporte paralelo, las geodésicas, la distancia, la curvatura y la integración. Con estas herramientas se construyen también las álgebras de Clifford, las estructuras Spin y Spin$^c$, los haces de espinores y sus conexiones. Los operadores de Dirac se introducen más adelante, cuando ya disponemos de una teoría general de operadores diferenciales sobre haces. Como referencias generales para esta parte usamos [94, 95, 109, 21].

La segunda parte funciona como laboratorio euclidiano. Allí se construyen los espacios de Sobolev enteros a partir de derivadas débiles, se desarrollan las distribuciones y el análisis de Fourier, y se introduce la interpolación. Los potenciales de Bessel y los espacios de Slobodeckij, Besov y Triebel–Lizorkin permiten después organizar la regularidad de orden real. En este contexto se prueban los resultados de multiplicación, localización, cambio de variables, encaje, compacidad y traza que necesitaremos al pasar a variedades [1, 61, 97, 98, 20, 145, 146, 130].

Con esas herramientas disponibles, la tercera parte pasa al análisis sobre variedades y haces vectoriales. Los espacios de Sobolev se definen mediante derivadas covariantes débiles y se desarrollan los operadores diferenciales y las distribuciones con valores en haces. Allí aparecen la fórmula de integración por partes, las desigualdades de Kato y Poincaré, los encajes, la compacidad y los teoremas de traza. El laplaciano de conexión y el semigrupo del calor proporcionan después una construcción intrínseca de espacios de orden fraccionario. Finalmente, la geometría acotada permite conservar estas herramientas en variedades no compactas con estimaciones uniformes y estudiar trazas sobre subvariedades y fronteras [14, 79, 78, 53, 109, 69, 72, 6].

La cuarta parte está dedicada a la teoría del índice. El cálculo pseudodiferencial permite construir parametrices

para operadores elípticos y estudiar su regularidad; la teoría de Fredholm convierte esa información en un índice analítico; la $K$–teoría organiza las clases de símbolos; y la periodicidad de Bott junto con el isomorfismo de Thom conducen al índice topológico. Estas construcciones se reúnen finalmente en el teorema de Atiyah–Singer para variedades cerradas y en varios de sus ejemplos geométricos fundamentales.

La quinta parte se ocupa de ecuaciones de evolución geométrica. Comenzamos con una teoría parabólica para sistemas cuasilineales sobre variedades cerradas y la aplicamos al flujo de Ricci. La invariancia por difeomorfismos conduce al procedimiento de DeTurck; las ecuaciones de evolución de la curvatura, los principios del máximo, las estimaciones a priori y los reescalamientos preparan el estudio de singularidades. La parte termina con la compactación de Hamilton y las herramientas de Perelman: las cantidades monótonas, el no colapso, las $\kappa$–soluciones y la cirugía.

La sexta parte cambia de escala y lleva la geometría a dimensión infinita. El cálculo de Fréchet en espacios de Banach conduce a variedades de Banach, haces, conexiones, flujos y estructuras de Hilbert o Banach–Finsler. Después aparecen los espacios de mapeos, las métricas, las conexiones, los grupos gauge y los grupos de difeomorfismos, distinguiendo cuidadosamente la regularidad fija de las escalas ILH. Los capítulos de aplicaciones muestran cómo los mapeos armónicos, Yang–Mills y las ecuaciones de Euler pueden verse como problemas geométricos sobre espacios de configuraciones [28, 31, 91, 85, 46].

La séptima parte reúne los métodos variacionales que utilizaremos para demostrar existencia de soluciones. La formulación débil y los operadores de Nemytski permiten construir funcionales de energía; el método directo combina coercividad, reflexividad y semicontinuidad; la condición de Palais–Smale y los pseudogradientes permiten deformar subniveles; las restricciones regulares y el método de Nehari permiten buscar puntos críticos no triviales. El interés está en ver cómo estas técnicas se adaptan al espacio funcional y a la geometría del problema, no en tratarlas como procedimientos aislados [138, 112, 45, 13, 87].

Los apéndices reúnen las herramientas de topología, análisis matemático, álgebra lineal y notación tensorial que se consultan a lo largo de la obra. Su función es permitir que el desarrollo principal conserve continuidad sin ocultar los resultados auxiliares que sostienen las pruebas.

## Rutas de lectura

Aunque los capítulos están ordenados para una lectura continua, no es necesario recorrer todo el libro antes de llegar a un tema particular. Para estudiar espacios de Sobolev y problemas variacionales en variedades compactas, una ruta natural pasa por los Capítulos 1–9 y continúa con los Capítulos 29–32. Para la teoría de trazas y la geometría acotada conviene añadir los Capítulos 12–14. La teoría del índice utiliza la geometría de Clifford de la primera parte, la construcción diferencial de Dirac del Capítulo 8 y los Capítulos 11 y 15–19. El flujo de Ricci requiere la geometría riemanniana y la teoría elíptica y de Sobolev, y se desarrolla en los Capítulos 20–22. La geometría en dimensión infinita puede estudiarse a partir del Capítulo 23, aunque sus aplicaciones utilizan con frecuencia los espacios de Sobolev construidos antes.

Estas rutas se cruzan constantemente. La integración por partes reaparece al definir derivadas débiles, adjuntos formales y ecuaciones de Euler–Lagrange; la compacidad está detrás de Rellich–Kondrashov, de la teoría de Fredholm y de Palais–Smale; una conexión sirve tanto para derivar secciones como para construir laplacianos, estudiar el calor o describir espacios de configuraciones; el símbolo principal comienza como un objeto local y termina relacionando regularidad, parametrices e índice topológico. Una parte importante del libro consiste precisamente en hacer visibles estas conexiones.

El libro está dirigido a estudiantes avanzados de licenciatura y posgrado, y también a lectores que quieran

acercarse al análisis global desde la geometría o desde las ecuaciones diferenciales. Se presuponen conocimientos básicos de análisis real, topología, álgebra lineal y cálculo multivariable; cuando haga falta una herramienta adicional, se recordará en el texto o se remitirá al apéndice correspondiente. El objetivo es que, al avanzar por estas páginas, el lector pueda moverse con naturalidad entre tres niveles que aparecerán una y otra vez: la ecuación que se quiere estudiar, el espacio funcional en el que se formula y la geometría del espacio sobre el que está definida.

Parte I

# Variedades riemannianas

# Preámbulo de la Parte I

Antes de estudiar ecuaciones, espacios de Sobolev u operadores diferenciales sobre una variedad, hay una cuestión más elemental que debe resolverse: ¿cómo hacer cálculo en un espacio que no dispone, en general, de un único sistema de coordenadas? Localmente una variedad se parece a un abierto de $\mathbb{R}^n$, y por ello muchas construcciones pueden expresarse en coordenadas. Sin embargo, el objeto geométrico no es la carta que elegimos para describirlo. El primer propósito de esta parte es aprender a pasar de una descripción local a una formulación que no dependa de esa elección.

El Capítulo 1 construye la estructura suave y los objetos que surgen de ella: espacios tangentes y cotangentes, subvariedades, haces vectoriales, flujos, formas diferenciales, grupos de Lie y acciones suaves. El Capítulo 2 añade la estructura riemanniana. Aparecen entonces las conexiones, el transporte paralelo, las geodésicas, la distancia, la curvatura, la medida riemanniana y los operadores diferenciales básicos. Al final de la parte se introducen también las álgebras de Clifford, los grupos Spin y $\mathrm{Spin}^c$ y los haces de espinores. Los operadores de Dirac se estudiarán más adelante, cuando dispongamos de la teoría general de operadores diferenciales sobre haces.

Estas construcciones están ligadas entre sí por necesidades muy concretas. Las cartas permiten calcular, pero el espacio tangente identifica las direcciones que existen independientemente de las coordenadas. Un haz vectorial permite reunir datos que varían de punto a punto; una conexión hace posible compararlos y derivarlos; la métrica permite medir longitudes, ángulos y energías; la curvatura registra el defecto que aparece al transportar y derivar en direcciones distintas. La intención de esta parte es que estas ideas aparezcan como respuestas naturales a problemas geométricos, y no como una sucesión aislada de definiciones.

### Una tradición geométrica compartida

Gauss mostró que una superficie posee propiedades geométricas que pueden reconocerse sin recurrir al espacio en el que está dibujada. Riemann llevó esa idea a dimensión arbitraria y convirtió la métrica en el punto de partida de una geometría intrínseca. Durante las décadas siguientes, Christoffel, Ricci y Levi–Civita desarrollaron el cálculo tensorial y la noción de conexión, mientras que Cartan reorganizó buena parte de la teoría mediante formas diferenciales y marcos móviles. El lenguaje moderno conserva todas estas perspectivas. Por ello utilizaremos coordenadas, tensores, conexiones y formas diferenciales según lo exija el problema, sin tratarlos como lenguajes rivales.

# 1

# Nociones fundamentales de variedades suaves

*"Una geometría no puede ser más verdadera que otra, sólo puede ser más conveniente."*
— Henri Poincaré, *Science and Hypothesis* (1902)

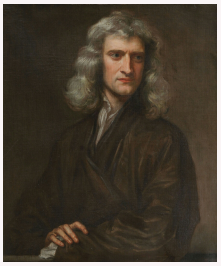
La geometría diferencial comienza con una experiencia sencilla: un espacio puede verse casi euclidiano cuando se observa de cerca y, sin embargo, poseer una forma global que ninguna sola coordenada alcanza a describir. Una esfera, un toro o una superficie con borde admiten cálculo local, pero sus rasgos más importantes sólo aparecen cuando se comparan regiones distintas. La noción de variedad suave organiza precisamente esa convivencia entre lo local y lo global.

Este primer capítulo construye el lenguaje que acompañará al lector durante toda la obra. Partiremos de la derivada en espacios euclidianos, pasaremos a cartas y cambios de coordenadas, y llegaremos a los espacios tangentes, los haces vectoriales, las subvariedades, los flujos y las formas diferenciales. Cada definición se introduce para responder una necesidad geométrica concreta y preparar una herramienta analítica posterior. La exposición sigue principalmente a Lee [94, 95] y dialoga con el enfoque de Nicolaescu [109], en particular allí donde la geometría suave comienza a servir de base para el análisis global.

## 1.1 Del cálculo a la geometría diferencial

La geometría diferencial prolonga una idea central del cálculo: aproximar localmente un objeto no lineal mediante datos lineales. Newton y Leibniz desarrollaron, de manera independiente, los fundamentos del cálculo diferencial e integral; la notación de Leibniz y la interpretación dinámica de Newton continúan reflejándose en el lenguaje moderno de derivadas, curvas y campos.

La formalización posterior del cálculo condujo a las nociones modernas de límite, continuidad y diferenciabilidad. En una variedad, las coordenadas permiten trasladar temporalmente un problema a un abierto de $\mathbb{R}^n$; la compatibilidad entre cartas garantiza que los objetos obtenidos no dependan de esa elección local. La derivada



Isaac Newton
(1642–1727)



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)

**Figura 1.1.** Newton y Leibniz desarrollaron, con lenguajes distintos, los fundamentos del cálculo diferencial e integral.

deja entonces de entenderse sólo como una pendiente y pasa a ser el mapeo lineal que aproxima, en primer orden, a un mapeo no lineal.

Antes de introducir las variedades suaves, recordaremos esta formulación de la derivada en espacios euclidianos. La definición de Fréchet expresa de manera precisa la aproximación lineal y anticipa la versión que utilizaremos más adelante en espacios de Banach.

**Definición 1.1.1.** Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Decimos que $f$ es Fréchet diferenciable, o simplemente derivable, en $x_0 \in U$ si existe una transformación lineal $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{\|h\|} = 0$. A dicha transformación lineal la denotamos por $df_{x_0}$ o por $Df(x_0)$. La transformación $df_{x_0}$ es única y se llama la derivada de $f$ en $x_0$. Si $f$ es derivable en todo punto de $U$, decimos que $f$ es derivable en $U$, o simplemente derivable cuando el dominio se sobreentiende.

En la definición anterior es fundamental que el dominio de $f$ sea abierto. Como $U$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_{\text{euc}}(x_0, r) \subseteq U$. Por lo tanto, si $h \in \mathbb{R}^n$ y $\|h\| < r$, entonces $x_0 + h \in U$ y la aproximación lineal de $f$ puede probarse en todas las direcciones de $\mathbb{R}^n$. Esta condición es la que permite recuperar una única transformación lineal asociada a $f$ en el punto $x_0$.

Si el dominio no es abierto, la situación cambia. En tal caso, la expresión $f(x_0 + h)$ solo tiene sentido para aquellos $h$ tales que $x_0 + h$ pertenece al dominio de $f$. Por lo tanto, la aproximación lineal solo detecta el comportamiento de $f$ a lo largo de las direcciones contenidas en el dominio. Esto puede provocar que dos transformaciones lineales distintas produzcan la misma aproximación sobre el conjunto donde la función está definida.

**Ejemplo 1.1.2.** Sea $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ y sea $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,0) = x$. Consideremos el punto $0 = (0,0) \in A$. Sean $L, \widetilde{L}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ las transformaciones lineales dadas por $L(x,y) = x$ y $\widetilde{L}(x,y) = x + y$.
Si $h = (h_1, 0) \in A$, entonces $f(0+h) - f(0) - L(h) = h_1 - h_1 = 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in A}} \frac{f(0+h)-f(0)-L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Del mismo modo, si $h = (h_1, 0) \in A$, se tiene $f(0+h) - f(0) - \widetilde{L}(h) = h_1 - \widetilde{L}(h_1, 0) = h_1 - h_1 = 0$. Luego,

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in A}} \frac{f(0+h)-f(0)-\widetilde{L}(h)}{\|h\|} = 0.$$

Así, las transformaciones lineales $L$ y $\widetilde{L}$ satisfacen la misma condición de aproximación sobre $A$, aunque son distintas como transformaciones lineales sobre $\mathbb{R}^2$. La razón es que el conjunto $A$ solo permite aproximarse al origen mediante vectores de la forma $(h_1, 0)$. En consecuencia, la función no detecta la componente transversal al eje $x$: $L$ y $\widetilde{L}$ coinciden sobre $A$, pero difieren en las direcciones transversales.

El ejemplo anterior muestra por qué la definición usual de derivada se formula para dominios abiertos. No obstante, en geometría diferencial resulta necesario considerar funciones definidas sobre subconjuntos que no son abiertos en $\mathbb{R}^n$, como ocurre en el estudio de variedades con frontera. En estos casos, una manera natural de definir la regularidad consiste en pedir la existencia de extensiones locales suaves.

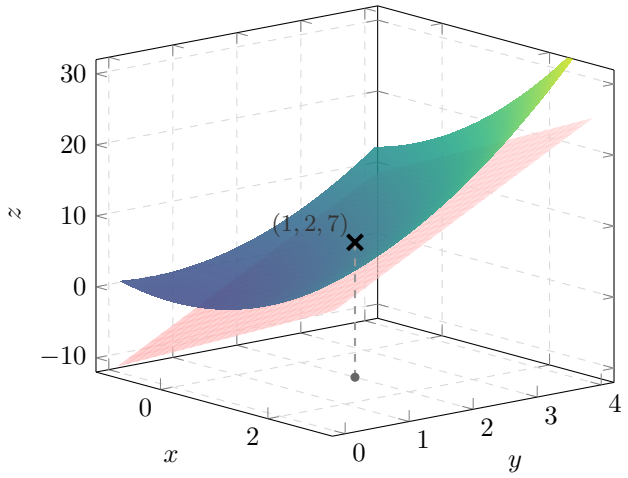
**Definición 1.1.3.** (Diferenciabilidad mediante extensión local) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sea $x_0 \in A$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que $f$ es diferenciable en $x_0$ mediante extensión local si existen un abierto $U_{x_0} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $x_0 \in U_{x_0}$, y una función $\widetilde{f} : U_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $x_0$, tales que $\widetilde{f} \restriction_{U_{x_0} \cap A} = f \restriction_{U_{x_0} \cap A}$.
Si la extensión $\widetilde{f}$ puede elegirse de clase $C^k$ en una vecindad de $x_0$, decimos que $f$ es de clase $C^k$ en $x_0$ mediante extensión local.

**Observación 1.1.4.** La definición anterior establece una noción de regularidad para funciones definidas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, pero no define, por sí sola, una derivada intrínseca de $f$ en $x_0$ como transformación lineal $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. La razón es que la derivada puede depender de la extensión local elegida.
El ejemplo anterior ilustra esta dependencia. La función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ admite, al menos, las extensiones $\widetilde{f_1}(x, y) = x$ y $\widetilde{f_2}(x, y) = x + y$. Ambas coinciden con $f$ sobre $A$, pero $d(\widetilde{f_1})_{(0,0)}(v_1, v_2) = v_1$, mientras que $d(\widetilde{f_2})_{(0,0)}(v_1, v_2) = v_1 + v_2$. Por lo tanto, las derivadas de las extensiones no coinciden. Esto muestra que, para subconjuntos arbitrarios, la existencia de extensiones locales suaves permite definir regularidad, pero no necesariamente una derivada bien definida.

La derivada tiene como interpretación el ser la *mejor aproximación lineal a la función $f$ en $x_0$* pues, si tenemos una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in U$, entonces la función $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x) = df_{x_0}(x - x_0) + f(x_0)$ cumple que su gráfica es el hiperplano tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

**Ejemplo 1.1.5.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Sabemos que $f$ es derivable y $df_{(x,y)}(u, v) = (2x + y)u + (x + 2y)v$. El hiperplano tangente a la gráfica de $f$ en $(x, y, f(x, y))$ está dado por $H(u, v) = df_{(x,y)}((u, v) - (x, y)) + f(x, y) = (2x + y)(u - x) + (x + 2y)(v - y) + x^2 + xy + y^2 = 2xu + yu + xv + 2yv - x^2 - y^2 - xy$, o escrito con su ecuación cartesiana, es el plano $w = 2xu + yu + xv + 2yv - x^2 - y^2 - xy$.

Superficie $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ y su plano tangente en $(1,2,7)$




La noción de hiperplano tangente es perfecta para mostrar el potencial del concepto de *derivada* para darnos aproximaciones lineales a objetos no lineales, en lo cual se basa lo que se conoce como *análisis no lineal*.

Para definir lo que es el hiperplano tangente a una superficie, se puede hacer conociendo una función que la describa, ya sea que la superficie sea la gráfica de la función o la función sea una parametrización de la superficie. Sin embargo, esta noción de *superficie* no debería depender de una función que la describa, sino ser un objeto matemático bien definido con propiedades topológicas fijas. Como veremos más adelante, el concepto de *variedad diferenciable* nos permitirá solucionar estos problemas.

Hay otras aproximaciones a una función diferenciable que se hacen mediante funciones polinomiales, las cuales no necesariamente son aproximaciones lineales pero cada vez van aproximando mejor a la función, esto gracias a lo que se conoce como *Teorema de Taylor*. Los coeficientes del desarrollo de Taylor estarán dados por las derivadas parciales de orden superior, dichas derivadas también nos servirán para estudiar la regularidad de funciones que no necesariamente son diferenciables usando los espacios de Sobolev mediante el concepto de *derivada débil*, en los cuales sus propiedades serán muy necesarias, pues varias propiedades de las derivadas débiles se heredarán de las derivadas parciales usuales, por lo que daremos un repaso de ellas y de la noción de ***multiíndice*** para los lectores que no conozcan este tipo de notación.

### 1.1.1 Derivadas parciales de orden superior

Antes de iterar derivadas parciales conviene recuperar la derivada direccional. Esta noción enlaza el cálculo euclidiano con una construcción que aparecerá más adelante en variedades: derivar un campo o una sección en la dirección de un vector mediante una conexión.

**Definición 1.1.6.** (derivada direccional) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función, $x_0 \in U$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $f$ es derivable en $x_0$ en la dirección de $v$ si

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

existe. A dicho límite se le conoce como la ***derivada direccional de $f$ en la dirección de $v$*** y se denota como $D_v f(x_0)$. La derivada direccional para $v = 0$ siempre existe y es 0.
Si $f$ es derivable en cada punto $x \in U$ en la dirección de $v$, decimos simplemente que $f$ tiene derivada direccional en la dirección de $v$ o respecto a $v$.

Estas derivadas direccionales se pueden iterar para definir las *derivadas direccionales de orden superior*.

**Definición 1.1.7.** Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$. Definiremos las derivadas direccionales de orden superior de manera recursiva.

(a) Si $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y existe $r_1 > 0$ tal que $B_{\text{euc}}(x_0, r_1) \subseteq U$ y $D_{v_1} f(x)$ existe para todo $x \in B_{\text{euc}}(x_0, r_1)$, diremos que $f$ tiene segunda derivada direccional respecto a $v_1, v_2$ en $x_0$ si

$$\lim_{t \to 0} \frac{D_{v_1} f(x_0 + t v_2) - D_{v_1} f(x_0)}{t}$$

existe, y denotamos por $D_{v_2, v_1} f(x_0)$ a dicho límite.

(b) Si $v_1, \ldots, v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ y existe $r_k > 0$ tal que $B_{\text{euc}}(x_0, r_k) \subseteq U$ y $D_{v_k, \ldots, v_1} f(x)$ está definida y existe para todo $x \in B_{\text{euc}}(x_0, r_k)$, diremos que $f$ tiene $(k+1)$-ésima derivada direccional respecto a $v_1, \ldots, v_{k+1}$ en $x_0$ si

$$\lim_{t \to 0} \frac{D_{v_k, \ldots, v_1} f(x_0 + t v_{k+1}) - D_{v_k, \ldots, v_1} f(x_0)}{t}$$

existe, y denotamos a dicho límite como $D_{v_{k+1}, \ldots, v_1} f(x_0)$.

Si para $v_1, \ldots, v_k$ $D_{v_k, \ldots, v_1} f(x)$ existe para todo $x \in U$, diremos que $f$ tiene derivada direccional respecto a $v_1, \ldots, v_k$.

A pesar de que la noción de derivada direccional es puntual, si una función tiene derivada direccional en todos los puntos de su dominio respecto a la misma dirección (o direcciones), nos induce una función con el mismo dominio y codominio que la función original.

**Definición 1.1.8.** Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Si $D_{v_k, \ldots, v_1} f(x)$ existe para todo $x \in U$, denotamos por $D_{v_k, \ldots, v_1} f$ a la función que asigna a cada $x \in U$ el valor $D_{v_k, \ldots, v_1} f(x)$.

Esto nos permite definir las derivadas parciales de orden superior, las cuales tendrán diversos usos, entre ellos, poder dar aproximaciones polinomiales a funciones suficientemente regulares.

**Definición 1.1.9.** Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y sean $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Si $D_{e_{i_k} \ldots e_{i_1}} f(x_0)$ existe, definimos la $k$-ésima derivada parcial de $f$ respecto a $x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}$ en $x_0$, denotada por $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x_0)$, como $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x_0) := D_{e_{i_k} \ldots e_{i_1}} f(x_0)$.
Si $i_1 = \cdots = i_k = i$, la denotaremos simplemente por $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(x_0)$ y le llamaremos la $k$-ésima derivada parcial de $f$ respecto a $x^i$ en $x_0$. A $k$ se le conoce como el ***orden de la derivada parcial***.
Si $k = 0$, denotamos simplemente $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(x_0) = f(x_0)$.

La notación de multiíndices permite expresar de manera compacta la existencia de todas las derivadas parciales hasta un orden dado.

**Definición 1.1.10.** Un elemento $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ se llama **multiíndice** de longitud $n$. Su orden es $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y existen las derivadas indicadas, escribimos

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

entendiendo la derivación componente a componente cuando $m > 1$ y poniendo $D^0 f := f$. Denotamos por $e_j$ el multiíndice cuyas entradas son cero, salvo la $j$-ésima, que vale uno. Además, ponemos

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \qquad x^\alpha := (x^1)^{\alpha_1} \cdots (x^n)^{\alpha_n},$$

y escribimos $\beta \leq \alpha$ cuando $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j$.

La clase de funciones que tienen derivadas parciales continuas hasta orden $k$ será importante para definir las estructuras diferenciables.

**Definición 1.1.11.** (funciones de clase $C^k$) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que $f \in C^0(U, \mathbb{R}^m)$ si $f$ es continua. Para $k \in \mathbb{N}$, decimos que $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ si, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$, la derivada parcial $D^\alpha f$ existe en $U$ y es continua en $U$. Finalmente, decimos que $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ si $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.
Si $x_0 \in U$ y $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, decimos que $f$ es de clase $C^k$ en $x_0$ si existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de $x_0$ tal que $f \restriction_V \in C^k(V, \mathbb{R}^m)$. Las funciones de clase $C^\infty$ también se llaman *suaves*.
Denotamos por

$$C^k(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ es de clase } C^k\}.$$

Si $m = 1$, denotamos $C^k(U) := C^k(U, \mathbb{R})$.

El siguiente resultado, conocido como *teorema de Clairaut–Schwarz*, establece condiciones locales bajo las cuales las derivadas parciales mixtas de segundo orden conmutan.

**Teorema 1.1.12.** (de Clairaut-Schwarz) Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in U$. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_{\text{euc}}(x_0, r) \subseteq U$. Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y las segundas derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ existen para cada $x \in B_{\text{euc}}(x_0, r)$ y son continuas en $x_0$, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

*Demostración.* Basta trabajar componente a componente, así que suponemos que $m = 1$. Sean $h, k \neq 0$ suficientemente pequeños para que el rectángulo de vértices

$$x_0, \qquad x_0 + he_i, \qquad x_0 + ke_j, \qquad x_0 + he_i + ke_j$$

esté contenido en $B_{\text{euc}}(x_0, r)$, y definamos

$$R(h,k) := f(x_0 + he_i + ke_j) - f(x_0 + he_i) - f(x_0 + ke_j) + f(x_0).$$

Aplicamos el teorema del valor medio, primero en la dirección $e_i$ a

$$t \longmapsto f(x_0 + te_i + ke_j) - f(x_0 + te_i),$$

y después en la dirección $e_j$. Existen $\theta_{h,k}$ entre 0 y $h$ y $\eta_{h,k}$ entre 0 y $k$ tales que

$$\frac{R(h,k)}{hk} = \partial_j \partial_i f(x_0 + \theta_{h,k} e_i + \eta_{h,k} e_j).$$

Si se invierte el orden de las dos aplicaciones, se obtienen $\widehat{\theta}_{h,k}$ entre 0 y $h$ y $\widehat{\eta}_{h,k}$ entre 0 y $k$ para los cuales

$$\frac{R(h,k)}{hk} = \partial_i \partial_j f(x_0 + \widehat{\theta}_{h,k} e_i + \widehat{\eta}_{h,k} e_j).$$

Al hacer $(h,k) \to (0,0)$, todos los puntos intermedios convergen a $x_0$. La continuidad en $x_0$ de las dos derivadas mixtas prueba la igualdad deseada. □

**Corolario 1.1.13.** Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de clase $C^2$ en $x_0 \in U$. Entonces, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

*Demostración.* Por ser $f$ de clase $C^2$ en $x_0$, existe una bola centrada en $x_0$ en la que ambas derivadas mixtas existen y son continuas. Se aplica el Teorema 1.1.12. □

La notación anterior simplifica las derivadas parciales de orden superior. Daremos algunos ejemplos de su uso.

**Ejemplo 1.1.14.** (a) Sea $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^3 \sin(x_3)$. Consideramos el multiíndice $\alpha = (2,1,1)$. Entonces,

$$D^\alpha f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3}.$$

Derivando sucesivamente, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^2 x_2^3 \cos(x_3), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = 3x_1^2 x_2^2 \cos(x_3),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(3x_1^2 x_2^2 \cos(x_3)\right) = 6x_1 x_2^2 \cos(x_3), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(3x_1^2 x_2^2 \cos(x_3)\right) = 6x_2^2 \cos(x_3).$$

(b) Si $f(x,y) = e^{xy}$ y usamos el multiíndice $\alpha = (1,2)$, entonces

$$D^\alpha f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}.$$

Calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 e^{xy}) = (2x + x^2 y)e^{xy}.$$

(c) Sea $f(x_1, x_2) = \ln(1 + x_1^2 + x_2^2)$ y sea $\alpha = (1, 1)$. Entonces,

$$D^\alpha f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{-4x_1 x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

(d) Si se toma el multiíndice $\alpha = (0, \ldots, 0, k, 0, \ldots, 0)$ con un $k$ en la $i$-ésima posición, entonces

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(x),$$

lo que corresponde simplemente a la derivada de orden $k$ respecto a la variable $x^i$.

Daremos las propiedades más importantes de las derivadas parciales de orden superior para funciones suficientemente regulares aprovechando esta noción de multiíndice. Entre las propiedades que estudiaremos está la conocida regla de Leibniz para el producto, para lo cual es conveniente recordar el resultado que se satisface para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Este resultado se demuestra usando las propiedades del coeficiente binomial, en particular el siguiente resultado:

**Teorema 1.1.15.** (Triángulo de Pascal) Para todos los enteros $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq n$, se cumple la siguiente identidad entre coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Esta identidad refleja la forma en que se construye el Triángulo de Pascal: cada número es la suma de los dos que se encuentran directamente encima de él.

*Demostración.* Si $1 \leq k \leq n-1$, entonces

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Para $k = n$, usando la convención $\binom{n-1}{n} = 0$, el miembro derecho es $\binom{n-1}{n-1} = 1 = \binom{n}{n}$. □

La regla de Leibniz dice lo siguiente:

**Teorema 1.1.16.** (fórmula de Leibniz generalizada) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f, g \colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones $n$-veces derivables. Entonces $fg$ es $n$-veces derivable y

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre $n$. El caso $n = 1$ afirma que

$$(fg)' = fg' + f'g,$$

que es la regla del producto usual. Supongamos que la afirmación es válida para un $n \geq 1$ fijo y sean ahora $f$ y $g$ funciones $(n+1)$-veces derivables. La hipótesis de inducción da

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &\overset{\text{hipótesis de inducción}}{=} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right]' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&\overset{\text{Teorema 1.1.15}}{=} \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la afirmación se cumple para $n+1$, y por el principio de inducción concluimos que se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Para funciones de clase $C^{|\alpha|}$ tenemos una fórmula similar a la anterior, aprovechando el uso de la notación de multiíndices. Daremos esta fórmula junto con otras propiedades de las derivadas de orden superior y con ello concluiremos esta sección.

**Proposición 1.1.17.** (Propiedades de las derivadas parciales con multiíndices) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $f, g\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase $C^{|\alpha|}$ y $h\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^{|\alpha+\beta|}$, donde $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) Linealidad:

$$D^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda D^\alpha f + \mu D^\alpha g, \quad \text{para cualesquiera } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) $D^\beta(D^\alpha h) = D^{\alpha+\beta} h = D^\alpha(D^\beta h)$.

(c) Regla del producto (de Leibniz):

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f \cdot D^{\alpha-\beta} g,$$

donde $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^{n} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$ es el coeficiente binomial y $\beta \le \alpha$ si y sólo si $\beta_j \le \alpha_j$ para todo $j \in \{1,\dots,n\}$.

*Demostración.* (a) Es inmediato de la linealidad de las derivadas parciales.

(b) Supongamos que $h$ es de clase $C^{|\alpha|+|\beta|}$. La aplicación reiterada del Teorema 1.1.12 a derivadas de orden menor permite intercambiar derivadas parciales adyacentes. Por lo tanto,

$$D^\beta(D^\alpha h) = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} \left( \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} h}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$= \frac{\partial^{|\alpha+\beta|} h}{\partial x_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n+\beta_n}} = D^{\alpha+\beta} h.$$

que es lo que se quería demostrar. Intercambiando $\alpha$ y $\beta$ en el mismo cálculo y usando otra vez el Teorema de Clairaut–Schwarz se obtiene $D^\alpha(D^\beta h) = D^{\alpha+\beta} h$.

(c) Procedemos por inducción sobre $|\alpha|$. Para $|\alpha| = 0$, la suma contiene únicamente $\beta = 0$ y la identidad es $fg = fg$. Supongamos demostrada la fórmula para todos los multiíndices de orden $r$ y sea $|\alpha| = r+1$. Elegimos $j$ con $\alpha_j > 0$ y ponemos $\alpha' := \alpha - e_j$. Por la hipótesis de inducción, la regla usual del producto y el inciso anterior,

$$D^\alpha(fg) = D^{e_j} \left( \sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} D^\beta f \, D^{\alpha'-\beta} g \right)$$

$$= \sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \left( D^{\beta+e_j} f \, D^{\alpha'-\beta} g + D^\beta f \, D^{\alpha'-\beta+e_j} g \right).$$

En la primera suma hacemos $\delta = \beta + e_j$ y en la segunda $\delta = \beta$. Adoptando la convención de que un coeficiente multiíndice es cero cuando el índice inferior tiene alguna componente negativa o no es menor o igual que el superior, el coeficiente de $D^\delta f \, D^{\alpha-\delta} g$ es

$$\binom{\alpha'}{\delta - e_j} + \binom{\alpha'}{\delta}.$$

Los factores correspondientes a las coordenadas distintas de $j$ coinciden, y en la coordenada $j$ la identidad de Pascal da

$$\binom{\alpha_j - 1}{\delta_j - 1} + \binom{\alpha_j - 1}{\delta_j} = \binom{\alpha_j}{\delta_j}.$$

Por lo tanto,

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\delta \le \alpha} \binom{\alpha}{\delta} D^\delta f \, D^{\alpha-\delta} g,$$

lo que completa la inducción.

□

Motivados en el teorema multinomial, podemos dar una versión para varios factores de la regla de Leibniz:

**Proposición 1.1.18.** (Regla de Leibniz para varios factores) Sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y sean $m \in \mathbb{N}$ y $f_1, \dots, f_m \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase $C^{|\alpha|}$. Entonces

$$D^\alpha\Big(\prod_{r=1}^m f_r\Big) = \sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_m \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta_1+\cdots+\beta_m=\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta_1!\cdots\beta_m!} \prod_{r=1}^m D^{\beta_r} f_r.$$

*Demostración.* Procederemos por inducción sobre $m$. Para $m = 2$ la fórmula coincide con la regla de Leibniz de la Proposición 1.1.17.

Supongamos válida la afirmación para $m$ factores y consideremos $f_1, \dots, f_{m+1}$. Escribimos $F := \prod_{r=1}^m f_r$, de modo que $\prod_{r=1}^{m+1} f_r = F\, f_{m+1}$. Aplicando Leibniz para dos factores,

$$D^\alpha(F f_{m+1}) = \sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma F\, D^{\alpha-\gamma} f_{m+1}.$$

Por hipótesis de inducción,

$$D^\gamma F = \sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_m \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta_1+\cdots+\beta_m=\gamma}} \frac{\gamma!}{\beta_1!\cdots\beta_m!} \prod_{r=1}^m D^{\beta_r} f_r.$$

Sustituyendo y usando que $\binom{\alpha}{\gamma}\gamma! = \dfrac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!}$ obtenemos

$$D^\alpha\left(\prod_{r=1}^{m+1} f_r\right) = \sum_{\gamma \le \alpha} \sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_m \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta_1+\cdots+\beta_m=\gamma}} \frac{\alpha!}{\beta_1!\cdots\beta_m!(\alpha-\gamma)!} \left(\prod_{r=1}^m D^{\beta_r} f_r\right) D^{\alpha-\gamma} f_{m+1}.$$

Definimos ahora

$$\beta_{m+1} := \alpha - \gamma.$$

Como $\gamma \le \alpha$, se tiene $\beta_{m+1} \in \mathbb{N}_0^n$ y, recíprocamente, dada cualquier familia $\beta_1, \dots, \beta_{m+1} \in \mathbb{N}_0^n$ tal que

$$\beta_1 + \cdots + \beta_{m+1} = \alpha,$$

si ponemos

$$\gamma := \beta_1 + \cdots + \beta_m,$$

entonces $\gamma \le \alpha$ y $\beta_{m+1} = \alpha - \gamma$. Esta correspondencia es biyectiva entre los pares

$$(\gamma, \beta_1, \dots, \beta_m) \quad \text{con} \quad \beta_1 + \cdots + \beta_m = \gamma \le \alpha$$

y las familias

$$(\beta_1,\dots,\beta_{m+1}) \quad \text{con} \quad \beta_1+\cdots+\beta_{m+1}=\alpha.$$

Reindexando la suma mediante esta biyección, se obtiene

$$D^\alpha\left(\prod_{r=1}^{m+1} f_r\right)=\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_{m+1}\in\mathbb{N}_0^n\\ \beta_1+\cdots+\beta_{m+1}=\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta_1!\cdots\beta_{m+1}!}\prod_{r=1}^{m+1} D^{\beta_r} f_r,$$

lo que completa la inducción.

□

La siguiente forma multiíndice de la regla de la cadena permite controlar explícitamente las derivadas parciales de una composición.

**Teorema 1.1.19.** (Fórmula de Faà di Bruno para multiíndices) Sean $f\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ y $g\colon V\subseteq\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$, con $f(U)\subseteq V$, ambas de clase $C^k$. Escribamos $f=(f_1,\dots,f_m)$. Entonces $g\circ f$ es de clase $C^k$ y, para $x_0\in U$ y $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ con $1\le|\alpha|\le k$,

$$D^\alpha(g\circ f)(x_0)=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^m,\ 1\le|\beta|\le|\alpha|\\ \gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_{|\beta|}),\ \gamma_i\in\mathbb{N}_0^n,\ |\gamma_i|>0,\ \sum_{i=1}^{|\beta|}\gamma_i=\alpha\\ l=(l_1,\dots,l_{|\beta|}),\ l_i\in\{1,\dots,m\}\\ \#\{i\mid l_i=j\}=\beta_j,\ 1\le j\le m}} c_{\alpha,\beta,\gamma,l}\,D^\beta g(f(x_0))\prod_{i=1}^{|\beta|} D^{\gamma_i} f_{l_i}(x_0).$$

Los coeficientes $c_{\alpha,\beta,\gamma,l}$ son constantes combinatorias no negativas que dependen únicamente de los índices indicados.

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre $q:=|\alpha|$. Si $q=1$, existe $r\in\{1,\dots,n\}$ con $\alpha=e_r$, y la regla de la cadena da

$$D^{e_r}(g\circ f)(x_0)=\sum_{j=1}^{m}(D^{e_j}g)(f(x_0))D^{e_r}f_j(x_0).$$

Ésta es la fórmula del enunciado con $\beta=e_j$, $\gamma=(e_r)$, $l=(j)$ y coeficiente 1.
Supongamos la afirmación para los multiíndices de longitud $q$, y sea $\alpha'$ de longitud $q+1$. Elegimos $r$ con $\alpha'_r>0$ y ponemos $\alpha=\alpha'-e_r$. Cada término de la fórmula inductiva tiene la forma

$$c\,(D^\beta g)(f(x))\prod_{a=1}^{|\beta|} D^{\gamma_a} f_{l_a}(x), \qquad \sum_{a=1}^{|\beta|}\gamma_a=\alpha.$$

Al derivarlo respecto de $x^r$, la derivada del primer factor produce

$$c\sum_{j=1}^{m}(D^{\beta+e_j}g)(f(x))D^{e_r}f_j(x)\prod_{a=1}^{|\beta|} D^{\gamma_a} f_{l_a}(x).$$

Esto añade $e_r$ a la familia $(\gamma_a)$, añade $j$ a $(l_a)$ y reemplaza $\beta$ por $\beta+e_j$. Si la derivada actúa sobre el factor de

índice $a$, produce

$$c\,(D^{\beta}g)(f(x))D^{\gamma_a+e_r}f_{l_a}(x)\prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{|\beta|}D^{\gamma_b}f_{l_b}(x).$$

Aquí se reemplaza $\gamma_a$ por $\gamma_a+e_r$. En ambos casos, la suma de los nuevos multiíndices es $\alpha'$, y se conservan todas las restricciones del enunciado. Los términos iguales se agrupan; sus coeficientes se suman y siguen siendo constantes combinatorias no negativas. Esto cierra la inducción. La misma construcción muestra, orden por orden, que las derivadas obtenidas son continuas, por lo que $g\circ f$ es de clase $C^k$. □

## 1.2 Variedades suaves

Una variedad suave formaliza la idea de un espacio que puede ser globalmente curvo o topológicamente complejo y, sin embargo, admite coordenadas euclidianas alrededor de cada punto. La esfera y el toro son ejemplos familiares: ninguna carta los describe por completo, pero cada región suficientemente pequeña puede compararse con un abierto del plano.

La dimensión de estos espacios es intrínseca. Aunque la esfera usual se dibuje dentro de $\mathbb{R}^3$, para desplazarse sobre ella bastan dos coordenadas locales. Pedir que un espacio sea localmente homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ recoge esta observación topológica; exigir después compatibilidad suave entre las cartas hará posible transportar el cálculo. Este concepto resulta fundamental en análisis no lineal, ya que muchas ecuaciones diferenciales parciales



Élie Cartan (1869–1951)

**Figura 1.2.** Élie Cartan fue una figura fundamental en el desarrollo de la geometría diferencial moderna. Sus trabajos sobre formas diferenciales, marcos móviles, conexiones y curvatura contribuyeron decisivamente al estudio intrínseco de las variedades y establecieron parte del lenguaje que hoy sustenta la geometría riemanniana y el análisis global.

y problemas variacionales se formulan de manera natural sobre espacios que no son abiertos de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo:

- Modelos en física matemática donde el dominio es una superficie curva o un espacio con curvatura variable (ondas en la esfera, difusión en el toro).
- Problemas en geometría diferencial que involucran la frontera de una variedad, como los teoremas de traza para funciones de Sobolev definidas en la frontera.
- Ecuaciones elípticas y parabólicas en espacios compactos sin frontera o con frontera, donde la métrica riemanniana influye directamente en los operadores diferenciales.

Con la noción de variedad suave podemos extender todo el cálculo diferencial a estos contextos, y una vez dotadas de una métrica riemanniana, tendremos las herramientas para definir gradientes, divergencias, laplacia-

nos y operadores elípticos de forma intrínseca. Esto nos permitirá desarrollar el estudio de espacios de Sobolev en variedades, enunciar y demostrar teoremas de traza, y analizar ecuaciones diferenciales parciales en un marco geométrico general.

Presentaremos la definición moderna de *variedad diferenciable*, pero primero introduciremos varios conceptos preliminares.

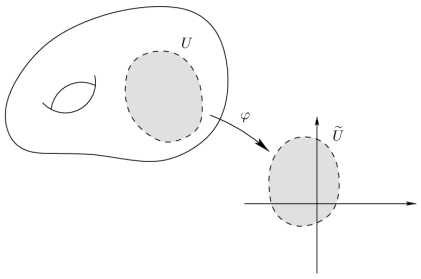
**Definición 1.2.1.** Sea $M$ un espacio topológico. Decimos que $M$ es una **variedad topológica sin frontera de dimensión** $n$ si:

(a) $M$ es un espacio de Hausdorff

(b) $M$ es segundo numerable

(c) Para cada $p \in M$, existe $U \subseteq M$ abierto y un homeomorfismo $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U)$ donde $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto ($M$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$) tal que $p \in U$.

Para familiarizarse con la propiedad de *ser localmente homeomorfo a* $\mathbb{R}^n$ conviene visualizar la siguiente imagen:




**Observación 1.2.2.** Para hacer más ligera la notación, al abierto $U$ y al homeomorfismo

$$\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

se les suele considerar juntos como una pareja ordenada $(U, \varphi)$ a la cual se le conoce con el nombre de *carta coordenada* o simplemente *carta*.

La estructura topológica reconoce el carácter localmente euclidiano del espacio, pero todavía no permite diferenciar. Para transportar el cálculo entre cartas debemos exigir que los cambios de coordenadas sean suaves. Un atlas compatible convierte así la información local en una estructura global coherente.

**Definición 1.2.3.** Sea $M$ una variedad topológica sin frontera de dimensión $n$.

(a) Decimos que dos cartas $(U, \varphi)$ y $(V, \psi)$ son suavemente compatibles si $U \cap V = \varnothing$ o si el mapeo de transición

$$\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

es un difeomorfismo de clase $C^\infty$ (o suave de aquí en adelante).

(b) Un atlas para $M$ es una colección de cartas $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U = M$.

(c) Un atlas suave es un atlas $\mathcal{A}$ tal que cualesquiera dos cartas de $\mathcal{A}$ son suavemente compatibles.

(d) Una estructura suave en $M$ es un atlas suave $\mathcal{A}$ maximal, respecto a $\subseteq$, entre los atlas suaves de $M$.

Todo lo anterior nos permite dar la definición de *variedad diferenciable (o variedad suave)*:

**Definición 1.2.4.** Una variedad suave sin frontera de dimensión $n$ es una variedad topológica de dimensión $n$, $M$, equipada con una estructura suave $\mathcal{A}$. Denotaremos como $(M, \mathcal{A})$ cuando se quiera hacer referencia explícita a la estructura suave.

**Observación 1.2.5.** También se pueden definir variedades sin frontera de clase $C^k$ como aquellas en las cuales pedimos que los mapeos de transición

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

sean difeomorfismos de clase $C^k$, es decir, funciones de clase $C^k$ con inversa de clase $C^k$.

Las variedades topológicas (y por lo tanto, las variedades suaves), tienen propiedades topológicas muy interesantes:

**Proposición 1.2.6.** Sea $M$ una variedad topológica sin frontera.

(a) $M$ es localmente conexo por trayectorias.

(b) $M$ es conexa si y sólo si es conexa por trayectorias.

(c) Las componentes conexas de $M$ y sus componentes conexas por trayectorias coinciden.

(d) $M$ tiene una cantidad numerable de componentes conexas, cada una de las cuales es un conjunto abierto de $M$ y una variedad topológica conexa.

*Demostración.* Sea $p \in M$ y sea $U$ una vecindad abierta de $p$. Elegimos una carta $(V, \varphi)$ con $p \in V$. El abierto $\varphi(U \cap V)$ contiene una bola euclidiana abierta $B$ centrada en $\varphi(p)$. Entonces $\varphi^{-1}(B)$ es una vecindad de $p$, está contenida en $U$ y es conexa por trayectorias porque $B$ es convexa. Esto prueba (1).
Fijemos ahora $p \in M$ y sea $C_p$ el conjunto de puntos que pueden unirse con $p$ mediante una trayectoria. Por (1), $C_p$ es abierto. El mismo argumento aplicado a cada punto de $M \setminus C_p$ muestra que su complemento también es abierto. Si $M$ es conexa, se sigue que $C_p = M$. Como todo espacio conexo por trayectorias es conexo, queda probado (2). Al aplicar (2) a cada componente conexa se obtiene (3), y la conexión local por trayectorias muestra además que cada componente es abierta.
Sea finalmente $\mathcal{B}$ una base numerable de $M$. Cada componente conexa $C$, al ser abierta y no vacía, contiene algún elemento no vacío $B_C \in \mathcal{B}$. Componentes distintas contienen elementos distintos de la base, pues son disjuntas; por lo tanto, la familia de componentes es numerable. Las restricciones de las cartas de $M$ convierten cada componente en una variedad topológica conexa. Esto prueba (4). □

También son localmente compactas:

**Proposición 1.2.7.** Toda variedad topológica con o sin frontera es localmente compacta.

*Demostración.* Sea $p \in M$ y elijamos una carta $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$ alrededor de $p$, donde $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n$ si $M$ no tiene frontera. Como $\varphi(U)$ es abierto en $\mathbb{H}^n$, existe $r > 0$ tal que

$$\overline{B}_{\text{euc}}(\varphi(p), r) \cap \mathbb{H}^n \subseteq \varphi(U).$$

La preimagen

$$K := \varphi^{-1}\left(\overline{B}_{\text{euc}}(\varphi(p), r) \cap \mathbb{H}^n\right)$$

es compacta, pues es homeomorfa a un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$, y contiene la vecindad abierta relativa

$$\varphi^{-1}\left(B_{\text{euc}}(\varphi(p), r) \cap \mathbb{H}^n\right)$$

de $p$. □

Otra propiedad de cubierta que satisfacen las variedades es la paracompacidad, la cual resultará de gran utilidad en el análisis geométrico:

**Teorema 1.2.8.** (Las variedades son paracompactas) Sea $(M, \tau_M)$ una variedad topológica, con o sin frontera. Dada una cubierta abierta $\mathcal{U} \subseteq \tau_M$ de $M$ y cualquier base $\mathcal{B}$ de $\tau_M$, existe un refinamiento abierto, localmente finito y numerable de $\mathcal{U}$ formado por elementos de $\mathcal{B}$.

*Demostración.* Primero construiremos un agotamiento compacto. Como $M$ es localmente compacta y segundo numerable, posee una base numerable $(V_j)_{j\geq 1}$ de abiertos precompactos. Ponemos $K_0 := \varnothing$ y $K_1 := \overline{V}_1$. Una vez construido $K_j$, cada punto del compacto $K_j \cup \overline{V}_{j+1}$ posee una vecindad abierta precompacta. Una subcubierta finita de estas vecindades tiene unión $W$, y la unión de sus clausuras define un compacto $K_{j+1}$ que satisface

$$K_j \cup \overline{V}_{j+1} \subseteq W \subseteq \operatorname{Int} K_{j+1}.$$

Por recurrencia obtenemos compactos $(K_j)_{j\geq 1}$ tales que

$$K_j \subseteq \operatorname{Int} K_{j+1}, \qquad V_1 \cup \cdots \cup V_j \subseteq K_j.$$

Como los $V_j$ cubren $M$, se tiene $M = \bigcup_{j\geq 1} K_j$.

Definimos

$$C_0 := K_1, \qquad W_0 := \operatorname{Int} K_2,$$

y, para $j \geq 1$,

$$C_j := K_{j+1} \setminus \operatorname{Int} K_j, \qquad W_j := \operatorname{Int} K_{j+2} \setminus K_{j-1}.$$

Cada $C_j$ es compacto y está contenido en $W_j$. Para $j \geq 0$ y $x \in C_j$ elegimos $U_x \in \mathcal{U}$ con $x \in U_x$ y, usando que $\mathcal{B}$ es una base, un elemento $B_x \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_x \subseteq U_x \cap W_j.$$

La compacidad de $C_j$ permite conservar una cantidad finita de estos abiertos. La unión de las familias finitas obtenidas para $j = 0, 1, 2, \ldots$ es numerable y refina a $\mathcal{U}$.

Probemos que esta familia cubre $M$. Dado $x \in M$, existe $j \geq 0$ tal que $x \in \operatorname{Int} K_{j+1}$; elegimos el menor de esos índices. Si $j = 0$, entonces $x \in C_0$. Si $j \geq 1$, la minimalidad implica $x \notin \operatorname{Int} K_j$, mientras que $x \in K_{j+1}$, y por lo tanto $x \in C_j$.
Resta verificar la finitud local. Sea $x \in M$ y elijamos $N \geq 1$ con $x \in \operatorname{Int} K_N$. Si $j \geq N+1$, entonces $K_N \subseteq K_{j-1}$ y

$$\operatorname{Int} K_N \cap W_j = \varnothing.$$

Así, la vecindad $\operatorname{Int} K_N$ de $x$ sólo puede intersectar los elementos procedentes de los índices $0, \ldots, N$, y para cada uno de ellos se eligió una familia finita. El refinamiento es localmente finito.
La demostración utiliza únicamente que las cartas proporcionan una base de abiertos precompactos; por ello es idéntica para cartas con valores en abiertos relativos de $\mathbb{H}^n$. □

Hay diversos sistemas coordenados que se pueden definir en una variedad suave, entre ellos está la noción de *bola coordenada regular*, que generaliza la noción de *bola* de los espacios euclidianos a variedades.

**Definición 1.2.9.** Si $M$ es una variedad suave sin frontera, decimos que:

(a) $B \subseteq M$ es una bola coordenada centrada en $x$ (o en $\varphi^{-1}(x)$) si existe un homeomorfismo $\varphi\colon B \longrightarrow B_{\text{euc}}(x,r)$, donde

$$B_{\text{euc}}(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\},$$

para algún $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $(B, \varphi)$ es una carta suave de $M$.

(b) $B \subseteq M$ es una bola coordenada regular (centrada en $x$) si existe una bola coordenada $B'$ tal que $\overline{B} \subseteq B'$ y existe un mapeo coordenado suave $\varphi\colon B' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para algunos números positivos $r' > r > 0$ se tiene que $\varphi(B) = B_{\text{euc}}(x,r)$, $\varphi(\overline{B}) = \overline{B}_{\text{euc}}(x,r)$ y $\varphi(B') = B_{\text{euc}}(x,r')$.

Si $M$ tiene frontera, usamos la misma terminología sustituyendo las bolas euclidianas por las bolas relativas $B_{\text{euc}}(x,r) \cap \mathbb{H}^n$ en una carta de frontera, y las clausuras se toman en $\mathbb{H}^n$.

**Observación 1.2.10.** Toda bola coordenada regular $(B, \varphi)$ cumple que $\overline{B}$ es compacto y que $\varphi$ se puede extender a $\overline{B}$. A este tipo de dominios los conoceremos como ***bolas coordenadas regulares compactas***.

Las bolas coordenadas regulares son importantes por sus propiedades topológicas. Más aún, toda variedad suave admite un atlas numerable de bolas coordenadas regulares como muestra la siguiente proposición:

**Proposición 1.2.11.** Toda variedad suave con o sin frontera tiene una base numerable de bolas coordenadas regulares y por lo tanto admite una cubierta abierta numerable y localmente finita de bolas coordenadas regulares.

*Demostración.* Por segundo numerabilidad, de la cubierta formada por los dominios de cartas extraemos una subcubierta numerable. Dentro de cada imagen coordenada tomamos bolas euclidianas, o medias bolas en una carta de frontera, con centro y radio racionales cuya clausura esté contenida en una bola ligeramente mayor del mismo dominio coordenado. Sus preimágenes forman una familia numerable de bolas coordenadas regulares y constituyen una base de $M$. Aplicando el Teorema 1.2.8 a esta base y a la cubierta $\{M\}$ obtenemos una subfamilia numerable y localmente finita que cubre $M$. □

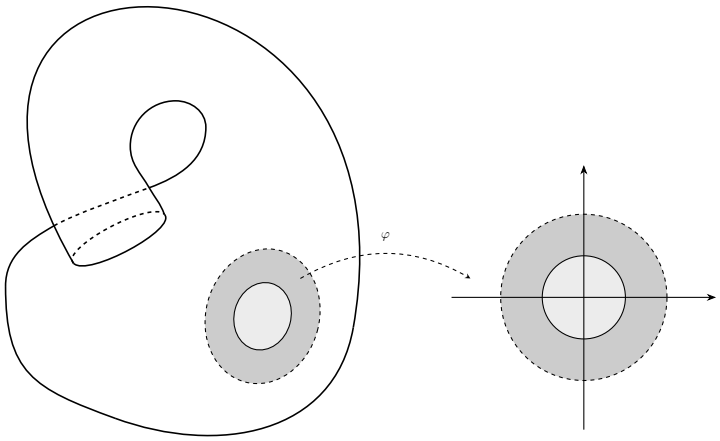



**Figura 1.3.** Representación de una bola coordenada regular precompacta con el mapeo coordenado que se extiende hasta la frontera.

Finalmente, para acabar con las definiciones de esta sección, fijamos el modelo correcto para una variedad con frontera:

$$\mathbb{H}^n := \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty), \qquad \operatorname{Int} \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty), \qquad \partial \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}.$$

Todos los abiertos de $\mathbb{H}^n$ se entienden en la topología relativa. Una función definida en uno de ellos es suave si, en una vecindad de cada punto, es la restricción de una función suave definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$.

**Definición 1.2.12.** Sea $M$ un espacio topológico.

(a) Decimos que $M$ es una **variedad topológica con frontera de dimensión** $n$ si es un espacio de Hausdorff, segundo numerable, tal que cada punto tiene una vecindad abierta homeomorfa a un abierto relativo de $\mathbb{H}^n$.

(b) Una carta para $M$ es una pareja $(U,\varphi)$ donde $U \subseteq M$ es abierto y $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$ es un homeomorfismo sobre un abierto relativo.

(c) Una carta $(U,\varphi)$ es **interior** si $\varphi(U) \subseteq \operatorname{Int} \mathbb{H}^n$; en tal caso su imagen es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Es una **carta de frontera** si $\varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n \neq \varnothing$. El dominio de una carta de frontera puede contener simultáneamente puntos interiores y puntos de frontera.

(d) Un atlas para $M$ es una colección de cartas $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U = M$.

Las definiciones de compatibilidad y maximalidad para cartas de una variedad con frontera son las siguientes:

**Definición 1.2.13.** Sea $M$ una variedad topológica con frontera de dimensión $n$.

(a) Decimos que dos cartas $(U,\varphi)$ y $(V,\psi)$ son suavemente compatibles si $U \cap V = \varnothing$ o si el mapeo de

transición

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

es un difeomorfismo de clase $C^\infty$.

(b) Un atlas suave es un atlas $\mathcal{A}$ tal que cualesquiera dos cartas de $\mathcal{A}$ son suavemente compatibles.

(c) Una estructura suave en $M$ es un atlas suave $\mathcal{A}$ maximal, respecto a $\subseteq$, entre los atlas suaves de $M$.

**Definición 1.2.14.** Una variedad suave con frontera de dimensión $n$ es una variedad topológica con frontera de dimensión $n$ equipada con una estructura suave.

**Teorema 1.2.15.** (Invariancia suave de la frontera) Sean $(U, \varphi)$ y $(V, \psi)$ cartas suavemente compatibles de una variedad con frontera y sea $p \in U \cap V$. Entonces

$$\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(p) \in \partial\mathbb{H}^n.$$

Por consiguiente, las nociones de punto interior y punto de frontera que se obtienen mirando la imagen del punto no dependen de la carta.

La demostración sigue la estrategia de Lee [94].

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que $x := \varphi(p)$ es interior y que $y := \psi(p)$ pertenece a $\partial\mathbb{H}^n$. Al restringir las cartas, podemos tomar una bola euclidiana $B$ alrededor de $x$, contenida en $\varphi(U \cap V) \cap \operatorname{Int}\mathbb{H}^n$. El cambio de coordenadas

$$F := \psi \circ \varphi^{-1} : B \longrightarrow \mathbb{H}^n$$

es suave y su inversa admite, cerca de $y$, una extensión suave a un abierto de $\mathbb{R}^n$. La identidad $F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}$ en $B$ y la regla de la cadena muestran que $dF_x$ posee un inverso por la izquierda; como dominio y codominio tienen dimensión $n$, $dF_x$ es invertible. El teorema de la función inversa implica que $F(B)$ contiene una vecindad euclidiana de $y$. Esto es imposible porque $F(B) \subseteq \mathbb{H}^n$ y ninguna vecindad euclidiana de un punto de $\partial\mathbb{H}^n$ está contenida en $\mathbb{H}^n$. Intercambiando las cartas se excluye la posibilidad contraria. □

**Definición 1.2.16.** Sea $M$ una variedad suave con frontera. Un punto $p \in M$ es **interior** si $\varphi(p) \in \operatorname{Int}\mathbb{H}^n$ en una —y, por el teorema anterior, en toda— carta que lo contiene. Es un **punto de frontera** si $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$. Denotamos los conjuntos correspondientes por $\operatorname{Int} M$ y $\partial M$.
Una carta de frontera está **centrada en** $p \in \partial M$ si, después de una traslación en las primeras $n-1$ coordenadas, $\varphi(p) = 0$. Esta condición se refiere a la imagen del punto distinguido; no significa que todo el dominio de la carta esté formado por puntos de frontera.

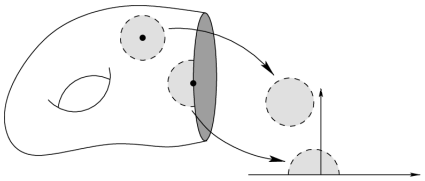
**Observación 1.2.17.** (Convención sobre variedades finito-dimensionales) En todo el tratamiento finito-dimensional, el término variedad incluye las hipótesis de Hausdorff y segundo numerable de las definiciones anteriores; no las repetiremos en cada enunciado.

**Observación 1.2.18.** Se cumplen las propiedades siguientes:

(a) La frontera $\partial M$ y el interior $\operatorname{Int} M$ son disjuntos y su unión es $M$. Además, $\operatorname{Int} M$ es abierto y $\partial M$ es

cerrado.

(b) Se puede considerar que el caso de una variedad suave es un caso particular de una variedad suave con frontera vacía o donde todos los puntos de $M$ son puntos interiores.



La definición abstracta resulta especialmente útil cuando el espacio se construye pegando modelos locales. El siguiente lema reúne las condiciones necesarias para que una familia de coordenadas determine, de manera única, la topología y la estructura suave del conjunto resultante.

**Lema 1.2.19.** (Lema de la carta suave) Sea $M$ un conjunto y supongamos que tenemos una colección $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de subconjuntos de $M$ y mapeos $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (o $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{H}^n$) tales que:

(a) Para cada $\alpha \in A$, $\varphi_\alpha$ es una biyección entre $U_\alpha$ y un subconjunto abierto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ (o un subconjunto abierto relativo $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{H}^n$).

(b) Para cada $\alpha, \beta \in A$, los conjuntos $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ (o abiertos relativos en $\mathbb{H}^n$).

(c) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, el mapeo $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es suave.

(d) Existe $N \subseteq A$ numerable tal que $M = \bigcup_{\alpha\in N} U_\alpha$.

(e) Si $p, q \in M$ y $p \neq q$, entonces existe $\alpha \in A$ tal que $p, q \in U_\alpha$ o existen $\alpha, \beta \in A$ tales que $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ con $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$.

Entonces $M$ tiene una única topología y una única estructura suave tales que $M$ es una variedad suave (con frontera) y $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta suave para cada $\alpha \in A$.

*Demostración.* Escribiremos $\mathbb{E}^n$ para el espacio modelo que corresponda, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, y entenderemos siempre la topología relativa en el segundo caso. Consideremos la familia

$$\mathcal{C} := \left\{ \varphi_\alpha^{-1}(V) \,\middle|\, \alpha \in A,\ V \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha) \text{ abierto} \right\}.$$

Esta familia cubre $M$. Si $p$ pertenece a $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W)$, entonces

$$\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) = \varphi_\alpha^{-1}\left( V \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W) \right).$$

El conjunto entre paréntesis es abierto en $\varphi_\alpha(U_\alpha)$: primero restringimos al abierto $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y luego usamos la continuidad del cambio de coordenadas. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es una base para una topología $\tau$ en $M$. Por construcción, cada $U_\alpha$ es abierto y $\varphi_\alpha$ es un homeomorfismo de $U_\alpha$ sobre su imagen. Veamos que $(M, \tau)$ es Hausdorff. Si dos puntos distintos $p, q$ pertenecen a un mismo $U_\alpha$, separamos sus imágenes en el espacio

Hausdorff $\mathbb{E}^n$ y tomamos las preimágenes. Si no usamos una carta común, la última hipótesis proporciona dominios disjuntos $U_\alpha$ y $U_\beta$ que contienen respectivamente a $p$ y a $q$. En ambos casos obtenemos vecindades abiertas disjuntas.

Sea $N \subseteq A$ numerable como en la cuarta hipótesis. Cada $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, con $\alpha \in N$, posee una base numerable; las preimágenes de todas esas bases forman una familia numerable. Es una base de $M$, pues los $U_\alpha$, $\alpha \in N$, cubren el espacio. De este modo, $(M, \tau)$ es segundo numerable y localmente euclidiano, o localmente modelado sobre $\mathbb{H}^n$.

Para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, la tercera hipótesis y la misma hipótesis con $\alpha$ y $\beta$ intercambiados muestran que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es un difeomorfismo entre los abiertos correspondientes. Las cartas dadas forman así un atlas suave. El atlas maximal que lo contiene define una estructura suave en $M$. En el caso de $\mathbb{H}^n$, la misma construcción produce cartas de frontera y todas las extensiones locales que intervienen en la noción de suavidad se toman en abiertos de $\mathbb{R}^n$; por ello el argumento también cubre variedades con frontera.

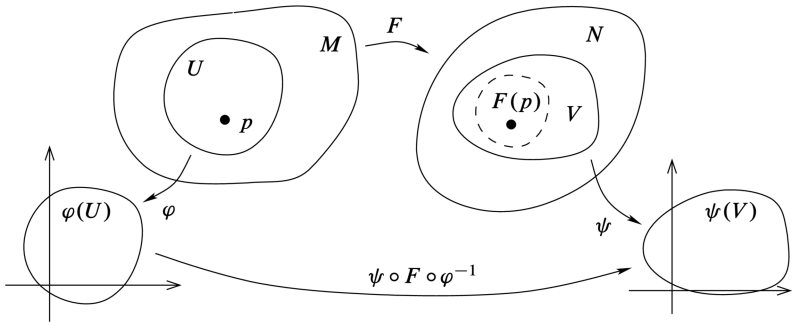
Finalmente, si otra topología hiciera de todas las $\varphi_\alpha$ homeomorfismos sobre sus imágenes, tendría necesariamente a $\mathcal{C}$ como base y, por lo tanto, coincidiría con $\tau$. Una estructura suave para la cual las cartas dadas fueran suaves tendría el mismo atlas maximal, porque una carta pertenece a éste si y sólo si es suavemente compatible con todas las cartas $\varphi_\alpha$. Esto prueba ambas unicidades. □

## 1.3 Mapeos suaves

Una estructura suave no sólo permite hablar de funciones sobre una variedad; también permite comparar variedades mediante mapeos que respetan el cálculo. La condición se verifica en coordenadas, pero su validez debe ser independiente de las cartas elegidas.

Dadas cartas alrededor de un punto y de su imagen, el mapeo se convierte temporalmente en una función entre abiertos euclidianos. Pediremos que esa representación coordenada sea suave. La compatibilidad de los atlas garantiza que la definición no dependa de la pareja de cartas utilizada.

**Definición 1.3.1.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera y $F\colon M \longrightarrow N$ una función. Decimos que $F$ es un mapeo suave si para cada $p \in M$ existen cartas coordenadas $(U, \varphi)$ y $(V, \psi)$ que contienen a $p$ y a $F(p)$ respectivamente tales que $F(U) \subseteq V$ y el mapeo $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es una función suave de $\varphi(U)$ en $\psi(V)$. Decimos que el mapeo es de clase $C^k$ si $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es de clase $C^k$.



**Definición 1.3.2.** Si $M$ y $N$ son variedades suaves con o sin frontera y $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, denotamos por $C^k(M,N) := \{f : M \longrightarrow N \mid f \text{ es de clase } C^k\}$. Si $N = \mathbb{R}$ denotamos simplemente $C^k(M) := C^k(M,\mathbb{R})$.

**Observación 1.3.3.** A la función $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ se le conoce como *representación coordenada de* $F$ y en ocasiones se le denota como $\hat{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$.

Una partición de la unidad permite convertir construcciones locales en objetos globales sin perder el control de los soportes. Será la herramienta básica para pegar funciones, métricas, secciones y estimaciones definidas en cartas distintas.

**Definición 1.3.4.** Sea $M$ un espacio topológico y $\mathscr{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in J\}$ una cubierta abierta de $M$. Una partición de la unidad subordinada a $\mathscr{U}$ es una familia de funciones continuas $(\psi_\alpha)_{\alpha\in J}$, $\psi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que:

(a) $0 \le \psi_\alpha(x) \le 1$ para todo $\alpha \in J$ y toda $x \in M$.

(b) $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha \in J$.

(c) La familia $(\operatorname{supp}(\psi_\alpha))_{\alpha\in J}$ es localmente finita.

(d) $\displaystyle\sum_{\alpha\in J} \psi_\alpha(x) = 1$ para cada $x \in M$.

Tenemos el siguiente resultado bien conocido.

**Teorema 1.3.5.** (Existencia de particiones de la unidad) Supongamos que $M$ es una variedad suave con o sin frontera y $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in J}$ una cubierta abierta de $M$. Entonces existe una partición de la unidad de funciones suaves subordinada a $\mathscr{U}$.

*Demostración.* Aplicamos la construcción del Teorema 1.2.8, eligiendo en cada uno de los compactos que aparecen en su prueba dos bolas coordenadas regulares concéntricas

$$B_i \Subset B_i' \Subset U_{a(i)}, \qquad a(i) \in J,$$

de modo que las bolas interiores $(B_i)_{i\ge1}$ cubran $M$ y la familia de las bolas exteriores $(B_i')_{i\ge1}$ sea localmente finita. Esto se consigue escogiendo, para cada punto del compacto correspondiente, una bola cuya clausura esté contenida en otra bola del mismo dominio coordenado y tomando después una subcubierta finita. Como las bolas exteriores permanecen dentro de los abiertos $W_j$ usados en aquella prueba, conservan la finitud local.
Recordemos la construcción elemental de una función de corte. Sea

$$\vartheta(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Todas sus derivadas en el origen son nulas, de modo que $\vartheta$ es suave. Si $0 < r < R_0 < R$, la función

$$\chi_{r,R_0}(x) := \frac{\vartheta(R_0^2 - \|x\|^2)}{\vartheta(R_0^2 - \|x\|^2) + \vartheta(\|x\|^2 - r^2)}$$

es suave, vale uno en $\overline{B}_{\text{euc}}(0,r)$ y tiene soporte contenido en $\overline{B}_{\text{euc}}(0,R_0) \subset B_{\text{euc}}(0,R)$. El denominador nunca se anula. Después de trasladar el centro en las coordenadas, la restricción de esta función a $\mathbb{H}^n$ da la misma construcción para una bola relativa de una carta de frontera.
Transportando estas funciones por las cartas, y prolongándolas por cero, obtenemos $f_i \in C^\infty(M)$ tales que

$$0 \leq f_i \leq 1, \qquad f_i = 1 \text{ en } \overline{B}_i, \qquad \operatorname{supp} f_i \subseteq B_i'.$$

La prolongación es suave porque el soporte de la expresión coordenada está contenido en el interior de $B_i'$. La familia de soportes es localmente finita, así que

$$f := \sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

es una función suave. Como las $B_i$ cubren $M$, se tiene $f > 0$. Por ello $g_i := \frac{f_i}{f}$ es suave, la familia $(\operatorname{supp} g_i)$ es localmente finita y $\sum_{i=1}^{\infty} g_i = 1$.
Para $\alpha \in J$ definimos

$$\psi_\alpha := \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ a(i)=\alpha}} g_i,$$

interpretando la suma como cero si no hay índices correspondientes. Todas estas sumas son localmente finitas. Además, la unión de los soportes que intervienen en cada $\psi_\alpha$ es cerrada, por finitud local, y está contenida en $U_\alpha$; en consecuencia, $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subseteq U_\alpha$. Es inmediato que $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ y que $\sum_{\alpha \in J} \psi_\alpha = 1$. Hemos construido la partición subordinada. La restricción de las funciones de corte euclidianas prueba directamente el caso con frontera. □

Como consecuencia de la existencia de particiones de la unidad tenemos el siguiente resultado importante:

**Proposición 1.3.6.** (Existencia de funciones flan) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Para cualquier $A \subseteq M$ cerrado y cualquier $U \subseteq M$ abierto tal que $A \subseteq U$, existe una función $\psi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ en $A$ y $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq U$.

*Demostración.* Aplicamos el Teorema 1.3.5 a la cubierta $\{U, M \setminus A\}$. Sea $(\psi_0, \psi_1)$ una partición subordinada, con $\operatorname{supp} \psi_0 \subseteq U$ y $\operatorname{supp} \psi_1 \subseteq M \setminus A$. En $A$ se cumple $\psi_1 = 0$ y, como $\psi_0 + \psi_1 = 1$, se tiene $\psi_0 = 1$. Por lo tanto, $\psi := \psi_0$ posee todas las propiedades requeridas. □

Este resultado nos permite extender funciones suaves definidas en una vecindad de un punto dado a todo $M$ de la siguiente manera:

**Teorema 1.3.7.** (Extensión de funciones suaves) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y $U \subseteq M$ abierto. Si $p \in U$ y $f \in C^\infty(U)$, entonces existe $W \subseteq M$ abierto tal que $p \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$ y una función suave $\tilde{f}\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}\restriction_W = f$.

*Demostración.* Sean $U \subseteq M$ abierto, $p \in U$ y $f \in C^\infty(U)$. Como $M$ es un espacio topológico regular, existe $W \subseteq M$ abierto tal que $p \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Por la Proposición 1.3.6, existe $\psi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ en $\overline{W}$ y $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq U$. Definimos

$$\tilde{f}\colon M \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(q) = \begin{cases} \psi f(q) & \text{si } q \in U \\ 0 & \text{si } q \notin U \end{cases}.$$

Entonces $\tilde{f}$ es suave pues $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq U$ y $\tilde{f}\restriction_W = f$. □

## 1.4 El haz tangente

Aproximar un objeto no lineal mediante datos lineales es una de las ideas centrales del análisis. En el Ejemplo 1.1.5 vimos que la gráfica de una función diferenciable se aproxima, cerca de cada punto, por su plano tangente. En una variedad abstracta necesitamos conservar esa intuición sin depender de un espacio ambiente.

En cálculo multivariable, muchas variedades se pueden describir localmente como la imagen de una *parametrización*

$$\psi\colon \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

donde $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ es abierto, $k \leq n$ y $d\psi_x$ tiene rango $k$ para cada $x \in \widetilde{U}$. Por ejemplo, la esfera, el cilindro o el toro admiten descripciones de este tipo en vecindades pequeñas de cada punto.

Fijemos $x_0 \in \widetilde{U}$ y sea $p = \psi(x_0)$. La derivada de Fréchet de $\psi$ en $x_0$,

$$\mathrm{d}\psi_{x_0}\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

es un mapeo lineal que nos dice cómo cambian las coordenadas de $\mathbb{R}^n$ cuando variamos ligeramente las coordenadas de $\widetilde{U}$ alrededor de $x_0$. La imagen de $\mathrm{d}\psi_{x_0}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k$ que "mejor aproxima" a $\psi(\widetilde{U})$ cerca de $p$. Esto lo podemos ilustrar con el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.4.1.** Consideremos la parametrización $\psi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\psi(x, y) = (\cos x,\ \sin x,\ y).$$

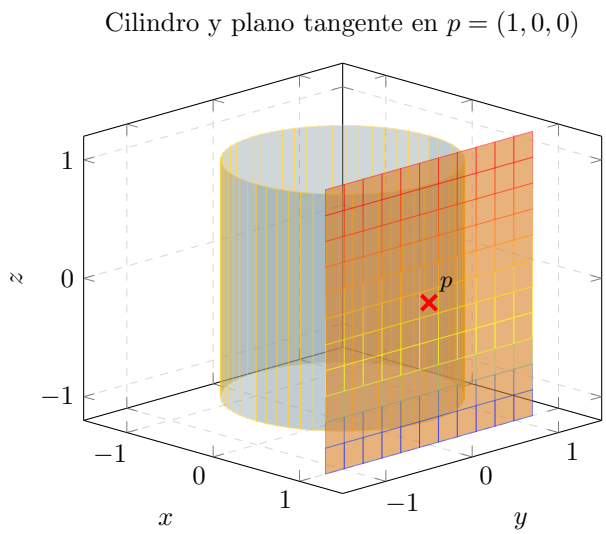
Esta función describe un cilindro de radio 1 en $\mathbb{R}^3$. Fijemos $x_0 = (0, 0)$, de modo que $p = (1, 0, 0)$. La derivada de Fréchet en $(0, 0)$ es

$$\mathrm{d}\psi_{(0,0)}(h_1, h_2) = (-\sin 0 \cdot h_1,\ \cos 0 \cdot h_1,\ h_2) = (0,\ h_1,\ h_2).$$

Tenemos que

$$\operatorname{Im}(\mathrm{d}\psi_{(0,0)}) := \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2, que al trasladarlo por el vector $(1, 0, 0)$ corresponde al plano tangente al cilindro en el punto $(1, 0, 0)$, dado por $\Pi := \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ como lo ilustra la siguiente imagen:




Este subespacio tendrá como base

$$\beta = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0), \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0) \right\} = \{(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Bajo estas hipótesis nos referiremos a $\mathrm{Im}(d\psi_{x_0})$ como el espacio tangente a $\psi(\widetilde{U})$ en $p = \psi(x_0)$.
La herramienta local que permite precisar esta descripción es el siguiente teorema de cálculo diferencial.

**Teorema 1.4.2.** (Teorema del rango) Sea $f\colon \widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^1$, y sea $x_0 \in \widetilde{U}$. Supongamos que existe $r > 0$, con $B_{\mathrm{euc}}(x_0, r) \subseteq \widetilde{U}$, tal que $df_x$ tiene rango constante igual a $m$ para todo $x \in B_{\mathrm{euc}}(x_0, r)$. Entonces existen abiertos $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ y $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, con $x_0 \in \widetilde{V}_1$, $0 \in \widetilde{V}_2$, $f(x_0) \in V_1$ y $0 \in V_2$, y existen difeomorfismos de clase $C^1$

$$\Phi\colon \widetilde{V}_2 \longrightarrow \widetilde{V}_1, \qquad \Psi\colon V_2 \longrightarrow V_1,$$

tales que

$$\Psi^{-1} \circ f \circ \Phi(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

En particular, cerca de $x_0$, el mapeo $f$ se escribe, en coordenadas adecuadas del dominio y del codominio, como la proyección sobre las primeras $m$ coordenadas seguida de la inclusión natural en $\mathbb{R}^n$.

*Demostración.* Aplicaremos el Lema 1.5.5, cuya demostración se obtiene directamente mediante contracciones y no utiliza el teorema del rango. Después de permutar las coordenadas del dominio y del codominio, podemos suponer que la menor formada por las primeras $m$ filas y columnas de $df_{x_0}$ es invertible. Escribamos $f = (f^1, \ldots, f^n)$ y definamos

$$H(x) := (f^1(x), \ldots, f^m(x), x^{m+1}, \ldots, x^k).$$

El diferencial $dH_{x_0}$ es invertible. Por el Lema 1.5.5, después de restringir el dominio, $\widehat{H}(x) := H(x) - H(x_0)$

es un difeomorfismo sobre una vecindad de 0. Sea $\Phi = \widehat{H}^{-1}$. En las nuevas coordenadas,

$$f \circ \Phi(y) = \big(y^1 + f^1(x_0), \dots, y^m + f^m(x_0), h^{m+1}(y), \dots, h^n(y)\big).$$

Las primeras $m$ filas de su matriz jacobiana contienen el bloque $(I_m \ 0)$. Como el rango total es $m$, necesariamente

$$\frac{\partial h^a}{\partial y^b} = 0, \qquad a = m+1, \dots, n, \quad b = m+1, \dots, k.$$

Restringimos la vecindad a una caja. Al integrar las derivadas anteriores sobre los segmentos paralelos a los últimos $k-m$ ejes, se concluye que cada $h^a$ depende sólo de $y^1, \dots, y^m$.
Sean $\widehat{h}^a$ las funciones resultantes y definamos, cerca de $f(x_0)$,

$$K(z) := \big(z^1 - f^1(x_0), \dots, z^m - f^m(x_0), z^{m+1} - \widehat{h}^{m+1}(z^1 - f^1(x_0), \dots, z^m - f^m(x_0)), \dots, z^n - \widehat{h}^n(z^1 - f^1(x_0), \dots, z^m - f^m(x_0))\big).$$

Este mapeo es un difeomorfismo: su inversa se obtiene sumando $f^a(x_0)$ en las primeras $m$ coordenadas y, en las restantes, las funciones $\widehat{h}^a$ evaluadas en esas primeras coordenadas normalizadas. Más precisamente,

$$K^{-1}(w) = \big(w^1 + f^1(x_0), \dots, w^m + f^m(x_0), w^{m+1} + \widehat{h}^{m+1}(w^1, \dots, w^m), \dots, w^n + \widehat{h}^n(w^1, \dots, w^m)\big).$$

Por construcción,

$$K \circ f \circ \Phi(y) = (y^1, \dots, y^m, 0, \dots, 0).$$

Tomando $\Psi = K^{-1}$ y restringiendo los abiertos para que todas las composiciones estén definidas, se obtiene el enunciado. □

**Proposición 1.4.3.** (Descripción local por curvas) Sea $\psi\colon \widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1$, sea $x_0 \in \widetilde{U}$ y supongamos únicamente que $d\psi_{x_0}$ tiene rango $k$. Entonces existe una vecindad abierta $V \subseteq \widetilde{U}$ de $x_0$ tal que $\psi \restriction_V \colon V \to \mathbb{R}^n$ es un encaje de clase $C^1$. Si $p = \psi(x_0)$, para cualquier vecindad de este tipo se cumple

$$\operatorname{Im}(d\psi_{x_0}) = \left\{ \gamma'(0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n \text{ es de clase } C^1, \quad \gamma(0) = p, \\ \gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \psi(V) \text{ para algún } \varepsilon > 0 \end{array} \right\}.$$

*Demostración.* Como $d\psi_{x_0}$ tiene rango $k$, alguna menor de orden $k$ de su matriz jacobiana no se anula. Por continuidad, la misma menor sigue sin anularse en una vecindad de $x_0$; allí el rango es constantemente $k$. El Teorema 1.4.2, seguido de una restricción de la vecindad, da abiertos $V \ni x_0$ y $W \ni p$ y coordenadas en los que

$$\psi \restriction_V (x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Por lo tanto, $\psi \restriction_V$ es una inmersión inyectiva y un homeomorfismo sobre $\psi(V)$ con la topología inducida; es decir, es un encaje de clase $C^1$.
Sea $v = d\psi_{x_0}(w)$. Si $w = 0$, la curva constante representa a $v$. Si $w \neq 0$, escogemos $\varepsilon > 0$ de modo que $x_0 + tw \in V$ cuando $|t| < \varepsilon$ y ponemos $\gamma(t) = \psi(x_0 + tw)$. Entonces $\gamma'(0) = v$.
Recíprocamente, si $\gamma$ es una curva como en el enunciado, el inverso $C^1$ del encaje local permite definir

$$\delta = (\psi \restriction_V)^{-1} \circ \gamma.$$

La regla de la cadena da $\gamma'(0) = d\psi_{x_0}(\delta'(0))$, y por ello $\gamma'(0) \in \operatorname{Im}(d\psi_{x_0})$. □

**Observación 1.4.4.** (Por qué la afirmación es local) No se puede reemplazar $\psi(V)$ por toda la imagen $\psi(\widetilde{U})$. Una inmersión puede tener autointersecciones: una curva que pasa por $p = \psi(x_0)$ a lo largo de otra rama puede tener una velocidad que no pertenece a $\operatorname{Im}(d\psi_{x_0})$. La elección de $V$ separa la rama determinada por $x_0$.

En lo sucesivo, consideraremos nuevamente variedades en $\mathbb{R}^n$ pues tomar $k \leq n$ y considerarla de dimensión $k$ se utilizó para mostrar qué sucedía cuando la variedad estaba en un espacio ambiente posiblemente más grande.

La motivación anterior conduce a una definición intrínseca que funciona sin cambios en los puntos interiores y en los puntos de frontera.

**Definición 1.4.5.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $p \in M$. Una **derivación en** $p$ es un mapeo lineal $v\colon C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$. El conjunto de todas las derivaciones en $p$ se denota por $T_pM$ y se llama el **espacio tangente a** $M$ **en** $p$. Sus elementos son los vectores tangentes en $p$.

**Observación 1.4.6.** Con la suma y el producto por escalares definidos punto a punto, $T_pM$ es un espacio vectorial real. Si $v \in T_pM$, entonces $v(1) = 0$ y, por lo tanto, $v(c) = 0$ para toda función constante $c$.

Para puntos interiores recuperamos la descripción geométrica mediante curvas bilaterales.

**Definición 1.4.7.** (Espacio tangente definido por curvas) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $p \in \operatorname{Int} M$. Consideramos las curvas suaves $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ con $\gamma(0) = p$. Dos de ellas son equivalentes si, para alguna carta interior $\varphi$ alrededor de $p$, se cumple $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$. La regla de la cadena muestra que esta condición no depende de la carta. Denotamos la clase de $\gamma$ por $[\gamma]$.

**Lema 1.4.8.** (Localidad de las derivaciones) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $p \in M$ y sea $v \in T_pM$. Si $f, g \in C^\infty(M)$ coinciden en una vecindad de $p$, entonces $v(f) = v(g)$. En consecuencia, $v$ puede evaluarse sin ambigüedad en el germen de una función suave definida sólo cerca de $p$.

*Demostración.* Pongamos $h = f - g$ y elijamos un abierto $W$ que contenga a $p$ y en el cual $h = 0$. Por la Proposición 1.3.6, existe $\chi \in C^\infty(M)$ con $\chi(p) = 1$ y $\operatorname{supp}\chi \subseteq W$. Como $\chi h = 0$ y $h(p) = 0$, la regla de Leibniz da

$$0 = v(\chi h) = \chi(p)v(h) + h(p)v(\chi) = v(h).$$

Por lo tanto, $v(f) = v(g)$. Si una función está definida únicamente cerca de $p$, el Teorema 1.3.7 proporciona una extensión global que coincide con ella en una vecindad menor; la igualdad obtenida muestra que el valor no depende de la extensión. □

La identificación entre curvas y derivaciones utilizará las dos fórmulas de cálculo euclidiano que siguen.

**Teorema 1.4.9.** (Teorema de Taylor con multiíndices) Sean $f \in C^{k+1}(U)$, $a \in U$. Definimos el polinomio de Taylor asociado a $f$ de orden $k$ centrado en $a \in U$ como

$$P_{k,a,f}(x) := \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha,$$

donde $\frac{1}{\alpha!} := \frac{1}{\alpha_1!} \cdots \frac{1}{\alpha_n!}$. Definimos $R_{k,a,f}(x) = f(x) - P_{k,a,f}(x)$ y lo llamamos el residuo de orden $k$ de $f$ en $a$. Entonces:

(a) Si $x \in U$ es tal que $[a,x] \subseteq U$, entonces existe $\xi \in [a,x]$ tal que

$$R_{k,a,f}(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f\left(\xi\right)(x-a)^\alpha.$$

(b) Si $x \in U$ es tal que $[a,x] \subseteq U$, entonces

$$R_{k,a,f}(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{k+1}{\alpha!} (x-a)^\alpha \int_0^1 (1-t)^k D^\alpha f(a+t(x-a))dt.$$

(c) Se tiene

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{k,a,f}(x)}{\|x-a\|^k} = \lim_{x\to a} \frac{R_{k,a,f}(x)}{\|x-a\|^k} = 0$$

y $P_{k,a,f}(x)$ es el único polinomio de grado menor o igual a $k$ con esta propiedad.

*Demostración.* Fijemos $x \in U$ con $[a,x] \subseteq U$, pongamos $h = x - a$ y definamos $\gamma(t) := f(a+th)$. Por inducción sobre $j$, la regla de la cadena, el Teorema de Clairaut–Schwarz y la fórmula multinomial dan

$$\gamma^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} D^\alpha f(a+th)h^\alpha, \qquad 0 \leq j \leq k+1. \tag{1.1}$$

En efecto, si la igualdad vale para $j$, al derivar se obtiene

$$\sum_{|\alpha|=j} \sum_{r=1}^{n} \frac{j!}{\alpha!} D^{\alpha+e_r} f(a+th)h^{\alpha+e_r}.$$

Para un multiíndice $\beta$ de longitud $j+1$, el coeficiente del término correspondiente es

$$\sum_{r:\beta_r>0} \frac{j!}{(\beta-e_r)!} = \frac{j!}{\beta!} \sum_{r=1}^{n} \beta_r = \frac{(j+1)!}{\beta!},$$

lo que cierra la inducción.

La fórmula de Taylor unidimensional con resto integral, obtenida mediante aplicaciones sucesivas del teo-

rema fundamental del cálculo, afirma que

$$\gamma(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma^{(j)}(0)}{j!} + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \gamma^{(k+1)}(t)\, dt.$$

Al sustituir (1.1), la suma finita es $P_{k,a,f}(x)$, y el último término es

$$\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{k+1}{\alpha!} h^\alpha \int_0^1 (1-t)^k D^\alpha f(a+th)\, dt.$$

Esto prueba (2). El teorema del valor medio para integrales proporciona $\theta \in [0,1]$ tal que el resto unidimensional es $\gamma^{(k+1)}(\theta)/(k+1)!$. Al usar de nuevo (1.1) y tomar $\xi = a + \theta h$, se obtiene (1).
Las derivadas de orden $k+1$ están acotadas en una bola cerrada centrada en $a$ y contenida en $U$. La fórmula integral implica, para $x$ próximo a $a$,

$$|R_{k,a,f}(x)| \le C\|x-a\|^{k+1},$$

y prueba el límite de (3). Si $Q$ es otro polinomio de grado a lo más $k$ con esa propiedad, entonces

$$\frac{(Q - P_{k,a,f})(x)}{\|x-a\|^k} \longrightarrow 0.$$

Si $S := Q - P_{k,a,f} \neq 0$, sea $S_j$ su primera parte homogénea no nula, de grado $j \le k$, y elijamos $v$ con $S_j(v) \neq 0$. Entonces

$$\frac{S(a+tv)}{\|tv\|^k} = \frac{t^j S_j(v) + O(t^{j+1})}{t^k \|v\|^k}$$

no converge a cero cuando $t \to 0^+$: no queda acotado si $j < k$, y converge a $S_k(v)/\|v\|^k \neq 0$ si $j = k$. Esta contradicción prueba la unicidad. □

**Lema 1.4.10.** (Hadamard finito-dimensional con resto integral) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, sean $x_0, x \in U$ y supongamos que $x_0 + t(x - x_0) \in U$ para todo $t \in [0,1]$. Si $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es de clase $C^1$, entonces

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^1 DF\big(x_0 + t(x-x_0)\big)[x - x_0], dt. \tag{1.2}$$

En particular,

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{j=1}^{n} (x^j - x_0^j) F_j(x, x_0), \qquad F_j(x, x_0) := \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x^j}\big(x_0 + t(x-x_0)\big), dt. \tag{1.3}$$

Si $F$ es de clase $C^2$, $F(x_0) = 0$ y $DF(x_0) = 0$, entonces

$$F(x) = \sum_{j,k=1}^{n} (x^j - x_0^j)(x^k - x_0^k) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^k}\big(x_0 + t(x-x_0)\big), dt. \tag{1.4}$$

Las mismas fórmulas valen para una familia $F(z,x)$ que dependa suavemente de un parámetro finito-dimensional $z$: las funciones obtenidas mediante las integrales anteriores son suaves conjuntamente en $(z, x, x_0)$ mientras los segmentos considerados permanezcan en el dominio.

*Demostración.* Definamos $g(t) := F(x_0 + t(x - x_0))$. La regla de la cadena da

$$g'(t) = DF\big(x_0 + t(x - x_0)\big)[x - x_0].$$

El teorema fundamental del cálculo, aplicado componente a componente en $\mathbb{R}^N$, prueba $F(x) - F(x_0) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt$ y, al escribir el diferencial en la base canónica, produce (1.3).
Supongamos ahora $F(x_0) = 0$ y $DF(x_0) = 0$. Para cada $t \in [0,1]$, la fórmula anterior aplicada a $DF$ sobre el subsegmento que une $x_0$ con $x_0 + t(x - x_0)$ da

$$DF\big(x_0 + t(x - x_0)\big)[x - x_0] = t \int_0^1 D^2F\big(x_0 + st(x - x_0)\big)[x - x_0, x - x_0]\,ds.$$

Sustituimos esta identidad en (1.2). El cambio de variable $\tau = st$ y el Teorema de Fubini sobre el triángulo $0 \le \tau \le t \le 1$ producen

$$F(x) = \int_0^1 (1 - \tau) D^2F\big(x_0 + \tau(x - x_0)\big)[x - x_0, x - x_0]\,d\tau,$$

que es exactamente (1.4) al desarrollar la forma bilineal en coordenadas. La afirmación con parámetros se sigue derivando bajo la integral sobre el intervalo compacto $[0,1]$. □

**Proposición 1.4.11.** (Equivalencia entre curvas y derivaciones) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $p \in \operatorname{Int} M$. El mapeo

$$\{\text{clases de curvas bilaterales en } p\} \longrightarrow T_pM, \qquad [\gamma] \longmapsto v_{[\gamma]},$$

donde

$$v_{[\gamma]}(f) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(M),$$

es una biyección canónica.

*Demostración.* Si $[\gamma_1] = [\gamma_2]$, elegimos una carta interior $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ alrededor de $p$. Para $F = f \circ \varphi^{-1}$, la regla de la cadena da

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_i)(t)\Big|_{t=0} = DF(\varphi(p))[(\varphi \circ \gamma_i)'(0)], \qquad i = 1, 2.$$

Las velocidades coordenadas son iguales, de modo que $v_{[\gamma]}$ está bien definido. La linealidad y la regla del producto muestran que

$$v_{[\gamma]}(\lambda f + \mu g) = \lambda v_{[\gamma]}(f) + \mu v_{[\gamma]}(g), \qquad v_{[\gamma]}(fg) = f(p)v_{[\gamma]}(g) + g(p)v_{[\gamma]}(f).$$

Por lo tanto, $v_{[\gamma]} \in T_pM$.
Escribamos $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Por el Lema 1.4.8, las funciones coordenadas pueden evaluarse como gérmenes, y

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = \big(v_{[\gamma]}(x^1), \dots, v_{[\gamma]}(x^n)\big).$$

Así, $v_{[\gamma_1]} = v_{[\gamma_2]}$ implica $[\gamma_1] = [\gamma_2]$, y el mapeo es inyectivo.

Para la suprayectividad, sea $v \in T_pM$, pongamos $x_0 = \varphi(p)$ y

$$w^i := v(x^i), \qquad w = (w^1, \dots, w^n).$$

Como $p$ es interior, para $|t|$ pequeño está definida la curva

$$\gamma(t) := \varphi^{-1}(x_0 + tw),$$

y $(\varphi \circ \gamma)'(0) = w$. Sea $f \in C^\infty(M)$ y escribamos $F = f \circ \varphi^{-1}$. Aplicamos el Teorema de Taylor con residuo integral en el punto $x_0$:

$$R_{1,x_0,F}(x) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha \int_0^1 (1-t) D^\alpha F\big(x_0 + t(x - x_0)\big)\, dt,$$

y por lo tanto

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_i^{(0)}) + R_{1,x_0,F}(x).$$

Tomando $x = \varphi(q)$ para $q$ cercano a $p$ obtenemos:

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)\big(x^i(q) - x^i(p)\big) + \underbrace{R_{1,x_0,F}\big(\varphi(q)\big)}_{=:\, r(q)}.$$

Podemos reescribir

$$r(q) = \sum_{|\alpha|=2} \big(\varphi(q) - \varphi(p)\big)^\alpha h_\alpha(q), \qquad h_\alpha(q) := \frac{2}{\alpha!} \int_0^1 (1-t) D^\alpha F\big(\varphi(p) + t(\varphi(q) - \varphi(p))\big)\, dt,$$

donde cada $h_\alpha$ es suave y está bien definida cerca de $p$.
El vector $v$ se anula sobre el término de resto $r$. para cada multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| = 2$, sea

$$m_\alpha(q) := \big(\varphi(q) - \varphi(p)\big)^\alpha = \prod_{i=1}^n \big(x^i(q) - x^i(p)\big)^{\alpha_i}.$$

Entonces $m_\alpha(p) = 0$ y $m_\alpha$ puede verse como producto de al menos dos factores que se anulan en $p$ pues $|\alpha| = 2$, lo que fuerza a que dos $\alpha_j$ sean 1 o uno sea 2. Por la regla de Leibniz, aplicada recursivamente,

$$v\big(m_\alpha\big) = 0 \quad \text{y} \quad v\big(m_\alpha h_\alpha\big) = m_\alpha(p) v(h_\alpha) + h_\alpha(p) v(m_\alpha) = 0.$$

Sumando sobre $|\alpha| = 2$, concluimos que $v(r) = 0$. Aplicando $v$ a la descomposición de $f$ tenemos que

$$v(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^i}(x_0) v\big(x^i\big).$$

Por otro lado,

$$v_{[\gamma]}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} F(x_0 + tw)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial F}{\partial x^i}(x_0),$$

y como $w^i = v(x^i)$, se tiene $v(f) = v_{[\gamma]}(f)$ para toda $f \in C^\infty(M)$. Así, $v = v_{[\gamma]}$ y toda derivación proviene de una clase de equivalencia de curvas, por lo que concluimos que el mapeo

$$\{\text{clases de curvas bilaterales en } p\} \longrightarrow T_pM, \qquad [\gamma] \longmapsto v_{[\gamma]},$$

es biyectivo cuando $p \in \operatorname{Int} M$. □

En un punto de frontera esta equivalencia deja de ser válida para curvas bilaterales contenidas en $M$. Volveremos a esta diferencia después de describir la base coordenada de $T_pM$.

Hay otras formas equivalentes de describir el espacio tangente. Una de ellas emplea los *gérmenes de funciones suaves*, los cuales reflejan la naturaleza local de la derivada.

**Definición 1.4.12.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $p \in M$. Definimos una relación de equivalencia en $C^\infty(M)$ mediante

$$f \sim g \iff \text{existe una vecindad } U \text{ de } p \text{ tal que } f\restriction_U = g\restriction_U.$$

A la clase de equivalencia de $f$ la denotamos por $[f]$ y la llamamos el *germen de $f$ en $p$*. El conjunto de todas estas clases se denota por $C^\infty_p(M)$ y se le conoce como el *anillo de gérmenes de funciones suaves en $p$*.

**Proposición 1.4.13.** (Derivaciones del anillo de gérmenes) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $p \in M$. Existe un isomorfismo lineal canónico

$$T_pM \longrightarrow \operatorname{Der}\big(C^\infty_p(M), \mathbb{R}\big), \qquad v \longmapsto \big([f] \longmapsto v(f)\big).$$

Su inversa lleva una derivación $D$ de gérmenes en la derivación $v_D(f) := D([f])$ de $C^\infty(M)$.

*Demostración.* La suma y el producto de gérmenes se definen mediante $[f] + [g] = [f + g]$ y $[f][g] = [fg]$; estas operaciones no dependen de los representantes porque la igualdad de gérmenes se conserva al sumar y multiplicar funciones. También $f(p)$ depende sólo de $[f]$. Por lo tanto, la regla

$$D([f][g]) = f(p)D([g]) + g(p)D([f])$$

está bien definida.

Si $v \in T_pM$, el Lema 1.4.8 muestra que $\widetilde{v}([f]) := v(f)$ no depende del representante. La linealidad y la regla de Leibniz de $\widetilde{v}$ son las de $v$. Recíprocamente, si $D \in \operatorname{Der}(C^\infty_p(M), \mathbb{R})$, entonces $v_D(f) := D([f])$ es lineal y

$$v_D(fg) = D([f][g]) = f(p)v_D(g) + g(p)v_D(f),$$

así que $v_D \in T_pM$. Finalmente, $v_{\widetilde{v}}(f) = \widetilde{v}([f]) = v(f)$ y $\widetilde{v_D}([f]) = v_D(f) = D([f])$. Las dos construcciones son inversas y no requieren ninguna elección. □

Gracias a la noción de espacio tangente, podemos dar ahora la de mapeo tangente o diferencial de una función suave.

**Definición 1.4.14.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera y $F\colon M \longrightarrow N$ un mapeo suave. Para cada $p \in M$ definimos el mapeo

$$dF_p\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$$

llamado el **mapeo tangente o diferencial de** $F$ **en** $p$ mediante

$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F), \qquad v \in T_pM, \quad f \in C^\infty(N).$$

En efecto, $dF_p(v)$ es lineal y, para $f, g \in C^\infty(N)$,

$$dF_p(v)(fg) = f(F(p))dF_p(v)(g) + g(F(p))dF_p(v)(f),$$

de modo que pertenece a $T_{F(p)}N$.

El mapeo tangente o diferencial tiene las siguientes propiedades:

**Proposición 1.4.15.** Sean $M$, $N$ y $P$ variedades suaves con o sin frontera y $F\colon M \longrightarrow N$, $G\colon N \longrightarrow P$ mapeos suaves. Sea $p \in M$.

(a) $dF_p\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ es lineal.

(b) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p\colon T_pM \longrightarrow T_{G(F(p))}P$.

(c) $d(\mathrm{Id}_M)_p = \mathrm{Id}_{T_pM}$.

(d) Si $F$ es un difeomorfismo, entonces $dF_p\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ es un isomorfismo y

$$(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}.$$

*Demostración.* La linealidad se obtiene directamente de la linealidad de cada derivación. Si $v \in T_pM$ y $h \in C^\infty(P)$, entonces

$$d(G \circ F)_p(v)(h) = v(h \circ G \circ F) = dF_p(v)(h \circ G) = dG_{F(p)}(dF_p(v))(h),$$

lo que prueba la regla de la cadena. La fórmula para la identidad es el caso inmediato $h \circ \mathrm{Id}_M = h$. Si $F$ es un difeomorfismo, aplicamos la regla de la cadena a $F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}_M$ y a $F \circ F^{-1} = \mathrm{Id}_N$; así, $d(F^{-1})_{F(p)}$ es la inversa de $dF_p$. □

Como $T_pM$ es un espacio vectorial, es conveniente tener una base para describirlo. Ya que en el caso euclidiano, $T_p\mathbb{R}^n$ resulta ser isomorfo a $\mathbb{R}^n$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$ y los vectores tangentes se pueden pensar como las derivadas direccionales en $p$ en la dirección de $v \in T_p\mathbb{R}^n$, tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 1.4.16.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera de dimensión $n$ y sea $p \in M$. Entonces $T_pM$ es un espacio vectorial de dimensión $n$ y para cada carta suave $(U, \varphi)$ tal que $p \in U$, con $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, los vectores

$$\partial_i|_p(f) := \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x^i}(\varphi(p)), \qquad F = f \circ \varphi^{-1},$$

forman una base de $T_pM$. Aquí $\widetilde{F} = F$ en una carta interior; en una carta de frontera, $\widetilde{F}$ es cualquier extensión suave de $F$ a una vecindad euclidiana de $\varphi(p)$.

*Demostración.* En una carta de frontera, la definición de función suave proporciona la extensión $\widetilde{F}$. Si dos extensiones coinciden en el abierto relativo $\varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$, sus derivadas parciales coinciden en los puntos interiores y, por continuidad, también en la frontera. Por ello la fórmula no depende de la extensión. La linealidad y la regla de Leibniz euclidianas muestran que cada $\partial_i|_p$ es una derivación en $p$.
Sea $v \in T_pM$ y escribamos $x_0 = \varphi(p)$. Restringimos la carta, si es necesario, de modo que los segmentos que parten de $x_0$ permanezcan en su imagen. El Lema de Hadamard 1.4.10, aplicado a una extensión euclidiana cuando $p \in \partial M$, da funciones suaves $F_i$ tales que, cerca de $x_0$,

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i) F_i(x), \qquad F_i(x_0) = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x^i}(x_0).$$

El Lema 1.4.8 permite aplicar $v$ a esta identidad de gérmenes. Como cada $x^i - x_0^i$ se anula en $p$, obtenemos

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x^i}(x_0) = \left( \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\, \partial_i|_p \right)(f).$$

Así, los vectores coordenados generan $T_pM$. Si $\sum_{i=1}^{n} a^i\, \partial_i|_p = 0$, al evaluar en el germen de $x^j$ resulta $a^j = 0$. Son, pues, linealmente independientes y forman una base; en particular, $\dim T_pM = n$.
Si $(y^1, \dots, y^n)$ es otro sistema coordenado alrededor de $p$, la expansión que acabamos de probar, aplicada a $v = \partial_i|_p$, produce la fórmula de cambio de base

$$\partial_i|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\, \partial_j\Big|_p . \tag{1.5}$$

□

**Observación 1.4.17.** (Curvas bilaterales en la frontera) Supongamos que $p \in \partial M$ y tomemos una carta de frontera con $\mathbb{H}^n = \{x^n \geq 0\}$ y $x^n(p) = 0$. Si $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es suave y $\gamma(0) = p$, la función $t \mapsto x^n(\gamma(t))$ es no negativa y alcanza un mínimo en 0; por lo tanto, $(x^n \circ \gamma)'(0) = 0$. Las velocidades de curvas bilaterales contenidas en $M$ recorren exactamente el subespacio coordenado

$$\operatorname{span}\left\{ \partial_1|_p, \dots, \partial_{n-1}|_p \right\},$$

que más adelante se identificará con $T_p\partial M$, y no todo $T_pM$. La inclusión opuesta se obtiene usando en la carta las curvas $t \mapsto x_0 + t(w^1, \dots, w^{n-1}, 0)$.
Con esta convención, un vector $v = v^i\, \partial_i|_p$ apunta hacia dentro si $v^n > 0$, hacia fuera si $v^n < 0$ y es tangente a la frontera si $v^n = 0$. El signo no depende de la carta: para dos coordenadas normales de frontera $x^n$ y $y^n$, el Lema de Hadamard da $y^n = a x^n$ en una vecindad relativa de $p$, con $a(p) > 0$. Por esta razón la definición principal de $T_pM$ en un punto de frontera es la definición mediante derivaciones, no la descripción mediante curvas bilaterales.

Esta notación es sugerente pues lo que está haciendo en esencia es trasladar el concepto de derivada parcial del caso euclidiano al caso en variedades. Esto se puede formalizar con la siguiente definición:

**Definición 1.4.18.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $(U,\varphi)$ una carta suave de $M$, con $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$, y sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Dado un multiíndice $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, definimos:

(a) Para cada $p \in U$, la derivada parcial de $f$ asociada a $\alpha$ en $p$ por $\partial^\alpha f(p) := \partial^\alpha (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$.

(b) La función derivada parcial de $f$ asociada a $\alpha$ en $U$ por $\partial^\alpha f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $p \mapsto \partial^\alpha f(p)$.

El haz tangente que da nombre a esta sección, se define como sigue:

**Definición 1.4.19.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Definimos el **haz tangente de** $M$ como

$$TM := \coprod_{p\in M} T_pM$$

Los elementos de $TM$ son de la forma $(p,v)$ con $p \in M$, $v \in T_pM$. Generalmente se suelen emplear las siguientes notaciones para referirse a un elemento de $TM$: $(p,v)$, $v_p$ y $v$, donde en el último caso, no se desea hacer énfasis en el punto base. Por la Proposición 1.4.16, sabemos que todo elemento de $T_pM$ se puede escribir de la forma (ocupando notación de Einstein):

$$v_p = v^i \partial_i \Big|_p ,$$

lo cual nos da otra forma de expresar los elementos de $TM$.

Al haz tangente se le puede dar una estructura de variedad suave con o sin frontera dependiendo del tipo de variedad con la que partamos; la construcción se puede hacer como lo sugiere la siguiente proposición:

**Proposición 1.4.20.** Si $M$ es una $n$-variedad suave con o sin frontera, el haz tangente $TM$ tiene una topología natural y una estructura suave que lo vuelven una $2n$-variedad suave con o sin frontera. Con respecto a esta estructura suave, la proyección $\pi\colon TM \longrightarrow M$ es suave. La estructura suave es tal que las cartas coordenadas están dadas de la siguiente manera:

(a) Si $(U,\varphi)$ es una carta interior de $M$, entonces $\widetilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\widetilde{\varphi}\left(p, v^i \partial_i \Big|_p\right) = (x^1(p),\dots,x^n(p),v^1,\dots,v^n)$$

cumple que $(\pi^{-1}(U),\widetilde{\varphi})$ es una carta interior de $TM$.

(b) Si $(U,\varphi)$ es una carta frontera de $M$, entonces $\widetilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{H}^{2n}$ dada por

$$\widetilde{\varphi}\left(p, v^i \partial_i \Big|_p\right) = (v^1,\dots,v^n,x^1(p),\dots,x^n(p))$$

cumple que $(\pi^{-1}(U),\widetilde{\varphi})$ es una carta frontera de $TM$.

*Demostración.* Para cada carta $(U,\varphi)$, el mapeo $\widetilde{\varphi}$ es biyectivo sobre $\varphi(U)\times\mathbb{R}^n$ en el caso interior y sobre $\mathbb{R}^n\times\varphi(U)$ en el caso de frontera; este último conjunto es abierto en $\mathbb{H}^{2n}$ con la convención usada en el enunciado. Si $(V,\psi)$ es otra carta, escribimos $y=\psi\circ\varphi^{-1}(x)$. La fórmula de cambio de base (1.5) muestra que, en el solapamiento, las componentes de un vector satisfacen

$$w^j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x)v^i.$$

Por lo tanto, salvo el intercambio explícito del orden de los dos bloques en una carta de frontera, el cambio de coordenadas de $TM$ es

$$(x,v)\longmapsto\big(y(x),Dy(x)v\big).$$

Es suave, y su inversa se obtiene reemplazando $y$ por $x(y)$. En un solapamiento entre una carta interior y una de frontera no aparecen puntos de $\partial M$, de modo que la misma fórmula se interpreta en abiertos euclidianos.

El lema de cartas suaves probado anteriormente, aplicado a esta familia, proporciona una única topología Hausdorff y segundo numerable y la estructura suave indicada sobre $TM$. En estas coordenadas la proyección es $(x,v)\mapsto x$ (con el intercambio de bloques correspondiente en la frontera), luego es suave. Si $M$ no tiene frontera todas las cartas son interiores; si la tiene, las cartas de frontera descritas arriba determinan la frontera de $TM$. Esto completa también la unicidad de la estructura para la cual las cartas del enunciado son suaves. □

## 1.5 Inmersiones, submersiones y encajes

Como en el caso euclidiano, el diferencial de una función entre variedades, que juega el papel de la derivada usual, describe la mejor aproximación lineal de un mapeo suave cerca de cada punto. Por ello, muchas propiedades locales de un mapeo pueden estudiarse a partir de las propiedades lineales de su diferencial. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.5.1.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera y sea $F\colon M\longrightarrow N$ un mapeo suave. Definimos el rango de $F$ en un punto $p\in M$ como el rango de la transformación lineal

$$dF_p\colon T_pM\longrightarrow T_{F(p)}N.$$

Equivalentemente, el rango de $F$ en $p$ es la dimensión de la imagen de $dF_p$. En coordenadas, este número coincide con el rango de la matriz jacobiana de una representación coordenada de $F$. Si $F$ tiene el mismo rango en cada punto de su dominio, decimos que $F$ tiene rango constante.

Las nociones de inmersión y submersión generalizan, respectivamente, la inyectividad y la sobreyectividad de los mapeos lineales al contexto suave.

**Definición 1.5.2.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves sin frontera y sea $F\colon M\longrightarrow N$ un mapeo suave. Decimos que:

(a) $F$ es una inmersión si $dF_p$ es inyectivo para todo $p\in M$;

(b) $F$ es una submersión si $dF_p$ es sobreyectivo para todo $p \in M$.

Las propiedades de ser inmersión o submersión son locales. Si el diferencial de un mapeo es inyectivo o sobreyectivo en un punto, entonces la misma propiedad se preserva en alguna vecindad abierta de dicho punto.

**Proposición 1.5.3.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves sin frontera, sea $F\colon M \longrightarrow N$ un mapeo suave y sea $p \in M$.

(a) Si $dF_p$ es inyectivo, entonces existe una vecindad abierta $U$ de $p$ tal que $F\restriction_U$ es una inmersión.

(b) Si $dF_p$ es sobreyectivo, entonces existe una vecindad abierta $U$ de $p$ tal que $F\restriction_U$ es una submersión.

*Demostración.* En cartas alrededor de $p$ y $F(p)$, el diferencial está representado por la matriz jacobiana. Si $dF_p$ es inyectivo y $m = \dim M$, alguna menor de orden $m$ tiene determinante distinto de cero. Por continuidad, la misma menor sigue siendo no singular en una vecindad de $p$; allí el rango es $m$, de modo que el diferencial es inyectivo. Si $dF_p$ es sobreyectivo y $n = \dim N$, se aplica el mismo argumento a una menor de orden $n$, y el diferencial es sobreyectivo en una vecindad de $p$. □

A continuación presentamos algunos ejemplos de inmersiones y submersiones.

**Ejemplo 1.5.4.** (a) Si $M_1, \ldots, M_k$ son variedades suaves sin frontera, entonces cada proyección $\pi_i\colon M_1 \times \cdots \times M_k \longrightarrow M_i$ es una submersión. Para cada $(p_1, \ldots, p_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k$, el diferencial satisface $d(\pi_i)_{(p_1,\ldots,p_k)}(v_1, \ldots, v_k) = v_i$. En efecto, dado $w \in T_{p_i}M_i$, el vector $(0, \ldots, 0, w, 0, \ldots, 0)$ del espacio tangente al producto se transforma en $w$; por lo tanto, el diferencial es sobreyectivo.

(b) El mapeo $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dado por $F(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$, con $m \leq n$, es una inmersión. Su diferencial coincide con la inclusión lineal natural $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, la cual es inyectiva.

(c) El mapeo $G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $G(x, y, z) = (x, y)$, es una submersión, pues $dG_{(x,y,z)}(a, b, c) = (a, b)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, y este mapeo lineal es sobreyectivo.

(d) El mapeo $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, es una inmersión, ya que $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(e) El mapeo $H\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $H(x, y) = x^2 + y^2$, no es una submersión en todo $\mathbb{R}^2$, pues $dH_{(0,0)} = 0$. Sin embargo, sí es una submersión en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(f) Consideremos el mapeo $K\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $K(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, este mapeo corresponde a $z \mapsto z^2$. Un cálculo directo muestra que $DK(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $4(x^2 + y^2)$. Por lo tanto, $K$ es una inmersión y una submersión en cada punto distinto del origen, pero falla ambas propiedades en $(0, 0)$.

Los teoremas más importantes del cálculo diferencial de varias variables también son válidos para variedades suaves y serán de gran utilidad a lo largo del texto. Los presentamos a continuación.

**Lema 1.5.5.** (Teorema euclidiano de la función inversa) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y sea $a \in \Omega$. Si $Df(a)$ es invertible, existen abiertos conexos $U \subseteq \Omega$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$, con $a \in U$ y $f(a) \in V$, tales que $f\restriction_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo de clase $C^1$. Si $f$ es de clase $C^r$, con $2 \leq r \leq \infty$, la inversa es también de clase $C^r$.

*Demostración.* Pongamos $A := Df(a)$ y $c := \|A^{-1}\|_{\text{op}}$. Por la continuidad de $Df$, existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(a,r) \subseteq \Omega$ y

$$\|I - A^{-1}Df(x)\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2}, \qquad x \in \overline{B}(a,r). \tag{1.6}$$

Sea $\delta := \frac{r}{2c}$ y fijemos $y \in B(f(a),\delta)$. Definimos

$$T_y(x) := x - A^{-1}(f(x) - y), \qquad x \in \overline{B}(a,r).$$

El teorema fundamental del cálculo aplicado al segmento entre $x$ y $z$, seguido de (1.6), da

$$\|T_y(x) - T_y(z)\| \leq \frac{1}{2}\|x - z\|, \qquad x, z \in \overline{B}(a,r).$$

Además,

$$\|T_y(x) - a\| \leq \|T_y(x) - T_y(a)\| + \|A^{-1}(y - f(a))\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Por lo tanto, $T_y$ transforma la bola cerrada en sí misma y es una contracción.
Si $x_0 \in \overline{B}(a,r)$ y $x_{k+1} := T_y(x_k)$, entonces

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq 2^{-k}\|x_1 - x_0\|.$$

La suma de estas cotas muestra que $(x_k)$ es de Cauchy. La bola cerrada es completa, luego $x_k \to x$, y la continuidad de $T_y$ da $T_y(x) = x$. Si $x'$ es otro punto fijo, entonces $\|x - x'\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$, de donde $x = x'$. Denotemos ese único punto fijo por $g(y)$. La ecuación $T_y(g(y)) = g(y)$ equivale a $f(g(y)) = y$.
Si $y, z \in B(f(a),\delta)$, la desigualdad de contracción proporciona

$$\begin{aligned}\|g(y) - g(z)\| &\leq \|T_y(g(y)) - T_y(g(z))\| + \|T_y(g(z)) - T_z(g(z))\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|g(y) - g(z)\| + c\|y - z\|.\end{aligned}$$

Así,

$$\|g(y) - g(z)\| \leq 2c\|y - z\|, \tag{1.7}$$

y $g$ es continua.
Sea $V := B(f(a),\delta)$ y pongamos $U := f^{-1}(V) \cap B(a,r)$. Todo $y \in V$ tiene exactamente una preimagen en $\overline{B}(a,r)$, y la estimación estricta anterior muestra que esa preimagen pertenece a $B(a,r)$. Por ello, $f\restriction_U$ es biyectiva sobre $V$ y su inversa es $g$. El conjunto $U$ es abierto y es conexo porque $U = g(V)$ y $V$ es conexo.
Resta probar la regularidad de la inversa. De (1.6) se sigue que $A^{-1}Df(x) = I - R_x$ con $\|R_x\| \leq \frac{1}{2}$. La serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} R_x^k$ converge en norma de operador y es la inversa de $I - R_x$; por lo tanto, $Df(x)$ es invertible para $x \in U$. Fijemos $y \in V$, $x := g(y)$ y escribamos $h := g(y+k) - g(y)$ cuando $y + k \in V$. La diferenciabilidad

de $f$ en $x$ da

$$k = Df(x)h + r_x(h), \qquad \frac{\|r_x(h)\|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0).$$

Por (1.7), $\|h\| \leq 2c\|k\|$. En consecuencia,

$$\frac{\|g(y+k) - g(y) - Df(x)^{-1}k\|}{\|k\|} \leq 2c\|Df(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \frac{\|r_x(h)\|}{\|h\|} \longrightarrow 0.$$

Así, $Dg(y) = Df(g(y))^{-1}$. La continuidad de $Df$, de $g$ y de la inversión en el conjunto de matrices invertibles muestra que $Dg$ es continua. Si $f$ es de clase $C^r$ para algún $r \geq 2$, la fórmula anterior y la suavidad del mapeo de inversión en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ permiten inducir sobre $j$: si $g \in C^j$ y $1 \leq j < r$, entonces $Df \in C^{r-1}$ implica $Df \circ g \in C^j$; por lo tanto, $Dg \in C^j$ y $g \in C^{j+1}$. Comenzando con $g \in C^1$, la fórmula da sucesivamente $g \in C^2, \ldots, C^r$. Para $r = \infty$ se aplica el argumento a cada orden finito. Esto concluye la prueba. □

**Teorema 1.5.6.** (de la función inversa) Sean $M$ y $N$ variedades suaves sin frontera, y sea $F\colon M \longrightarrow N$ un mapeo suave. Si $p \in M$ es tal que $dF_p$ es invertible, entonces existen vecindades abiertas conexas $U_0$ de $p$ y $V_0$ de $F(p)$ tales que $F\restriction_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow V_0$ es un difeomorfismo.

*Demostración.* Como $dF_p$ es una biyección, se tiene $\dim(M) = \dim(N)$. Consideremos cartas suaves $(U,\varphi)$ y $(V,\psi)$ centradas en $p$ y en $F(p)$, respectivamente, con $F(U) \subseteq V$. Entonces $\widetilde{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ mapea el abierto $\widetilde{U} := \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ en el abierto $\widetilde{V} := \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$.
Como $\varphi$ y $\psi$ son difeomorfismos, el diferencial

$$d\widetilde{F}_{\varphi(p)} = d\psi_{F(p)} \circ dF_p \circ d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}$$

es un isomorfismo. El Lema 1.5.5, aplicado a $\widetilde{F}$, proporciona abiertos conexos $\widetilde{U}_0 \subseteq \widetilde{U}$ y $\widetilde{V}_0 \subseteq \widetilde{V}$, con $\varphi(p) \in \widetilde{U}_0$ y $\widetilde{F}(\varphi(p)) \in \widetilde{V}_0$, tales que $\widetilde{F}\restriction_{\widetilde{U}_0}\colon \widetilde{U}_0 \longrightarrow \widetilde{V}_0$ es un difeomorfismo.
Definiendo $U_0 := \varphi^{-1}(\widetilde{U}_0)$ y $V_0 := \psi^{-1}(\widetilde{V}_0)$, obtenemos vecindades abiertas conexas de $p$ y $F(p)$, respectivamente, tales que $F\restriction_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow V_0$ es un difeomorfismo. □

**Observación 1.5.7.** El enunciado anterior requiere que las variedades sean sin frontera. Si se permite frontera, el resultado puede fallar. Por ejemplo, la inclusión $\iota\colon \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ tiene diferencial invertible en cada punto, pero no es un difeomorfismo local en los puntos de $\partial\mathbb{H}^n$.

Esto motiva el concepto de difeomorfismo local:

**Definición 1.5.8.** Sean $M$ y $N$ variedades con o sin frontera. Una función $F\colon M \longrightarrow N$ se dice un difeomorfismo local si cada $p \in M$ tiene una vecindad abierta $U$ tal que $F(U)$ es abierto en $N$ y $F\restriction_U\colon U \longrightarrow F(U)$ es un difeomorfismo.

Tenemos la siguiente propiedad útil de los difeomorfismos locales.

**Proposición 1.5.9.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves sin frontera y $F\colon M \longrightarrow N$ una función.

(a) $F$ es un difeomorfismo local si y sólo si es una inmersión suave y una submersión suave.

(b) Si $\dim(M) = \dim(N)$ y $F$ es una inmersión suave o una submersión suave, entonces es un difeomorfis-

mo local.

*Demostración.* Si $F$ es un difeomorfismo local, alrededor de cada $p \in M$ posee una inversa suave. La regla de la cadena muestra que $dF_p$ y $d(F^{-1})_{F(p)}$ son inversos; por lo tanto, $F$ es inmersión y submersión.
Recíprocamente, si $F$ es inmersión y submersión, cada $dF_p$ es un isomorfismo. El Teorema 1.5.6 proporciona vecindades en las que $F$ es un difeomorfismo, así que $F$ es un difeomorfismo local. Esto prueba (1). Si las dimensiones son iguales, toda transformación lineal inyectiva entre los espacios tangentes es sobreyectiva, y viceversa; (2) se sigue de (1). □

El teorema del rango (Teorema 1.4.2) posee un análogo para variedades suaves, que conserva el mismo nombre.

**Teorema 1.5.10.** (Teorema del rango) Sean $M$ y $N$ variedades suaves sin frontera de dimensiones $m$ y $n$, respectivamente, y sea $F\colon M \longrightarrow N$ un mapeo suave de rango constante $r$. Entonces, para cada $p \in M$ existen cartas suaves $(U,\varphi)$ de $M$ centrada en $p$ y $(V,\psi)$ de $N$ centrada en $F(p)$ tales que $F(U) \subseteq V$ y la representación coordenada $\widetilde{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ tiene la forma $\widetilde{F}(x^1,\dots,x^m) = (x^1,\dots,x^r,0,\dots,0)$.
En particular, si $F$ es una inmersión, entonces $r = m$ y $\widetilde{F}(x^1,\dots,x^m) = (x^1,\dots,x^m,0,\dots,0)$. Asimismo, si $F$ es una submersión, entonces $r = n$ y $\widetilde{F}(x^1,\dots,x^m) = (x^1,\dots,x^n)$.

*Demostración.* Fijemos $p \in M$. Tomemos cartas suaves $(U_0,\varphi_0)$ de $M$ alrededor de $p$ y $(V_0,\psi_0)$ de $N$ alrededor de $F(p)$, con $F(U_0) \subseteq V_0$. Consideremos la representación coordenada $f := \psi_0 \circ F \circ \varphi_0^{-1}\colon \varphi_0(U_0) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Como $F$ tiene rango constante $r$, la derivada de $f$ también tiene rango constante $r$. Además, como $F$ es suave, $f$ es de clase $C^\infty$. Aplicando la versión suave del Teorema 1.4.2, existen abiertos $\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ y $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, junto con difeomorfismos suaves $\Phi\colon \widetilde{W}_2 \longrightarrow \widetilde{W}_1$ y $\Psi\colon W_2 \longrightarrow W_1$, tales que

$$\Psi^{-1} \circ f \circ \Phi(x^1,\dots,x^m) = (x^1,\dots,x^r,0,\dots,0).$$

Definimos $U := \varphi_0^{-1}(\widetilde{W}_1)$ y $V := \psi_0^{-1}(W_1)$ y, restringiendo $U$ si es necesario, podemos suponer que $F(U) \subseteq V$. Ahora tomamos las cartas $\varphi := \Phi^{-1} \circ \varphi_0 \restriction_U$ y $\psi := \Psi^{-1} \circ \psi_0 \restriction_V$. Entonces $(U,\varphi)$ es una carta suave de $M$ centrada en $p$ y $(V,\psi)$ es una carta suave de $N$ centrada en $F(p)$. Con estas cartas,

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = \Psi^{-1} \circ \psi_0 \circ F \circ \varphi_0^{-1} \circ \Phi = \Psi^{-1} \circ f \circ \Phi.$$

Por lo tanto, $\widetilde{F}(x^1,\dots,x^m) = (x^1,\dots,x^r,0,\dots,0)$.
Si $F$ es una inmersión, entonces $r = m$, y la expresión anterior queda como $\widetilde{F}(x^1,\dots,x^m) = (x^1,\dots,x^m,0,\dots,0)$.
Si $F$ es una submersión, entonces $r = n$, y la expresión se reduce a $\widetilde{F}(x^1,\dots,x^m) = (x^1,\dots,x^n)$. □

## 1.6 Subvariedades

Una subvariedad permite tratar un subconjunto como un espacio suave por derecho propio. La definición debe conciliar dos aspectos: la topología inducida y el comportamiento inyectivo de la diferencial. Las figuras siguientes motivan esa condición antes de formularla con precisión.

**Definición 1.6.1.** (Encajes y subvariedades) Sea $M$ una variedad suave sin frontera.

(a) Un mapeo suave $F\colon N \to M$ es un **encaje suave** si es una inmersión inyectiva y un homeomorfismo de

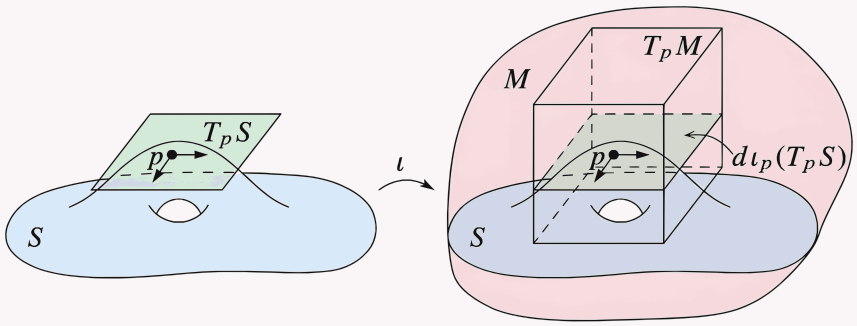



**Figura 1.4.** Espacio tangente a una subvariedad.

$N$ sobre $F(N)$ con la topología inducida por $M$.

(b) Un subconjunto $S \subseteq M$, dotado de una estructura de variedad suave, es una **subvariedad inmersa** si la inclusión $\iota\colon S \hookrightarrow M$ es una inmersión.

(c) Es una **subvariedad encajada** si $\iota$ es un encaje suave. Es **propiamente encajada** si, además, $\iota$ es propia.

En una subvariedad inmersa la topología dada a $S$ puede ser más fina que la topología de subespacio; en una subvariedad encajada ambas coinciden.

**Definición 1.6.2.** (Carta de rebanada) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $S \subseteq M$ y $p \in S$. Una carta $(U, \varphi)$ de $M$ está **adaptada a** $S$ **en** $p$, o es una **carta de rebanada**, si $p \in U$, $\varphi(p) = 0$ y, para algún $k$,

$$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}\right).$$

La última igualdad incluye la topología local del subconjunto, no sólo una igualdad de espacios tangentes.

**Teorema 1.6.3.** (Criterio local de rebanada) Un subconjunto $S$ de una $n$-variedad suave sin frontera admite una estructura de subvariedad encajada de dimensión $k$ si y sólo si cada $p \in S$ posee una carta de rebanada de dimensión $k$. Cuando existe, esa estructura suave es única.

*Demostración.* Si existen cartas de rebanada, los mapeos

$$\varphi_S := \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^k} \circ \varphi \restriction_{U \cap S}$$

son homeomorfismos sobre abiertos de $\mathbb{R}^k$. Sus cambios de coordenadas son restricciones de los cambios suaves de las cartas de $M$ y, por lo tanto, son suaves. Como $S$ lleva la topología de subespacio, es Hausdorff y segundo numerable. El lema de la carta suave produce una estructura de $k$-variedad, y en estas coordenadas la inclusión es $x \mapsto (x, 0)$; por ello es un encaje.
Recíprocamente, si $\iota\colon S \hookrightarrow M$ es un encaje, el Teorema 1.5.10 aplicado a $\iota$ da esta forma normal en una vecindad de cada punto. La propiedad de ser homeomorfismo sobre la imagen permite reducir la vecindad

en $M$ hasta que no aparezcan otras partes de $S$ en ella. Se obtiene así la igualdad de rebanada. Finalmente, cualquier estructura que vuelva a $S$ una subvariedad encajada tiene estas mismas cartas restringidas, de donde se sigue la unicidad. □

**Proposición 1.6.4.** (Tangente de una subvariedad encajada) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sea $S \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera de dimensión $k$ y sea $\iota\colon S \hookrightarrow M$ la inclusión. Entonces $d\iota_p$ es inyectiva y permite identificar

$$T_pS \cong d\iota_p(T_pS) \subseteq T_pM.$$

En una carta de rebanada $(x^1,\dots,x^n)$,

$$d\iota_p(T_pS) = \operatorname{span}\left\{\partial_1|_p,\dots,\partial_k|_p\right\}.$$

*Demostración.* En las coordenadas de rebanada, $\iota$ es la inclusión lineal $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Su diferencial tiene la misma forma, lo que prueba simultáneamente la inyectividad y la fórmula. □

**Proposición 1.6.5.** (Gráficas suaves) Sean $M$ y $N$ variedades suaves sin frontera. Si $U \subseteq M$ es abierto y $f\colon U \to N$ es suave, entonces

$$\Gamma_f := \{(p, f(p)) \mid p \in U\} \subseteq M \times N$$

es una subvariedad encajada difeomorfa a $U$. En el punto $(p, f(p))$,

$$T_{(p,f(p))}\Gamma_f = \{(v, df_p v) \mid v \in T_pM\}.$$

*Demostración.* El mapeo $F\colon U \to M \times N$, $F(p) = (p, f(p))$, es inyectivo y $dF_p(v) = (v, df_p v)$ es inyectivo. La restricción de la primera proyección a $\Gamma_f$ es la inversa continua de $F$, así que $F$ es un encaje. La fórmula tangente se sigue de la proposición anterior. □

**Definición 1.6.6.** Sean $F\colon M \to N$ un mapeo suave entre variedades sin frontera y $q \in N$. Decimos que $q$ es un **valor regular** de $F$ si $dF_p$ es sobreyectiva para cada $p \in F^{-1}(q)$. Si la preimagen es vacía, la condición se considera satisfecha.

**Teorema 1.6.7.** (Teorema de la preimagen regular) Sean $M^m$ y $N^n$ variedades suaves sin frontera y sea $F\colon M \to N$ suave. Si $q$ es un valor regular, entonces $F^{-1}(q)$ es vacío o una subvariedad propiamente encajada de dimensión $m-n$, y

$$T_pF^{-1}(q) = \ker dF_p, \qquad p \in F^{-1}(q).$$

*Demostración.* En cada punto del nivel, el Teorema 1.5.10 da coordenadas en las que $F(x^1,\dots,x^m) = (x^1,\dots,x^n)$. El nivel es entonces la rebanada $x^1 = \cdots = x^n = 0$, y el criterio local anterior le da su estructura encajada. La misma expresión coordenada identifica su tangente con el núcleo de $dF_p$. Como $\{q\}$ es cerrado, el nivel es un subconjunto cerrado de $M$; la inclusión de un cerrado es propia sobre cada compacto. □

**Definición 1.6.8.** (Subvariedad con frontera) Una variedad suave $S$ con frontera contenida en una variedad suave $M$ es una **subvariedad encajada con frontera** si la inclusión $S \hookrightarrow M$ es un encaje suave. Si $M$ no tiene

frontera, una **media carta de rebanada** de dimensión $k$ para $S$ es una carta de $M$ en la que

$$S \cap U \longleftrightarrow \varphi(U) \cap \left(\mathbb{H}^k \times \{0\}^{n-k}\right),$$

donde $\mathbb{H}^k = \mathbb{R}^{k-1} \times [0, \infty)$.

**Teorema 1.6.9.** (Criterio local con frontera) Sea $M$ una variedad suave sin frontera y $S \subseteq M$. Entonces $S$ es una subvariedad encajada con frontera de dimensión $k$ si y sólo si cada punto interior de $S$ tiene una carta de rebanada y cada punto de $\partial S$ tiene una media carta de rebanada. Esta caracterización determina de manera única la estructura suave de $S$.

*Demostración.* Supongamos primero que existen las cartas indicadas. En una carta de rebanada definimos

$$\varphi_S := \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^k} \circ \varphi \restriction_{U \cap S},$$

y en una media carta de rebanada usamos la misma fórmula con imagen en $\mathbb{H}^k$. Estos mapeos son homeomorfismos sobre abiertos de $\mathbb{R}^k$ o abiertos relativos de $\mathbb{H}^k$. Si dos de ellos se traslapan, el cambio de coordenadas se obtiene restringiendo un cambio de cartas de $M$ a $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Más precisamente, si $F$ es el cambio ambiente, la representación del cambio sobre $S$ es

$$u \longmapsto \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^k} F(u, 0).$$

Esta expresión se extiende suavemente a un abierto de $\mathbb{R}^k$, y lo mismo ocurre con su inversa. Por lo tanto, las cartas restringidas forman un atlas suave con frontera en $S$. En ellas la inclusión tiene la expresión $u \mapsto (u, 0)$, de modo que es una inmersión. Como $S$ lleva la topología de subespacio, la inclusión es también un homeomorfismo sobre su imagen y, por consiguiente, un encaje.
Recíprocamente, supongamos que la inclusión $\iota\colon S \hookrightarrow M$ es un encaje. En un punto interior se aplica el Teorema 1.5.10, como en el Teorema 1.6.3. Sea ahora $p \in \partial S$. Elegimos una carta de frontera

$$\theta\colon W \longrightarrow O \cap \mathbb{H}^k$$

de $S$, centrada en $p$, donde $O \subseteq \mathbb{R}^k$ es abierto, y una carta $\psi$ de $M$ centrada en $p$. Después de reducir $W$ y el dominio de $\psi$, el mapeo coordenado

$$f := \psi \circ \iota \circ \theta^{-1}$$

admite una extensión suave $\widehat{f}\colon \widehat{O} \to \mathbb{R}^n$ a un abierto $\widehat{O} \subseteq \mathbb{R}^k$ que contiene al origen. Como $d\iota_p$ es inyectivo, $D\widehat{f}(0)$ tiene rango $k$. Algún menor de orden $k$ permanece no singular en una vecindad de 0; por lo tanto, $\widehat{f}$ tiene rango constante $k$ en ella. El teorema del rango euclidiano proporciona difeomorfismos locales $\alpha$ y $\beta$, con $\alpha(0) = 0$, tales que

$$(\beta \circ \widehat{f} \circ \alpha^{-1})(u) = (u, 0)$$

para $u$ en una vecindad de 0 en $\mathbb{R}^k$.
Resta enderezar la imagen, bajo $\alpha$, del semiespacio que constituye el dominio original. En una vecindad de 0 definimos

$$r(u) := \left(\alpha^{-1}(u)\right)^k.$$

Como $\alpha$ es un difeomorfismo, $dr_0 \neq 0$. Elegimos formas lineales $\ell^1,\dots,\ell^{k-1}$ tales que $\ell^1,\dots,\ell^{k-1},dr_0$ formen una base de $(\mathbb{R}^k)^*$ y definimos

$$\eta(u) := (\ell^1(u),\dots,\ell^{k-1}(u), r(u)).$$

El diferencial de $\eta$ en 0 es invertible. Por el teorema de la función inversa, existen vecindades abiertas $A_\eta$ y $B_\eta$ del origen tales que

$$\eta\colon A_\eta \longrightarrow B_\eta$$

es un difeomorfismo. Reducimos los dominios de $\alpha$ y $\beta$ para que la imagen de $\alpha$ esté contenida en $A_\eta$. Entonces

$$\eta\big(\alpha(O\cap\mathbb{H}^k)\big) = \eta(\alpha(O))\cap\mathbb{H}^k$$

localmente, pues la última componente de $\eta\circ\alpha$ es la última coordenada del dominio original. Después de reducir también las variables normales, elegimos una vecindad $C$ del origen en $\mathbb{R}^{n-k}$ y definimos el difeomorfismo

$$\widetilde{\eta}\colon A_\eta\times C \longrightarrow B_\eta\times C, \qquad \widetilde{\eta}(u,z) := (\eta(u),z).$$

Pongamos $\alpha_1 := \eta\circ\alpha$ y $\beta_1 := \widetilde{\eta}\circ\beta$, después de la correspondiente restricción del dominio de $\beta$. Entonces

$$\begin{aligned}(\beta_1\circ\widehat{f}\circ\alpha_1^{-1})(u) &= \widetilde{\eta}\big(\beta\circ\widehat{f}\circ\alpha^{-1}(\eta^{-1}(u))\big)\\ &= \widetilde{\eta}(\eta^{-1}(u),0) = (u,0).\end{aligned}$$

Así, la carta ambiente $\beta_1\circ\psi$ transforma la imagen local de $S$ en $\mathbb{H}^k\times\{0\}^{n-k}$. Como $W$ es abierto en $S$ y $S$ tiene la topología inducida por $M$, existe un abierto ambiente cuya intersección con $S$ está contenida en $W$. Al restringir una vez más la carta, se excluyen los puntos de $S$ ajenos a la imagen local y se obtiene una media carta de rebanada centrada en $p$.

La construcción anterior muestra también la unicidad. En cualquier estructura suave con frontera para la cual la inclusión sea un encaje, las cartas obtenidas al restringir cartas de rebanada y medias cartas de rebanada son suaves. Recíprocamente, esas cartas generan la estructura suave porque cubren $S$. Por lo tanto, toda estructura con la propiedad enunciada posee el mismo atlas maximal. □

**Teorema 1.6.10.** (La frontera como subvariedad) Si $M$ es una variedad suave con frontera de dimensión $n$, entonces $\partial M$ posee una única estructura de variedad suave sin frontera de dimensión $n-1$ para la que la inclusión $\iota_\partial\colon \partial M\hookrightarrow M$ es un encaje propio. En una carta de frontera $(x^1,\dots,x^n)$,

$$d(\iota_\partial)_p(T_p\partial M) = \operatorname{span}\left\{\partial_1|_p,\dots,\partial_{n-1}|_p\right\}.$$

*Demostración.* Para cada carta de frontera $(U,\varphi)$, el mapeo

$$\varphi_\partial := \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^{n-1}}\circ\varphi\restriction_{U\cap\partial M}$$

es un homeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$. La invariancia suave de la frontera garantiza que los cambios de coordenadas preservan $x^n=0$; sus restricciones, y las de sus inversas, son suaves. Estas cartas dan a $\partial M$ la estructura anunciada. En ellas la inclusión es $(x',0)\mapsto(x',0)$, lo que prueba el enunciado tangente y la unicidad. La inclusión es un encaje porque se usa la topología de subespacio. Finalmente, $\partial M$ es cerrado en $M$, de modo que su intersección con cualquier compacto es compacta y la inclusión es propia. □

**Teorema 1.6.11.** (Preimagen regular en una variedad con frontera) Sean $M^m$ una variedad suave con frontera, $N^n$ una variedad sin frontera y $F\colon M \to N$ suave. Si $q \in N$ es valor regular tanto de $F$ como de $F\restriction_{\partial M}$, entonces $F^{-1}(q)$ es una subvariedad propiamente encajada con frontera, de dimensión $m-n$, y

$$\partial\big(F^{-1}(q)\big) = F^{-1}(q) \cap \partial M, \qquad T_pF^{-1}(q) = \ker dF_p.$$

*Demostración.* En puntos interiores se aplica el Teorema 1.6.7. Sea $p \in F^{-1}(q) \cap \partial M$. Tomamos coordenadas de frontera $(y^1,\dots,y^{m-1},t)$ centradas en $p$, con $t \geq 0$, y coordenadas de $N$ centradas en $q$. Denotemos por $f$ la representación coordenada de $F$. La sobreyectividad de

$$d(F\restriction_{\partial M})_p\colon T_p\partial M \longrightarrow T_qN$$

implica que, después de reordenar las variables tangenciales, la matriz $\partial(f^1,\dots,f^n)/\partial(y^1,\dots,y^n)$ es invertible en el origen. Consideremos

$$\Psi(y,t) := \big(f(y,t), y^{n+1},\dots,y^{m-1},t\big).$$

Su jacobiano en el origen es invertible. Extendemos $f$ suavemente a valores negativos de $t$ y aplicamos el teorema de la función inversa a la extensión de $\Psi$. Como la última componente de $\Psi$ es $t$, la restricción obtenida es un difeomorfismo entre vecindades relativas del semiespacio y preserva su frontera. En las nuevas coordenadas $z = \Psi(y,t)$ se tiene

$$f(z) = (z^1,\dots,z^n).$$

Por consiguiente, el nivel $f^{-1}(0)$ está descrito por $z^1 = \cdots = z^n = 0$ y $z^m \geq 0$; es una media rebanada de dimensión $m-n$, cuya frontera corresponde exactamente a $t = 0$.
Junto con las rebanadas obtenidas en los puntos interiores, el Teorema 1.6.9 da a $F^{-1}(q)$ la estructura de subvariedad encajada con frontera. En las coordenadas anteriores, el espacio tangente del nivel es el núcleo de la proyección lineal que representa a $dF_p$, de donde $T_pF^{-1}(q) = \ker dF_p$. Por último, $F^{-1}(q)$ es cerrado porque $\{q\}$ lo es; así, la preimagen de un compacto por la inclusión es un subconjunto cerrado de un compacto y, por lo tanto, es compacta. La inclusión es propia. □

El doble permite reemplazar una variedad con frontera por una variedad sin frontera que contiene dos copias de la variedad original. La construcción es útil, por ejemplo, para extender objetos suaves a través de la frontera y aplicar localmente resultados formulados para variedades sin frontera.

**Teorema 1.6.12.** (Collar y doble suave) Sea $M$ una variedad suave con frontera.

(a) Existe $\varepsilon > 0$ y un encaje suave

$$c\colon \partial M \times [0,\varepsilon) \longrightarrow M, \qquad c(x,0) = x,$$

cuya imagen es una vecindad de $\partial M$ en $M$.

(b) Si $M_+$ y $M_-$ son dos copias de $M$, el cociente

$$DM := (M_+ \sqcup M_-)\big/\big(x_+ \sim x_- \text{ para } x \in \partial M\big)$$

admite una estructura de variedad suave sin frontera. Las inclusiones de ambas copias son encajes

suaves con frontera y sus fronteras tienen la misma imagen, una hipersuperficie encajada de $DM$.

El tipo de difeomorfismo de $DM$ no depende del collar elegido.

*Demostración.* El inciso (a) es el teorema del collar [94, Teorema 9.25]. Para el inciso (b), se aplica el teorema de pegado de variedades suaves a las dos copias de $M$ y al difeomorfismo identidad de $\partial M$; véanse [94, Teorema 9.29 y Ejemplo 9.32]. Esos resultados construyen la estructura suave del cociente, prueban las afirmaciones sobre las inclusiones y muestran que dos elecciones de collar producen dobles difeomorfos. □

**Corolario 1.6.13.** (Extensión suave al doble) Sea $M$ una variedad suave con frontera y sea $DM$ su doble. Toda función suave y todo campo tensorial suave sobre una de las copias de $M$ admiten una extensión suave a $DM$. Si $\mathbf{g}$ es una métrica riemanniana en $M$, puede elegirse una extensión tensorial simétrica $\widetilde{\mathbf{g}}$ que sea riemanniana en una vecindad abierta de esa copia.

*Demostración.* Identifiquemos $M$ con la copia $M_+ \subset DM$ y sea $\mathbf{T}$ un campo tensorial suave sobre $M_+$. Por la definición de suavidad hasta la frontera, para cada $p \in M_+$ existe un abierto $V_p \subset DM$ que contiene a $p$ y un campo tensorial suave $\widetilde{\mathbf{T}}_p$ en $V_p$ cuya restricción a $V_p \cap M_+$ coincide con $\mathbf{T}$. En los puntos interiores basta tomar $V_p \subset \operatorname{Int}(M_+)$; en los puntos de la frontera se prolongan las componentes locales de $\mathbf{T}$ a valores negativos de la coordenada normal de una carta del doble.
La familia

$$\{V_p : p \in M_+\} \cup \{DM \setminus M_+\}$$

es una cubierta abierta de $DM$. Sea $(\chi_p)_{p\in M_+} \cup \{\chi_0\}$ una partición de la unidad suave, localmente finita y subordinada a esta cubierta. Cada producto $\chi_p \widetilde{\mathbf{T}}_p$, prolongado por cero fuera de $V_p$, es un campo tensorial suave en $DM$. Por la finitud local, la suma

$$\widetilde{\mathbf{T}} := \sum_{p\in M_+} \chi_p \widetilde{\mathbf{T}}_p$$

está bien definida y es suave. Si $x \in M_+$, entonces $\chi_0(x) = 0$ y cada $\widetilde{\mathbf{T}}_p(x)$ que interviene coincide con $\mathbf{T}(x)$; por consiguiente,

$$\widetilde{\mathbf{T}}(x) = \left( \sum_{p\in M_+} \chi_p(x) \right) \mathbf{T}(x) = \mathbf{T}(x).$$

El mismo argumento, con tensores de tipo $(0,0)$, trata las funciones.
Si $\mathbf{T} = \mathbf{g}$, reemplazamos la extensión obtenida por su parte simétrica. La extensión sigue coincidiendo con $\mathbf{g}$ en $M_+$. Como el conjunto de formas bilineales simétricas positivas definidas es abierto en cada fibra y la extensión es continua, el conjunto de puntos de $DM$ donde $\widetilde{\mathbf{g}}$ es positiva definida es un abierto que contiene a $M_+$. Por lo tanto, $\widetilde{\mathbf{g}}$ es una métrica riemanniana en una vecindad abierta de esa copia. □

## 1.7 Haces vectoriales y el haz cotangente

El haz tangente sugiere una construcción más general. Sobre cada punto de una variedad podemos colocar un espacio vectorial, siempre que esas fibras se identifiquen localmente de manera suave y que las identificaciones

sean lineales en cada fibra. Así nacen los haces vectoriales, el marco natural para campos, formas diferenciales, tensores, espinores y las incógnitas geométricas que aparecerán más adelante.

**Definición 1.7.1.** Sea $M$ un espacio topológico. Un **haz vectorial real de rango $k$ sobre $M$** es un espacio topológico $\mathbf{E}$ junto con una función continua y suprayectiva $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ tal que:

(a) Para cada $p \in M$, la fibra $\mathbf{E}_p = \pi^{-1}(p)$ sobre $p$ está dotada con una estructura de un espacio vectorial real de dimensión $k$.

(b) Para cada $p \in M$, existe una vecindad $U$ de $p$ en $M$ y un homeomorfismo $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tal que $\pi_U \circ \Phi = \pi$ donde $\pi_U\colon U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow U$ es la proyección y para cada $q \in U$, la restricción de $\Phi$ a $\mathbf{E}_q$ es un isomorfismo de $\mathbf{E}_q$ en $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$. ($\Phi$ es llamada **trivialización local de $\mathbf{E}$ sobre $U$.**)

**Definición 1.7.2.** Sean $M$ y $\mathbf{E}$ variedades suaves con o sin frontera tales que $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ es un mapeo continuo y suprayectivo que vuelve a $\mathbf{E}$ un haz vectorial real de rango $k$ sobre $M$. Decimos que $\mathbf{E}$ es un **haz vectorial suave de rango $k$ sobre $M$** si

(a) $\pi$ es un mapeo suave.

(b) Para cada $p \in M$, existen una vecindad $U$ de $p$ y una trivialización local $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ de $\mathbf{E}$ sobre $U$ tal que $\Phi$ es un difeomorfismo. A dicho mapeo se le conoce como **trivialización local suave de $\mathbf{E}$ sobre $U$**.

**Definición 1.7.3.** (Haz vectorial complejo suave) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Un *haz vectorial complejo suave de rango $r$* sobre $M$ es un mapeo suave $\pi\colon \mathbf{E} \to M$ que admite, alrededor de cada punto de $M$, una trivialización suave

$$\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^r$$

cuya restricción a cada fibra es complejo–lineal. En particular, el espacio total se considera como una variedad real suave y las funciones de transición toman valores en $GL(r, \mathbb{C})$.

**Observación 1.7.4.** Cuando no haya ambigüedad, omitiremos la proyección al hablar de un haz vectorial e incluso del espacio base $M$. Así, si $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial, escribiremos $\mathbf{E} \longrightarrow M$ o $(\mathbf{E}, M)$ o simplemente $\mathbf{E}$.

El ejemplo más sencillo de haz vectorial es lo que se conoce como *haz trivial de rango $k$ sobre $M$*.

**Ejemplo 1.7.5.** Si $M$ es una variedad suave con o sin frontera, el haz $\underline{\mathbb{R}}^k_M = M \times \mathbb{R}^k$ es un haz vectorial suave de rango $k$ sobre $M$. A este haz se le conoce como ***haz trivial de rango $k$ sobre $M$***.

El haz vectorial del ejemplo anterior es trivial en el sentido de que admite una trivialización global (una trivialización local con $U = M$).

Otros ejemplos de haces vectoriales los encontramos con el haz tangente.

**Proposición 1.7.6.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera de dimensión $n$. El haz tangente $TM$ es un haz vectorial suave de rango $n$ sobre $M$.

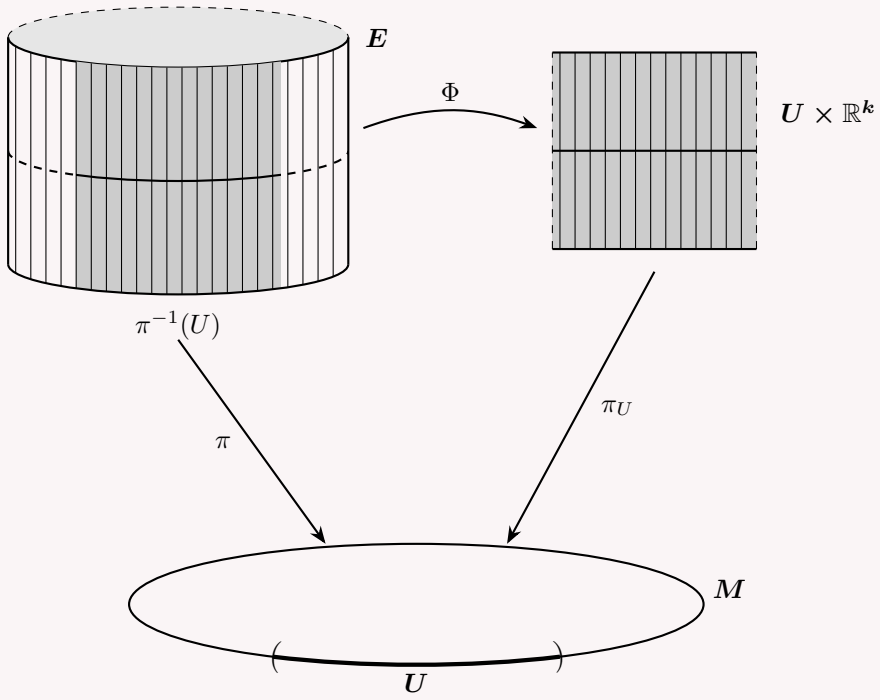



**Figura 1.5.** Trivialización local de un haz vectorial.

*Demostración.* Dada una carta coordenada $(U,\varphi)$ de $M$ tal que $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$ y $p \in U$, definimos el mapeo $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ por

$$\Phi\left(p, v^i \partial_i\Big|_p\right) = (p,(v^1,\dots,v^n)).$$

El mapeo $\Phi$ es lineal en las fibras de $\pi$ y satisface $\pi_U \circ \Phi = \pi$. Si $(U,\varphi)$ es una carta interior, la carta del tangente de la Proposición 1.4.20 satisface

$$\widetilde{\varphi} = (\varphi \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \Phi.$$

Si es una carta de frontera, esa carta del tangente coloca primero las coordenadas del vector y después las del punto base. Por lo tanto,

$$\widetilde{\varphi} = S \circ (\varphi \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \Phi, \qquad S(x,v) = (v,x).$$

El intercambio $S$ es un isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^{2n}$ y lleva $\varphi(U)\times\mathbb{R}^n$ difeomórficamente sobre $\mathbb{R}^n \times \varphi(U)$, un abierto relativo de $\mathbb{H}^{2n}$. En ambos casos, $\Phi$ es composición de difeomorfismos y, por ello, es una trivialización local suave. □

Cualquier haz vectorial no trivial requiere más de una trivialización local. El siguiente lema muestra que la composición de dos trivializaciones locales suaves tiene una forma simple donde se traslapan.

**Lema 1.7.7.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $k$. Supongamos que $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ y $\Psi\colon \pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times \mathbb{R}^k$ son trivializaciones locales suaves de $\mathbf{E}$ con $U \cap V \neq \varnothing$. Entonces existe un mapeo suave $\tau\colon U \cap V \longrightarrow GL(k,\mathbb{R})$ tal que

$$\Phi \circ \Psi^{-1}\colon (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$$

tiene la forma

$$(\Phi \circ \Psi^{-1})(p,v) = (p, \tau(p)v),$$

donde $\tau(p)v$ denota la acción usual de la matriz de $k \times k$, $\tau(p)$, en $v \in \mathbb{R}^k$.

*Demostración.* El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} (U \cap V) \times \mathbb{R}^k & \xleftarrow{\Psi} & \pi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\Phi} & (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \\ & {\scriptstyle \pi_1} \searrow & \downarrow {\scriptstyle \pi} & \swarrow {\scriptstyle \pi_1} & \\ & & U \cap V & & \end{array}$$

donde los mapeos de arriba se interpretan como las restricciones de $\Psi$ y $\Phi$ a $\pi^{-1}(U \cap V)$. La conmutatividad del diagrama nos dice que

$$\pi_1 \circ (\Phi \circ \Psi^{-1}) = \pi_1,$$

donde $\pi_1$ es la proyección en la primera coordenada.
Esto implica que existe un mapeo $\sigma\colon (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$(\Phi \circ \Psi^{-1})(p,v) = (p, \sigma(p,v)).$$

Por construcción, $\sigma$ es la segunda función coordenada de $\Phi \circ \Psi^{-1}$, es decir,

$$\sigma = \pi_2 \circ (\Phi \circ \Psi^{-1}),$$

donde $\pi_2$ es la proyección en la segunda coordenada.
Para cada $p \in U \cap V$, el mapeo $v \mapsto \sigma(p,v)$ de $\mathbb{R}^k$ en sí mismo es lineal e invertible, pues $\Phi$ y $\Psi$ son trivializaciones locales y, por lo tanto, $\Phi \circ \Psi^{-1}$ es un difeomorfismo fibra a fibra que preserva la primera coordenada. En particular, existe una única matriz $\tau(p) \in GL(k,\mathbb{R})$ tal que

$$\sigma(p,v) = \tau(p)v \qquad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^k.$$

Veamos ahora que $p \mapsto \tau(p)$ es suave.
Fijemos la base canónica $(e_1,\ldots,e_k)$ de $\mathbb{R}^k$. Como $v \mapsto \sigma(p,v)$ es lineal, queda determinada por sus valores en los vectores de la base, y definimos $\tau(p)$ como la matriz cuyas columnas son esos valores:

$$\tau(p)e_j = \sigma(p,e_j) \qquad \text{para } j \in \{1,\ldots,k\}.$$

El mapeo

$$p \longmapsto \sigma(p,e_j) = \pi_2\big((\Phi \circ \Psi^{-1})(p,e_j)\big)$$

es la composición de funciones suaves (pues $(p, e_j)$ es constante en la segunda coordenada y $\Phi \circ \Psi^{-1}$ es suave), luego resulta ser un mapeo suave de $U \cap V$ en $\mathbb{R}^k$ para cada $j \in \{1, \dots, k\}$.
Si denotamos por $\mathrm{pr}_i \colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección en la $i$-ésima coordenada, las entradas de la matriz $\tau(p) = (\tau_{ij}(p))$ están dadas por

$$\tau_{ij}(p) = \mathrm{pr}_i\big(\sigma(p, e_j)\big), \qquad i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Cada función $\tau_{ij}$ es suave en $p$, por lo que $p \mapsto \tau(p)$ es un mapeo suave.
En consecuencia,

$$(\Phi \circ \Psi^{-1})(p, v) = (p, \tau(p)v)$$

con $\tau \colon U \cap V \longrightarrow GL(k, \mathbb{R})$ una función suave, que es lo que queríamos. □

El siguiente resultado nos permite construir haces vectoriales suaves.

**Lema 1.7.8.** (Lema del haz vectorial suave) Sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y, para cada $p \in M$, sea $\mathbf{E}_p$ un espacio vectorial de dimensión fija $r$ sobre $\mathbb{K}$. Pongamos $\mathbf{E} = \coprod_{p \in M} \mathbf{E}_p$ y sea $\pi \colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ el mapeo que envía cada elemento de $\mathbf{E}_p$ en $p$. Supongamos que se tienen:

(a) Una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $M$.

(b) Para cada $\alpha \in A$, una biyección fibrada

$$\Phi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^r$$

cuya restricción a $\mathbf{E}_p$ es un isomorfismo $\mathbb{K}$–lineal de $\mathbf{E}_p$ sobre $\{p\} \times \mathbb{K}^r$.

(c) Para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, un mapeo suave $g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbb{K})$ tal que

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(p, z) = (p, g_{\alpha\beta}(p)z).$$

Entonces $\mathbf{E}$ posee una única topología y una única estructura suave real que lo convierten en una variedad suave con o sin frontera, para las cuales $\pi$ es suave y las $\Phi_\alpha$ son trivializaciones locales suaves y $\mathbb{K}$–lineales. La suma $\mathbf{E} \times_M \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ y la multiplicación escalar $\mathbb{K} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ son suaves. En particular, $\mathbf{E} \to M$ es un haz vectorial suave real si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y complejo si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

*Demostración.* Sea $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. Para cada $\alpha$ y cada carta $(V, \varphi)$ de $M$ con $V \subseteq U_\alpha$, definimos

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha, V} := (\varphi \times \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^r}) \circ \Phi_\alpha \colon \pi^{-1}(V) \longrightarrow \varphi(V) \times \mathbb{K}^r.$$

Identificamos $\mathbb{K}^r$ con $\mathbb{R}^{dr}$. Si $(V, \varphi)$ es una carta interior, la imagen es abierta en $\mathbb{R}^{n+dr}$; si es una carta de frontera, reordenando las coordenadas identificamos $\varphi(V) \times \mathbb{R}^{dr}$ con un abierto relativo de $\mathbb{H}^{n+dr}$.
Consideremos dos cartas $(V, \varphi)$ y $(W, \psi)$ subordinadas, respectivamente, a $U_\alpha$ y $U_\beta$. En la intersección, el cambio de coordenadas desde la segunda carta hacia la primera es

$$(y, z) \longmapsto \big(\varphi \circ \psi^{-1}(y), g_{\alpha\beta}(\psi^{-1}(y))z\big).$$

Es suave como mapeo real y su inversa se obtiene intercambiando $\alpha, \beta$; en efecto, de las biyecciones dadas

se sigue $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}^{-1}$. Las imágenes de las intersecciones son abiertas porque tienen la forma $\varphi(V \cap W) \times \mathbb{K}^r$.
Esta familia de cartas del espacio total admite una subfamilia numerable que cubre $\mathbf{E}$: basta elegir una subcubierta numerable de los dominios $V$ en la base, pues $M$ es segundo numerable. Dos puntos de $\mathbf{E}$ situados en una misma fibra pertenecen a una carta común $\pi^{-1}(V)$. Si sus puntos base son distintos, elegimos primero dominios coordenados disjuntos de $M$, restringidos dentro de sendos $U_\alpha$, y luego tomamos sus preimágenes. Se verifican así las hipótesis de segundo numerabilidad y separación del Lema 1.2.19. El lema proporciona una topología Hausdorff, segundo numerable, y una estructura suave en $\mathbf{E}$ para las cuales las $\widetilde{\varphi}_{\alpha,V}$ son cartas.
Cada $\Phi_\alpha$ es un difeomorfismo: al restringirla a $\pi^{-1}(V)$, con $V \subseteq U_\alpha$, su expresión en las cartas recién construidas y en la carta producto de $V \times \mathbb{K}^r$ es la identidad. En las mismas coordenadas, $\pi$ es $(x,z) \mapsto x$, y por lo tanto es suave. La suma y la multiplicación escalar fibradas tienen las expresiones

$$(x,z,w) \longmapsto (x, z+w), \qquad (\lambda, x, z) \longmapsto (x, \lambda z),$$

que son suaves como mapeos reales y $\mathbb{K}$–lineales en las variables fibradas.
Si otra topología y otra estructura suave tuvieran las propiedades del enunciado, todas las $\Phi_\alpha$ serían difeomorfismos. En consecuencia, los conjuntos $\Phi_\alpha^{-1}(O)$, con $O$ abierto en $U_\alpha \times \mathbb{K}^r$, formarían necesariamente una base de la misma topología, y las cartas $\widetilde{\varphi}_{\alpha,V}$ pertenecerían a la misma estructura suave. Esto prueba la unicidad. En el caso con frontera, la construcción anterior muestra además que $\partial\mathbf{E} = \pi^{-1}(\partial M)$.
En el caso complejo, la misma construcción se realiza sobre la variedad real subyacente y conserva la linealidad compleja de las transiciones. □

Este lema permite obtener haces vectoriales no triviales como muestra el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.7.9.** (Haz de Möbius) Definimos en $\mathbb{R}^2$ la relación

$$(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow (x',y') = (x+n, (-1)^n y), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sea $\mathbf{E} = \mathbb{R}^2/\sim$ y sea $q\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{E}$ la proyección cociente. Geométricamente, $\mathbf{E}$ se obtiene de $[0,1]\times\mathbb{R}$ identificando $(0,y)$ con $(1,-y)$; el subconjunto $q([0,1]\times[-r,r])$ es la banda de Möbius compacta de anchura $2r$.
Sea $\pi_1(x,y) = x$ y $\varepsilon(x) = e^{2\pi i x}$. Si $U$ es un arco abierto propio de $\mathbb{S}^1$ que admite una determinación continua del argumento, cada componente $\widetilde{U}$ de $\varepsilon^{-1}(U)$ es un intervalo abierto y $\varepsilon\restriction_{\widetilde{U}}\colon \widetilde{U} \to U$ es un difeomorfismo; su inversa se obtiene dividiendo esa determinación del argumento entre $2\pi$. Como $\varepsilon(x+n) = \varepsilon(x)$, el mapeo $\varepsilon \circ \pi_1$ es constante en las clases de $\sim$. Por lo tanto,

$$\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{S}^1, \qquad \pi([(x,y)]) = \varepsilon(x),$$

está bien definido y satisface $\pi \circ q = \varepsilon \circ \pi_1$. Esto se resume en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\ q\ } & \mathbf{E} = \mathbb{R}^2/\sim \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\ \varepsilon\ } & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Sea $p \in \mathbb{S}^1$ y elijamos $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon(x_0) = p$. Caractericemos primero los reales $x$ con $\varepsilon(x) = p$. Como $\varepsilon(x) = e^{2\pi i x}$, la igualdad $\varepsilon(x) = \varepsilon(x_0)$ equivale a $e^{2\pi i(x-x_0)} = 1$. Las soluciones reales de $e^{2\pi i t} = 1$ son exactamente los enteros $t \in \mathbb{Z}$, de modo que $\varepsilon(x) = \varepsilon(x_0)$ si y sólo si $x - x_0 \in \mathbb{Z}$, es decir, si y sólo si $x = x_0 + n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

En consecuencia,

$$\pi^{-1}(p) = \{[(x,y)] \in \mathbf{E} \mid \varepsilon(x) = p\} = \{[(x_0+n, y)] \mid n \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos reescribir esta fibra recordando la definición de $\sim$. Sabemos que $(x_0+n, y) \sim (x_0, (-1)^n y)$ para cualesquiera $n \in \mathbb{Z}$ y $y \in \mathbb{R}$. Esto nos permite concluir que

$$\pi^{-1}(p) = \{[(x_0, (-1)^n y)] \mid n \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}\},$$

lo cual se puede reescribir como $\pi^{-1}(p) = \{[(x_0, t)] \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Definamos $j_p \colon \pi^{-1}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $j_p([(x_0,t)]) = t$.
Veamos que no depende de la $t$ elegida: si $(x_0,t) \sim (x_0,t')$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $(x_0,t') = (x_0+n, (-1)^n t)$ lo cual nos dice que $n = 0$ y por lo tanto $t = t'$.
La función $j_p$ es inyectiva porque $j_p([(x_0,t)]) = j_p([(x_0,s)])$ implica $t = s$, y es sobreyectiva porque $a = j_p([(x_0,a)])$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Dotamos a $\pi^{-1}(p)$ de la estructura de espacio vectorial dada por

$$[(x_0,t)] + [(x_0,s)] := [(x_0, t+s)]$$

y

$$\lambda[(x_0,t)] = [(x_0, \lambda t)].$$

Estas operaciones están bien definidas por la unicidad del representante de la forma $(x_0,t)$ demostrada arriba. Con ellas, $j_p$ preserva la suma y la multiplicación por escalares y, por lo tanto, es un isomorfismo lineal. Si se elige otro levantamiento $x_0' = x_0 + m$, con $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$[(x_0,t)] = [(x_0', (-1)^m t)].$$

El isomorfismo $j_p'$ correspondiente satisface $j_p' = (-1)^m j_p$. Como la multiplicación por $(-1)^m$ es un isomorfismo lineal de $\mathbb{R}$, las operaciones de suma y multiplicación por escalares transportadas a la fibra son las mismas. Así, su estructura vectorial no depende del levantamiento elegido.
Tomemos la cubierta

$$U_\pm = \mathbb{S}^1 \setminus \{(\pm 1, 0)\}.$$

Fijemos componentes

$$\widetilde{U}_- = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset \varepsilon^{-1}(U_-), \qquad \widetilde{U}_+ = (0,1) \subset \varepsilon^{-1}(U_+),$$

de modo que $\varepsilon|_{\widetilde{U}_\pm} \colon \widetilde{U}_\pm \longrightarrow U_\pm$ son homeomorfismos. Definimos las trivializaciones

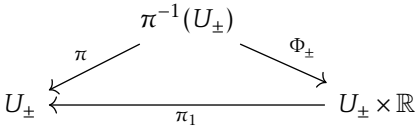
$$\Phi_\pm \colon \pi^{-1}(U_\pm) \longrightarrow U_\pm \times \mathbb{R}, \quad [(x,y)] \mapsto (\varepsilon(x), y), \ \ x \in \widetilde{U}_\pm,$$

Ambas satisfacen $\pi = \pi_1 \circ \Phi_\pm$. Para $p \in U_\pm$, sea $x_\pm \in \widetilde{U}_\pm$ el único punto con $\varepsilon(x_\pm) = p$. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es cualquier otro levantamiento de $p$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0 = x_\pm + m$, y entonces

$$\Phi_\pm([(x_0,t)]) = \Phi_\pm([(x_\pm, (-1)^m t)]) = (p, (-1)^m t).$$

En particular, al usar el representante con $x_0 = x_\pm$, la segunda componente es $t$. Respecto de cualquier otro levantamiento, sólo cambia por el isomorfismo lineal $t \mapsto (-1)^m t$. Por lo tanto, la restricción de $\Phi_\pm$ a cada

fibra es un isomorfismo de espacios vectoriales.




A continuación calcularemos los mapeos de transición. Sea $(p,v) \in (U_+ \cap U_-) \times \mathbb{R}$. Para invertir $\Phi_-$ se elige el representante

$$\Phi_-^{-1}(p,v) = [(x_-,v)] \quad \text{donde} \quad x_- = (\varepsilon|_{\widetilde{U_-}})^{-1}(p) \in (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \setminus \{0\}.$$

Para aplicar luego $\Phi_+$ se expresa la misma clase con un representante cuya primera componente caiga en $\widetilde{U_+} = (0,1)$:

$$x_+ = \begin{cases} x_- + 1, & \text{si } x_- \in (-\frac{1}{2},0), \\ x_-, & \text{si } x_- \in (0,\frac{1}{2}), \end{cases} \qquad [(x_-,v)] = \begin{cases} [(x_+,-v)], & \text{si } x_- \in (-\frac{1}{2},0), \\ [(x_+,v)], & \text{si } x_- \in (0,\frac{1}{2}), \end{cases}$$

pues $(x_-,v) \sim (x_-+1,-v)$ por la relación de equivalencia. En consecuencia,

$$(\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1})(p,v) = \begin{cases} (p,-v), & \text{si } x_- \in (-\frac{1}{2},0), \\ (p,v), & \text{si } x_- \in (0,\frac{1}{2}). \end{cases}$$

Esto se escribe como

$$(\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1})(p,v) = (p,\tau_{+-}(p)v), \qquad \tau_{+-}\colon U_+ \cap U_- \longrightarrow GL(1,\mathbb{R}),$$

donde $\tau_{+-}(p) = -1$ en la componente correspondiente a $x_- \in (-\frac{1}{2},0)$ y $\tau_{+-}(p) = 1$ en la componente correspondiente a $x_- \in (0,\frac{1}{2})$. La imagen de $\tau_{+-}$ es el subconjunto $\{+1,-1\} \subset GL(1,\mathbb{R})$, y $\tau_{+-}$ es suave por ser constante en cada componente conexa de $U_+ \cap U_-$.

Con estas trivializaciones y transiciones se verifican las hipótesis del Lema 1.7.8. Por lo tanto, $(\mathbf{E},\pi,\mathbb{S}^1)$ es un haz vectorial suave de rango 1. Para comprobar que no es trivial, supongamos que admite una sección continua que no se anula. Al levantarla por $q$, dicha sección está representada por una función continua $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface

$$a(x+1) = -a(x),$$

debido a la relación $(x,y) \sim (x+1,-y)$. Si $a(0) > 0$, entonces $a(1) < 0$, y si $a(0) < 0$, entonces $a(1) > 0$; en ambos casos, el teorema del valor intermedio proporciona $x \in [0,1]$ con $a(x) = 0$. El caso $a(0) = 0$ es inmediato. Así, toda sección continua se anula en algún punto. Un haz trivial de rango uno posee la sección global no nula $p \mapsto (p,1)$; por lo tanto, $\mathbf{E}$ no es trivial.

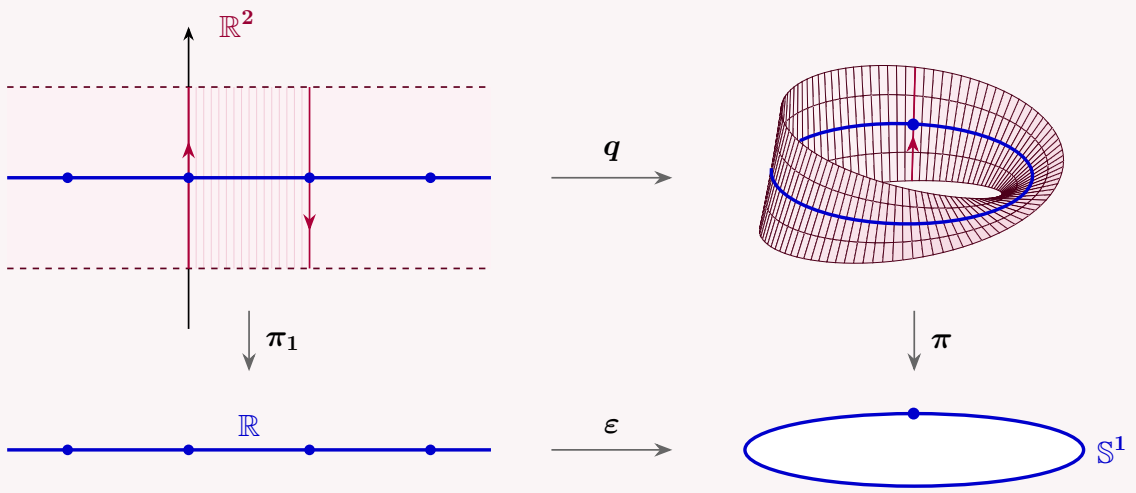



**Figura 1.6.** Haz de Möbius y $[0,1]\times\mathbb{R}$ como dominio fundamental que lo representa.

También se pueden obtener haces nuevos a partir de operaciones en espacios vectoriales, como muestra lo siguiente.

**Definición 1.7.10.** Dada una variedad suave $M$ con o sin frontera y haces vectoriales suaves $\pi'\colon \mathbf{E}' \longrightarrow M$ y $\pi''\colon \mathbf{E}'' \longrightarrow M$ de rangos $k'$ y $k''$ respectivamente. definimos la **suma de Whitney de $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{E}''$** como sigue: $\mathbf{E}'\oplus_W \mathbf{E}'' := \coprod_{p\in M}(\mathbf{E}'_p \oplus \mathbf{E}''_p)$, con la proyección $\pi\colon \mathbf{E}'\oplus\mathbf{E}'' \longrightarrow M$ dada por $\pi(p,(v',v'')) = p$ para cada $p\in M$.

**Proposición 1.7.11.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. La suma de Whitney de dos haces vectoriales suaves sobre $M$, de rangos $k'$ y $k''$, es un haz vectorial suave sobre $M$ de rango $k'+k''$.

*Demostración.* Para cada $p\in M$, consideremos una vecindad abierta $U$ de $p$ sobre la cual existen trivializaciones locales $(U,\Phi')$ de $\mathbf{E}'$ y $(U,\Phi'')$ de $\mathbf{E}''$ y definamos $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times\mathbb{R}^{k'+k''}$ por $\Phi(v',v'') = (\pi'(v'),(\pi_{R^{k'}}\circ\Phi'(v'),\pi_{\mathbb{R}^{k''}}\circ\Phi''(v'')))$.
Supongamos que nos dan otro par de trivializaciones locales $(\widetilde{U},\widetilde{\Phi}')$ y $(\widetilde{U},\widetilde{\Phi}'')$. Sean $\tau'\colon (U\cap\widetilde{U}) \longrightarrow GL(k',\mathbb{R})$ y $\tau''\colon (U\cap\widetilde{U}) \longrightarrow GL(k'',\mathbb{R})$ las respectivas funciones de transición. Entonces la función de transición para $\mathbf{E}'\oplus_W\mathbf{E}''$ está dada por:

$$(\widetilde{\Phi}\circ\Phi^{-1})(p,(v',v'')) = (p,\tau(p)(v',v'')),$$

donde $\tau(p) = \begin{bmatrix}\tau'(p) & 0\\ 0 & \tau''(p)\end{bmatrix}$, la cual es suave, por lo que el Lema 1.7.8, nos garantiza que $\mathbf{E}'\oplus\mathbf{E}''$ es un haz vectorial de rango $k'+k''$ sobre $M$. □

Ahora daremos los conceptos de *secciones locales y globales* y *marcos locales y globales* que nos permitirán dar una descripción completa de los haces vectoriales que se suelen emplear en una variedad suave $M$. Además, con ellos podremos definir los conceptos de campos vectoriales y tensoriales con mayor facilidad.

**Definición 1.7.12.** Sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial. Una **sección local de E** es un mapeo continuo $\sigma\colon U \longrightarrow \mathbf{E}$ definido en un abierto $U \subseteq M$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. Si $U = M$ decimos que $\sigma$ es además una **sección global de E**.

**Definición 1.7.13.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave. Una **sección (local o global) suave de E** es una sección (local o global) que es un mapeo suave de su dominio en **E**.

**Observación 1.7.14.** Para algunos propósitos es necesario considerar funciones que son secciones salvo por la continuidad. Una función que satisfaga todas las condiciones de una sección, excepto la continuidad, se llamará ***sección (local o global) en bruto de*** **E**.

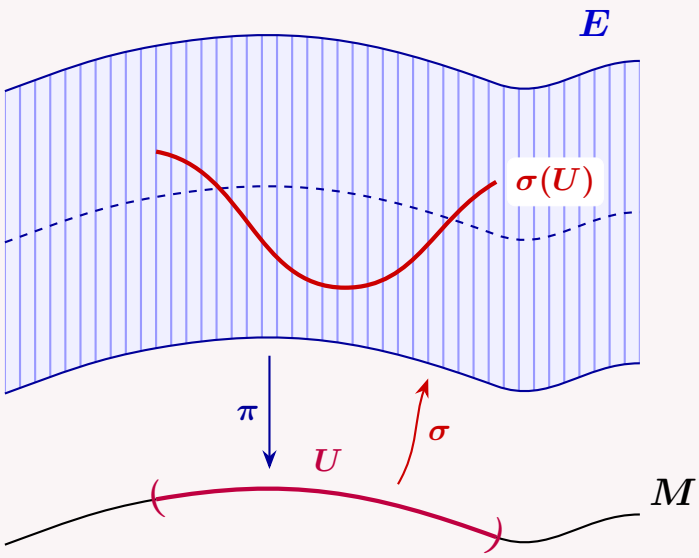



Figura 1.7. Sección local de un haz vectorial.

Dado que estaremos considerando secciones con distintos grados de regularidad, es bueno contar con notación que nos simplifique escribir cuando una sección es de alguna clase de diferenciabilidad en específico.

**Definición 1.7.15.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave. Sea $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Definimos

$$\Gamma^k(\mathbf{E}) := \{\sigma\colon M \longrightarrow \mathbf{E} \mid \sigma \text{ es una sección de clase } C^k\}.$$

Además en ocasiones necesitaremos trabajar con secciones de soporte compacto, por lo que definiremos lo que es el soporte de una sección. Si $\sigma\colon M \longrightarrow \mathbf{E}$ es una sección (posiblemente en bruto), denotamos

$$\mathrm{supp}(\sigma) := \overline{\{p \in M \mid \sigma(p) \neq 0_p\}}$$

y también definimos

$$\Gamma_c^k(\mathbf{E}) := \{\sigma \in \Gamma^k(\mathbf{E}) \mid \sigma \text{ es de soporte compacto}\}.$$

Si $k = \infty$ denotamos simplemente

$$\Gamma(\mathbf{E}) := \Gamma^\infty(\mathbf{E}) \qquad \text{y} \qquad \Gamma_c(\mathbf{E}) := \Gamma_c^\infty(\mathbf{E}).$$

En caso de que sea necesario especificar la variedad respecto a las cuales se estén considerando las secciones, por ejemplo cuando trabajemos con varios haces respecto a distintas variedades suaves, escribiremos $\Gamma^k(M,\mathbf{E})$, $\Gamma(M,\mathbf{E})$, $\Gamma_c^k(M,\mathbf{E})$ y $\Gamma_c(M,\mathbf{E})$ con el mismo significado que arriba.

Ahora daremos la definición de marcos locales y globales, los cuales nos permitirán, entre otras cosas, dar un importante criterio que nos permitirá determinar cuándo una sección es una sección suave.

**Definición 1.7.16.** Sean $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial, $U \subseteq M$ un subconjunto abierto y una $k$-tupla de secciones locales $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ de $\mathbf{E}$ sobre $U$. Decimos que $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ es un **marco local para E sobre U** si $\{\sigma_1(p),\dots,\sigma_k(p)\}$ es una base para $\mathbf{E}_p$ para cada $p \in U$. Si $U = M$, decimos que el marco local $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ es un **marco global para E sobre** $U$. Para simplificar la notación, escribimos $(\sigma_i)_{i=1}^k := (\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ o simplemente $(\sigma_i) := (\sigma_1,\dots,\sigma_k)$, cuando el conjunto de índices sea claro.

**Definición 1.7.17.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Si $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial suave, decimos que un marco local $(\sigma_i)_{i=1}^k$ definido en un abierto $U$ de $M$ es un **marco local suave** si $\sigma_i$ es una sección suave para cada $i \in \{1,\dots,k\}$.

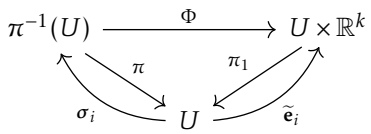
Podemos relacionar los marcos locales suaves con las trivializaciones locales suaves de un haz vectorial suave como sigue:

**Proposición 1.7.18.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Si $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial suave de rango $k$, entonces:

(a) Toda trivialización local suave $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ induce un marco local suave dado por $\sigma_i = \Phi^{-1}(p,\mathbf{e}_i)$ para cada $p \in U$.

(b) Todo marco local suave $(\sigma_i)$ definido en $U \subseteq M$ abierto induce una trivialización local suave.

*Demostración.* (a) Si $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ es una trivialización local suave de $\mathbf{E}$, podemos construir un marco local suave para $\mathbf{E}$ sobre $U$. Para cada $i \in \{1,\dots,k\}$ definimos mapeos $\sigma_1,\dots,\sigma_k\colon U \longrightarrow \mathbf{E}$ dados por $\sigma_i(p) = \Phi^{-1}(p,\mathbf{e}_i) = \Phi^{-1} \circ \widetilde{\mathbf{e}_i}(p)$ donde $\widetilde{\mathbf{e}_i}\colon M \longrightarrow M \times \mathbb{R}^k$, $\widetilde{\mathbf{e}_i}(p) = (p,\mathbf{e}_i)$ y donde $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^k$ es la base canónica de $\mathbb{R}^k$. La familia $(\widetilde{\mathbf{e}_i})_{i=1}^k$ forma un marco global suave para el haz $\pi_1\colon M \times \mathbb{R}^k \longrightarrow M$ donde $\pi_1$ es la proyección en la primera coordenada.



Entonces $\sigma_i$ es suave pues $\Phi$ es un difeomorfismo, además $\pi_1 \circ \Phi = \pi$ por lo que

$$\pi \circ \sigma_i(p) = \pi \circ \Phi^{-1}(p, \mathbf{e}_i) = \pi_1(p, \mathbf{e}_i) = p,$$

lo cual nos dice que $\sigma_i$ es una sección. Para ver que $(\sigma_i(p))$ forma una base para $\mathbf{E}_p$, notemos que $\Phi$ se restringe a un isomorfismo de $\mathbf{E}_p$ en $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ y $\Phi(\sigma_i(p)) = (p, \mathbf{e}_i)$ por lo que $\Phi$ lleva a $(\sigma_i(p))$ en la base estándar para $\{p\} \times \mathbb{R}^k$. Por lo tanto $(\sigma_i)$ es un marco local suave para $\mathbf{E}$ y decimos que es **el marco local suave asociado a la trivialización local suave** $\Phi$.

(b) Supongamos que $(\sigma_i)_{i=1}^k$ es un marco local suave para $\mathbf{E}$ definido en un abierto $U \subseteq M$. Definimos $\Psi \colon U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ por

$$\Psi(p, (v^1, \ldots, v^k)) = v^i \sigma_i(p).$$

Como para cada $p \in U$, $\{\sigma_i(p) \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$ forma una base para $\mathbf{E}_p$, tenemos que $\Psi$ es biyectiva. Además $\sigma_i = \Psi \circ \widetilde{\mathbf{e}_i}$. Si demostramos que $\Psi$ es un difeomorfismo, entonces $\Psi^{-1}$ será una trivialización local suave cuyo marco local suave asociado es $(\sigma_i)_{i=1}^k$. Como $\Psi$ es biyectiva, basta demostrar que es un difeomorfismo local. Sea $q \in U$. Por la definición de haz vectorial suave, existen un abierto $V_0 \subseteq M$ con $q \in V_0$ y una trivialización local suave $\Phi \colon \pi^{-1}(V_0) \longrightarrow V_0 \times \mathbb{R}^k$. Al sustituir $V_0$ por $V := V_0 \cap U$ y restringir $\Phi$, obtenemos una trivialización local suave sobre un abierto $V \subseteq U$ que contiene a $q$. Como $\Phi$ es un difeomorfismo, basta probar que

$$(\Phi \circ \Psi) \restriction_{V \times \mathbb{R}^k} \colon V \times \mathbb{R}^k \longrightarrow V \times \mathbb{R}^k$$

es un difeomorfismo.

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, el mapeo $(\Phi \circ \sigma_i) \restriction_V \colon V \longrightarrow V \times \mathbb{R}^k$ es suave. Por lo tanto, existen funciones suaves $\sigma_i^1, \ldots, \sigma_i^k \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $(\Phi \circ \sigma_i)(p) = (p, (\sigma_i^1(p), \ldots, \sigma_i^k(p)))$ para todo $p \in V$. En consecuencia,

$$(\Phi \circ \Psi)(p, (v^1, \ldots, v^k)) = (p, (v^i \sigma_i^1(p), \ldots, v^i \sigma_i^k(p))),$$

de modo que $(\Phi \circ \Psi) \restriction_{V \times \mathbb{R}^k}$ es suave.

Para cada $p \in V$, la matriz $(\sigma_i^j(p))$ es invertible, pues $\{\sigma_i(p) \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$ es una base de $\mathbf{E}_p$. Denotemos por $(\tau_i^j(p))$ su matriz inversa. Como la inversión en $GL(k, \mathbb{R})$ es suave, las funciones $\tau_i^j$ son suaves y

$$(\Phi \circ \Psi)^{-1}(p, (w^1, \ldots, w^k)) = (p, (w^i \tau_i^1(p), \ldots, w^i \tau_i^k(p))).$$

Por lo tanto, $(\Phi \circ \Psi)^{-1}$ es suave. Esto demuestra que $\Psi$ es un difeomorfismo local alrededor de $q$ y, como $q \in U$ fue arbitrario, concluye la prueba.

□

**Observación 1.7.19.** La Proposición 1.7.18, en particular, nos dice que siempre existe una cubierta abierta $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ de dominios de marcos locales suaves.

Como corolario tenemos lo siguiente:

**Corolario 1.7.20.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $k$, sea $(V,\varphi)$ una carta suave en $M$ con funciones coordenadas $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$ y supongamos que tenemos un marco local suave $(\boldsymbol{\sigma}_i)_{i=1}^k$ para $\mathbf{E}$ sobre $V$. Definimos $\widetilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(V) \longrightarrow \varphi(V)\times\mathbb{R}^k$ por

$$\widetilde{\varphi}(v^i\boldsymbol{\sigma}_i) = (x^1(p),\dots,x^n(p),v^1,\dots,v^k).$$

Entonces $(\pi^{-1}(V),\widetilde{\varphi})$ es una carta coordenada suave de $\mathbf{E}$.

*Demostración.* El marco determina la trivialización suave

$$\Psi\colon V\times\mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(V), \qquad \Psi(p,v) = \sum_{i=1}^k v^i\boldsymbol{\sigma}_i(p),$$

por la Proposición 1.7.18. La función del enunciado es $\widetilde{\varphi} = (\varphi\times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k})\circ\Psi^{-1}$; por ello es un difeomorfismo sobre $\varphi(V)\times\mathbb{R}^k$. □

Tenemos el criterio de suavidad para secciones locales en bruto.

**Proposición 1.7.21.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave y sea $\boldsymbol{\tau}\colon M \longrightarrow \mathbf{E}$ una sección en bruto. Si $(\boldsymbol{\sigma}_i)$ es un marco local suave para $\mathbf{E}$ definido en un abierto $U\subseteq M$, entonces $\boldsymbol{\tau}$ es suave en $U$ si y sólo si sus funciones componentes con respecto a $(\boldsymbol{\sigma}_i)$ son suaves.

*Demostración.* Sea $\Psi$ la trivialización asociada al marco. Si $\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^k \tau^i\boldsymbol{\sigma}_i$, entonces

$$(\Psi^{-1}\circ\boldsymbol{\tau})(p) = \big(p,(\tau^1(p),\dots,\tau^k(p))\big).$$

Como $\Psi$ y $\Psi^{-1}$ son suaves, $\boldsymbol{\tau}$ es suave si y sólo si todas sus funciones componentes $\tau^i$ son suaves. □

La multiplicación por funciones suaves convierte el espacio de secciones de un haz vectorial en un $C^\infty(M)$-módulo. Esta estructura algebraica expresa que los coeficientes de una sección pueden variar suavemente sobre la base.

**Proposición 1.7.22.** Sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave sobre una variedad suave $M$ con o sin frontera. Definimos una acción de $C^\infty(M)$ sobre $\Gamma(\mathbf{E})$ por

$$(f\boldsymbol{\sigma})(p) \;:=\; f(p)\boldsymbol{\sigma}(p), \qquad f\in C^\infty(M),\ \boldsymbol{\sigma}\in\Gamma(\mathbf{E}),\ p\in M.$$

Entonces $\Gamma(\mathbf{E})$, con la suma usual de funciones y esta acción, es un $C^\infty(M)$-módulo.

*Demostración.* Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ una cubierta abierta de $M$ tal que para cada $\alpha\in J$ existe un marco local suave $(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha,i})_{i=1}^k$ de $\mathbf{E}$ definido en $U_\alpha$. Si $\boldsymbol{\sigma}\in\Gamma(\mathbf{E})$, en cada $U_\alpha$ se escribe

$$\boldsymbol{\sigma}\restriction_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^k a_\alpha^i\boldsymbol{\sigma}_{\alpha,i}, \qquad a_\alpha^i\in C^\infty(U_\alpha),$$

donde $k$ es el rango de $\mathbf{E}$. Para $f \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$(f\sigma)\restriction_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \big(f\restriction_{U_\alpha} \cdot a_\alpha^i\big)\sigma_{\alpha,i}.$$

Por la Proposición 1.7.21, $f\sigma$ es suave en $U_\alpha$ porque $f\restriction_{U_\alpha} \cdot a_\alpha^i$ es suave para cada $i$. Como esto vale para todo $\alpha \in J$, se concluye que $f\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$.
Las identidades de módulo son

$$(f+g)\sigma = f\sigma + g\sigma, \qquad f(\sigma+\tau) = f\sigma + f\tau, \qquad (fg)\sigma = f(g\sigma), \qquad 1\cdot\sigma = \sigma,$$

Para verificarlas, se evalúa cada miembro en un punto $p \in M$ y se usan las identidades de espacio vectorial en la fibra $\mathbf{E}_p$. Por ejemplo,

$$((fg)\sigma)(p) = f(p)g(p)\sigma(p) = \big(f(g\sigma)\big)(p).$$

Las otras tres igualdades se obtienen del mismo modo. Por lo tanto, $\Gamma(\mathbf{E})$ es un $C^\infty(M)$-módulo. □

La noción natural de mapeo entre dos haces vectoriales debe cubrir un mapeo entre sus espacios base y ser lineal en cada fibra. Esto conduce a la siguiente definición.

**Definición 1.7.23.** Si $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ y $\pi'\colon \mathbf{E}' \longrightarrow M'$ son haces vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, una función continua $F\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ se llama un ***homomorfismo de haces*** si existe una función $f\colon M \longrightarrow M'$ tal que $\pi' \circ F = f \circ \pi$, es decir tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E} & \xrightarrow{F} & \mathbf{E}' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ M & \xrightarrow[f]{} & M' \end{array}$$

con la propiedad de que para cada $p \in M$, $F\restriction_{\mathbf{E}_p}\colon \mathbf{E}_p \longrightarrow \mathbf{E}'_{f(p)}$ es $\mathbb{K}$–lineal. La relación entre $F$ y $f$ se expresa diciendo que $F$ ***cubre a*** $f$.
Si $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$ y $F$ son suaves, decimos que $F$ es un ***homomorfismo de haces suave***. Cuando ambos haces tienen la misma base y el mapeo cubierto es la identidad, denotamos

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \mathbf{E}') := \{F\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}' \mid F \text{ es un homomorfismo de haces suave sobre } M\}.$$

No hemos pedido que $f$ sea continua, de hecho esto se seguirá de la continuidad de $F$ y además estará únicamente determinada por dicha función.

**Proposición 1.7.24.** Sean $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ y $\pi'\colon \mathbf{E}' \longrightarrow M'$ haces vectoriales y sea $F\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ un homomorfismo de haces que cubre a $f\colon M \longrightarrow M'$. Entonces $f$ es continua y está únicamente determinada por $F$. Si, además, $M$ y $M'$ son variedades suaves con o sin frontera, los haces son suaves y $F$ es suave, entonces $f$ también es suave.

*Demostración.* Tenemos que $f = \pi' \circ F \circ \zeta$ donde $\zeta\colon M \longrightarrow \mathbf{E}$ es tal que $\zeta(p) = 0_{\mathbf{E}_p} \in \mathbf{E}_p$ para cada $p \in M$. Para verificar esto, notemos que $(\pi' \circ F \circ \zeta)(p) = \pi'(F(0_{\mathbf{E}_p})) = \pi'(0_{\mathbf{E}_{f(p)}}) = f(p)$. Entonces $f$ es continua y si los haces y $F$ son suaves, entonces $\pi'$ y $\zeta$ son suaves, por lo que $f$ es suave.

Además $f$ está únicamente determinada por $F$ pues toda $f$ que haga el diagrama conmutativo tiene que ser igual a esa composición. □

**Definición 1.7.25.** Si $F\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ es un homomorfismo de haces biyectivo cuya inversa es un homomorfismo de haces, decimos que $F$ es un *isomorfismo de haces*. Si $F$ es un difeomorfismo decimos que $F$ es un *isomorfismo suave de haces*.

El ejercicio siguiente establece que, sobre una misma base, la biyectividad de un homomorfismo suave basta para que su inversa sea suave.

**Ejercicio 1.7.26.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Pruebe que si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$ son haces vectoriales suaves sobre $M$ y $F \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E},\mathbf{E}')$ es biyectivo, entonces es un isomorfismo suave de haces.

**Observación 1.7.27.** Si $\mathbf{E},\mathbf{E}' \longrightarrow M$ son haces vectoriales suaves sobre una variedad suave $M$ con o sin frontera y $F \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E},\mathbf{E}')$, entonces la composición con $F$ induce un mapeo

$$\widetilde{F}\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}')$$

como sigue:

$$\widetilde{F}(\sigma)(p) = (F\circ\sigma)(p) = F(\sigma(p)).$$

Tenemos que $\widetilde{F}(\sigma) \in \Gamma(\mathbf{E}')$ pues es suave por ser composición de funciones suaves. Si los haces están definidos sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, la linealidad de $F$ en cada fibra implica que $\widetilde{F}$ es $\mathbb{K}$–lineal en las secciones. Además, para $f \in C^\infty(M)$,

$$\widetilde{F}(f\sigma)(p) = F_p\big(f(p)\sigma(p)\big) = f(p)F_p\big(\sigma(p)\big) = \big(f\widetilde{F}(\sigma)\big)(p),$$

de modo que $\widetilde{F}$ es $C^\infty(M)$-lineal, es decir, $\widetilde{F} \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(\mathbf{E}),\Gamma(\mathbf{E}'))$.

La observación anterior nos dice que todo homomorfismo de haces induce un homomorfismo entre los módulos de secciones suaves, y la afirmación recíproca resultará ser cierta, es decir, todo homomorfismo de módulos entre las secciones de los haces induce un homomorfismo de haces. Para demostrar esto necesitaremos dar un lema primero.

**Lema 1.7.28.** (Sección con valor prescrito en una fibra) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave, sea $p \in M$ y sea $v \in \mathbf{E}_p$. Entonces existe una sección global suave $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$ con $\sigma(p) = v$. Además, si $U$ es una vecindad de $p$ sobre la cual $\mathbf{E}$ admite una trivialización local, podemos elegir $\sigma$ con $\operatorname{supp}\sigma \subset U$.

*Demostración.* Sea $(U,\Phi)$ una trivialización local de $\mathbf{E}$ en una vecindad abierta de $p$, con

$$\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times\mathbb{R}^k.$$

Escribimos $\Phi(v) = (p,u_0)$ con $u_0 \in \mathbb{R}^k$. Por la Proposición 1.3.6, podemos escoger $\chi \in C^\infty(M)$ una función

flan con $\chi(p) = 1$ y $\operatorname{supp}\chi \subset U$. Definimos

$$\sigma(q) = \begin{cases} \Phi^{-1}\big(q, \chi(q)u_0\big), & q \in U, \\ 0_q, & q \notin U, \end{cases}$$

donde $0_q$ denota el vector nulo en la fibra $\mathbf{E}_q$. En $U$ la composición $q \mapsto \chi(q)u_0$ es suave y, como $\Phi^{-1}$ es suave, $\sigma \restriction_U$ es suave. Si $q \notin \overline{U}$, entonces $\sigma$ coincide con la sección cero, que es suave.
Para justificar el pegado en la frontera, usamos la condición $\operatorname{supp}\chi \subset U$. Por definición, $M \setminus \operatorname{supp}\chi$ es abierto y contiene a $\partial U$, de modo que para cada $q_0 \in \partial U$ existe una vecindad abierta $V_{q_0} \subset M$ tal que $V_{q_0} \cap \operatorname{supp}\chi = \varnothing$, en particular $\chi \restriction_{V_{q_0}} = 0$. En consecuencia, para $q \in V_{q_0} \cap U$ se tiene

$$\sigma(q) = \Phi^{-1}\big(q, \chi(q)u_0\big) = \Phi^{-1}(q, 0_{\mathbb{R}^k}) = 0_q,$$

y para $q \in V_{q_0} \setminus U$ también $\sigma(q) = 0_q$ por definición. Es decir, en una vecindad abierta de cada punto de $\partial U$ ambas expresiones de $\sigma$ coinciden exactamente con la sección cero. Por lo tanto $\sigma$ es suave en $M$.
Por construcción, $\sigma(p) = \Phi^{-1}(p, u_0) = v$. Además, si $q \in U$ y $\chi(q) = 0$, entonces $\sigma(q) = 0_q$, y si $q \notin U$ también $\sigma(q) = 0_q$, por lo que $\operatorname{supp}\sigma \subset \operatorname{supp}\chi \subset U$. □

**Lema 1.7.29.** (Lema de caracterización de homomorfismos de haces) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ y $\pi'\colon \mathbf{E}' \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves. Un mapeo

$$\mathcal{F}\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}')$$

es $C^\infty(M)$-lineal si y sólo si existe un *único* homomorfismo de haces suave $F\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ sobre $M$ tal que

$$\mathcal{F}(\sigma) = F \circ \sigma, \qquad \forall \sigma \in \Gamma(\mathbf{E}).$$

*Demostración.* Si $F\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ es un homomorfismo suave sobre $M$, entonces $\sigma \mapsto F \circ \sigma$ es $C^\infty(M)$–lineal por la linealidad de cada $F_p$.
Recíprocamente, sea $\mathcal{F}\colon \Gamma(\mathbf{E}) \to \Gamma(\mathbf{E}')$ un mapeo $C^\infty(M)$–lineal. Para $p \in M$ y $v \in \mathbf{E}_p$, elegimos $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$ con $\sigma(p) = v$, cuya existencia está garantizada por el Lema 1.7.28, y definimos

$$F_p(v) := \mathcal{F}(\sigma)(p).$$

Probemos que el valor no depende de $\sigma$. Basta considerar una sección $\tau$ con $\tau(p) = 0$ y verificar que $\mathcal{F}(\tau)(p) = 0$. Tomemos un marco local $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r)$ de $\mathbf{E}$ en un abierto $U$ que contenga a $p$, y una función flan $\chi$ con soporte contenido en $U$ y que valga uno en una vecindad de $p$. En $U$ escribimos $\tau = \sum_{i=1}^{r} a^i \mathbf{e}_i$, donde $a^i(p) = 0$. Elegimos además una función flan $\rho$ con soporte contenido en $U$ y que valga uno en $\operatorname{supp}\chi$. Prolongamos por cero $\widetilde{a^i} := \chi a^i$ y $\widetilde{\mathbf{e}}_i := \rho \mathbf{e}_i$. Entonces son, respectivamente, funciones y secciones globales

suaves, $\widetilde{a}^i(p) = 0$, y $\chi\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^{r} \widetilde{a}^i \widetilde{\mathbf{e}}_i$. La $C^\infty(M)$–linealidad da

$$\mathcal{F}(\chi\boldsymbol{\tau})(p) = \sum_{i=1}^{r} \widetilde{a}^i(p)\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{e}}_i)(p) = 0.$$

La sección $(1-\chi)\boldsymbol{\tau}$ se anula en una vecindad de $p$. Si $\eta$ es una función flan con $\eta(p) = 1$ y soporte contenido en esa vecindad, entonces

$$\mathcal{F}((1-\chi)\boldsymbol{\tau})(p) = \eta(p)\mathcal{F}((1-\chi)\boldsymbol{\tau})(p) = \mathcal{F}(\eta(1-\chi)\boldsymbol{\tau})(p) = 0.$$

Así, $\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau})(p) = 0$ y $F_p$ está bien definido. La linealidad de $F_p$ se sigue eligiendo secciones con valores prescritos y usando la linealidad de $\mathcal{F}$.
Definimos $F\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ por $F(v) = F_{\pi(v)}(v)$. Para probar su suavidad, sean $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$ y $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_s)$ marcos locales definidos en un abierto $U$ alrededor de $p$. Elegimos un abierto $V$ tal que $p \in V$ y $\overline{V} \subseteq U$, y una función flan $\rho \in C^\infty(M)$ con $\rho = 1$ en una vecindad de $\overline{V}$ y $\operatorname{supp}\rho \subseteq U$. Para cada $i$ definimos

$$\widetilde{\mathbf{e}}_i(q) = \begin{cases} \rho(q)\mathbf{e}_i(q), & q \in U, \\ 0_q, & q \notin U. \end{cases}$$

La condición sobre el soporte de $\rho$ muestra, como en el Lema 1.7.28, que $\widetilde{\mathbf{e}}_i$ es una sección global suave; además, coincide con $\mathbf{e}_i$ en $V$. Existen funciones suaves $A_i^a$ tales que

$$\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{e}}_i) = \sum_{a=1}^{s} A_i^a \mathbf{e}'_a$$

en $V$. Si $q \in V$ y $v = \sum_{i=1}^{r} z^i \mathbf{e}_i(q)$, la independencia que acabamos de probar da

$$F_q(v) = \sum_{a=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} A_i^a(q) z^i \mathbf{e}'_a(q).$$

En trivializaciones, el mapeo total tiene entonces la expresión $(q, z) \mapsto (q, A(q)z)$, que es suave. Por construcción cubre la identidad, es lineal en cada fibra y satisface $F \circ \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})$ para toda $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma(\mathbf{E})$.
Si $G$ es otro homomorfismo con la misma acción en secciones, dados $p \in M$ y $v \in \mathbf{E}_p$ elegimos $\boldsymbol{\sigma}(p) = v$ y obtenemos $F_p(v) = (F \circ \boldsymbol{\sigma})(p) = (G \circ \boldsymbol{\sigma})(p) = G_p(v)$. Por lo tanto, $F = G$. □

Los espacios de transformaciones lineales entre las fibras forman, a su vez, un haz vectorial. Esta construcción se precisa en la proposición siguiente.

**Proposición 1.7.30.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E} \to M$ y $\mathbf{E}' \to M$ haces vectoriales suaves de rangos $k$ y $l$. Definimos

$$\operatorname{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{E}') := \coprod_{p \in M} \operatorname{Hom}(\mathbf{E}_p, \mathbf{E}'_p), \qquad \pi_{\operatorname{Hom}}\colon \operatorname{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{E}') \longrightarrow M, \quad (p, T_p) \mapsto p,$$

con $T_p \in \mathrm{Hom}(\mathbf{E}_p, \mathbf{E}'_p)$. Entonces $\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ admite una única topología y una única estructura suave que lo convierten en un haz vectorial suave de rango $kl$ sobre $M$ y para las cuales las trivializaciones matriciales inducidas por marcos locales suaves de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$ son suaves.

*Demostración.* Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ una cubierta abierta de $M$ tal que para cada $\alpha \in J$ existen marcos locales suaves

$$(\sigma_{\alpha,i})_{i=1}^k \text{ de } \mathbf{E} \text{ en } U_\alpha, \qquad (\sigma'_{\alpha,j})_{j=1}^l \text{ de } \mathbf{E}' \text{ en } U_\alpha.$$

Las trivializaciones asociadas

$$\Phi_\alpha^{\mathbf{E}} \colon \pi_{\mathbf{E}}^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k, \qquad \Phi_\alpha^{\mathbf{E}'} \colon \pi_{\mathbf{E}'}^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^l$$

se caracterizan por

$$\Phi_\alpha^{\mathbf{E}}\big(\sigma_{\alpha,i}(p)\big) = (p, e_i), \qquad \Phi_\alpha^{\mathbf{E}'}\big(\sigma'_{\alpha,j}(p)\big) = (p, e'_j),$$

donde $(e_i)_{i=1}^k$ y $(e'_j)_{j=1}^l$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^l$.
Dado $p \in U_\alpha$ y $T_p \in \mathrm{Hom}(\mathbf{E}_p, \mathbf{E}'_p)$, escribimos su matriz asociada en los marcos locales como

$$T_\alpha(p) = \big(T_\alpha(p)_i^j\big)_{j,i} \in M_{l\times k}(\mathbb{R}),$$

definida por

$$T_p(\sigma_{\alpha,i}(p)) = \sum_{j=1}^{l} T_\alpha(p)_i^j \sigma'_{\alpha,j}(p).$$

En particular, el mapeo lineal $T_\alpha(p)\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ satisface

$$T_\alpha(p)(e_i) = \sum_{j=1}^{l} T_\alpha(p)_i^j e'_j.$$

Definimos entonces la trivialización local de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ por

$$\Phi_\alpha^{\mathrm{Hom}}(T_p) := (p, T_\alpha(p)).$$

Esta función es biyectiva, con inversa dada por

$$(p, S) \longmapsto \left( u = \sum_{i=1}^{k} u^i \sigma_{\alpha,i}(p) \;\mapsto\; \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} S_i^j u^i \sigma'_{\alpha,j}(p) \right), \qquad S \in M_{l\times k}(\mathbb{R}).$$

Aquí $S$ es una matriz arbitraria en $M_{l\times k}(\mathbb{R})$. Si $S = T_\alpha(p)$, el mapeo reconstruido coincide exactamente con $T_p$; y si partimos de un $S$ arbitrario y luego aplicamos $\Phi_\alpha^{\mathrm{Hom}}$, recuperamos de nuevo $(p, S)$. Esto muestra que ambas funciones son realmente inversas.
En particular, para cada $p \in U_\alpha$, la restricción

$$\Phi_\alpha^{\mathrm{Hom}} \restriction_{\mathrm{Hom}(\mathbf{E}_p, \mathbf{E}'_p)} \colon \mathrm{Hom}(\mathbf{E}_p, \mathbf{E}'_p) \longrightarrow \{p\} \times M_{l\times k}(\mathbb{R})$$

es un isomorfismo lineal de espacios vectoriales reales.

Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, por el Lema 1.7.7, los cambios de trivialización de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$ están descritos por funciones suaves

$$\tau^{\mathbf{E}}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(k,\mathbb{R}), \qquad \tau^{\mathbf{E}'}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(l,\mathbb{R}),$$

las cuales, usando la Proposición 1.7.18, están caracterizadas por

$$\sigma_{\beta,i} = \sum_{m=1}^{k} (\tau^{\mathbf{E}}_{\alpha\beta})^m_i \sigma_{\alpha,m}, \qquad \sigma'_{\beta,j} = \sum_{n=1}^{l} (\tau^{\mathbf{E}'}_{\alpha\beta})^n_j \sigma'_{\alpha,n}.$$

Con estas notaciones, si la matriz de $T_p$ en $U_\beta$ es $T_\beta(p)$, entonces su matriz en $U_\alpha$ es

$$T_\alpha(p) = \tau^{\mathbf{E}'}_{\alpha\beta}(p) T_\beta(p) \big(\tau^{\mathbf{E}}_{\alpha\beta}(p)\big)^{-1}.$$

Por consiguiente, el cambio de trivialización de $\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}')$ está descrito por la función

$$\tau^{\operatorname{Hom}}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(kl,\mathbb{R}),$$

definida en cada $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ por

$$\tau^{\operatorname{Hom}}_{\alpha\beta}(p)(S) = \tau^{\mathbf{E}'}_{\alpha\beta}(p) S (\tau^{\mathbf{E}}_{\alpha\beta}(p))^{-1}, \qquad S \in M_{l\times k}(\mathbb{R}).$$

En efecto,

$$(\Phi^{\operatorname{Hom}}_\alpha \circ (\Phi^{\operatorname{Hom}}_\beta)^{-1})(p,S) = \Phi^{\operatorname{Hom}}_\alpha \left( u = \sum_{i=1}^{k} u^i \sigma_{\beta,i}(p) \;\mapsto\; \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} S^j_i u^i \sigma'_{\beta,j}(p) \right) = (p, T_\alpha(p))$$

$$= (p, \tau^{\mathbf{E}'}_{\alpha\beta}(p) S \left(\tau^{\mathbf{E}}_{\alpha\beta}(p)\right)^{-1}).$$

Para cada $p$, el mapeo $S \mapsto \tau^{\operatorname{Hom}}_{\alpha\beta}(p)(S)$ es lineal. Además, depende suavemente de $p$, pues la multiplicación y la inversión de matrices son suaves y las funciones $\tau^{\mathbf{E}}_{\alpha\beta}$ y $\tau^{\mathbf{E}'}_{\alpha\beta}$ son suaves.
En consecuencia, las funciones de transición de $\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}')$ son suaves y lineales en cada fibra. El Lema 1.7.8 proporciona la única topología y estructura suave que convierten este espacio en un haz vectorial suave de rango $kl$ sobre $M$ para el cual las $\Phi^{\operatorname{Hom}}_\alpha$ son trivializaciones locales suaves. El mismo cálculo de transiciones se aplica a cualquier otro par de marcos locales suaves de los haces de partida. Sus trivializaciones matriciales son, por tanto, suaves para esta estructura, y la unicidad anunciada se sigue de la unicidad para la familia ya construida. □

Usaremos la notación $\operatorname{End}(\mathbf{E}) := \operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E})$.
Tenemos ahora la siguiente relación entre los distintos conceptos que hemos definido:

**Proposición 1.7.31.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$, $\pi'\colon \mathbf{E}' \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves. Entonces se tienen las siguientes identificaciones naturales:

(a) Cada homomorfismo de haces suave $F\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ sobre $M$ determina una sección suave $p \longmapsto \big(F_p\colon \mathbf{E}_p \longrightarrow \mathbf{E}'_p\big)$ del haz $\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}')$. Recíprocamente, toda sección $\mathbf{A} \in \Gamma(\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))$ define un homomorfismo de haces $F\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ por $F(v) = \mathbf{A}(\pi(v))(v)$, para todo $v \in \mathbf{E}$. De este modo se obtiene una

biyección natural

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E},\mathbf{E}') \cong \Gamma\big(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}')\big),$$

donde $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E},\mathbf{E}')$ denota el conjunto de homomorfismos de haces sobre $M$.

(b) Toda sección $\mathbf{A} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))$ induce un mapeo $\mathcal{F}_{\mathbf{A}} \colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}')$ dado por $\big(\mathcal{F}_{\mathbf{A}}(\sigma)\big)(p) = \mathbf{A}(p)(\sigma(p))$, para $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$. Este mapeo es $C^\infty(M)$-lineal. Recíprocamente, si $\mathcal{F} \colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}')$ es $C^\infty(M)$-lineal, entonces existe una única sección $\mathbf{A} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$. Esto proporciona un isomorfismo natural de $C^\infty(M)$-módulos

$$\Gamma\big(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}')\big) \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\big(\Gamma(\mathbf{E}),\Gamma(\mathbf{E}')\big).$$

(c) Componiendo las dos correspondencias anteriores se obtiene una identificación natural

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E},\mathbf{E}') \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\big(\Gamma(\mathbf{E}),\Gamma(\mathbf{E}')\big),$$

compatible con la composición de homomorfismos de haces y con la composición de mapeos $C^\infty(M)$-lineales.

*Demostración.* (a) Sea $F \colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ un homomorfismo de haces sobre $M$, es decir, un mapeo suave tal que $\pi' \circ F = \pi$. Para cada $p \in M$, la restricción $F_p \colon \mathbf{E}_p \longrightarrow \mathbf{E}'_p$ es lineal. Definimos una sección $\mathbf{A}_F \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))$ por $\mathbf{A}_F(p) := F_p$. Para ver que $\mathbf{A}_F$ es suave, basta trabajar en trivializaciones locales.
En un abierto $U_\alpha$ con marcos locales suaves $(\sigma_{\alpha,i})_{i=1}^k$ de $\mathbf{E}$ y $(\sigma'_{\alpha,j})_{j=1}^l$ de $\mathbf{E}'$, todo vector $v \in \mathbf{E}_p$ se escribe como $v = \sum_{i=1}^k u^i \sigma_{\alpha,i}(p)$. Denotamos por $T_\alpha(p) = \big(T_\alpha(p)_i^j\big) \in M_{l\times k}(\mathbb{R})$ la *matriz asociada* de $F_p$ respecto a estos marcos, es decir,

$$F_p\big(\sigma_{\alpha,i}(p)\big) = \sum_{j=1}^{l} T_\alpha(p)_i^j \sigma'_{\alpha,j}(p) \quad \text{para cada } i \in \{1,\dots,k\}.$$

Entonces, para $v \in \mathbf{E}_p$,

$$F_p(v) = \sum_{i=1}^{k} u^i F_p\big(\sigma_{\alpha,i}(p)\big) = \sum_{i=1}^{k} u^i \sum_{j=1}^{l} T_\alpha(p)_i^j \sigma'_{\alpha,j}(p).$$

Como $F$ es suave, la matriz asociada $T_\alpha(p)$ depende suavemente de $p$, y por el Lema 1.7.21, $\mathbf{A}_F$ es una sección suave de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}')$.
Recíprocamente, sea $\mathbf{A} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))$. Para cada $p \in M$ y $v \in \mathbf{E}_p$, definimos $F_{\mathbf{A}}(v) := \mathbf{A}(p)(v)$. Entonces $F_{\mathbf{A}} \colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ es un mapeo suave y lineal en cada fibra, y además $\pi'(F_{\mathbf{A}}(v)) = p = \pi(v)$, así que $F_{\mathbf{A}}$ es un homomorfismo de haces suave sobre $M$.
Si comenzamos con $F$ y construimos $\mathbf{A}_F$, entonces para todo $v \in \mathbf{E}_p$ se tiene $F_{\mathbf{A}_F}(v) = \mathbf{A}_F(p)(v) = F_p(v) = F(v)$, luego $F_{\mathbf{A}_F} = F$.
En sentido inverso, si comenzamos con $\mathbf{A}$ y construimos $F_{\mathbf{A}}$, para cada $p \in M$ tenemos que $\mathbf{A}_{F_{\mathbf{A}}}(p) = (F_{\mathbf{A}})_p \colon \mathbf{E}_p \longrightarrow \mathbf{E}'_p$ y $(F_{\mathbf{A}})_p(v) = F_{\mathbf{A}}(v) = \mathbf{A}(p)(v)$ para todo $v \in \mathbf{E}_p$. Como $\mathbf{A}_{F_{\mathbf{A}}}(p)$ y $\mathbf{A}(p)$ coinciden en todos los vectores de $\mathbf{E}_p$, concluimos que $\mathbf{A}_{F_{\mathbf{A}}}(p) = \mathbf{A}(p)$ para todo $p \in M$, y por lo tanto $\mathbf{A}_{F_{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$.
Concluimos que las correspondencias $F \mapsto \mathbf{A}_F$ y $\mathbf{A} \mapsto F_{\mathbf{A}}$ son inversas una de la otra, y queda probada la

biyección

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E},\mathbf{E}') \cong \Gamma\big(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}')\big).$$

(b) Definimos

$$\Theta\colon \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}')) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\big(\Gamma(\mathbf{E}),\Gamma(\mathbf{E}')\big), \qquad \Theta(\mathbf{A})(\sigma)(p) := \mathbf{A}(p)\big(\sigma(p)\big).$$

Por la Observación 1.7.27, $\Theta(\mathbf{A})$ es $C^\infty(M)$-lineal.
Veamos que $\Theta$ es $C^\infty(M)$-lineal en $\mathbf{A}$. Sean $f \in C^\infty(M)$ y $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))$. Tenemos que

$$\Theta(f\mathbf{A}+\mathbf{B})(\sigma)(p) = (f\mathbf{A}+\mathbf{B})(p)(\sigma(p)) = (f(p)\mathbf{A}(p)+\mathbf{B}(p))(\sigma(p))$$

$$= f(p)\mathbf{A}(p)(\sigma(p)) + \mathbf{B}(p)(\sigma(p)) = (f\Theta(\mathbf{A}))(\sigma)(p) + \Theta(\mathbf{B})(\sigma)(p),$$

por lo tanto $\Theta(f\mathbf{A}+\mathbf{B}) = f\Theta(\mathbf{A}) + \Theta(\mathbf{B})$.
Para la sobreyectividad, sea $\mathcal{F}\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}')$ un mapeo $C^\infty(M)$-lineal. Por el Lema 1.7.29, existe un único homomorfismo de haces $F\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ tal que $\mathcal{F}(\sigma) = F \circ \sigma$, para toda $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$. Por (a), $F$ corresponde a una sección $\mathbf{A}_F \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))$ y, por definición, $\Theta(\mathbf{A}_F) = \mathcal{F}$.
Para la inyectividad, supongamos que $\Theta(\mathbf{A}_1) = \Theta(\mathbf{A}_2)$. Entonces para toda sección $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$ y todo $p \in M$ se cumple $\mathbf{A}_1(p)\big(\sigma(p)\big) = \mathbf{A}_2(p)\big(\sigma(p)\big)$. Sea ahora $v \in \mathbf{E}_p$. Por el Lema 1.7.28, existe una sección $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$ con $\sigma(p) = v$. Sustituyendo en la igualdad anterior obtenemos $\mathbf{A}_1(p)(v) = \mathbf{A}_2(p)(v)$. Como esto vale para todo $v \in \mathbf{E}_p$ y para todo $p \in M$, se sigue que $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$.
De este modo $\Theta$ es un isomorfismo entre $C^\infty(M)$-módulos.
(c) La identificación del inciso (c) se obtiene componiendo las de (a) y (b). La compatibilidad con la composición se justifica de la siguiente manera. Sean $F\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ y $G\colon \mathbf{E}' \longrightarrow \mathbf{E}''$ homomorfismos de haces suaves sobre $M$. Su composición $G \circ F\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}''$ es también un homomorfismo de haces, y la sección asociada es $\mathbf{A}_{G\circ F}(p) = (G\circ F)_p = G_p \circ F_p$, para $p \in M$.
Por otra parte, el operador inducido por $\mathbf{A}_{G\circ F}$ satisface

$$\Theta(\mathbf{A}_{G\circ F})(\sigma)(p) = \mathbf{A}_{G\circ F}(p)(\sigma(p)) = (G_p \circ F_p)(\sigma(p)).$$

Si escribimos $\tau = F \circ \sigma \in \Gamma(\mathbf{E}')$, entonces $\Theta(\mathbf{A}_{G\circ F})(\sigma)(p) = G_p(\tau(p)) = \Theta(\mathbf{A}_G)(\tau)(p) = \Theta(\mathbf{A}_G)(F\circ\sigma)(p)$. Como $F \circ \sigma = \Theta(\mathbf{A}_F)(\sigma)$, se sigue que

$$\Theta(\mathbf{A}_{G\circ F})(\sigma) = \Theta(\mathbf{A}_G)(\Theta(\mathbf{A}_F)(\sigma)) = (\Theta(\mathbf{A}_G)\circ\Theta(\mathbf{A}_F))(\sigma).$$

Por lo tanto, $\Theta(\mathbf{A}_{G\circ F}) = \Theta(\mathbf{A}_G)\circ\Theta(\mathbf{A}_F)$, lo que prueba que la correspondencia es compatible con la composición de homomorfismos de haces.
Además, como en (b) vimos que $\Theta$ es un isomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos, la identificación es también compatible con la acción de funciones suaves, es decir, $\Theta(\mathbf{A})(f\sigma) = f\cdot\Theta(\mathbf{A})(\sigma)$, para $f \in C^\infty(M)$ y $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$.
En consecuencia,

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E},\mathbf{E}') \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\big(\Gamma(\mathbf{E}),\Gamma(\mathbf{E}')\big)$$

es una identificación natural, compatible tanto con la composición como con la estructura de $C^\infty(M)$-módulo. □

El haz dual es el caso particular del haz de homomorfismos en el que el haz de llegada es el haz trivial de rango uno.

**Definición 1.7.32.** (Haz dual) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial real suave. Su *haz dual* es

$$\mathbf{E}^* := \mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathbb{R}}_M).$$

En particular, $(\mathbf{E}^*)_p = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{E}_p, \mathbb{R})$ para todo $p \in M$.

**Observación 1.7.33.** (Marcos duales y matrices de transición) Sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango $k$ y sea $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ un marco local suave de $\mathbf{E}$ definido en un abierto $U \subseteq M$. El *marco local dual* $(\sigma^1, \ldots, \sigma^k)$ de $\mathbf{E}^*$ en $U$ se caracteriza por la condición

$$\sigma^i(\sigma_j) = \delta^i_j, \qquad 1 \le i, j \le k.$$

Si $(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ es otro marco local suave de $\mathbf{E}$ en $U$, entonces existen funciones suaves $A^j_i \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{k} A^j_i \sigma_j, \qquad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Es decir, la matriz de transición entre marcos de $\mathbf{E}$ está dada por $A = (A^j_i) \in GL(k, \mathbb{R})$.
El marco dual $(\tau^1, \ldots, \tau^k)$ en $\mathbf{E}^*$ debe satisfacer

$$\tau^i(\tau_j) = \delta^i_j,$$

lo cual implica, en notación con índices,

$$\tau^i = \sum_{j=1}^{k} (A^{-1})^i_j \sigma^j.$$

En forma matricial, si denotamos por $[\tau] = A[\sigma]$ la relación entre marcos de $\mathbf{E}$, entonces los marcos duales satisfacen

$$[\tau^T] = [\sigma^T] A^{-1},$$

de donde se deduce que la matriz de transición de $\mathbf{E}^*$ es

$$B = (A^{-1})^T.$$

En conclusión, las matrices de transición del haz dual $\mathbf{E}^*$ son las *traspuestas inversas* de las matrices de transición de $\mathbf{E}$.

**Espacios y haces conjugados.** En el caso complejo necesitaremos distinguir el dual ordinario de la conjugación. Fijamos primero estas construcciones sin imponer una identificación entre un espacio vectorial y su dual.

**Definición 1.7.34.** (Espacio vectorial conjugado) Sea $V$ un espacio vectorial complejo. Su *espacio conjugado*

$\overline{V}$ es el mismo grupo abeliano que $V$, cuyos elementos escribimos $\overline{v}$, con multiplicación escalar

$$\lambda \cdot \overline{v} := \overline{\overline{\lambda}\, v}. \tag{1.8}$$

El dual complejo ordinario $V^*$ sigue significando $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$.

**Proposición 1.7.35.** (Propiedades functoriales de la conjugación) La estructura anterior convierte a $\overline{V}$ en un espacio vectorial complejo y el mapeo

$$c_V \colon V \longrightarrow \overline{V}, \qquad c_V(v) = \overline{v},$$

es aditivo y antilineal. El mapeo

$$j_V \colon \overline{\overline{V}} \longrightarrow V, \qquad j_V(\overline{\overline{v}}) = v,$$

es un isomorfismo complejo–lineal canónico.
Si $A \colon V \to W$ es complejo–lineal, existe un mapeo complejo–lineal

$$\overline{A} \colon \overline{V} \longrightarrow \overline{W}, \qquad \overline{A}(\overline{v}) = \overline{Av}.$$

Se cumplen

$$\overline{B \circ A} = \overline{B} \circ \overline{A}, \qquad \overline{\mathrm{id}_V} = \mathrm{id}_{\overline{V}}, \qquad \overline{A^{-1}} = (\overline{A})^{-1}$$

cuando $A$ es invertible, y $j_W \circ \overline{\overline{A}} = A \circ j_V$.

*Demostración.* La suma es la del grupo abeliano subyacente, es decir, $\overline{v} + \overline{w} = \overline{v + w}$. Para $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ y $v, w \in V$, la definición da

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (\overline{v} + \overline{w}) &= \overline{\overline{\lambda}(v + w)} = \lambda \cdot \overline{v} + \lambda \cdot \overline{w}, \\
(\lambda + \mu) \cdot \overline{v} &= \overline{(\overline{\lambda} + \overline{\mu})v} = \lambda \cdot \overline{v} + \mu \cdot \overline{v}, \\
\lambda \cdot (\mu \cdot \overline{v}) &= \overline{\overline{\lambda}\,\overline{\mu}\, v} = (\lambda\mu) \cdot \overline{v}, \\
1 \cdot \overline{v} &= \overline{v}.
\end{aligned}$$

Junto con los axiomas del grupo aditivo, éstas son todas las identidades de espacio vectorial. Además, $c_V(v + w) = c_V(v) + c_V(w)$ y $c_V(\lambda v) = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v}$, así que $c_V$ es aditivo y antilineal. En la doble conjugación,

$$j_V\big(\lambda \cdot \overline{\overline{v}}\big) = j_V\big(\overline{\overline{\lambda} \cdot_{\overline{V}} \overline{v}}\big) = j_V(\overline{\overline{\lambda v}}) = \lambda v,$$

lo que prueba la linealidad de $j_V$; su inversa es $v \mapsto \overline{\overline{v}}$.
Para $\overline{A}$, si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\overline{A}(\lambda \overline{v}) = \overline{A(\overline{\lambda} v)} = \overline{\overline{\lambda} A v} = \lambda \overline{Av}.$$

Las identidades restantes se verifican en los elementos $\overline{v}$ y, por lo tanto, son iguales como mapeos. □

**Proposición 1.7.36.** (Dual y conjugación) Existe un isomorfismo complejo–lineal natural

$$\kappa_V : \overline{V^*} \longrightarrow (\overline{V})^*, \qquad \kappa_V(\overline{\ell})(\overline{v}) := \overline{\ell(v)}. \tag{1.9}$$

En particular, $V^*$, $\overline{V}$, $\overline{V^*}$ y $(\overline{V})^*$ son objetos distintos; sólo $\overline{V^*} \cong (\overline{V})^*$ se identifica canónicamente por (1.9).

*Demostración.* Para $\mu \in \mathbb{C}$,

$$\kappa_V(\overline{\ell})(\mu\overline{v}) = \overline{\ell(\overline{\mu}v)} = \mu\,\overline{\ell(v)},$$

de modo que $\kappa_V(\overline{\ell}) \in (\overline{V})^*$. Asimismo,

$$\kappa_V(\lambda\overline{\ell})(\overline{v}) = \kappa_V(\overline{\overline{\lambda}\ell})(\overline{v}) = \lambda\,\overline{\ell(v)},$$

así que $\kappa_V$ es complejo–lineal. La fórmula

$$\ell(v) := \overline{L(\overline{v})}, \qquad L \in (\overline{V})^*,$$

define un funcional complejo–lineal, pues $\overline{\lambda v} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v}$ en $\overline{V}$, y es la inversa de (1.9) en ambos sentidos. Finalmente, si $A\colon V \to W$ es complejo–lineal y $A^*\ell = \ell \circ A$, entonces

$$\kappa_V \circ \overline{A^*} = (\overline{A})^* \circ \kappa_W,$$

como se comprueba evaluando ambos miembros en $\overline{v}$; esto prueba la naturalidad afirmada. □

Para haces complejos, los homomorfismos son complejo–lineales en cada fibra, conforme a la Definición 1.7.23. La construcción de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ dada en la Proposición 1.7.30 se aplica sin cambios, sustituyendo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ y exigiendo linealidad compleja. Asimismo, para un haz complejo ponemos

$$\mathbf{E}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{E}, \underline{\mathbb{C}}_M).$$

**Definición 1.7.37.** (Haz conjugado) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\pi\colon \mathbf{E} \to M$ un haz vectorial complejo suave. El *haz conjugado* $\overline{\mathbf{E}} \to M$ tiene el mismo espacio total, la misma variedad real suave subyacente, la misma proyección y la misma suma fibrada que $\mathbf{E}$. Escribimos $\overline{v}$ cuando un elemento $v \in \mathbf{E}$ se considera en $\overline{\mathbf{E}}$ y definimos la multiplicación escalar por

$$\lambda \cdot_{\overline{\mathbf{E}}} \overline{v} := \overline{\overline{\lambda}\, v}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.10}$$

**Proposición 1.7.38.** (Construcción y naturalidad del haz conjugado) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo suave. Cada fibra $\overline{\mathbf{E}}_p$ es el espacio vectorial conjugado de $\mathbf{E}_p$ y la proyección $\overline{\mathbf{E}} \to M$ es suave. Si

$$\Phi_\alpha : \mathbf{E}|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r, \qquad \Phi_\alpha(v) = (p, z),$$

es una trivialización compleja suave de $\mathbf{E}$, entonces

$$\overline{\Phi}_\alpha : \overline{\mathbf{E}}|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r, \qquad \overline{\Phi}_\alpha(\overline{v}) := (p, \overline{z}),$$

es una trivialización compleja suave de $\overline{\mathbf{E}}$. Si las funciones de transición de $\mathbf{E}$ están dadas por

$$(\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1})(p,z) = (p, g_{\beta\alpha}(p)z),$$

las funciones de transición calculadas para $\overline{\mathbf{E}}$ son $\overline{g_{\beta\alpha}}$. Por consiguiente,

$$\overline{g_{\gamma\beta}}\,\overline{g_{\beta\alpha}} = \overline{g_{\gamma\alpha}}, \qquad \overline{g_{\alpha\beta}} = (\overline{g_{\beta\alpha}})^{-1}.$$

La construcción es independiente de las trivializaciones elegidas, pues se define en el mismo espacio total y mediante la operación intrínseca (1.10) en cada fibra. La asignación de secciones

$$\Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{E}}), \qquad \mathbf{u} \longmapsto \overline{\mathbf{u}}, \qquad \overline{\mathbf{u}}(x) := \overline{\mathbf{u}(x)},$$

es una biyección aditiva y antilineal, compatible con restricciones.
Si $A\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ es un homomorfismo de haces complejos, entonces

$$\overline{A}\colon \overline{\mathbf{E}} \longrightarrow \overline{\mathbf{F}}, \qquad \overline{A}(\overline{v}) = \overline{A(v)},$$

es un homomorfismo de haces complejos suave. La conjugación preserva identidades, composiciones e inversas y existe una identificación natural $j_{\mathbf{E}}\colon \overline{\overline{\mathbf{E}}} \xrightarrow{\cong} \mathbf{E}$. Finalmente,

$$\kappa_{\mathbf{E}}\colon \overline{\mathbf{E}^*} \longrightarrow (\overline{\mathbf{E}})^*, \qquad \kappa_{\mathbf{E}}(\overline{\ell})(\overline{v}) = \overline{\ell(v)},$$

es un isomorfismo suave complejo–lineal de haces.

*Demostración.* La Proposición 1.7.35, aplicada fibra a fibra, prueba los axiomas de espacio vectorial complejo en $\overline{\mathbf{E}}_p$. La variedad real subyacente y la proyección no han cambiado; por lo tanto, $\overline{\mathbf{E}} \to M$ sigue siendo un mapeo suave.
Sea $\Phi_\alpha(v) = (p,z)$. Como la conjugación $z \mapsto \overline{z}$ es un isomorfismo real lineal de $\mathbb{C}^r$, el mapeo $\overline{\Phi}_\alpha$ es un difeomorfismo real. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\overline{\Phi}_\alpha(\lambda \cdot_{\overline{\mathbf{E}}} \overline{v}) = \overline{\Phi}_\alpha(\overline{\overline{\lambda} v}) = (p, \lambda \overline{z}),$$

de modo que es complejo–lineal en cada fibra. Así, estas funciones son trivializaciones complejas suaves de la estructura ya definida.
Para calcular sus transiciones, partimos de un vector con coordenada $w$ en la trivialización conjugada $\overline{\Phi}_\alpha$. El mismo elemento, considerado en $\mathbf{E}$, tiene coordenada $\overline{w}$; por ello

$$(\overline{\Phi}_\beta \circ \overline{\Phi}_\alpha^{-1})(p,w) = \big(p, \overline{g_{\beta\alpha}(p)\overline{w}}\big) = \big(p, \overline{g_{\beta\alpha}(p)} w\big).$$

Las dos identidades del enunciado se obtienen ahora conjugando las identidades elementales que ya satisfacen las funciones de transición de $\mathbf{E}$. No se han usado para construir $\overline{\mathbf{E}}$: son consecuencias de la construcción intrínseca. Como ni el espacio total, ni la proyección, ni la multiplicación escalar (1.10) dependen de una carta, la independencia de las trivializaciones es inmediata.
Si $u_\alpha$ son las componentes locales de $\mathbf{u}$, entonces $u_\beta = g_{\beta\alpha} u_\alpha$. Por lo tanto, $\overline{u_\beta} = \overline{g_{\beta\alpha}}\,\overline{u_\alpha}$, que son precisamente

las reglas de transformación de una sección de $\overline{\mathbf{E}}$. El argumento inverso usa la conjugación otra vez. La regla escalar de $\overline{\mathbf{E}}$ prueba $\overline{f\,\mathbf{u}} = \overline{f}\,\overline{\mathbf{u}}$ para $f \in C^\infty(M,\mathbb{C})$; la compatibilidad con restricciones es puntual.
En marcos locales, si $A$ tiene matriz $A_\alpha(x)$, entonces $\overline{A}$ tiene matriz $\overline{A_\alpha(x)}$; las reglas de cambio de marco muestran que estas matrices se pegan y la suavidad es inmediata. La linealidad compleja de $\overline{A}$ se verifica con (1.10). Las propiedades functoriales y la fórmula $j_{\mathbf{E}}(\overline{v}) = v$ se verifican fibra a fibra por la Proposición 1.7.35; en trivializaciones conjugadas, $j_{\mathbf{E}}$ tiene matriz identidad y es suave. La última afirmación es la versión fibrada de (1.9); su fórmula local y la de su inversa tienen matrices constantes, por lo que ambos mapeos son suaves. □

**Corolario 1.7.39.** (Funciones de transición de duales y haces de homomorfismos) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales complejos suaves. Con la convención anterior, las funciones de transición de $\mathbf{E}^*$ son $(g_{\beta\alpha}^{-1})^T$, las de $\overline{\mathbf{E}}$ son $\overline{g_{\beta\alpha}}$, y las de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ actúan sobre una matriz $A$ mediante

$$A \longmapsto h_{\beta\alpha} A g_{\beta\alpha}^{-1}.$$

Al conjugarlas se obtienen exactamente las funciones de transición de los haces conjugados correspondientes. Estas fórmulas no identifican $\mathbf{E}$ con $\mathbf{E}^*$.

*Demostración.* La primera fórmula resulta de imponer que la evaluación $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E} \to \underline{\mathbb{C}}$ sea independiente del marco. La segunda es la definición y la tercera se obtiene de $A_\beta(g_{\beta\alpha}v) = h_{\beta\alpha}A_\alpha(v)$. Conjugar cada igualdad da la última afirmación. □

Hay un caso particular de secciones del haz tangente $TM$ que reciben un nombre particular por su relevancia en el estudio de variedades suaves. Dichas secciones reciben el nombre de campos vectoriales:

**Definición 1.7.40.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Un **campo vectorial en** $M$ es una sección $\mathbf{X}\colon M \longrightarrow TM$ del mapeo $\pi\colon TM \longrightarrow M$. Usualmente escribimos $\mathbf{X}(p)$ como $\mathbf{X}_p$ para cada $p \in M$.

**Nota 1.7.41.** Al conjunto de campos vectoriales suaves definidos en una variedad suave con o sin frontera $M$ se le suele denotar como $\mathfrak{X}(M)$.

Por la Proposición 1.4.16, sabemos que todo campo vectorial $\mathbf{X}\colon M \longrightarrow TM$ se puede escribir en términos de una carta suave $(U,\varphi)$ con $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$ como $\mathbf{X} = X^i\partial_i$, donde para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, $\partial_i\colon U \longrightarrow TU$ es el campo vectorial definido en $U$ por $\partial_i(p) := \partial_i\Big|_p$ para cada $p \in U$. A las funciones $X^i$ se les conoce como ***funciones componentes de*** $\mathbf{X}$ ***en*** $U$.

Tenemos el siguiente criterio para determinar la suavidad de un campo vectorial:

**Proposición 1.7.42.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{X}\colon M \longrightarrow TM$ un campo vectorial en bruto. Si $(U,(x^i))$ es cualquier carta coordenada suave en $M$, entonces $\mathbf{X}\restriction_U$ es suave si y sólo si sus funciones componentes respecto a esta carta son suaves.

*Demostración.* En la trivialización coordenada de $TM\restriction_U$, la sección $\mathbf{X}\restriction_U$ está representada precisamente por el mapeo $p \mapsto (X^1(p),\dots,X^n(p))$. La Proposición 1.7.21 afirma que la sección es suave si y sólo si este mapeo lo es, lo cual equivale a la suavidad de cada una de sus funciones componentes. □

La proposición anterior nos dice que los campos vectoriales coordenados $\partial_i$ son campos vectoriales suaves en $U$.

Una propiedad esencial de los campos vectoriales es que definen operadores en los espacios de funciones suaves real-valuadas. Si $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, $U \subseteq M$ es abierto y $f \in C^\infty(U)$, podemos obtener una nueva función $\mathbf{X}(f)\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(\mathbf{X}(f))(p) = \mathbf{X}_p(f).$$

Podemos formular otro criterio de suavidad para campos vectoriales en términos de esta nueva terminología.

**Proposición 1.7.43.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y $\mathbf{X}\colon M \longrightarrow TM$ un campo vectorial en bruto. Los siguientes son equivalentes:

(a) $\mathbf{X}$ es suave.

(b) Para cada $f \in C^\infty(M)$, la función $\mathbf{X}(f)$ es suave en $M$.

(c) Para cada subconjunto abierto $U \subseteq M$ y cada $f \in C^\infty(U)$, la función $(\mathbf{X}\restriction_U)(f)$ es suave en $U$.

*Demostración.* Si $\mathbf{X} = X^i\partial_i$ es suave en una carta $U$, para $f \in C^\infty(U)$ se tiene

$$(\mathbf{X}\restriction_U)(f) = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^\infty(U).$$

Esto prueba $(a) \Rightarrow (c)$, y $(c) \Rightarrow (b)$ se obtiene tomando $U = M$.
Supongamos (b). Fijemos $p \in M$, una carta $(U, x)$ alrededor de $p$ y un abierto $W$ con $p \in W \Subset U$. Sea $\chi \in C^\infty(M)$ igual a 1 en $\overline{W}$ y con soporte contenido en $U$. La función definida por $\chi x^i$ en $U$ y por cero fuera de $U$ es suave en $M$. En $W$,

$$\mathbf{X}(\chi x^i) = \mathbf{X}(x^i) = X^i.$$

La hipótesis (b) muestra que cada componente $X^i$ es suave cerca de $p$. Como $p$ fue arbitrario, la Proposición 1.7.42 prueba $(b) \Rightarrow (a)$. □

Finalmente, daremos las nociones de vector cotangente, espacio cotangente y haz cotangente de una variedad suave con o sin frontera $M$. Tenemos las siguientes definiciones:

**Definición 1.7.44.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Para cada $p \in M$, definimos el **espacio cotangente a $M$ en $p$** denotado por $T_p^*M$ como el espacio dual de $T_pM$,

$$T_p^*M := (T_pM)^*.$$

**Observación 1.7.45.** Para cada $p \in M$, si $(U, \varphi)$ es una carta coordenada en un subconjunto abierto $U \subseteq M$ con $p \in U$, la base $\left(\partial_i\Big|_p\right)$ da origen a una base dual para $T_p^*M$. Digamos que dicha base es $(\lambda^i|_p)$. Por otra parte, recordemos el diferencial de una función y que si $f \in C^\infty(M)$, entonces $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, por lo que podemos pensar a $df_p(v) \in \mathbb{R}$ para cada $v \in T_pM$ y cada $p \in M$. Entonces $df_p \in T_p^*M$ para cada $f \in C^\infty(M)$. Sabemos que $df_p = A_i(p)\lambda^i|_p$ para alguna función $A_i\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Por la definición de diferencial y usando que $(\lambda^i|_p)$ es la base dual de $\partial_i\Big|_p$,

$$A_i(p) = df_p\left(\partial_i\Big|_p\right) = \partial_i\Big|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

por lo que

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p$$

En particular, si consideramos $x^j \in C^\infty(U)$, tenemos que para cada $p \in U$, $\mathbf{d}x^j_p \in T^*_p(M)$, por lo que

$$\mathbf{d}x^j|_p = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p = \delta^j_i\lambda^i|_p = \lambda^j|_p$$

por lo que la base dual de $T^*_p(M)$ en realidad es $(\mathbf{d}x^i|_p)$. La asignación $p \mapsto \mathbf{d}x^i|_p$ define un campo covectorial (por ahora, en bruto) en $U$ llamado ***campo covectorial coordenado***.

Definiremos el haz cotangente:

**Definición 1.7.46.** Si $M$ es una variedad suave con o sin frontera, definimos el **haz cotangente de** $M$ como

$$T^*M := \coprod_{p\in M} T^*_pM.$$

Desde luego, podemos definir un análogo de los campos vectoriales del haz tangente, para el haz cotangente.

**Definición 1.7.47.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Una sección local o global de $T^*M$ es llamada un **campo covectorial**. Un **campo covectorial en bruto** es una sección local o global no necesariamente continua, y un **campo covectorial suave** es una sección local o global suave.

La estructura suave se obtiene dualizando los cambios de base del haz tangente.

**Proposición 1.7.48.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera de dimensión $n$. Con la proyección estándar $\pi\colon T^*M \longrightarrow M$ tal que $\pi(\omega_p) = p$ si $\omega_p \in T^*_pM$ y su estructura de espacio vectorial en cada fibra de $\pi$ heredada de la estructura de $T_pM$, el haz cotangente $T^*M$ tiene una única topología y una única estructura suave que lo vuelven un haz vectorial suave de rango $n$ sobre $M$ para el cual los campos covectoriales coordenados son secciones locales suaves. Además se cumple lo siguiente: si $U \subseteq M$ es el dominio de una carta suave con coordenadas $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$, el mapeo

$$\widetilde{\varphi}(\xi_i\mathbf{d}x^i|_p) = (x^1(p),\dots,x^n(p),\xi_1,\dots,\xi_n)$$

es una carta coordenada suave para $T^*M$.

*Demostración.* Para una carta $(U,x)$, con $x = (x^1,\dots,x^n)$, definimos la trivialización

$$\Phi_x\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times\mathbb{R}^n, \qquad \Phi_x\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\,\mathbf{d}x^i|_p\right) = (p,(\xi_1,\dots,\xi_n)).$$

Es una biyección fibrada y es lineal en cada fibra. Sean $(U,x)$ y $(V,y)$ dos cartas y pongamos

$$J(p) := D(y \circ x^{-1})(x(p)).$$

La fórmula de cambio de base (1.5) dice que las componentes de un vector satisfacen $v_y = Jv_x$. La identidad $\omega(v) = \xi_x^T v_x = \xi_y^T v_y$ para todo $v$ implica entonces

$$\xi_y = (J^{-1})^T \xi_x.$$

Por consiguiente, el cambio de trivialización del haz cotangente es

$$(\Phi_y \circ \Phi_x^{-1})(p,\xi) = \big(p, (J(p)^{-1})^T \xi\big).$$

El mapeo $p \mapsto (J(p)^{-1})^T$ es suave y toma valores en $GL(n,\mathbb{R})$. El Lema 1.7.8 proporciona una única topología y una única estructura suave para las cuales las $\Phi_x$ son trivializaciones locales. En una carta del espacio total, la proyección es $(x,\xi) \mapsto x$ y los campos $\mathbf{d}x^i$ tienen componentes constantes; por lo tanto, la proyección y los campos covectoriales coordenados son suaves. El mismo cálculo se realiza en abiertos relativos de $\mathbb{H}^n$ y cubre el caso con frontera. □

Tenemos el siguiente criterio para determinar la suavidad de un campo covectorial:

**Proposición 1.7.49.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y $\omega\colon M \longrightarrow T^*M$ un campo covectorial en bruto. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $\omega$ es suave.

(b) En cada carta coordenada, las funciones componentes de $\omega$ son suaves.

(c) Cada punto de $M$ está contenido en alguna carta coordenada en la cual $\omega$ tiene funciones componentes suaves.

(d) Para cada campo vectorial suave $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, la función $\omega(\mathbf{X})$ es suave en $M$.

(e) Para cada subconjunto abierto $U \subseteq M$ y cada campo vectorial suave $\mathbf{X}$ en $U$, la función $\omega(\mathbf{X})\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ es suave en $U$.

*Demostración.* En una carta $(U,x)$, escribamos $\omega = \omega_i\, \mathbf{d}x^i$. El criterio de componentes de la Proposición 1.7.21 prueba la equivalencia de (a), (b) y (c).
Si (a) se cumple y $\mathbf{X} = X^i \partial_i$ es suave en $U$, entonces $\omega(\mathbf{X}) = \omega_i X^i$ es suave. Por lo tanto, $(a) \Rightarrow (e) \Rightarrow (d)$.
Supongamos (d). Para una carta $(U,x)$, un punto $p \in U$ y un abierto $W$ con $p \in W \Subset U$, elegimos $\chi \in C^\infty(M)$ igual a 1 en $\overline{W}$ y con soporte en $U$. El campo definido por $\chi\partial_i$ en $U$ y por cero fuera de $U$ es suave en $M$. En $W$,

$$\omega(\chi\partial_i) = \omega_i.$$

La hipótesis (d) muestra que las componentes son suaves cerca de cada punto, lo que prueba (c). □

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado:

**Corolario 1.7.50.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. El diferencial de toda función $f \in C^\infty(M)$ es un campo covectorial suave.

*Demostración.* En coordenadas,

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, \mathbf{d}x^i.$$

Sus componentes son suaves, y se aplica la proposición anterior. □

Finalmente, antes de acabar con esta sección, dejamos el concepto de subhaz vectorial suave:

**Definición 1.7.51.** Si $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial, un **subhaz vectorial de $\mathbf{E}$** es un haz vectorial $\pi_{\mathbf{D}}\colon \mathbf{D} \longrightarrow M$, donde $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{E}$ tiene la topología de subespacio y $\pi_{\mathbf{D}}$ es la restricción de $\pi_{\mathbf{E}}$ a $\mathbf{D}$, tal que, para cada $p \in M$, $\mathbf{D}_p = \mathbf{D} \cap \mathbf{E}_p$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{E}_p$ y todas las fibras $\mathbf{D}_p$ tienen la misma dimensión. Si $M$ es una variedad suave con o sin frontera y $\mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial suave, un **subhaz vectorial suave de $\mathbf{E}$** es un haz vectorial suave que es un subhaz vectorial de $\mathbf{E}$ y una subvariedad encajada de $\mathbf{E}$.

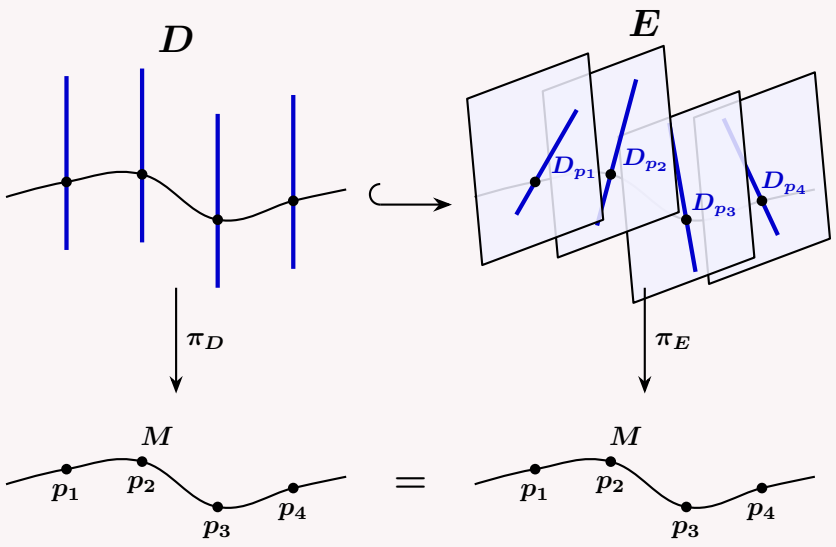



**Figura 1.8.** Subhaz vectorial suave.

**Lema 1.7.52.** (Criterio del marco local suave para subhaces) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave. Supongamos que para cada $p \in M$ tenemos un subespacio vectorial de dimensión finita fija $m$, $\mathbf{D}_p \subseteq \mathbf{E}_p$. Entonces $\mathbf{D} = \bigcup_{p \in M} \mathbf{D}_p \subseteq \mathbf{E}$ es un subhaz vectorial suave de $\mathbf{E}$ si y sólo si cada punto de $M$ tiene una vecindad $U$ en la cual existen secciones locales suaves $\sigma_1, \ldots, \sigma_m\colon U \longrightarrow \mathbf{E}$ tales que $\sigma_1(q), \ldots, \sigma_m(q)$ forman una base de $\mathbf{D}_q$ para cada $q \in U$.

*Demostración.* Si $\mathbf{D}$ es un subhaz vectorial suave, una trivialización local de $\mathbf{D}$ proporciona un marco local suave $\sigma_1,\dots,\sigma_m$. La inclusión suave $\mathbf{D} \hookrightarrow \mathbf{E}$ permite considerar sus elementos como secciones suaves de $\mathbf{E}$, y sus valores forman una base de $\mathbf{D}_q$.
Recíprocamente, supongamos que existen tales secciones alrededor de $p \in M$. Elegimos un marco local $e_1,\dots,e_r$ de $\mathbf{E}$. En la fibra sobre $p$, completamos $\sigma_1(p),\dots,\sigma_m(p)$ a una base de $\mathbf{E}_p$ con algunos de los vectores $e_j(p)$. El determinante de la matriz de estos vectores en el marco $(e_j)$ no se anula en $p$; por continuidad, permanece distinto de cero después de reducir la vecindad. Obtenemos así un marco local de $\mathbf{E}$

$$\sigma_1,\dots,\sigma_m,\tau_{m+1},\dots,\tau_r.$$

En la trivialización determinada por este marco,

$$\mathbf{D} \restriction_U \longleftrightarrow U \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \subseteq U \times \mathbb{R}^r.$$

Por lo tanto, $\mathbf{D} \restriction_U \to U$ es un haz vectorial suave de rango $m$, y su espacio total es una subvariedad encajada de $\mathbf{E} \restriction_U$. En las intersecciones, los cambios de marco entre las primeras $m$ secciones toman valores en $GL(m,\mathbb{R})$ y son suaves, de modo que estas estructuras locales se pegan. Así, $\mathbf{D}$ es un subhaz vectorial suave de $\mathbf{E}$. □

## 1.8 Curvas integrales y flujos

Un campo vectorial puede leerse como una ley de movimiento: en cada punto prescribe una velocidad. Las trayectorias que obedecen esa ley son sus curvas integrales. La existencia y unicidad local de las ecuaciones diferenciales ordinarias permite reunirlas en una familia de difeomorfismos entre abiertos de la variedad, llamada flujo.

El tiempo de existencia puede depender del punto inicial, de modo que un flujo no tiene por qué estar definido para todo $t \in \mathbb{R}$ ni en toda la variedad. Cuando sí lo está, determina una acción suave de $\mathbb{R}$ sobre $M$.

La definición siguiente fija esta relación entre velocidad y campo.

**Definición 1.8.1.** Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Decimos que una curva suave $\gamma\colon I \longrightarrow M$ es una curva integral de $\mathbf{X}$ si, para todo $t \in I$, se tiene

$$\gamma'(t) = \mathbf{X}(\gamma(t)).$$

Si $0 \in I$, decimos que $\gamma(0)$ es el *punto inicial de* $\gamma$.

**Ejemplo 1.8.2.** (a) Consideramos $\mathbb{R}^2$ con las coordenadas estándar $(x,y)$ y sea $\mathbf{X} = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Las curvas integrales de $\mathbf{X}$ son precisamente las rectas paralelas al eje $x$, parametrizadas como

$$\gamma(t) = (a+t, b).$$

En particular, existe una única curva integral que comienza en cada punto del plano, y las imágenes de distintas curvas integrales coinciden o son disjuntas.

(b) Sea $\mathbf{W} = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$ en $\mathbb{R}^2$. Si $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva suave, dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, entonces la

condición $\gamma'(t) = \mathbf{W}(\gamma(t))$ se traduce en

$$x'(t)\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\gamma(t)} + y'(t)\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{\gamma(t)} = x(t)\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{\gamma(t)} - y(t)\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\gamma(t)}.$$

Igualando las componentes, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$$

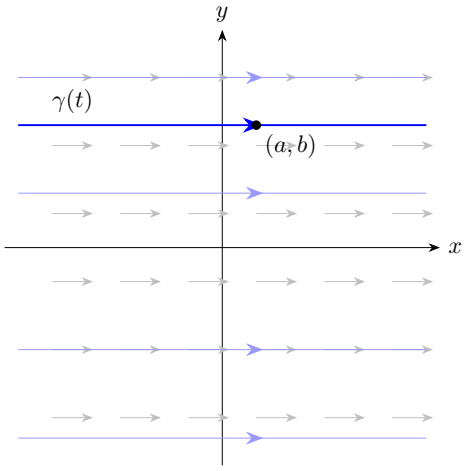
Sus soluciones son

$$x(t) = a\cos(t) - b\sin(t), \qquad y(t) = a\sin(t) + b\cos(t), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

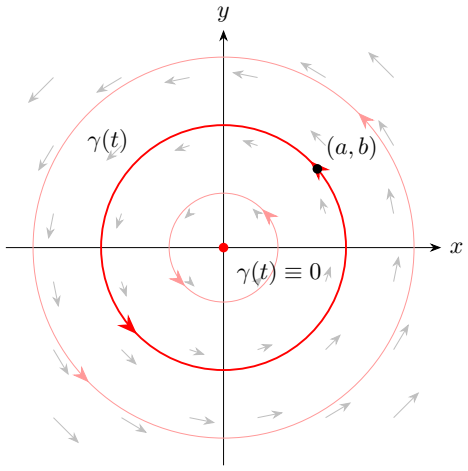
Por lo tanto, las curvas integrales están dadas por

$$\gamma(t) = (a\cos(t) - b\sin(t), a\sin(t) + b\cos(t)).$$

Cuando $a = b = 0$ se obtiene la solución constante $\gamma(t) \equiv 0$; en otro caso, las trayectorias son circunferencias centradas en el origen, recorridas en sentido antihorario. Como $\gamma(0) = (a, b)$, existe una única curva integral que comienza en cada punto de $\mathbb{R}^2$, y las imágenes de las curvas integrales coinciden o son disjuntas.




(a) Curvas integrales de $X = \frac{\partial}{\partial x}$




(b) Curvas integrales de $W = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$

Como pudimos observar en los ejemplos anteriores, encontrar curvas integrales "se reduce" a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en una carta. Supongamos que $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y $\gamma\colon I \longrightarrow M$ es una curva.

Sea $(U, \varphi)$ una carta tal que $\gamma(I) \subset U$, y escribamos $\varphi \circ \gamma = \widetilde{\gamma} = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$. Asimismo, escribimos el campo vectorial $\mathbf{X}$ en coordenadas como $\mathbf{X} = X^i\partial_i$.

La condición de que $\gamma$ sea una curva integral de $\mathbf{X}$, es decir, $\gamma'(t) = \mathbf{X}(\gamma(t))$, se traduce en coordenadas como

$$\dot{x}^i(t)\partial_i\Big|_{\gamma(t)} = X^i(x(t))\partial_i\Big|_{\gamma(t)}.$$

Igualando las componentes, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}\dot{x}^1(t) &= X^1(x^1(t),\dots,x^n(t)),\\ &\vdots\\ \dot{x}^n(t) &= X^n(x^1(t),\dots,x^n(t)).\end{aligned}$$

Esto muestra que determinar curvas integrales equivale, en coordenadas, a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo. La terminología proviene precisamente de esta observación: encontrar curvas integrales corresponde a "integrar" dicho sistema.

El siguiente resultado de ecuaciones diferenciales ordinarias será fundamental para el desarrollo posterior.

**Teorema 1.8.3.** (Teorema fundamental para sistemas autónomos) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $V \in C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$. Para $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times U$, consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases}\dot{y}^i(t) = V^i(y^1(t),\dots,y^n(t)), \quad i\in\{1,\dots,n\},\\ y(t_0) = x_0.\end{cases} \tag{1.11}$$

Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

(a) (Existencia local) Para cada $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times U$ existen un intervalo abierto $J_0\subseteq\mathbb{R}$ con $t_0\in J_0$ y un abierto $U_0\subseteq U$ con $x_0\in U_0$ tales que, para cada $x\in U_0$, el problema (1.11) con condición inicial $y(t_0)=x$ admite una solución $y\colon J_0\longrightarrow U$ de clase $C^1$.

(b) (Unicidad) Si $y_1$ y $y_2$ son dos soluciones de (1.11) definidas en intervalos que contienen a $t_0$ y con la misma condición inicial, entonces coinciden en la intersección de sus dominios.

(c) (Dependencia suave) Si $J_0$ y $U_0$ son como en (a), entonces el mapeo

$$\theta\colon J_0\times U_0\longrightarrow U, \qquad \theta(t,x) = y(t),$$

donde $y$ es la solución única de (1.11) con $y(t_0)=x$, es de clase $C^\infty$.

*Demostración.* Aplicamos el Teorema B.13.1 con $E=\mathbb{R}^n$ y $F(t,y)=V(y)$. Como $V$ es de clase $C^1$, es localmente Lipschitz; el teorema proporciona una solución local única. La Proposición B.13.2 extiende la unicidad a todo intervalo común.

El Teorema B.13.5, aplicado sin parámetros adicionales, afirma que el dominio natural

$$\mathcal{E} := \{(t,a)\in\mathbb{R}\times U : t \text{ pertenece al intervalo maximal de la solución con } y(t_0)=a\}$$

es abierto y que $(t,a)\mapsto y(t;t_0,a)$ es suave. Como $(t_0,x_0)\in\mathcal{E}$, existen un intervalo $J_0\ni t_0$ y un abierto $U_0\ni x_0$ con $J_0\times U_0\subseteq\mathcal{E}$. Esto da la elección uniforme de (a), la unicidad de (b) y la dependencia suave de (c). □

Ahora daremos la existencia de curvas integrales.

**Proposición 1.8.4.** Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $p \in M$, existe $\varepsilon > 0$ y una curva suave $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ tal que $\gamma$ es una curva integral de $\mathbf{X}$ que comienza en $p$.

*Demostración.* Sea $p \in M$. Tomemos una carta suave $(U, \varphi)$ tal que $p \in U$, y escribamos $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Como $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, en $U$ puede escribirse como $\mathbf{X} = X^i \partial_i$, donde cada $X^i\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ es suave.
Consideremos el mapeo $V\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $V(x) = \big(X^1(x), \dots, X^n(x)\big)$, el cual es suave. Sea $x_0 := \varphi(p) \in \varphi(U)$. Por el Teorema 1.8.3, aplicado al sistema $\dot{y}^i(t) = V^i(y^1(t), \dots, y^n(t))$, $i \in \{1, \dots, n\}$, con condición inicial $y(0) = x_0$, existen $\varepsilon > 0$ y una curva suave $y\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \varphi(U)$ tal que

$$\dot{y}^i(t) = X^i(y^1(t), \dots, y^n(t)), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \qquad y(0) = x_0.$$

Definimos $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ por $\gamma(t) := \varphi^{-1}(y(t))$. Entonces $\gamma$ es suave y $\gamma(0) = p$.
Para verificar que $\gamma$ es una curva integral de $\mathbf{X}$, observamos que $\varphi \circ \gamma = y = (y^1, \dots, y^n)$, por lo que

$$\gamma'(t) = \dot{y}^i(t)\partial_i\Big|_{\gamma(t)} = X^i(y(t))\partial_i\Big|_{\gamma(t)} = \mathbf{X}(\gamma(t)).$$

En consecuencia, $\gamma$ es una curva integral de $\mathbf{X}$ que comienza en $p$. □

Ahora veremos como las reparametrizaciones afines afectan las curvas integrales:

**Lema 1.8.5.** (de reescalamiento) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva integral de $\mathbf{X}$. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la curva $\widetilde{\gamma}\colon \widetilde{I} \longrightarrow M$ definida por $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(at)$ es una curva integral de $a\mathbf{X}$, donde $\widetilde{I} = \{t \in \mathbb{R} \mid at \in I\}$.

*Demostración.* Sea $t_0 \in \widetilde{I}$ y sea $f$ una función suave definida en una vecindad de $\widetilde{\gamma}(t_0)$. Entonces

$$\widetilde{\gamma}'(t_0)f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (f \circ \widetilde{\gamma})(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(at) = a\frac{d}{dt}\Big|_{t=at_0} (f \circ \gamma)(t).$$

Como $\gamma$ es una curva integral de $\mathbf{X}$, se tiene

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=at_0} (f \circ \gamma)(t) = \mathbf{X}_{\gamma(at_0)}f = \mathbf{X}_{\widetilde{\gamma}(t_0)}f.$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{\gamma}'(t_0)f = a\mathbf{X}_{\widetilde{\gamma}(t_0)}f,$$

lo cual prueba que $\widetilde{\gamma}$ es una curva integral de $a\mathbf{X}$. □

**Lema 1.8.6.** (de traslación) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva integral de $\mathbf{X}$. Para cualquier $b \in \mathbb{R}$, la curva $\widetilde{\gamma}\colon \widetilde{I} \longrightarrow M$ dada por $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t + b)$ es una curva integral de $\mathbf{X}$, donde $\widetilde{I} = \{t \in \mathbb{R} \mid t + b \in I\}$.

*Demostración.* Sea $t_0 \in \widetilde{I}$ y sea $f$ una función suave definida en una vecindad de $\widetilde{\gamma}(t_0)$. Entonces

$$\widetilde{\gamma}'(t_0)f = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} (f \circ \widetilde{\gamma})(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(t+b) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0+b} (f \circ \gamma)(t).$$

Como $\gamma$ es una curva integral de $\mathbf{X}$, se tiene

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0+b} (f \circ \gamma)(t) = \mathbf{X}_{\gamma(t_0+b)}f = \mathbf{X}_{\widetilde{\gamma}(t_0)}f.$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{\gamma}'(t_0)f = \mathbf{X}_{\widetilde{\gamma}(t_0)}f,$$

lo cual prueba que $\widetilde{\gamma}$ es una curva integral de $\mathbf{X}$. □

Las funciones suaves permiten establecer una relación entre campos vectoriales mediante el concepto de campos $F$-relacionados, que introducimos a continuación.

**Definición 1.8.7.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves sin frontera, $F\colon M \longrightarrow N$ un mapeo suave, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(N)$. Decimos que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ están *$F$-relacionados* si

$$dF_p(\mathbf{X}_p) = \mathbf{Y}_{F(p)} \quad \text{para todo } p \in M.$$

**Proposición 1.8.8.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves sin frontera y $F\colon M \longrightarrow N$ un mapeo suave. Entonces $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ están $F$-relacionados si y sólo si para cada curva integral $\gamma$ de $\mathbf{X}$, la curva $F \circ \gamma$ es una curva integral de $\mathbf{Y}$.

*Demostración.* Supongamos primero que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ están $F$-relacionados, y sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva integral de $\mathbf{X}$. Definimos $\sigma := F \circ \gamma$. Entonces

$$\sigma'(t) = (F \circ \gamma)'(t) = dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = dF_{\gamma(t)}(\mathbf{X}_{\gamma(t)}) = \mathbf{Y}_{F(\gamma(t))} = \mathbf{Y}_{\sigma(t)},$$

por lo que $\sigma$ es una curva integral de $\mathbf{Y}$.
Recíprocamente, supongamos que $F$ envía curvas integrales de $\mathbf{X}$ en curvas integrales de $\mathbf{Y}$. Sea $p \in M$ y sea $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ una curva integral de $\mathbf{X}$ con $\gamma(0) = p$. Entonces $F \circ \gamma$ es una curva integral de $\mathbf{Y}$ con $(F \circ \gamma)(0) = F(p)$, y por lo tanto

$$\mathbf{Y}_{F(p)} = (F \circ \gamma)'(0) = dF_p(\gamma'(0)) = dF_p(\mathbf{X}_p).$$

Esto muestra que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ están $F$-relacionados. □

Ahora estudiaremos el concepto de *flujo*. Para ello, nos concentraremos en la familia de curvas integrales asociadas a un campo vectorial.

Sea $M$ una variedad suave sin frontera y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Supongamos que para cada $p \in M$, $\mathbf{X}$ tiene una única curva integral definida para todo $t \in \mathbb{R}$ que comienza en $p$, la cual denotamos por $\theta^{(p)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos un mapeo $\theta_t\colon M \longrightarrow M$ por $\theta_t(p) := \theta^{(p)}(t)$. Intuitivamente, cada $\theta_t$ mueve los

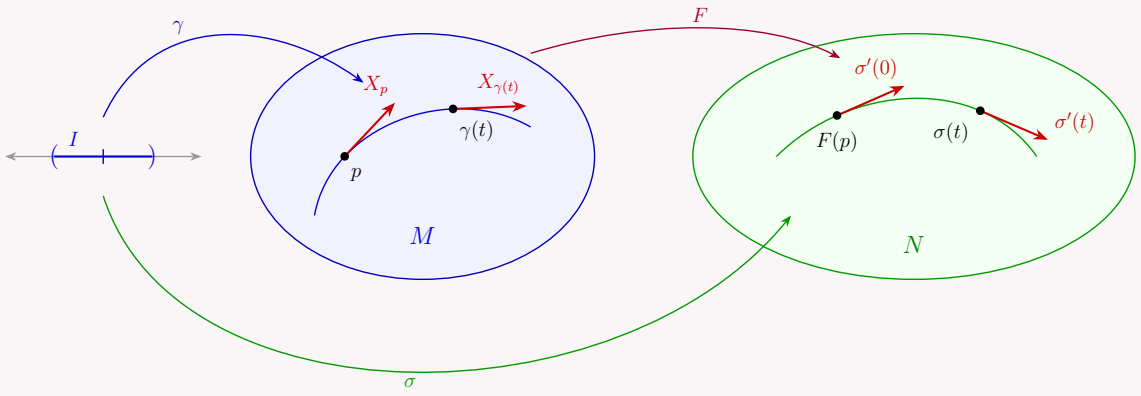



**Figura 1.9.** Campos vectoriales $F$-relacionados.

puntos de $M$ a lo largo de las curvas integrales en el tiempo $t$.

El lema de traslación implica que $t \mapsto \theta^{(p)}(t+s)$ es una curva integral de $\mathbf{X}$ que comienza en $q = \theta^{(p)}(s)$. Por la unicidad de las curvas integrales, se tiene $\theta^{(q)}(t) = \theta^{(p)}(t+s)$. En términos de los mapeos $\theta_t$, esto se traduce en

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}.$$

Además, $\theta_0(p) = \theta^{(p)}(0) = p$, por lo que el mapeo $\theta\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$, dado por $\theta(t,p) = \theta_t(p)$, define una acción del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en $M$.

Con esto en mente damos la siguiente definición.

**Definición 1.8.9.** Sea $M$ una variedad suave sin frontera. Un ***flujo global en*** $M$ es una acción continua del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en $M$, es decir, un mapeo $\theta\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$ tal que para cualesquiera $s,t \in \mathbb{R}$ y $p \in M$ se cumple

$$\theta(t,\theta(s,p)) = \theta(t+s,p), \qquad \theta(0,p) = p.$$

Si $\theta$ es suave, decimos que $\theta$ es un ***flujo global suave en*** $M$.
Dado un flujo global $\theta$ en $M$, definimos:

(a) Para cada $t \in \mathbb{R}$, el mapeo $\theta_t\colon M \longrightarrow M$ dado por $\theta_t(p) = \theta(t,p)$. Entonces $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}$ y $\theta_0 = \mathrm{Id}_M$, por lo que cada $\theta_t$ es un homeomorfismo; si $\theta$ es suave, entonces $\theta_t$ es un difeomorfismo.

(b) Para cada $p \in M$, la curva $\theta^{(p)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$ dada por $\theta^{(p)}(t) = \theta(t,p)$. La imagen de esta curva se llama la órbita de $p$.

La siguiente proposición muestra que todo flujo suave global se puede obtener como las curvas integrales de algún campo vectorial suave.

**Definición 1.8.10.** Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\theta\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$ un flujo global suave. Para

cada $p \in M$, definimos un vector tangente $\mathbf{X}_p \in T_pM$ por

$$\mathbf{X}_p = (\theta^{(p)})'(0).$$

La asignación $p \mapsto \mathbf{X}_p$ es un campo vectorial en bruto en $M$, llamado el ***generador infinitesimal de*** $\theta$.

**Proposición 1.8.11.** Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\theta\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$ un flujo global suave. El generador infinitesimal $\mathbf{X}$ de $\theta$ es un campo vectorial suave en $M$, y cada $\theta^{(p)}$ es una curva integral de $\mathbf{X}$.

*Demostración.* Para ver que $\mathbf{X}$ es suave, por la Proposición 1.7.43 es suficiente ver que $\mathbf{X}f$ es suave para toda $f \in C^\infty(U)$, con $U \subseteq M$ abierto arbitrario. Se tiene

$$\mathbf{X}f(p) = \mathbf{X}_p f = (\theta^{(p)})'(0)f = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(0,p)} f(\theta(t,p)).$$

Como $f(\theta(t,p))$ es una función suave de $(t,p)$ por composición, su derivada parcial respecto a $t$ también es suave. Entonces $\mathbf{X}f(p)$ depende suavemente de $p$, por lo que $\mathbf{X}$ es suave. Finalmente, para ver que es una curva integral de $\mathbf{X}$, tenemos que probar que $(\theta^{(p)})'(t) = \mathbf{X}_{\theta^{(p)}(t)}$ para todo $p \in M$ y toda $t \in \mathbb{R}$. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario y sea $q = \theta^{(p)}(t_0) = \theta_{t_0}(p)$. Por las reglas de grupo que $\theta$ sigue obtenemos para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\theta^{(q)}(t) = \theta_t(q) = \theta_t(\theta_{t_0}(p)) = \theta_{t+t_0}(p) = \theta^{(p)}(t+t_0).$$

Por lo tanto, para cualquier $f \in C^\infty(U)$ donde $q \in U$,

$$\mathbf{X}_q f = (\theta^{(q)})'(0)f = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\theta^{(q)}(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t+t_0)) = (\theta^{(p)})'(t_0)f.$$

□

Hemos visto que todo flujo global suave da origen a un campo vectorial suave cuyas curvas integrales son precisamente las curvas definidas por el flujo. De manera recíproca, nos gustaría decir que todo campo vectorial suave es el generador infinitesimal de un flujo global suave, sin embargo, esto no siempre sucede pues hay campos vectoriales suaves cuyas curvas integrales no están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ como muestra el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.8.12.** Sea $M = \mathbb{R}^2$ y consideremos el campo vectorial

$$\mathbf{X}(x,y) = x^2\frac{\partial}{\partial x}.$$

La curva integral que comienza en $(1,0)$ está dada por

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right),$$

la cual es la solución de la ecuación diferencial $x' = x^2$ con condición inicial $x(0) = 1$.
Observamos que $\gamma(t)$ no puede extenderse más allá de $t = 1$, ya que $\dfrac{1}{1-t} \to +\infty$ cuando $t \to 1^-$. Por lo tanto, la curva integral no está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, y en consecuencia $\mathbf{X}$ no genera un flujo global.

Por esta razón, necesitamos restringir los dominios en los cuales los flujos estarán definidos, tratando de no perder las propiedades que los caracterizan.

**Definición 1.8.13.** Sea $M$ una variedad suave sin frontera. Un dominio de flujo para $M$ es un subconjunto abierto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ con la propiedad de que para cada $p \in M$, el conjunto

$$\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t,p) \in \mathcal{D}\}$$

es un intervalo abierto que contiene al 0. Un ***flujo*** en $M$ es una función continua $\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$, donde $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ es un dominio de flujo, que satisface las siguientes leyes de grupo:

(a) Para toda $p \in M$, $\theta(0,p) = p$.

(b) Para toda $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ y toda $t \in \mathcal{D}^{(\theta(s,p))}$ tal que $s+t \in \mathcal{D}^{(p)}$, $\theta(t,\theta(s,p)) = \theta(t+s,p)$.

En ocasiones llamamos a $\theta$ un ***flujo local*** para distinguirlo de los flujos globales. Si $\theta$ es un flujo, definimos $\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t) = \theta(t,p)$ si $(t,p) \in \mathcal{D}$. Para $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$M_t := \{p \in M \mid (t,p) \in \mathcal{D}\},$$

de tal modo que $p \in M_t \iff t \in \mathcal{D}^{(p)} \iff (t,p) \in \mathcal{D}$. Si $\theta$ es suave, el generador infinitesimal de $\theta$ se define como $\mathbf{X}_p := (\theta^{(p)})'(0)$.

**Proposición 1.8.14.** Sea $M$ una variedad suave sin frontera. Si $\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ es un flujo suave, entonces el generador infinitesimal $\mathbf{X}$ de $\theta$ es un campo vectorial suave y cada curva $\theta^{(p)}$ es una curva integral de $\mathbf{X}$.

*Demostración.* Como $\mathcal{D}$ es abierto y contiene a $\{0\} \times M$, el mapeo

$$p \longmapsto \mathbf{X}_p := d\theta_{(0,p)}(1,0)$$

es una sección suave de $TM$: en una carta de $M$, sus componentes son las derivadas parciales respecto de la variable temporal de las componentes de $\theta$, evaluadas en $(0,p)$. Esto prueba la suavidad de $\mathbf{X}$.
Fijemos $p \in M$ y $t_0 \in \mathcal{D}^{(p)}$. Como $\mathcal{D}^{(\theta(t_0,p))}$ es un intervalo abierto que contiene a cero, para $s$ suficientemente próximo a cero la ley de flujo da

$$\theta\big(s,\theta(t_0,p)\big) = \theta(t_0+s,p).$$

Derivando respecto de $s$ en $s=0$, obtenemos

$$\mathbf{X}_{\theta(t_0,p)} = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \theta(t_0+s,p) = \frac{d}{dt}\theta^{(p)}(t_0).$$

Puesto que $t_0$ era arbitrario, $\theta^{(p)}$ satisface la ecuación de curva integral en todo su dominio $\mathcal{D}^{(p)}$. □

La existencia (y unicidad) de los flujos inducidos por un campo vectorial es el resultado más importante de la teoría de flujos y nos servirá más adelante cuando queramos considerar ciertos flujos para trabajar con espacios de Sobolev.

**Teorema 1.8.15.** (fundamental de flujos) Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces existe un único flujo suave maximal $\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ cuyo generador infinitesimal es $\mathbf{X}$ y que además tiene las siguientes propiedades:

(a) Para cada $p \in M$, la curva $\theta^{(p)}\colon \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M$ es la única curva integral maximal de $\mathbf{X}$ que comienza en $p$.

(b) Si $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, entonces $\mathcal{D}^{(\theta(s,p))}$ es el intervalo $\mathcal{D}^{(p)} - s = \{t - s \mid t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$.

(c) Para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $M_t$ es abierto en $M$, $\theta_t\colon M_t \longrightarrow M_{-t}$ es un difeomorfismo con inversa $\theta_{-t}$.

*Demostración.* Para cada $p \in M$, la existencia local y la unicidad en cartas permiten unir todas las curvas integrales que comienzan en $p$. Se obtiene una única curva integral maximal

$$\gamma_p\colon I_p \longrightarrow M, \qquad 0 \in I_p, \qquad \gamma_p(0) = p.$$

Definimos

$$\mathcal{D} := \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M : t \in I_p\}, \qquad \theta(t,p) := \gamma_p(t).$$

Fijemos $(t_1, p_1) \in \mathcal{D}$. La imagen de la porción compacta de $I_{p_1}$ comprendida entre 0 y $t_1$ se cubre por finitos dominios de cartas. En cada carta, el Teorema 1.8.3 proporciona un intervalo de existencia común y dependencia suave respecto del dato inicial. Dividimos el intervalo entre 0 y $t_1$ en finitos subintervalos subordinados a esos dominios. En el primero, el valor final depende suavemente del punto inicial; este valor sirve como dato para el segundo, y así sucesivamente. Al componer un número finito de estos mapeos solución se obtienen un abierto $U_1 \ni p_1$ y un intervalo $J_1 \ni t_1$ con

$$J_1 \times U_1 \subseteq \mathcal{D}$$

y tal que $\theta$ es suave en $J_1 \times U_1$. Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es abierto y $\theta$ es suave.
Sean $s \in I_p$ y $q = \gamma_p(s)$. Las curvas

$$t \longmapsto \gamma_p(t+s), \qquad t \longmapsto \gamma_q(t)$$

son integrales de $\mathbf{X}$ y toman el valor $q$ en $t = 0$. Por unicidad, coinciden en su dominio común. La maximalidad en ambas direcciones implica

$$I_q = I_p - s, \qquad \gamma_q(t) = \gamma_p(t+s), \quad t \in I_p - s.$$

Esto prueba (2), las leyes de flujo y $\theta^{(p)} = \gamma_p$, que es (1). Además,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta(t,p) = \gamma_p'(0) = \mathbf{X}_p,$$

de modo que el generador es $\mathbf{X}$.
Como $\mathcal{D}$ es abierto, cada $M_t = \{p : (t,p) \in \mathcal{D}\}$ es abierto. Si $p \in M_t$ y $q = \theta_t(p)$, entonces $I_q = I_p - t$, por lo que $q \in M_{-t}$, y la ley de flujo da $\theta_{-t}(q) = p$. El argumento recíproco comienza con $q \in M_{-t}$. Así, $\theta_t\colon M_t \to M_{-t}$ es un difeomorfismo con inversa $\theta_{-t}$, lo que prueba (3).
Cualquier otro flujo suave con generador $\mathbf{X}$ tiene por órbitas curvas integrales de $\mathbf{X}$. Si es maximal, cada órbita coincide con $\gamma_p$; por ello coinciden también el dominio y el flujo. Esto prueba la unicidad. □

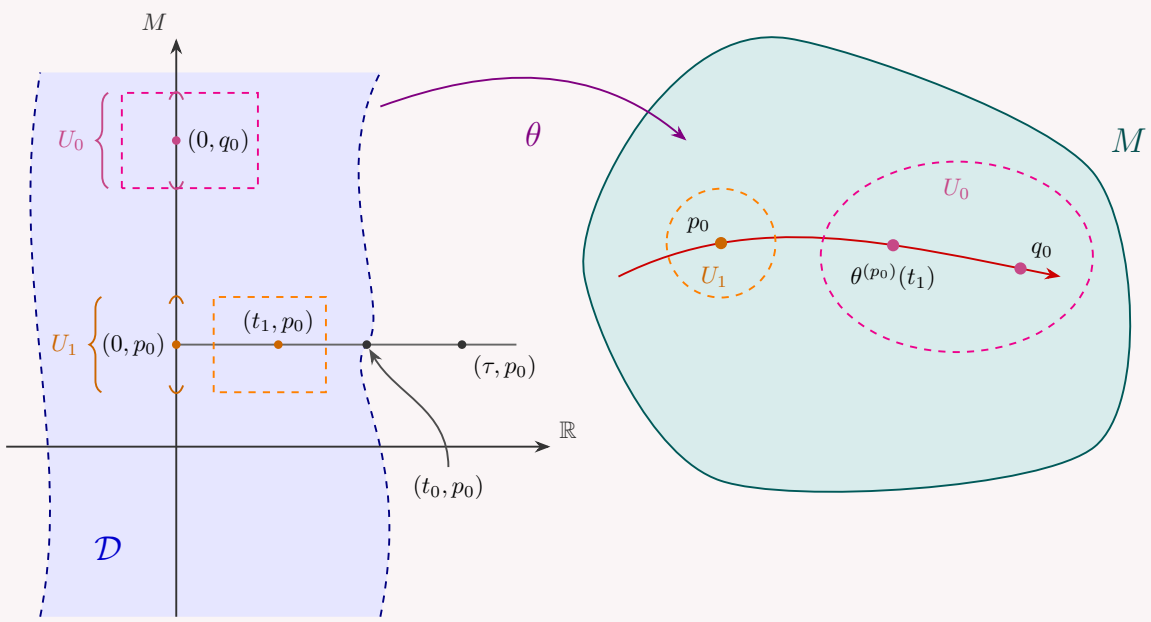



**Figura 1.10.** Argumento de que $\mathcal{D}$ es abierto.

El flujo cuya existencia se garantiza en el Teorema 1.8.15 se denomina *flujo generado por* $\mathbf{X}$. El término *generador infinitesimal* se justifica por el hecho de que el campo vectorial $\mathbf{X}$ describe la variación instantánea del flujo, en el sentido de que

$$\mathbf{X}(p) = \frac{d}{dt}\theta(t,p)\Big|_{t=0}.$$

En una carta suave, esto puede interpretarse como que, en cada punto, el vector $\mathbf{X}(p)$ determina la dirección tangente de la curva integral que pasa por $p$, y el flujo se obtiene al integrar estas direcciones a lo largo del tiempo. Los flujos son naturales respecto a las funciones suaves en el siguiente sentido:

**Proposición 1.8.16.** Sean $M$, $N$ variedades suaves sin frontera, $F\colon M \longrightarrow N$ un mapeo suave, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(N)$. Sean $\theta$ el flujo de $\mathbf{X}$ y $\eta$ el flujo de $\mathbf{Y}$. Si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ están $F$-relacionados, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $F(M_t) \subseteq N_t$ y $\eta_t \circ F = F \circ \theta_t$ en $M_t$:

$$\begin{array}{ccc} M_t & \xrightarrow{\theta_t} & M_{-t} \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ N_t & \xrightarrow{\eta_t} & N_{-t} \end{array}$$

*Demostración.* Por la Proposición 1.8.8, para cualquier $p \in M$, la curva $F \circ \theta^{(p)}$ es una curva integral de $\mathbf{Y}$ que comienza en $F(\theta^{(p)}(0)) = F(p)$. Por unicidad de las curvas integrales, la curva integral maximal $\eta^{(F(p))}$ debe estar definida al menos en $\mathcal{D}^{(p)}$ y $F \circ \theta^{(p)} = \eta^{(F(p))}$ en ese intervalo. Esto significa que

$$p \in M_t \Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(p)} \Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(F(p))} \Rightarrow F(p) \in N_t,$$

lo cual es equivalente a que $F(M_t) \subseteq N_t$, y

$$F(\theta^{(p)}(t)) = \eta^{(F(p))}(t), \qquad \forall t \in \mathcal{D}^{(p)},$$

lo cual es equivalente a que $\eta_t(F(p)) = F(\theta_t(p))$ para todo $p \in M_t$. □

Esto nos da el siguiente corolario:

**Corolario 1.8.17.** (Invariancia de los flujos bajo difeomorfismos) Sean $M$ y $N$ variedades suaves sin frontera, sea $F\colon M \longrightarrow N$ un difeomorfismo y sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ con flujo $\theta$. Entonces el campo vectorial $F_*\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(N)$ definido por

$$(F_*\mathbf{X})(q) = dF_{F^{-1}(q)}\big(\mathbf{X}(F^{-1}(q))\big)$$

tiene flujo dado por

$$\eta_t = F \circ \theta_t \circ F^{-1},$$

con dominio $N_t = F(M_t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

*Demostración.* Pongamos $\mathbf{Y} := F_*\mathbf{X}$. Por la definición del campo empujado,

$$dF_p(\mathbf{X}(p)) = \mathbf{Y}(F(p)), \qquad p \in M,$$

de modo que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ están $F$-relacionados. La Proposición 1.8.16 aplicada a $F$ da

$$F(M_t) \subseteq N_t, \qquad \eta_t \circ F = F \circ \theta_t \quad \text{en } M_t.$$

Aplicamos la misma proposición a $F^{-1}$, observando que $(F^{-1})_*\mathbf{Y} = \mathbf{X}$. Así obtenemos

$$F^{-1}(N_t) \subseteq M_t.$$

Al aplicar $F$ a esta inclusión resulta $N_t \subseteq F(M_t)$; por lo tanto,

$$N_t = F(M_t).$$

Finalmente, componiendo $\eta_t \circ F = F \circ \theta_t$ a la derecha con $F^{-1}$, se obtiene

$$\eta_t = F \circ \theta_t \circ F^{-1} \quad \text{en } N_t.$$

□

Dejamos otra propiedad importante de las curvas integrales:

**Lema 1.8.18.** (de escape) Sea $M$ una variedad suave sin frontera y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Si $\gamma\colon J \longrightarrow M$ es una curva integral maximal de $\mathbf{X}$ y el extremo derecho $b := \sup J$ es finito, entonces, para todo $t_0 \in J$, la cola $\gamma([t_0, b))$ no está contenida en ningún compacto de $M$. La afirmación para el extremo izquierdo se obtiene invirtiendo el parámetro: si $a := \inf J > -\infty$, ninguna cola $\gamma((a, t_0])$ está contenida en un compacto.

*Demostración.* Supongamos que $\gamma([t_0, b)) \subseteq K$ con $K$ compacto. Para una sucesión $t_j \to b^-$, la compacidad proporciona una subsucesión, no renombrada, tal que $\gamma(t_j) \to p \in K$. El teorema local de existencia y dependencia respecto del dato inicial proporciona una vecindad $U$ de $p$ y un $\varepsilon > 0$ comunes a todos los datos iniciales de $U$. Para $j$ grande, $\gamma(t_j) \in U$ y $b - t_j < \frac{\varepsilon}{2}$. La solución local que parte de $\gamma(t_j)$ en el instante $t_j$ coincide por unicidad con $\gamma$ en el dominio común y la prolonga hasta $t_j + \varepsilon > b$, lo que contradice la maximalidad. El extremo izquierdo se obtiene aplicando el mismo argumento al campo $-\mathbf{X}$ y a la curva con el tiempo invertido. □

Daremos algunas estimaciones locales para las derivadas parciales de un flujo que serán de bastante utilidad cuando veamos espacios de Sobolev en variedades de geometría acotada más adelante.

**Lema 1.8.19.** (Desigualdad de Grönwall) Sea $u\colon [0,T] \longrightarrow [0,\infty)$ una función continua y sea $a \geq 0$, $b\colon [0,T] \longrightarrow [0,\infty)$ una función continua. Supongamos que

$$u(t) \leq a + \int_0^t b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Entonces

$$u(t) \leq a \exp\left(\int_0^t b(\tau)\, d\tau\right), \qquad \forall t \in [0,T].$$

*Demostración.* Definamos

$$v(t) := a + \int_0^t b(\tau) u(\tau)\, d\tau.$$

Entonces $u \leq v$, $v(0) = a$ y

$$v'(t) = b(t)u(t) \leq b(t)v(t).$$

Si $a > 0$, se tiene $v(t) > 0$, de modo que

$$\frac{d}{dt} \log v(t) \leq b(t).$$

Al integrar entre 0 y $t$,

$$v(t) \leq a \exp\left(\int_0^t b(\tau)\, d\tau\right),$$

y la misma cota vale para $u$. Si $a = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ se aplica el argumento anterior a

$$v_\varepsilon(t) := \varepsilon + \int_0^t b(\tau) u(\tau)\, d\tau.$$

Se obtiene

$$u(t) \leq v_\varepsilon(t) \leq \varepsilon \exp\left(\int_0^t b(\tau)\, d\tau\right).$$

Al hacer $\varepsilon \to 0^+$, resulta $u(t) = 0$, que es la afirmación en este caso. □

**Lema 1.8.20.** Sea $M$ una variedad suave sin frontera de dimensión $n$ y sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial suave. Sea

$$\Phi\colon D \subseteq \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

el flujo de $\mathbf{X}$.
Sea $(U,\varphi)$ una carta de $M$ tal que $\overline{U}$ es compacto. Supongamos que $p \in U$, que $t \geq 0$ y que

$$(\tau,p) \in D \quad \text{y} \quad \Phi(\tau,p) \in U, \qquad \tau \in [0,t].$$

Entonces, para cada multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \geq 1$, existe una función continua

$$\mathrm{Expr}_\alpha \colon [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty),$$

no decreciente en cada variable y dependiente únicamente de $\alpha$ y de $n$, tal que

$$\left\| \partial_x^\alpha (\varphi \circ \Phi(t,\cdot) \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \right\| \leq \mathrm{Expr}_\alpha \left( \sup_{\substack{\tau \in [0,t],\ \beta \in \mathbb{N}_0^n \\ 1 \leq |\beta| \leq |\alpha|}} \left\| \partial_x^\beta (\varphi_* \mathbf{X})(\varphi(\Phi(\tau,p))) \right\|, t \right).$$

Las normas vectoriales son las euclidianas. Además, si $|\alpha| = 1$, puede tomarse

$$\mathrm{Expr}_\alpha(M,t) = e^{\sqrt{n} M t},$$

mientras que para $|\alpha| \geq 2$ puede elegirse $\mathrm{Expr}_\alpha$ de manera recursiva.

*Demostración.* Definamos

$$V := \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

y consideremos el campo vectorial en coordenadas

$$\widetilde{X} := \varphi_* \mathbf{X} \in \mathfrak{X}(V).$$

Como $\mathbf{X}$ es suave y $\varphi$ es un difeomorfismo sobre su imagen, el campo $\widetilde{X}$ es suave.
Definimos además

$$\widetilde{D} := \left\{ (\tau,x) \in \mathbb{R} \times V \;\middle|\; (\tau, \varphi^{-1}(x)) \in D \text{ y } \Phi(\tau, \varphi^{-1}(x)) \in U \right\}$$

y

$$\widetilde{\Phi} \colon \widetilde{D} \longrightarrow V, \qquad \widetilde{\Phi}(\tau,x) := \varphi\big(\Phi(\tau, \varphi^{-1}(x))\big).$$

La función $\widetilde{\Phi}$ es suave. Veremos que, para cada $x \in V$, la curva

$$\tau \longmapsto \widetilde{\Phi}(\tau,x)$$

satisface la ecuación diferencial asociada a $\widetilde{X}$.
Fijemos $x \in V$ y escribamos $q := \varphi^{-1}(x)$. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \widetilde{\Phi}(\tau,x) = d\varphi_{\Phi(\tau,q)} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau,q) \right).$$

Como $\Phi$ es el flujo de $\mathbf{X}$,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau,q) = \mathbf{X}_{\Phi(\tau,q)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\widetilde{\Phi}(\tau, x) = d\varphi_{\Phi(\tau,q)}(\mathbf{X}_{\Phi(\tau,q)}) = \widetilde{X}(\widetilde{\Phi}(\tau, x)).$$

Además,

$$\widetilde{\Phi}(0, x) = x.$$

Así, $\tau \mapsto \widetilde{\Phi}(\tau, x)$ es solución de

$$z'(\tau) = \widetilde{X}(z(\tau)), \qquad z(0) = x.$$

Tomemos

$$x_0 := \varphi(p), \qquad Z(\tau) := \widetilde{\Phi}(\tau, x_0).$$

Entonces

$$Z'(\tau) = \widetilde{X}(Z(\tau)), \qquad Z(0) = x_0,$$

y por integración

$$Z(t) = x_0 + \int_0^t \widetilde{X}(Z(\tau))\, d\tau.$$

Procedemos por inducción sobre $|\alpha|$.

**Caso** $|\alpha| = 1$**.** Definimos

$$Y_k(t) := \partial_{x_{0,k}}\widetilde{\Phi}(t, x_0).$$

Derivando la ecuación integral,

$$Y_k(t) = e_k + \int_0^t d\widetilde{X}_{Z(\tau)}(Y_k(\tau))\, d\tau,$$

y por lo tanto

$$Y_k'(t) = d\widetilde{X}_{Z(t)}(Y_k(t)), \qquad Y_k(0) = e_k.$$

Sea

$$M_1(t) := \sup_{\substack{\tau\in[0,t]\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \|\partial_j \widetilde{X}(Z(\tau))\|.$$

Para $z \in V$ y $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\|d\widetilde{X}_z(v)\| \le \max_{1\le j\le n} \|\partial_j \widetilde{X}(z)\| \sum_{j=1}^{n} |v_j| \le \sqrt{n} \max_{1\le j\le n} \|\partial_j \widetilde{X}(z)\|\, \|v\|.$$

Por lo tanto, la norma de operador de $d\widetilde{X}_{Z(\tau)}$ es a lo sumo $\sqrt{n}M_1(t)$ para $0 \le \tau \le t$. Al fijar $t$,

$$\|Y_k(s)\| \le 1 + \int_0^s \sqrt{n} M_1(t) \|Y_k(\tau)\|\, d\tau, \qquad 0 \le s \le t.$$

Aplicando el Lema 1.8.19 y evaluando en $s = t$,

$$\|Y_k(t)\| \le e^{\sqrt{n} M_1(t) t}.$$

**Paso inductivo.** Supongamos $|\alpha| = m \ge 2$ y que el resultado vale para todo multiíndice de orden estrictamente menor.

Aplicamos $\partial_{x_0}^{\alpha}$ a

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\Phi}(t,x_0) = \widetilde{X}(\widetilde{\Phi}(t,x_0)).$$

Conmutando derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\partial_{x_0}^{\alpha}\widetilde{\Phi}(t,x_0)\right) = \partial_{x_0}^{\alpha}(\widetilde{X}(\widetilde{\Phi}(t,x_0))).$$

Aplicamos la fórmula de Faà di Bruno (Teorema 1.1.19) y obtenemos

$$\partial_{x_0}^{\alpha}(\widetilde{X}(\widetilde{\Phi}(t,x_0))) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\ 1\le|\beta|\le|\alpha|}} \sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_{|\beta|})\\ |\gamma_i|>0,\ \sum_{i=1}^{|\beta|}\gamma_i=\alpha}} \sum_{l\in\{1,\dots,n\}^{|\beta|}} c_{\alpha,\beta,\gamma,l}\,\partial_x^{\beta}\widetilde{X}(Z(t))\prod_{i=1}^{|\beta|}\partial_{x_0}^{\gamma_i}\widetilde{\Phi}_{l_i}(t,x_0).$$

Si $|\beta|=1$, entonces $\gamma=(\gamma_1)$ tiene una sola componente y $\gamma_1=\alpha$, lo que produce

$$d\widetilde{X}_{Z(t)}(\partial_{x_0}^{\alpha}\widetilde{\Phi}(t,x_0)).$$

Definimos entonces explícitamente

$$G_{\alpha}(t) := \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\ 2\le|\beta|\le|\alpha|}} \sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_{|\beta|})\\ |\gamma_i|>0,\ \sum_{i=1}^{|\beta|}\gamma_i=\alpha}} \sum_{l\in\{1,\dots,n\}^{|\beta|}} c_{\alpha,\beta,\gamma,l}\,\partial_x^{\beta}\widetilde{X}(Z(t))\prod_{i=1}^{|\beta|}\partial_{x_0}^{\gamma_i}\widetilde{\Phi}_{l_i}(t,x_0).$$

Así,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\partial_{x_0}^{\alpha}\widetilde{\Phi}) = d\widetilde{X}_{Z(t)}(\partial_{x_0}^{\alpha}\widetilde{\Phi}) + G_{\alpha}(t), \qquad \partial_{x_0}^{\alpha}\widetilde{\Phi}(0,x_0) = 0.$$

Definimos

$$M_{\alpha}(t) := \sup_{\substack{\tau\in[0,t],\ \beta\in\mathbb{N}_0^n\\ 1\le|\beta|\le|\alpha|}} \|\partial_x^{\beta}\widetilde{X}(Z(\tau))\|.$$

Por hipótesis de inducción,

$$\|\partial_{x_0}^{\gamma}\widetilde{\Phi}(\tau,x_0)\| \le \mathrm{Expr}_{\gamma}(M_{\alpha}(t),t).$$

Tomando norma en $G_{\alpha}$ y usando estas cotas, se obtiene que existe un polinomio $P_{\alpha}$ con coeficientes no negativos tal que

$$\|G_{\alpha}(\tau)\| \le P_{\alpha}\left(M_{\alpha}(t), \mathrm{Expr}_{\gamma^{(1)}}(M_{\alpha}(t),t),\dots\right).$$

Definimos

$$B_{\alpha}(M,t) := P_{\alpha}\left(M, \mathrm{Expr}_{\gamma^{(1)}}(M,t),\dots\right).$$

Sea

$$u(s) := \|\partial_{x_0}^{\alpha}\widetilde{\Phi}(s,x_0)\|.$$

La comparación de normas del caso de orden uno da $\|d\widetilde{X}_{Z(\tau)}\|_{\mathrm{op}} \le \sqrt{n}\,M_{\alpha}(t)$ para $0\le\tau\le t$. Integrando la

ecuación para $\partial^{\alpha}_{x_0}\widetilde{\Phi}$, cuyo valor inicial es cero, resulta

$$u(s) \le tB_{\alpha}(M_{\alpha}(t),t) + \int_0^s \sqrt{n}\, M_{\alpha}(t)u(\tau)\,d\tau, \qquad 0 \le s \le t.$$

Aplicando el Lema 1.8.19,

$$u(s) \le tB_{\alpha}(M_{\alpha}(t),t)e^{\sqrt{n}M_{\alpha}(t)s}.$$

Evaluando en $s = t$,

$$\|\partial^{\alpha}_{x_0}\widetilde{\Phi}(t,x_0)\| \le tB_{\alpha}(M_{\alpha}(t),t)e^{\sqrt{n}M_{\alpha}(t)t}.$$

Definimos

$$\mathrm{Expr}_{\alpha}(M,t) := tB_{\alpha}(M,t)e^{\sqrt{n}Mt}.$$

Finalmente, la función $\mathrm{Expr}_{\alpha}$ es no decreciente en cada variable. Por hipótesis de inducción las funciones $\mathrm{Expr}_{\gamma}$ lo son; como $P_{\alpha}$ tiene coeficientes no negativos, $B_{\alpha}$ es no decreciente en cada variable; y la función $(M,t) \mapsto te^{\sqrt{n}Mt}$ es no decreciente en $[0,\infty)\times[0,\infty)$, de donde se sigue la afirmación.
Por último,

$$\partial^{\alpha}_{x}(\varphi \circ \Phi(t,\cdot)\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) = \partial^{\alpha}_{x_0}\widetilde{\Phi}(t,x_0),$$

y

$$\partial^{\beta}_{x}\widetilde{X}(Z(\tau)) = \partial^{\beta}_{x}(\varphi_{*}\mathbf{X})(\varphi(\Phi(\tau,p))),$$

lo que concluye la demostración. □

## 1.9 Grupos de Lie y acciones suaves

Muchas simetrías geométricas dependen de parámetros continuos. Las traslaciones de $\mathbb{R}^n$, las rotaciones del círculo y los cambios de marco pueden componerse e invertirse, pero también pueden diferenciarse respecto de esos parámetros. Los grupos de Lie reúnen estas dos estructuras: la ley de grupo expresa la composición de las simetrías y la estructura suave permite estudiar cómo varían.

Los ejemplos básicos incluyen $(\mathbb{R}^n,+)$, el círculo $S^1$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ y sus subgrupos ortogonales; en el caso complejo aparecen del mismo modo los grupos unitarios. Los grupos de isometrías proporcionan otros ejemplos cuando se dispone de la estructura geométrica necesaria. Cerca de la identidad, el espacio tangente $T_eG$ y su corchete forman el álgebra de Lie de $G$. Esta linealización infinitesimal permite estudiar curvas de simetrías mediante ecuaciones en un espacio vectorial.

La relación entre el grupo y su álgebra aparecerá en los flujos y los subgrupos uniparamétricos. Las acciones suaves conducirán después a espacios homogéneos y a haces principales; en dimensión infinita, ideas análogas intervendrán en los grupos gauge y de difeomorfismos.

Fijamos en esta sección las convenciones de grupos de Lie que se utilizarán posteriormente. Si $G$ es un grupo y $g \in G$, escribimos

$$L_g(h) := gh, \qquad R_{\mathbf{g}}(h) := hg, \qquad C_g(h) := ghg^{-1}.$$

Como referencia para la teoría finito–dimensional estándar y para comparar convenciones puede consultarse [94, Caps. 7 y 20]. Señalaremos de manera explícita los resultados externos cuya demostración no se reproduce.

**Definición 1.9.1.** (Grupo de Lie) Un *grupo de Lie finito–dimensional real* es una variedad suave $G$, sin frontera, provista de una estructura de grupo para la cual los mapeos

$$\mu\colon G\times G\longrightarrow G,\qquad \mu(g,h)=gh,\qquad \iota\colon G\longrightarrow G,\qquad \iota(g)=g^{-1},$$

son suaves. Denotamos por $e$ el elemento neutro de $G$. Un *homomorfismo de grupos de Lie* es un homomorfismo de grupos que además es suave.

**Proposición 1.9.2.** Sean $G$ y $H$ grupos de Lie finito–dimensionales reales, cuyas variedades suaves subyacentes no tienen frontera. Para cada $g\in G$, los mapeos $L_g$, $R_{\mathbf{g}}$ y $C_g$ son difeomorfismos y

$$L_g^{-1}=L_{g^{-1}},\qquad R_{\mathbf{g}}^{-1}=R_{g^{-1}},\qquad C_g^{-1}=C_{g^{-1}}.$$

Además,

$$C_{gh}=C_g\circ C_h.$$

Si $\Phi\colon G\to H$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces

$$\Phi\circ L_g=L_{\Phi(g)}\circ\Phi,\qquad \Phi\circ R_{\mathbf{g}}=R_{\Phi(g)}\circ\Phi,\qquad \Phi\circ C_g=C_{\Phi(g)}\circ\Phi.$$

*Demostración.* Todas las identidades se deducen directamente de las leyes de grupo. La suavidad de los mapeos y de sus inversas se sigue de la suavidad de la multiplicación y de la inversión. □

**Proposición 1.9.3.** (Grupos matriciales clásicos) Los grupos

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\quad \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\quad \mathrm{O}(n),\quad \mathrm{SO}(n),\quad \mathrm{U}(n)$$

son grupos de Lie finito–dimensionales reales con las estructuras suaves inducidas por sus inclusiones en los espacios de matrices. En particular, $\mathrm{U}(1)=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ es el círculo como grupo de Lie.

*Demostración.* El conjunto $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})=\{A:\det A\neq 0\}$, para $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$, es abierto en el espacio real de matrices. La multiplicación es polinómica y la fórmula $A^{-1}=\mathrm{adj}(A)/\det A$ prueba que la inversión es suave.
Para el grupo ortogonal consideremos

$$F\colon M_n(\mathbb{R})\longrightarrow \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}),\qquad F(A)=A^{\mathsf{T}}A.$$

Si $A\in F^{-1}(I)$, entonces

$$dF_A(H)=A^{\mathsf{T}}H+H^{\mathsf{T}}A.$$

Este diferencial es suprayectivo: dada una matriz simétrica $S$, basta tomar $H=AS/2$. Por el teorema del valor regular, $\mathrm{O}(n)=F^{-1}(I)$ es una subvariedad. Las operaciones de grupo son restricciones de mapeos suaves. Como el determinante sólo toma los valores $\pm1$ en $\mathrm{O}(n)$, el subconjunto $\mathrm{SO}(n)=\{A\in\mathrm{O}(n):\det A=1\}$ es abierto y cerrado en $\mathrm{O}(n)$, y por ello es también un grupo de Lie.
El mismo argumento, considerando los espacios complejos como espacios reales y usando

$$F_{\mathbb{C}}(A)=A^{*}A,\qquad d(F_{\mathbb{C}})_A(H)=A^{*}H+H^{*}A,$$

muestra que $\mathrm{U}(n) = F_{\mathbb{C}}^{-1}(I)$ es una subvariedad: para una matriz hermitiana $S$, la elección $H = AS/2$ prueba la suprayectividad. El caso $n = 1$ da exactamente el círculo unitario. □

Antes de definir el álgebra de Lie recordamos la convención para el corchete de campos vectoriales.

**Proposición 1.9.4.** (Corchete de campos vectoriales) Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera y sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$. Existe un único campo vectorial suave $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ caracterizado por

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f), \qquad f \in C^\infty(M). \tag{1.12}$$

El corchete es bilineal, antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi. Si $F\colon M \to N$ es suave, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathfrak{X}(M)$ y $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in \mathfrak{X}(N)$, y $\mathbf{X}_i$ está $F$-relacionado con $\mathbf{Y}_i$ para $i = 1, 2$, entonces $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$ está $F$-relacionado con $[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]$. En particular, si $F$ es un difeomorfismo,

$$F_*[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [F_*\mathbf{X}, F_*\mathbf{Y}].$$

*Demostración.* Para $f, g \in C^\infty(M)$, la regla de Leibniz da

$$(\mathbf{XY} - \mathbf{YX})(fg) = f\,(\mathbf{XY} - \mathbf{YX})g + g\,(\mathbf{XY} - \mathbf{YX})f.$$

Así, en cada punto $p$, el operador $f \mapsto (\mathbf{XY} - \mathbf{YX})f(p)$ es una derivación y, por lo tanto, un vector tangente en $T_pM$. En coordenadas, si $\mathbf{X} = X^i\partial_i$ y $\mathbf{Y} = Y^j\partial_j$, entonces

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \left(X^i\partial_i Y^j - Y^i\partial_i X^j\right)\partial_j,$$

de modo que el campo obtenido es suave. La antisimetría y la identidad de Jacobi son las identidades correspondientes para conmutadores de operadores lineales.
Si $\mathbf{X}_i$ está $F$-relacionado con $\mathbf{Y}_i$, entonces, para $f \in C^\infty(N)$,

$$\mathbf{X}_i(f \circ F) = (\mathbf{Y}_i f) \circ F.$$

Aplicando esta igualdad dos veces se obtiene

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2](f \circ F) = \left([\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]f\right) \circ F,$$

que es precisamente la relación requerida. □

**Definición 1.9.5.** (Campos invariantes y álgebra de Lie) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera. Un campo $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(G)$ es *invariante por la izquierda* si

$$(L_g)_*\mathbf{X} = \mathbf{X} \qquad \text{para todo } g \in G.$$

Para $\xi \in T_eG$ definimos

$$\xi_g^L := (dL_g)_e\xi.$$

El espacio vectorial

$$\mathfrak{g} := T_eG$$

se llama el *álgebra de Lie de* $G$. Su corchete se define por

$$[\xi,\eta]_{\mathfrak{g}} := [\xi^L,\eta^L]_e. \tag{1.13}$$

Omitiremos el subíndice $\mathfrak{g}$ cuando no haya riesgo de confusión.

**Proposición 1.9.6.** Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera. La asignación

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \{\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(G) \mid \mathbf{X} \text{ es invariante por la izquierda}\}, \qquad \xi \longmapsto \xi^L,$$

es un isomorfismo lineal cuya inversa es $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}_e$. Además,

$$[\xi^L,\eta^L] = [\xi,\eta]^L.$$

Por lo tanto, (1.13) convierte a $\mathfrak{g}$ en un álgebra de Lie.

*Demostración.* La suavidad de $\xi^L$ se sigue de la suavidad de $(g,\xi) \mapsto (dL_g)_e\xi$. La identidad $L_g \circ L_h = L_{gh}$ implica

$$(dL_g)_h(\xi^L_h) = (dL_g)_h(dL_h)_e\xi = (dL_{gh})_e\xi = \xi^L_{gh},$$

de modo que $\xi^L$ es invariante por la izquierda. Recíprocamente, si $\mathbf{X}$ lo es, entonces

$$\mathbf{X}_g = (dL_g)_e\mathbf{X}_e,$$

así que $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_e)^L$. La naturalidad del corchete bajo $L_g$ muestra que el corchete de dos campos invariantes por la izquierda vuelve a ser invariante por la izquierda. Evaluando en $e$ se obtiene $[\xi^L,\eta^L] = [\xi,\eta]^L$. Las identidades de álgebra de Lie se heredan entonces del corchete de campos vectoriales. □

**Proposición 1.9.7.** (Álgebras de Lie de los grupos matriciales clásicos) Con el corchete matricial $[A,B] = AB - BA$, se tienen las identificaciones

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}), \qquad \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$$

como álgebras de Lie reales, y

$$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^{\mathsf{T}} + A = 0\}, \qquad \mathfrak{u}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^* + A = 0\}.$$

En particular, $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$.

*Demostración.* El espacio tangente en la identidad de un grupo lineal general es todo el espacio ambiente. Si $A(t)$ es una curva en $\mathrm{O}(n)$ con $A(0) = I$, al derivar $A(t)^{\mathsf{T}}A(t) = I$ se obtiene $A'(0)^{\mathsf{T}} + A'(0) = 0$. Recíprocamente, cada matriz antisimétrica pertenece al núcleo de $dF_I$, que es el espacio tangente al nivel regular. Como

$\mathrm{SO}(n)$ es abierto en $\mathrm{O}(n)$, ambos grupos tienen el mismo espacio tangente en la identidad. La identidad $A(t)^*A(t) = I$ da del mismo modo la descripción de $\mathfrak{u}(n)$.
Finalmente, para una matriz $A$, el campo invariante por la izquierda es $\mathbf{X}_A(g) = gA$. Un cálculo en el espacio de matrices da $[\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B](g) = g(AB - BA)$, de modo que el corchete definido en (1.13) coincide con el conmutador. □

**Proposición 1.9.8.** (Diferencial de un homomorfismo) Sean $G$ y $H$ grupos de Lie finito–dimensionales reales, cuyas variedades suaves subyacentes no tienen frontera, y sea $\Phi\colon G \to H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces

$$d\Phi_e\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie:

$$d\Phi_e[\xi,\eta] = [d\Phi_e\xi, d\Phi_e\eta].$$

*Demostración.* La identidad $\Phi \circ L_g = L_{\Phi(g)} \circ \Phi$ implica

$$d\Phi_g(\xi^L_g) = (dL_{\Phi(g)})_e(d\Phi_e\xi) = \boldsymbol{(d\Phi_e\xi)^L_{\Phi(g)}}.$$

Por lo tanto, $\xi^L$ y $\boldsymbol{(d\Phi_e\xi)^L}$ están $\Phi$-relacionados. La Proposición 1.9.4 muestra que sus corchetes también lo están. Evaluando en $e$ se obtiene la fórmula. □

**Lema 1.9.9.** (Corchete y flujo) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $\Phi_t$ su flujo local. Para todo $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\Phi_{-t})_*\mathbf{Y}, \tag{1.14}$$

en cualquier abierto en el que los dos lados estén definidos.

*Demostración.* Como operadores sobre funciones,

$$\big((\Phi_{-t})_*\mathbf{Y}\big)f = \Phi_t^*\big(\mathbf{Y}(\Phi_{-t}^* f)\big).$$

La derivada en $t = 0$ del operador $\Phi_t^*$ es $\mathbf{X}$, mientras que la derivada de $\Phi_{-t}^*$ es $-\mathbf{X}$. Por la regla del producto,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Phi_t^*\mathbf{Y}\Phi_{-t}^* = \mathbf{XY} - \mathbf{YX} = [\mathbf{X},\mathbf{Y}].$$

□

**Teorema 1.9.10.** (Exponencial de un grupo de Lie) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera. Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, el campo $\xi^L$ es completo. Si $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to G$ es su curva integral con $\gamma_\xi(0) = e$, entonces

$$\gamma_\xi(t+s) = \gamma_\xi(t)\gamma_\xi(s).$$

El mapeo

$$\exp_G\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G, \qquad \exp_G(\xi) := \gamma_\xi(1),$$

es suave y satisface

$$\exp_G(t\xi) = \gamma_\xi(t), \qquad \exp_G((t+s)\xi) = \exp_G(t\xi)\exp_G(s\xi). \tag{1.15}$$

Además,

$$(d\exp_G)_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}};$$

por consiguiente, $\exp_G$ restringe a un difeomorfismo entre una vecindad abierta de $0 \in \mathfrak{g}$ y una vecindad abierta de $e \in G$.

*Demostración.* Sea $\gamma_\xi : I \to G$ la curva integral maximal de $\xi^L$ que parte de $e$. Si $s \in I$, las curvas

$$t \longmapsto \gamma_\xi(s+t), \qquad t \longmapsto \gamma_\xi(s)\gamma_\xi(t)$$

son curvas integrales de $\xi^L$ y toman el mismo valor en $t = 0$. Por unicidad coinciden donde ambas están definidas.

El intervalo $I$ contiene algún $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Si $b := \sup I < \infty$, elegimos $s \in I$ con $b - s < \varepsilon$. La fórmula

$$\widetilde{\gamma}(s+t) := \gamma_\xi(s)\gamma_\xi(t), \qquad |t| < \varepsilon,$$

coincide con $\gamma_\xi$ en el traslape y prolonga la curva más allá de $b$, contradiciendo la maximalidad. El mismo argumento en el extremo izquierdo muestra que $I = \mathbb{R}$. La identidad de grupo ya obtenida vale, por lo tanto, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

El lema de reescalamiento para curvas integrales da

$$\gamma_{t\xi}(1) = \gamma_\xi(t),$$

lo cual prueba (1.15). Para demostrar la suavidad respecto de $\xi$, consideramos el campo suave en $G \times \mathfrak{g}$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{(g,\xi)} := \big((dL_g)_e\xi, 0\big).$$

Cada curva integral de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ mantiene fija la segunda componente y su primera componente es una curva integral de un campo invariante por la izquierda; por lo ya probado, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ es completo. El teorema fundamental de flujos implica que su flujo global depende suavemente del punto inicial. Evaluarlo en tiempo 1 y en $(e, \xi)$ demuestra que $\xi \mapsto \exp_G(\xi)$ es suave.

Finalmente,

$$(d\exp_G)_0(\xi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \exp_G(t\xi) = \gamma_\xi'(0) = \xi.$$

El Teorema 1.5.6 concluye la afirmación local. □

**Corolario 1.9.11.** (Subgrupos de un parámetro) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera. Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, el mapeo

$$t \longmapsto \exp_G(t\xi)$$

es un homomorfismo suave $(\mathbb{R}, +) \to G$. Recíprocamente, si $\alpha : (\mathbb{R}, +) \to G$ es un homomorfismo suave y

$\xi = \alpha'(0)$, entonces

$$\alpha(t) = \exp_G(t\xi) \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* La primera afirmación es (1.15). Para la recíproca,

$$\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s)$$

implica, derivando respecto de $s$ en 0,

$$\alpha'(t) = (dL_{\alpha(t)})_e \xi = \xi^L_{\alpha(t)}.$$

Así, $\alpha$ y $t \mapsto \exp_G(t\xi)$ son curvas integrales de $\xi^L$ con el mismo dato inicial, y la unicidad prueba la igualdad. □

**Definición 1.9.12.** (Representaciones adjunta e infinitesimal) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera. Definimos

$$\mathrm{Ad}_g := (dC_g)_e \in GL(\mathfrak{g}), \qquad \mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}),$$

y

$$\mathrm{ad}_\xi \eta := \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \mathrm{Ad}_{\exp_G(t\xi)}\eta.$$

**Proposición 1.9.13.** (Naturalidad y equivariancia de la exponencial) Sean $G$ y $H$ grupos de Lie finito–dimensionales reales, cuyas variedades suaves subyacentes no tienen frontera. Si $\Phi\colon G \to H$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces

$$\Phi(\exp_G \xi) = \exp_H(d\Phi_e \xi), \qquad \xi \in \mathfrak{g}.$$

En particular, para $g \in G$,

$$\exp_G(\mathrm{Ad}_g \xi) = g \exp_G(\xi) g^{-1}. \tag{1.16}$$

*Demostración.* Los dos mapeos

$$t \longmapsto \Phi(\exp_G(t\xi)), \qquad t \longmapsto \exp_H(t\, d\Phi_e \xi)$$

son subgrupos de un parámetro de $H$ con velocidad inicial $d\Phi_e\xi$. La unicidad del Corolario 1.9.11 prueba que coinciden; se evalúa en $t = 1$. Para $\Phi = C_g$, su diferencial en $e$ es $\mathrm{Ad}_g$, y se obtiene (1.16). □

**Proposición 1.9.14.** (Identidades de Ad y ad) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera. Se cumplen las identidades

$$\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_h, \tag{1.17}$$

$$\mathrm{Ad}_g[\xi,\eta] = [\mathrm{Ad}_g \xi, \mathrm{Ad}_g \eta], \tag{1.18}$$

$$\mathrm{ad}_\xi \eta = [\xi,\eta], \tag{1.19}$$

$$\operatorname{Ad}_{\exp_G(t\xi)} = \exp\bigl(t \operatorname{ad}_\xi\bigr), \tag{1.20}$$

$$\operatorname{Ad}_g \operatorname{ad}_\xi \operatorname{Ad}_{g^{-1}} = \operatorname{ad}_{\operatorname{Ad}_g \xi}, \tag{1.21}$$

$$\operatorname{ad}_{[\xi,\eta]} = [\operatorname{ad}_\xi, \operatorname{ad}_\eta]. \tag{1.22}$$

*Demostración.* La identidad $C_{gh} = C_g \circ C_h$ implica (1.17). Como $C_g$ es un automorfismo de grupos de Lie, la Proposición 1.9.8 da (1.18).
El flujo de $\xi^L$ es

$$\Phi_t = R_{\exp_G(t\xi)},$$

pues la curva que parte de $g$ es $g \exp_G(t\xi)$. Una verificación directa da

$$(R_h)_* \eta^L = (\mathbf{Ad}_{h^{-1}} \eta)^L.$$

Por el Lema 1.9.9,

$$[\xi^L, \eta^L] = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (R_{\exp_G(-t\xi)})_* \eta^L = \left( \left.\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\right|_{\mathbf{0}} \mathbf{Ad}_{\mathbf{exp}_G(t\xi)} \eta \right)^L.$$

Evaluando en $e$ se obtiene (1.19).
Por (1.17), el mapeo $B(t) := \operatorname{Ad}_{\exp_G(t\xi)}$ satisface

$$B(t+s) = B(t)B(s), \qquad B(0) = I.$$

Derivando respecto de $s$ en 0 se obtiene $B'(t) = B(t)\operatorname{ad}_\xi$, cuya única solución es (1.20). La identidad (1.21) se obtiene diferenciando

$$\operatorname{Ad}_g \operatorname{Ad}_{\exp(t\xi)} \operatorname{Ad}_{g^{-1}} = \operatorname{Ad}_{\exp(t \operatorname{Ad}_g \xi)}.$$

Finalmente, (1.22) es la identidad de Jacobi escrita como una identidad de endomorfismos. □

**Teorema 1.9.15.** (Teorema del subgrupo cerrado) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera y sea $H \subseteq G$ un subgrupo que es cerrado en la topología de $G$. Entonces $H$ posee una única estructura suave para la que es un subgrupo de Lie encajado de $G$. Su álgebra de Lie, identificada con un subespacio de $\mathfrak{g}$, es

$$\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \exp_G(t\xi) \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}. \tag{1.23}$$

La existencia y la caracterización del álgebra de Lie son [94, Teorema 20.12 y Proposición 20.9, pp. 521–523].

*Demostración.* La afirmación de existencia es el teorema del subgrupo cerrado citado. La estructura es única porque una estructura de subgrupo de Lie encajado debe ser la estructura de subvariedad inducida por las cartas de rebanada. Una vez construida, (1.23) es la caracterización de la caracterización exponencial citada: las curvas $t \mapsto \exp_G(t\xi)$ contenidas en $H$ son exactamente los subgrupos de un parámetro cuya velocidad inicial pertenece a $T_e H$. □

**Proposición 1.9.16.** (Centralizadores) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave

subyacente no tiene frontera. Para cualquier subconjunto $S \subseteq G$, su centralizador

$$Z_G(S) := \{g \in G \mid gs = sg \text{ para todo } s \in S\}$$

es un subgrupo cerrado y, por lo tanto, un subgrupo de Lie encajado. Si $G$ es compacto, $Z_G(S)$ es compacto. Su álgebra de Lie es

$$\operatorname{Lie}(Z_G(S)) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{Ad}_s \xi = \xi \text{ para todo } s \in S\}. \tag{1.24}$$

Si $S = H$ es un subgrupo de Lie conexo con álgebra $\mathfrak{h}$, esta expresión equivale a

$$\operatorname{Lie}(Z_G(H)) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \eta] = 0 \text{ para toda } \eta \in \mathfrak{h}\}.$$

*Demostración.* El centralizador es un subgrupo por las leyes de grupo y

$$Z_G(S) = \bigcap_{s \in S} \{g \in G \mid C_g(s) = s\}.$$

Cada conjunto del miembro derecho es cerrado, pues $g \mapsto C_g(s)$ es continuo y $\{s\}$ es cerrado. El Teorema 1.9.15 le da su estructura encajada; si $G$ es compacto, el subconjunto cerrado $Z_G(S)$ también es compacto.

Por (1.23), un vector $\xi$ pertenece a su álgebra si y sólo si $\exp_G(t\xi)$ conmuta con todo $s \in S$ para todo $t$. Usando (1.16), esta condición se escribe

$$\exp_G(t \operatorname{Ad}_s \xi) = \exp_G(t\xi) \quad (s \in S,\ t \in \mathbb{R}).$$

Derivar en $t = 0$ da $\operatorname{Ad}_s \xi = \xi$; el recíproco se obtiene de la misma fórmula de equivariancia. Esto prueba (1.24).

Si $H$ es conexo, está generado por cualquier vecindad del neutro y ésta puede cubrirse mediante exponenciales. Por $\operatorname{Ad}_{\exp(t\eta)} = \exp(t \operatorname{ad}_\eta)$, un vector está fijo por todo $H$ si y sólo si $\operatorname{ad}_\eta \xi = [\eta, \xi] = 0$ para toda $\eta \in \mathfrak{h}$. □

**Definición 1.9.17.** (Acciones suaves y campos fundamentales positivos) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera y sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Una *acción suave izquierda* de $G$ sobre $M$ es un mapeo suave

$$a\colon G \times M \longrightarrow M, \qquad (g, x) \longmapsto g \cdot x,$$

tal que

$$e \cdot x = x, \qquad (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

Una *acción suave derecha* es un mapeo suave

$$r\colon M \times G \longrightarrow M, \qquad (x, g) \longmapsto x \cdot g,$$

tal que

$$x \cdot e = x, \qquad (x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh).$$

Usaremos siempre el *campo fundamental positivo*. Para una acción izquierda definimos

$$\xi_M(x) := \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \exp_G(t\xi)\cdot x,$$

y para una acción derecha definimos

$$\xi_M(x) := \left.\frac{d}{dt}\right|_0 x\cdot \exp_G(t\xi).$$

**Proposición 1.9.18.** (Signos y transformación de los campos fundamentales) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera, sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, considérese una acción suave izquierda o derecha de $G$ sobre $M$ y sean $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$.

(a) Para una acción izquierda, el flujo de $\xi_M$ es

$$\Phi_t(x) = \exp_G(t\xi)\cdot x,$$

y

$$[\xi_M, \eta_M] = -[\xi,\eta]_M, \tag{1.25}$$
$$(a_g)_*\xi_M = (\mathbf{Ad}_g\,\xi)_M, \qquad a_g(x) := g\cdot x. \tag{1.26}$$

(b) Para una acción derecha, el flujo de $\xi_M$ es

$$\Psi_t(x) = x\cdot \exp_G(t\xi),$$

y

$$[\xi_M, \eta_M] = [\xi,\eta]_M, \tag{1.27}$$
$$(r_g)_*\xi_M = (\mathbf{Ad}_{g^{-1}}\,\xi)_M, \qquad r_g(x) := x\cdot g. \tag{1.28}$$

*Demostración.* Las fórmulas de los flujos se siguen inmediatamente de la ley de acción y de la ley de grupo de $t \mapsto \exp_G(t\xi)$.
Para una acción izquierda,

$$g\exp(t\xi)\cdot x = \exp(t\,\mathrm{Ad}_g\,\xi)\cdot(g\cdot x),$$

y al derivar en $t=0$ se obtiene (1.26). Aplicando esta identidad con $g=\exp(-t\xi)$ y usando el Lema 1.9.9,

$$[\xi_M,\eta_M] = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (a_{\exp(-t\xi)})_*\eta_M = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\mathbf{Ad}_{\exp(-t\xi)}\,\eta)_M = -[\xi,\eta]_M.$$

Para una acción derecha,

$$(x\cdot\exp(t\xi))\cdot g = (x\cdot g)\cdot\exp(t\,\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\xi),$$

lo que prueba (1.28). Aplicándola a $g = \exp(-t\xi)$,

$$[\xi_M, \eta_M] = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (r_{\exp(-t\xi)})_* \eta_M = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left(\mathbf{Ad}_{\exp(t\xi)}\,\eta\right)_M = [\xi, \eta]_M.$$

□

**Definición 1.9.19.** (Órbita, estabilizador y mapeo órbita) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera, sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y considérese una acción suave izquierda o derecha de $G$ sobre $M$. Para una acción izquierda y $x \in M$, definimos

$$\mathcal{O}_x := G \cdot x, \qquad G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}, \qquad \vartheta_x \colon G \to M, \qquad \vartheta_x(g) = g \cdot x.$$

Para una acción derecha se usan $\mathcal{O}_x = x \cdot G$, $G_x = \{g \mid x \cdot g = x\}$ y $\vartheta_x(g) = x \cdot g$. Una acción es *libre* si todos sus estabilizadores son triviales y es *transitiva* si posee una sola órbita.

**Proposición 1.9.20.** (Propiedades elementales de órbitas) Sea $G$ un grupo de Lie finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera, sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y considérese una acción suave izquierda o derecha de $G$ sobre $M$. El mapeo órbita es suave, $G_x$ es un subgrupo de Lie cerrado y encajado de $G$, y

$$(d\vartheta_x)_e \xi = \xi_M(x). \tag{1.29}$$

Para una acción izquierda, $G_{g\cdot x} = g G_x g^{-1}$; para una acción derecha, $G_{x\cdot g} = g^{-1} G_x g$. En particular, la libertad y la dimensión del núcleo de $(d\vartheta_x)_e$ son constantes a lo largo de cada órbita.

*Demostración.* La suavidad es la de la acción con $x$ fijo. Las leyes de acción muestran que $G_x$ contiene a $e$ y es estable bajo productos e inversas. Además, $G_x = \vartheta_x^{-1}(\{x\})$ es cerrado porque las variedades son Hausdorff; el Teorema 1.9.15 le da su estructura de subgrupo de Lie encajado. La identidad (1.29) es exactamente la definición del campo fundamental. Finalmente,

$$h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \iff g^{-1} h g \cdot x = x$$

prueba la fórmula izquierda; la fórmula derecha se obtiene de $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot g$ multiplicando por $g^{-1}$ a la derecha. La transformación de los núcleos también se sigue de la Proposición 1.9.18. □

**Teorema 1.9.21.** (Medida de Haar en grupos compactos) Sea $G$ un grupo de Lie compacto finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera. Existe una única medida de probabilidad regular $\mu_G$ en $G$ que es invariante por traslaciones izquierdas y derechas:

$$(L_g)_* \mu_G = \mu_G = (R_g)_* \mu_G \qquad (g \in G).$$

Para la construcción de la forma de volumen de Haar normalizada en un grupo de Lie compacto, véase [94, Proposición 16.10]. La existencia y unicidad de la medida de Haar es el resultado externo usado aquí; la invariancia derecha se deduce aplicando la unicidad de la probabilidad invariante por la izquierda a cada traslación derecha.

**Proposición 1.9.22.** (Promedio de un producto interno) Sea $G$ un grupo de Lie compacto finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera y sea $\rho\colon G \to GL(V)$ una representación suave en un espacio vectorial real finito–dimensional. Entonces $V$ admite un producto interno $G$-invariante.

*Demostración.* Partimos de cualquier producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ y definimos

$$\langle v, w\rangle_G := \int_G \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle_0 \, d\mu_G(g).$$

La forma obtenida es bilineal, simétrica y positiva definida. Para $h \in G$, la invariancia derecha de $\mu_G$ y $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ dan

$$\langle \rho(h)v, \rho(h)w\rangle_G = \int_G \langle \rho(gh)v, \rho(gh)w\rangle_0 \, d\mu_G(g) = \langle v, w\rangle_G.$$

□

**Corolario 1.9.23.** (Producto interno Ad-invariante) Sea $G$ un grupo de Lie compacto finito–dimensional real cuya variedad suave subyacente no tiene frontera. Su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ tal que

$$\langle \mathrm{Ad}_g\, \xi, \mathrm{Ad}_g\, \eta\rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \xi, \eta\rangle_{\mathfrak{g}} \qquad (g \in G).$$

*Demostración.* Aplicamos la Proposición 1.9.22 a la representación $\rho = \mathrm{Ad}$. □

## 1.10 Campos tensoriales y formas diferenciales

Los espacios tangentes y cotangentes permiten construir tensores punto a punto. Al reunirlos sobre $M$ se obtienen haces tensoriales, y sus secciones describen métricas, formas diferenciales, curvaturas y muchos otros campos geométricos. Esta última sección del capítulo recuerda primero el álgebra multilineal necesaria y después la organiza de manera suave sobre la variedad.

**Definición 1.10.1.** Si $V_1, \ldots, V_k$ y $W$ son espacios vectoriales, una función $F\colon V_1 \times \cdots \times V_k \longrightarrow W$ se dice **multilineal** si es una función lineal en cada una de sus entradas cuando las demás están fijas. Al espacio de funciones multilineales se le denota por $L(V_1, \ldots, V_k; W)$.

**Definición 1.10.2.** Si $V_1, \ldots, V_k$ y $W_1, \ldots, W_l$ son espacios vectoriales y $\omega \in L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$ y $\eta \in L(W_1, \ldots, W_l; \mathbb{R})$, definimos una función $\omega \otimes \eta\colon V_1 \times \cdots \times V_k \times W_1 \times \cdots \times W_l \longrightarrow \mathbb{R}$ llamada el **producto tensorial de $\omega$ con $\eta$** dada por

$$\omega \otimes \eta(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l) = \omega(v_1, \ldots, v_k)\eta(w_1, \ldots, w_l).$$

El espacio de funciones multilineales es un espacio vectorial y si los espacios vectoriales son de dimensión finita, entonces resulta ser un espacio vectorial de dimensión finita:

**Proposición 1.10.3.** Sean $V_1, \ldots, V_k$ y $W$ espacios vectoriales reales. Entonces $L(V_1, \ldots, V_k; W)$ es un espacio vectorial real bajo las operaciones

$$(F + G)(v_1, \ldots, v_k) = F(v_1, \ldots, v_k) + G(v_1, \ldots, v_k),$$

$$(aF)(v_1,\dots,v_k) = a(F(v_1,\dots,v_k))$$

para cada $F, G \in L(V_1,\dots,V_k;W)$ y cada $a \in \mathbb{R}$.

*Demostración.* Si se fijan todas las variables salvo la $j$-ésima, las funciones $F+G$ y $aF$ son, respectivamente, la suma y el múltiplo escalar de dos mapeos lineales $V_j \to W$; por lo tanto, vuelven a ser lineales en esa variable. Como esto vale para cada $j$, ambas funciones son multilineales. Las identidades de espacio vectorial se verifican punto a punto y se reducen a las identidades correspondientes en $W$. La función nula es el elemento neutro y el opuesto de $F$ es la función $-F$. □

**Proposición 1.10.4.** Sean $V_1,\dots,V_k$ espacios vectoriales de dimensiones $n_1,\dots,n_k$ respectivamente. Para cada $j \in \{1,\dots,k\}$, sea $\{\mathbf{E}_1^{(j)},\dots,\mathbf{E}_{n_j}^{(j)}\}$ una base para $V_j$ y sea $\{\varepsilon_{(j)}^1,\dots,\varepsilon_{(j)}^{n_j}\}$ la correspondiente base dual para $V_j^*$. Entonces

$$\mathscr{B} = \{\varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k} \mid 1 \le i_1 \le n_1,\dots,1 \le i_k \le n_k\}$$

es una base para $L(V_1,\dots,V_k;\mathbb{R})$ por lo que dicho espacio vectorial tiene dimensión $n_1 \cdots n_k$.

*Demostración.* Sea $F \in L(V_1,\dots,V_k;\mathbb{R})$ y escribamos

$$v_j = \sum_{i_j=1}^{n_j} v_j^{i_j} \mathbf{E}_{i_j}^{(j)} \qquad (1 \le j \le k).$$

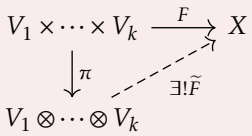
Al aplicar sucesivamente la linealidad en cada entrada se obtiene

$$F(v_1,\dots,v_k) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_k=1}^{n_k} F(\mathbf{E}_{i_1}^{(1)},\dots,\mathbf{E}_{i_k}^{(k)}) v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k}.$$

Como $v_j^{i_j} = \varepsilon_{(j)}^{i_j}(v_j)$, esta igualdad expresa $F$ como combinación lineal de los elementos de $\mathscr{B}$. Para probar la independencia, supongamos que una combinación con coeficientes $c_{i_1\dots i_k}$ es nula. Al evaluarla en $(\mathbf{E}_{r_1}^{(1)},\dots,\mathbf{E}_{r_k}^{(k)})$, las identidades $\varepsilon_{(j)}^{i_j}(\mathbf{E}_{r_j}^{(j)}) = \delta_{r_j}^{i_j}$ dan $c_{r_1\dots r_k} = 0$. Todos los coeficientes se anulan, de modo que $\mathscr{B}$ es una base y su cardinalidad es $n_1 \cdots n_k$. □

Finalmente, la definición anterior de producto tensorial entre dos funciones multilineales, nos permite definir el producto tensorial de espacios vectoriales como el espacio vectorial que satisface la siguiente propiedad, conocida como *propiedad universal*:

**Definición 1.10.5.** (Propiedad universal del producto tensorial) Sean $V_1,\dots,V_k$ espacios vectoriales. El **producto tensorial** $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ es un espacio vectorial provisto de un mapeo multilineal canónico $\pi\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ con la siguiente propiedad: si $F\colon V_1 \times \cdots \times V_k \longrightarrow X$ es cualquier función multilineal con valores en un espacio vectorial $X$, entonces existe una única función lineal $\widetilde{F}\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:



**Observación 1.10.6.** (Existencia y unicidad del producto tensorial) Sea $\mathbb{R}^{(V_1\times\cdots\times V_k)}$ el espacio vectorial libre generado por los símbolos $[v_1,\dots,v_k]$. Consideremos el cociente por el subespacio generado, para cada entrada, por las relaciones

$$[v_1,\dots,av_j+bw_j,\dots,v_k]-a[v_1,\dots,v_j,\dots,v_k]-b[v_1,\dots,w_j,\dots,v_k].$$

La clase de $[v_1,\dots,v_k]$ define el mapeo $\pi$ y las relaciones del cociente garantizan que es multilineal. Si $F$ es multilineal, la asignación $[v_1,\dots,v_k]\mapsto F(v_1,\dots,v_k)$ se anula sobre el subespacio de relaciones y, por ello, induce un único mapeo lineal $\widetilde{F}$. Esto prueba la existencia. Si dos pares $(T,\pi_T)$ y $(S,\pi_S)$ satisfacen la propiedad universal, ésta produce mapeos lineales únicos $T\to S$ y $S\to T$ que preservan los tensores simples; sus composiciones son la identidad por la misma unicidad. Así, el producto tensorial es único salvo un único isomorfismo compatible con los mapeos canónicos.

Tenemos la siguiente proposición que relaciona el espacio de funciones multilineales con el producto tensorial de espacios vectoriales:

**Proposición 1.10.7.** Sean $V_1,\dots,V_k$ espacios vectoriales reales de dimensión finita. Entonces hay un isomorfismo canónico

$$V_1^*\otimes\cdots\otimes V_k^*\cong L(V_1,\dots,V_k;\mathbb{R}).$$

*Demostración.* El mapeo

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\longmapsto\big[(v_1,\dots,v_k)\longmapsto\lambda_1(v_1)\cdots\lambda_k(v_k)\big]$$

es multilineal en $\lambda_1,\dots,\lambda_k$. La propiedad universal induce, por lo tanto, un mapeo lineal canónico

$$\Phi\colon V_1^*\otimes\cdots\otimes V_k^*\longrightarrow L(V_1,\dots,V_k;\mathbb{R}).$$

En las bases duales de la proposición anterior, $\Phi$ envía el tensor $\varepsilon^{i_1}_{(1)}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{i_k}_{(k)}$ al elemento de la base $\mathscr{B}$ con los mismos índices. Por ello, $\Phi$ envía una base en una base y es un isomorfismo. La construcción no depende de las bases, pues $\Phi$ fue definido exclusivamente por evaluación. □

Definimos los tensores en un espacio vectorial dado como sigue:

**Definición 1.10.8.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita. Definimos el espacio vectorial de tensores mixtos de tipo $(k,l)$, $k$ contravariante, $l$ covariante, en $V$ como:

$$T^{(k,l)}(V):=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{k\text{-veces}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{l\text{-veces}}.$$

Estamos listos para definir los haces tensoriales para una variedad suave:

**Definición 1.10.9.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Definimos el **haz de tensores mixtos de tipo** $(k,l)$ por

$$T^{(k,l)}(TM):=\coprod_{p\in M}T^{(k,l)}(T_pM).$$

**Observación 1.10.10.** Podemos hacer las siguientes identificaciones:

(a) $T^{(0,0)}(TM) = M \times \mathbb{R}$.

(b) $T^{(0,1)}(TM) = T^*M$.

(c) $T^{(1,0)}(TM) = TM$.

Podemos darle una estructura suave a los haces tensoriales como sigue:

**Proposición 1.10.11.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y $\dim M = n$. Entonces, para todo par de enteros $k, l \geq 0$, el haz tensorial

$$T^{(k,l)}(TM) \longrightarrow M$$

admite una única topología y una única estructura suave que lo convierten en un haz vectorial de rango $n^{k+l}$ sobre $M$ y para las cuales las trivializaciones de componentes inducidas por las cartas suaves de $M$ son suaves.

*Demostración.* Aplicaremos el Lema 1.7.8, para ello debemos construir los mapeos que serán las trivializaciones locales.
Si $p \in U$ y $(U, \varphi)$ es una carta suave de $M$ tal que $p \in U$, todo $A_p \in T^{(k,l)}(T_pM)$ se escribe de manera única como

$$A_p = A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} \partial_{i_1}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}\Big|_p \otimes \mathbf{d}x^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}x^{j_l}|_p,$$

donde $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ y cada $A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} \in \mathbb{R}$ es una componente de $A_p$ respecto del marco tensorial inducido por la carta. Cuando $A_p$ varía como una sección $\mathbf{A}$ sobre $U$, estas componentes pasan a ser funciones $A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} \colon U \to \mathbb{R}$.
Definimos $\pi \colon T^{(k,l)}(TM) \longrightarrow M$ dada por $\pi(A_p) = p$.
Tomemos una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de dominios de cartas coordenadas suaves para $M$. Para cada $\alpha \in J$, definimos $\Phi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}$ dada por $\Phi_\alpha(A_p) = (p, A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l})$. Tenemos que $\Phi_\alpha$ es biyectiva pues la función $\widetilde{\Phi}_\alpha \colon U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{k+l}} \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ dada por

$$\widetilde{\Phi}_\alpha(p, A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}) = A_p$$

es inversa de $\Phi_\alpha$.
Para cada $p \in U_\alpha$, $\Phi_\alpha|_{T^{(k,l)}(T_pM)} \colon T^{(k,l)}(T_pM) \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}$ es biyectiva pues

$$\Phi_\alpha|_{T^{(k,l)}(T_pM)}(T^{(k,l)}(T_pM)) = \{p\} \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}$$

y es restricción de una función biyectiva en su imagen. Identificamos la fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}$ con $\mathbb{R}^{n^{k+l}}$ mediante la segunda proyección. Basta probar que la segunda componente de $\Phi_\alpha$ es lineal:
Sean $a \in \mathbb{R}$ y $A_p, B_p \in T^{(k,l)}(T_pM)$ con

$$A_p = A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}(p) \partial_{i_1}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}\Big|_p \otimes \mathbf{d}x^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}x^{j_l}|_p$$

y

$$B_p = B^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}(p)\partial_{i_1}\Big|_p \otimes\cdots\otimes \partial_{i_k}\Big|_p \otimes \mathbf{d}x^{j_1}|_p \otimes\cdots\otimes \mathbf{d}x^{j_l}|_p,$$

tenemos

$$\Phi_\alpha(aA_p + B_p) = \left(p, aA^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} + B^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\right).$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{pr}_2\Phi_\alpha(aA_p + B_p) = a\operatorname{pr}_2\Phi_\alpha(A_p) + \operatorname{pr}_2\Phi_\alpha(B_p),$$

que es la linealidad requerida.
Por lo tanto $\Phi_\alpha|_{T^{(k,l)}(T_pM)}\colon T^{(k,l)}(T_pM) \longrightarrow \{p\}\times\mathbb{R}^{n^{k+l}}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.
Finalmente, si $\alpha,\beta\in J$ son tales que $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, tenemos que calcular el mapeo $\Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1}$.
Supongamos que $\varphi_\alpha = (x^1,\dots,x^n)$ y $\varphi_\beta = (y^1,\dots,y^n)$.
Si $(p, B^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l})\in(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^{n^{k+l}}$, tenemos que

$$(\Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1})(p, B^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l}) = \Phi_\alpha\left(B^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l}\partial_{a_1}\Big|_p\otimes\cdots\otimes\partial_{a_k}\Big|_p\otimes\mathbf{d}y^{b_1}|_p\otimes\cdots\otimes\mathbf{d}y^{b_l}|_p\right)$$

$$= \left(p, B^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\Big|_p\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{a_k}}\Big|_p\right)\left(\frac{\partial y^{b_1}}{\partial x^{j_1}}\Big|_p\right)\cdots\left(\frac{\partial y^{b_l}}{\partial x^{j_l}}\Big|_p\right)\right)$$

donde hemos usado que

$$B^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\Big|_p\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{a_k}}\Big|_p\right)\left(\frac{\partial y^{b_1}}{\partial x^{j_1}}\Big|_p\right)\cdots\left(\frac{\partial y^{b_l}}{\partial x^{j_l}}\Big|_p\right)\partial_{i_1}\Big|_p\otimes\cdots\otimes\partial_{i_k}\Big|_p\otimes\mathbf{d}x^{j_1}|_p\otimes\cdots\otimes\mathbf{d}x^{j_l}|_p$$

$$= B^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l}\partial_{a_1}\Big|_p\otimes\cdots\otimes\partial_{a_k}\Big|_p\otimes\mathbf{d}y^{b_1}|_p\otimes\cdots\otimes\mathbf{d}y^{b_l}|_p$$

que se puede obtener usando la regla de la cadena.
Ahora, notemos que

$$\left(p, B^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\Big|_p\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{a_k}}\Big|_p\right)\left(\frac{\partial y^{b_1}}{\partial x^{j_1}}\Big|_p\right)\cdots\left(\frac{\partial y^{b_l}}{\partial x^{j_l}}\Big|_p\right)\right) = (p, \tau_{\alpha\beta}(p)B^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l})$$

donde

$$\tau_{\alpha\beta}(p) = \left(\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\Big|_p\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{a_k}}\Big|_p\right)\left(\frac{\partial y^{b_1}}{\partial x^{j_1}}\Big|_p\right)\cdots\left(\frac{\partial y^{b_l}}{\partial x^{j_l}}\Big|_p\right)\right)\in GL(n^{k+l},\mathbb{R})$$

es suave pues sus funciones componentes son suaves.
Por el Lema 1.7.8, concluimos que existe una única topología y existe una única estructura suave tal que $\pi\colon T^{(k,l)}(TM)\longrightarrow M$ es un haz vectorial suave de rango $n^{k+l}$ con $\Phi_\alpha$ como trivializaciones locales suaves para cada $\alpha\in J$. La fórmula de transición obtenida vale también al comparar una carta de esta cubierta con cualquier otra carta suave de $M$. Así, todas las trivializaciones de componentes inducidas por cartas suaves son suaves, y esta propiedad caracteriza la estructura construida. □

**Corolario 1.10.12.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera de dimensión $n$. Si $(U,\varphi)$ es una carta

suave de $M$ con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, entonces $\widetilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}$ dada por

$$\widetilde{\varphi}\left(A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\partial_{i_1}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}\Big|_p \otimes \mathbf{d}x^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}x^{j_l}|_p\right) = (x^1(p), \dots, x^n(p), A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l})$$

cumple que $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ es una carta suave para $T^{(k,l)}(TM)$.

*Demostración.* Por la Proposición 1.10.11, tenemos que $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}$ dada por

$$\Phi\left(A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\partial_{i_1}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}\Big|_p \otimes \mathbf{d}x^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}x^{j_l}|_p\right) = (p, A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l})$$

es una trivialización local suave del haz tensorial $T^{(k,l)}(TM)$. Además, por la Proposición 1.7.18, tenemos que

$$\left(\partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k} \otimes \mathbf{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}x^{j_l}\right)$$

es un marco local suave definido en $U$ asociado a la trivialización local $\Phi$. Por lo tanto, por el Corolario 1.7.20, concluimos que el mapeo $\widetilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}$ es tal que $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ es una carta suave de $T^{(k,l)}(TM)$. □

Esta construcción del producto de $TM$ y $T^*M$ se puede generalizar al producto de dos (o más) haces vectoriales como el lector podrá demostrar.

**Ejercicio 1.10.13.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \longrightarrow M$ dos haces vectoriales suaves de rangos $k$ y $l$ respectivamente. Demuestre que el producto tensorial fibrado

$$\mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \longrightarrow M, \qquad (\mathbf{E} \otimes \mathbf{F})_p := \mathbf{E}_p \otimes \mathbf{F}_p,$$

admite una única topología y una única estructura suave que lo convierten en un haz vectorial suave de rango $kl$ sobre $M$ y para las cuales las trivializaciones tensoriales inducidas por marcos locales suaves de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ son suaves.

Hay una relación entre los haces vectoriales Hom y el producto tensorial.

**Proposición 1.10.14.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves de rangos $k$ y $l$ respectivamente. Entonces existe un isomorfismo natural de haces vectoriales sobre $M$

$$\operatorname{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \cong \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{F}.$$

*Demostración.* Definimos un mapeo de haces $\Phi\colon \operatorname{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \longrightarrow \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{F}$ fibra a fibra por la identificación canónica

$$\Phi_p\colon \operatorname{Hom}(\mathbf{E}_p, \mathbf{F}_p) \longrightarrow \mathbf{E}_p^* \otimes \mathbf{F}_p, \qquad \Phi_p(T_p) = \sum_{i=1}^{k} e^i \otimes T_p(e_i),$$

donde $(e_i)_{i=1}^k$ es una base de $\mathbf{E}_p$ y $(e^i)_{i=1}^k$ la base dual en $\mathbf{E}_p^*$. Esta definición no depende de la base elegida, es lineal en cada fibra y cubre la identidad de $M$.

Para verificar que $\Phi$ es suave, trabajamos en trivializaciones locales. Sea $U_\alpha \subset M$ un abierto con marcos locales suaves $(\sigma_{\alpha,i})_{i=1}^k$ de $\mathbf{E}$ y $(\tau_{\alpha,j})_{j=1}^l$ de $\mathbf{F}$; denotemos por $(\sigma_\alpha^i)_{i=1}^k$ el marco dual de $\mathbf{E}^*$ en $U_\alpha$.
En estas trivializaciones, todo $T_p \in \mathrm{Hom}(\mathbf{E}_p, \mathbf{F}_p)$ está determinado por una matriz asociada

$$T_\alpha(p) = (T_\alpha(p)_i^j) \in M_{l\times k}(\mathbb{R}), \qquad T_p(\sigma_{\alpha,i}(p)) = \sum_{j=1}^{l} T_\alpha(p)_i^j \tau_{\alpha,j}(p).$$

La trivialización de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ en $U_\alpha$ se da por

$$\Theta_\alpha^{\mathrm{Hom}}(T_p) = (p, T_\alpha(p)).$$

Por otra parte, en $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{F}$ cualquier elemento de la fibra $(\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{F})_p$ se escribe

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} S_i^j \sigma_\alpha^i(p) \otimes \tau_{\alpha,j}(p),$$

y la trivialización asociada es

$$\Theta_\alpha^{\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{F}}\Big(\sum_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le l}} S_i^j \sigma_\alpha^i(p)\otimes\tau_{\alpha,j}(p)\Big) = (p,(S_i^j)).$$

Ahora bien, apliquemos $\Phi_p$ a $T_p$. Por definición,

$$\Phi_p(T_p) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_\alpha^i(p) \otimes T_p(\sigma_{\alpha,i}(p)) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_\alpha^i(p) \otimes \Big(\sum_{j=1}^{l} T_\alpha(p)_i^j \tau_{\alpha,j}(p)\Big).$$

Reordenando la suma,

$$\Phi_p(T_p) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} T_\alpha(p)_i^j \sigma_\alpha^i(p)\otimes\tau_{\alpha,j}(p).$$

En la trivialización de $\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{F}$, esto corresponde exactamente a

$$\Theta_\alpha^{\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{F}}\big(\Phi_p(T_p)\big) = (p,(T_\alpha(p)_i^j)).$$

En otras palabras, al pasar por las dos trivializaciones locales, el mapeo

$$\Theta_\alpha^{\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{F}} \circ \Phi \circ \big(\Theta_\alpha^{\mathrm{Hom}}\big)^{-1} : U_\alpha \times M_{l\times k}(\mathbb{R}) \to U_\alpha \times M_{l\times k}(\mathbb{R})$$

queda dado simplemente por

$$(p,(T_i^j)) \longmapsto (p,(T_i^j)),$$

que es la identidad, lo cual nos dice que $\Phi$ es suave.
Por lo tanto, $\Phi$ es suave y localmente un isomorfismo de trivializaciones. Como cada $\Phi_p$ es lineal y biyectivo, se deduce que $\Phi$ es un homomorfismo de haces biyectivo. Por el Ejercicio 1.7.26, concluimos que

$$\Phi : \mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{E}^*\otimes\mathbf{F}$$

es un isomorfismo suave de haces de rango $kl$.
La naturalidad de la construcción se sigue directamente de que todo se definió fibra a fibra usando el isomorfismo natural $\mathrm{Hom}(V,W) \cong V^* \otimes W$. □

Las secciones de los haces tensoriales son los campos tensoriales. Con ellas se describen, entre otros objetos, métricas, formas diferenciales, curvaturas y tensores presentes en modelos físicos.

**Definición 1.10.15.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Decimos que una sección

$$\mathbf{A} \in \Gamma\left(T^{(k,l)}(TM)\right)$$

es un **campo tensorial de tipo** $(k,l)$ en $M$.
En particular:

- Si $k = 0$, decimos que $\mathbf{A}$ es un **campo tensorial $l$-covariante**.
- Si $l = 0$, decimos que $\mathbf{A}$ es un **campo tensorial $k$-contravariante**.

**Observación 1.10.16.** Usaremos la siguiente notación clásica:

- Denotamos por $\mathfrak{X}(M) := \Gamma(T^{(1,0)}(TM))$ al espacio de **campos vectoriales** en $M$.
- Denotamos por $\Omega^1(M) := \Gamma(T^{(0,1)}(TM))$ al espacio de **1-formas** en $M$.

La notación $\Omega^1(M)$ será explicada con mayor detalle más adelante.

Tenemos los siguientes criterios para determinar cuándo un campo tensorial es suave y cuándo un mapeo está inducido por un campo tensorial suave.

**Proposición 1.10.17.** (Criterio de suavidad para campos tensoriales) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{F}\colon M \longrightarrow T^{(k,l)}(TM)$ un $(k,l)$-campo tensorial en bruto. Entonces $\mathbf{F}$ es suave en un abierto $U \subseteq M$ si y sólo si, para cualesquiera campos covectoriales suaves $\omega^1,\dots,\omega^k$ y campos vectoriales suaves $\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_l$ definidos en $U$, la función real

$$\mathbf{F}(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_l)(p) = \mathbf{F}_p(\omega^1|_p,\dots,\omega^k|_p,\mathbf{X}_1|_p,\dots,\mathbf{X}_l|_p)$$

es suave en $U$.

*Demostración.* Si $\mathbf{F}$ es suave, su evaluación en campos suaves es una función suave, pues en coordenadas es una suma finita de productos de las componentes suaves de $\mathbf{F}$ y de los campos evaluados.
Recíprocamente, supongamos suave toda evaluación indicada y fijemos $p \in U$. Elijamos una carta $(V,x^1,\dots,x^n)$ con $p \in V \subseteq U$, y un abierto $W$ tal que $p \in W \Subset V$. Tomemos $\rho \in C^\infty_c(V)$ igual a uno en $W$. Los campos

$$\rho\,\mathbf{d}x^1,\dots,\rho\,\mathbf{d}x^n, \qquad \rho\,\partial_1,\dots,\rho\,\partial_n$$

se prolongan por cero a campos suaves definidos en $U$. Para índices $i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l$, la hipótesis implica que

$$\mathbf{F}\left(\rho\,\mathbf{d}x^{i_1},\dots,\rho\,\mathbf{d}x^{i_k},\rho\,\partial_{j_1},\dots,\rho\,\partial_{j_l}\right)$$

es suave en $U$. En $W$, donde $\rho = 1$, esta función es precisamente la componente coordenada

$$F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} := \mathbf{F}\big(\mathbf{d}x^{i_1},\dots,\mathbf{d}x^{i_k},\partial_{j_1},\dots,\partial_{j_l}\big).$$

Por lo tanto, todas las componentes de $\mathbf{F}$ son suaves en una vecindad de $p$. Como $p$ era arbitrario, $\mathbf{F}$ es suave en $U$. □

**Lema 1.10.18.** (Lema de caracterización tensorial) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera.
Un mapeo

$$F : \underbrace{\Omega^1(M)\times\cdots\times\Omega^1(M)}_{k\text{-veces}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{l\text{-veces}} \longrightarrow C^\infty(M)$$

está inducido por un $(k,l)$-campo tensorial suave si y sólo si es multilineal sobre $C^\infty(M)$.
Para el enunciado vectorial, un mapeo

$$F : \underbrace{\Omega^1(M)\times\cdots\times\Omega^1(M)}_{k\text{-veces}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{l\text{-veces}} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

está inducido por un $(k+1,l)$-campo tensorial suave si y sólo si es multilineal sobre $C^\infty(M)$.

*Demostración.* Probamos primero una observación de localidad válida para secciones suaves de cualquier haz vectorial de rango finito. Sea $\mathcal{F}$ un mapeo $C^\infty(M)$–lineal en una de sus entradas y sea $\mathbf{s}$ una sección que se anula en una vecindad de $p$. Por la Proposición 1.3.6 existe $\vartheta \in C^\infty(M)$ con $\vartheta(p) = 1$ y soporte contenido en esa vecindad. Entonces

$$\mathcal{F}(\dots,\mathbf{s},\dots)(p) = \vartheta(p)\mathcal{F}(\dots,\mathbf{s},\dots)(p) = \mathcal{F}(\dots,\vartheta\mathbf{s},\dots)(p) = 0.$$

Si dos secciones $\mathbf{s}$ y $\widetilde{\mathbf{s}}$ tienen el mismo valor en $p$, elegimos una trivialización alrededor de $p$ y una función de corte $\rho$ que vale uno en una vecindad de $p$ y tiene soporte dentro de la trivialización. La sección $\mathbf{r} := \mathbf{s} - \widetilde{\mathbf{s}}$ satisface $\mathbf{r}(p) = 0$. El término $(1-\rho)\mathbf{r}$ se anula cerca de $p$, mientras que, después de prolongar por cero los coeficientes cortados y los elementos de un marco local, se puede escribir

$$\rho\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m} a_i\mathbf{e}_i, \qquad a_i \in C^\infty(M), \qquad a_i(p) = 0.$$

La localidad anterior y la $C^\infty(M)$–linealidad dan $\mathcal{F}(\dots,\mathbf{r},\dots)(p) = 0$. Por lo tanto, el valor en $p$ depende sólo de los valores en $p$ de todas las entradas.
Supongamos ahora que

$$F : \Omega^1(M)^k \times \mathfrak{X}(M)^l \longrightarrow C^\infty(M)$$

es $C^\infty(M)$–multilineal. Dados $\alpha^1,\dots,\alpha^k \in T^*_pM$ y $v_1,\dots,v_l \in T_pM$, elegimos extensiones suaves y definimos

$$\mathbf{T}_p(\alpha^1,\dots,\alpha^k,v_1,\dots,v_l) := F(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^1,\dots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^k,\widetilde{\mathbf{v}}_1,\dots,\widetilde{\mathbf{v}}_l)(p).$$

La observación precedente prueba que esta definición es independiente de las extensiones; la multilinealidad de $\mathbf{T}_p$ se hereda de la de $F$. En una carta, elegimos extensiones globales de la co-base y del marco coordenados que coincidan con ellos en un abierto más pequeño. Las componentes de $\mathbf{T}$ en ese abierto son

las restricciones de las funciones suaves obtenidas al evaluar $F$ en dichas extensiones. Luego $p \mapsto \mathbf{T}_p$ es un $(k,l)$–campo tensorial suave y, por construcción, induce $F$. La unicidad se sigue evaluando el campo en valores fibrados arbitrarios. Recíprocamente, la evaluación de un campo tensorial suave en secciones suaves produce una función suave y es $C^\infty(M)$–multilineal.
Si el codominio de $F$ es $\mathfrak{X}(M)$, definimos en cambio

$$\mathbf{T}_p(\alpha^1,\dots,\alpha^k,v_1,\dots,v_l) := F(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^1,\dots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^k,\widetilde{\mathbf{v}}_1,\dots,\widetilde{\mathbf{v}}_l)(p) \in T_pM.$$

El mismo argumento de localidad da independencia de las extensiones. Las componentes del campo vectorial que aparece en el miembro derecho son suaves; al evaluar en co-bases y marcos locales se concluye que $\mathbf{T}$ es un $(k+1,l)$–campo tensorial suave. La implicación recíproca y la unicidad se obtienen por evaluación, exactamente como en el caso escalar. □

Definiremos el concepto de «pullback» de un campo tensorial.

**Definición 1.10.19.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera y supongamos que $F\colon M \longrightarrow N$ es un mapeo suave. Para cada punto $p \in M$ y cada $k$-tensor covariante $\alpha \in T^{(0,k)}(T_{F(p)}N)$, definimos un tensor

$$dF_p^*(\alpha) \in T^{(0,k)}(T_pM),$$

llamado el **pullback de $\alpha$ bajo $F$ en $p$**, por

$$dF_p^*(\alpha)(v_1,\dots,v_k) = \alpha\big(dF_p(v_1),\dots,dF_p(v_k)\big),$$

para cualesquiera $v_1,\dots,v_k \in T_pM$.
Si $\mathbf{A}$ es un campo tensorial $k$-covariante en $N$, es decir $\mathbf{A} \in \Gamma(T^{(0,k)}(TN))$, definimos el campo tensorial en $M$

$$F^*\mathbf{A} \in \Gamma\big(T^{(0,k)}(TM)\big),$$

llamado el **pullback de A bajo** $F$, por

$$(F^*\mathbf{A})_p = dF_p^*(\mathbf{A}_{F(p)}),$$

es decir,

$$(F^*\mathbf{A})_p(v_1,\dots,v_k) = \mathbf{A}_{F(p)}\big(dF_p(v_1),\dots,dF_p(v_k)\big),$$

para cada $v_1,\dots,v_k \in T_pM$.

El pullback tiene las siguientes propiedades:

**Proposición 1.10.20.** Sean $M$, $N$ y $P$ variedades suaves con o sin frontera. Supongamos que $F\colon M \longrightarrow N$ y $G\colon N \longrightarrow P$ son mapeos suaves. Sean $k,l,r \in \mathbb{N}_0$, $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \Gamma(T^{(0,k)}(TN))$, $\mathbf{C} \in \Gamma(T^{(0,l)}(TN))$, $\mathbf{D} \in \Gamma(T^{(0,r)}(TP))$ y $f \in C^\infty(N)$.

(a) $F^*(f\mathbf{A}) = (f \circ F)F^*\mathbf{A}$.

(b) $F^*(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) = F^*\mathbf{A} \otimes F^*\mathbf{C}$.

(c) $F^*(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = F^*\mathbf{A} + F^*\mathbf{B}$.

(d) $F^*\mathbf{A}$ es un campo tensorial suave.

(e) $(G\circ F)^*\mathbf{D} = F^*(G^*\mathbf{D})$.

(f) $(\mathrm{Id}_N)^*\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

*Demostración.* La primera igualdad se obtiene al evaluar en $p\in M$:

$$\big(F^*(f\mathbf{A})\big)_p(v_1,\dots,v_k) = f(F(p))\,\mathbf{A}_{F(p)}(dF_pv_1,\dots,dF_pv_k).$$

La definición del producto tensorial prueba (b), y la linealidad de $dF_p^*$ prueba (c). Para (d), si en coordenadas

$$\mathbf{A} = A_{i_1\dots i_k}\,\mathbf{d}y^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{d}y^{i_k},$$

entonces

$$F^*\mathbf{A} = (A_{i_1\dots i_k}\circ F)\,d(y^{i_1}\circ F)\otimes\cdots\otimes d(y^{i_k}\circ F),$$

cuyos coeficientes son suaves.
La regla de la cadena $d(G\circ F)_p = dG_{F(p)}\circ dF_p$, sustituida en la definición punto a punto, da $(G\circ F)^*\mathbf{D} = F^*(G^*\mathbf{D})$. Finalmente, $d(\mathrm{Id}_N)_q = \mathrm{Id}_{T_qN}$, lo que prueba (f). □

Se define un concepto similar al de pullback conocido como «pushforward», el cual necesita que $F$ sea además un difeomorfismo.

Para ello, primero definiremos el pushforward para campos vectoriales:

**Definición 1.10.21.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera y $F\colon M\longrightarrow N$ un difeomorfismo. Para cada $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M)$, definimos $F_*\mathbf{X} := dF\circ\mathbf{X}\circ F^{-1}$ y lo llamamos el **pushforward** de $\mathbf{X}$ bajo $F$. Puntualmente, tenemos que:

$$(F_*\mathbf{X})_q = dF_{F^{-1}(q)}(\mathbf{X}_{F^{-1}(q)})$$

para cada $q\in N$.

La forma más general del pullback y pushforward está dada por la siguiente proposición:

**Proposición 1.10.22.** Sean $M$, $N$ y $P$ variedades suaves con o sin frontera, y sean $F\colon M\longrightarrow N$ y $G\colon N\longrightarrow P$ difeomorfismos. Para cada $k,l\in\mathbb{N}_0$ existen isomorfismos asociados a $F$, llamados **pushforward** y **pullback**,

$$F_*\colon \Gamma(T^{(k,l)}(TM))\longrightarrow\Gamma(T^{(k,l)}(TN)),\qquad F^*\colon \Gamma(T^{(k,l)}(TN))\longrightarrow\Gamma(T^{(k,l)}(TM)),$$

tales que $F^*$ coincide con el pullback de campos tensoriales covariantes, $F_*$ coincide con el pushforward de campos vectoriales y las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) $F_* = (F^*)^{-1}$.

(b) $F^*(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) = F^*\mathbf{A}\otimes F^*\mathbf{B}$ para cualesquiera campos tensoriales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $N$.

(c) $(G\circ F)_* = G_*\circ F_*$.

(d) $(G\circ F)^* = F^*\circ G^*$.

(e) $(\mathrm{Id}_M)^* = (\mathrm{Id}_M)_* = \mathrm{Id}\colon \Gamma(T^{(k,l)}(TM)) \longrightarrow \Gamma(T^{(k,l)}(TM))$.

(f) $F^*\big(\mathbf{A}(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_k)\big) = (F^*\mathbf{A})\big((F^{-1})_*\mathbf{X}_1,\dots,(F^{-1})_*\mathbf{X}_k\big)$ para cada $\mathbf{A} \in \Gamma(T^{(0,k)}(TN))$ y cualesquiera $\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_k \in \mathfrak{X}(N)$.

*Demostración.* Sea $q \in N$, pongamos $p = F^{-1}(q)$ y sea $\mathbf{T} \in \Gamma(T^{(k,l)}(TM))$. Para $\beta^1,\dots,\beta^k \in T_q^*N$ y $w_1,\dots,w_l \in T_qN$, definimos

$$(F_*\mathbf{T})_q(\beta^1,\dots,\beta^k,w_1,\dots,w_l) := \mathbf{T}_p\big(dF_p^*\beta^1,\dots,dF_p^*\beta^k, (dF_p)^{-1}w_1,\dots,(dF_p)^{-1}w_l\big).$$

En cartas, sus componentes son sumas finitas de productos de componentes de $\mathbf{T}$, $dF$ y $dF^{-1}$; por ello define un campo suave. Para un campo vectorial coincide con el pushforward ya definido. Ponemos $F^* := (F^{-1})_*$; en tensores covariantes ésta es la definición usual del pullback.
La identidad $d(F^{-1})_q = (dF_p)^{-1}$ muestra, al sustituirla en la fórmula, que $F_*$ y $F^*$ son inversos. La misma fórmula y la definición del producto tensorial prueban (b). La regla de la cadena y

$$\big(d(G\circ F)_p\big)^{-1} = (dF_p)^{-1}\circ(dG_{F(p)})^{-1}$$

dan $(G\circ F)_* = G_*\circ F_*$. Al aplicar esta igualdad a las inversas se obtiene

$$(G\circ F)^* = (F^{-1}\circ G^{-1})_* = F^*\circ G^*.$$

El caso de la identidad es inmediato a partir de la fórmula.
Por último, si $p \in M$, el miembro derecho de (f), evaluado en $p$, es

$$\mathbf{A}_{F(p)}\big(dF_p(dF_p)^{-1}\mathbf{X}_1(F(p)),\dots,dF_p(dF_p)^{-1}\mathbf{X}_k(F(p))\big),$$

que coincide con $\mathbf{A}(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_k)(F(p))$, es decir, con el miembro izquierdo evaluado en $p$. □

**Definición 1.10.23.** (Multiplicación interior) Sean $M$ una variedad suave con o sin frontera y $k,l \geq 0$ enteros no negativos.

(a) Sea $\mathbf{T}_p \in T^{(k,l+1)}(T_pM)$ y $\mathbf{V} \in T_pM$. Definimos la *multiplicación interior* de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{T}_p$ como el tensor

$$\iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T}_p \in T^{(k,l)}(T_pM),$$

dado por

$$(\iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T}_p)(\omega^1,\dots,\omega^k,X_1,\dots,X_l) := \mathbf{T}_p(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{V},X_1,\dots,X_l),$$

para todo $\omega^1,\dots,\omega^k \in \mathbf{T}_p^*M$ y $X_1,\dots,X_l \in T_pM$.

(b) Si $\mathbf{T} \in \Gamma\big(T^{(k,l+1)}(TM)\big)$ y $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(M)$, definimos la sección

$$\iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T} \in \Gamma\big(T^{(k,l)}(TM)\big),$$

dada por

$$(\iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T})(p) := \iota_{\mathbf{V}(p)}\big(\mathbf{T}(p)\big), \qquad p \in M.$$

**Proposición 1.10.24.** (La multiplicación interior define un campo tensorial) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, $\mathbf{T} \in \Gamma\big(T^{(k,l+1)}(TM)\big)$ y $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces la asignación

$$(\iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T})(\omega^1,\dots,\omega^k,X_1,\dots,X_l) := \mathbf{T}(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{V},X_1,\dots,X_l)$$

define un $(k,l)$-campo tensorial suave $\iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T} \in \Gamma\big(T^{(k,l)}(TM)\big)$.

*Demostración.* Consideremos el mapeo

$$F_{\mathbf{V},\mathbf{T}} : \underbrace{\Omega^1(M)\times\cdots\times\Omega^1(M)}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{l \text{ veces}} \longrightarrow C^\infty(M).$$

definido por

$$F_{\mathbf{V},\mathbf{T}}(\omega^1,\dots,\omega^k,X_1,\dots,X_l) = \mathbf{T}(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{V},X_1,\dots,X_l).$$

Como $\mathbf{T}$ es un $(k,l+1)$-campo tensorial suave, el mapeo

$$(\omega^1,\dots,\omega^k,Y,X_1,\dots,X_l) \longmapsto \mathbf{T}(\omega^1,\dots,\omega^k,Y,X_1,\dots,X_l)$$

es multilineal sobre $C^\infty(M)$ en cada argumento. Fijando $Y = \mathbf{V}$, se sigue que $F_{\mathbf{V},\mathbf{T}}$ es multilineal sobre $C^\infty(M)$.
Por el Lema 1.10.18, existe un $(k,l)$-campo tensorial suave $\mathbf{S} \in \Gamma\big(T^{(k,l)}(TM)\big)$ tal que

$$\mathbf{S}(\omega^1,\dots,\omega^k,X_1,\dots,X_l) = F_{\mathbf{V},\mathbf{T}}(\omega^1,\dots,\omega^k,X_1,\dots,X_l).$$

Punto a punto, se tiene

$$\mathbf{S}(p)(\omega^1_p,\dots,\omega^k_p,X_{1,p},\dots,X_{l,p}) = \mathbf{T}_p(\omega^1_p,\dots,\omega^k_p,\mathbf{V}_p,X_{1,p},\dots,X_{l,p}) = (\iota_{\mathbf{V}(p)}\mathbf{T}_p)(\omega^1_p,\dots,X_{l,p}),$$

de modo que $\mathbf{S} = \iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T}$ como secciones. Por lo tanto, $\iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T}$ es un $(k,l)$-campo tensorial suave. □

**Observación 1.10.25.** Si $\mathbf{T} \in \Gamma\big(T^{(k,l+1)}(TM)\big)$ y $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(M)$ con $\mathbf{V} = V^a\mathbf{E}_a$, entonces se tiene que la multiplicación interior $\iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T}$ tiene componentes locales

$$\begin{aligned}
(\iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T})^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} &= (\iota_{\mathbf{V}}\mathbf{T})\big(\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1},\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^{i_k},\mathbf{E}_{j_1},\dots,\mathbf{E}_{j_l}\big)\\
&= \mathbf{T}\big(\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1},\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^{i_k},\mathbf{V},\mathbf{E}_{j_1},\dots,\mathbf{E}_{j_l}\big)\\
&= \mathbf{T}\big(\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1},\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^{i_k},V^a\mathbf{E}_a,\mathbf{E}_{j_1},\dots,\mathbf{E}_{j_l}\big)\\
&= V^a\mathbf{T}\big(\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1},\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^{i_k},\mathbf{E}_a,\mathbf{E}_{j_1},\dots,\mathbf{E}_{j_l}\big)\\
&= V^a T^{i_1\dots i_k}_{aj_1\dots j_l}.
\end{aligned}$$

Luego, en cualquier marco local la operación $\iota_{\mathbf{V}}$ se obtiene contrayendo el índice contravariante de $\mathbf{V}$ con el

primer índice covariante de $\mathbf{T}$.

Podemos introducir dos clases de tensores que nos serán de mucha utilidad y que sirven para definir las métricas riemannianas y las formas diferenciales. La primera clase de tensores es la clase de tensores simétricos:

**Definición 1.10.26.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita. Un $k$-tensor covariante $\alpha$ en $V$ se dice **simétrico** si su valor no se ve afectado cuando intercambiamos cualquier par de sus argumentos:

$$\alpha(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k) = \alpha(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)$$

para cualesquiera $1 \leq i < j \leq k$. Denotamos al espacio de $k$-tensores covariantes simétricos por $\Sigma^k(V^*) \subseteq T^k(V^*)$.

**Definición 1.10.27.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\alpha \in \Sigma^k(V^*)$ y $\beta \in \Sigma^l(V^*)$, definimos su **producto simétrico** como el $(k+l)$-covector dado por

$$\alpha\beta = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} {}^{\sigma}(\alpha \otimes \beta)$$

donde ${}^{\sigma}(\alpha \otimes \beta)(v_1,\dots,v_{k+l}) = \alpha \otimes \beta(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$.

**Definición 1.10.28.** Un **campo tensorial simétrico** en una variedad suave con o sin frontera es un campo tensorial covariante cuyo valor en cada punto es un tensor simétrico.

La segunda clase es la de los tensores alternantes:

**Definición 1.10.29.** Si $V$ es un espacio vectorial real de dimensión finita, un $k$-tensor covariante $\alpha$ se dice **alternante** o **antisimétrico** si para cualesquiera $v_1,\dots,v_k \in V$ y para cada $i,j \in \{1,\dots,k\}$ con $i \neq j$, se tiene que

$$\alpha(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k) = -\alpha(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k).$$

El espacio de $k$-tensores covariantes alternantes se denota por $\Lambda^k(V^*) \subseteq T^{(0,k)}(V)$.

El espacio de $k$-tensores covariantes alternantes resulta ser un espacio vectorial de dimensión finita como los espacios tensoriales anteriores. A los $k$-tensores covariantes alternantes se les suele llamar ***k-covectores***.

**Definición 1.10.30.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita y supongamos que $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ es cualquier base para $V^*$. Para cada multiíndice $I = (i_1,\dots,i_k)$ de longitud $k$ tal que $1 \leq i_1,\dots,i_k \leq n$, definimos $\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1\dots i_k}$ por

$$\varepsilon^I(v_1,\dots,v_k) = \det \begin{bmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k} \end{bmatrix}$$

**Observación 1.10.31.** Para cada multiíndice $I$, $\varepsilon^I \in \Lambda^k(V^*)$.

**Proposición 1.10.32.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita $n$. Si $(\varepsilon^i)$ es cualquier base para $V^*$, entonces para cada $k \leq n$, la colección de $k$-covectores

$$\mathscr{B} = \{\varepsilon^I \mid I \text{ es un multiíndice creciente de longitud } k\}$$

es una base para $\Lambda^k(V^*)$. Por lo tanto $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$.

*Demostración.* Sea $(e_1,\dots,e_n)$ la base de $V$ dual a $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$. Si $I = (i_1 < \cdots < i_k)$ y $J = (j_1 < \cdots < j_k)$, la definición mediante determinantes da

$$\varepsilon^I(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) = \begin{cases} 1, & I = J, \\ 0, & I \neq J. \end{cases}$$

En consecuencia, los elementos de $\mathscr{B}$ son linealmente independientes.
Sea ahora $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ y definamos

$$\widetilde{\alpha} := \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \alpha(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\,\varepsilon^{i_1\dots i_k}.$$

Si $j_1,\dots,j_k$ son distintos, existe una permutación $\sigma \in S_k$ que los ordena de forma creciente. La alternancia de $\alpha$ y de $\widetilde{\alpha}$, junto con la igualdad anterior, muestra que

$$\widetilde{\alpha}(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) = \alpha(e_{j_1},\dots,e_{j_k}).$$

Si dos índices coinciden, ambos miembros son cero. Por multilinealidad, $\widetilde{\alpha} = \alpha$ en todo $V^k$, de modo que $\mathscr{B}$ genera $\Lambda^k(V^*)$. Finalmente, el número de multiíndices estrictamente crecientes de longitud $k$ es $\binom{n}{k}$, lo cual prueba la fórmula para la dimensión. □

Definimos una operación en $\Lambda^k(V^*)$ como sigue:

**Definición 1.10.33.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$, definimos su **producto cuña** o **producto exterior** como el $(k+l)$-covector dado por

$$\omega \wedge \eta = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma\in S_{k+l}} (\operatorname{sign}\sigma)({}^{\sigma}(\omega \otimes \eta)).$$

En donde estamos considerando el factor combinatorio para normalizar.

El producto cuña tiene las siguientes propiedades:

**Proposición 1.10.34.** Supongamos que $\omega, \omega', \eta, \eta'$ y $\xi$ son multicovectores en un espacio vectorial $V$ de dimensión finita.

(a) El producto cuña es bilineal sobre $\mathbb{R}$ y asociativo.

(b) Si $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega.$$

(c) Si $\omega^1,\dots,\omega^k \in V^*$ y $v_1,\dots,v_k \in V$, entonces

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k(v_1,\dots,v_k) = \det(\omega^j(v_i)).$$

*Demostración.* En la suma que define $\omega \wedge \eta$, las permutaciones internas de los primeros $k$ argumentos y de los últimos $l$ argumentos producen, por la alternancia de $\omega$ y $\eta$, términos iguales. Al agrupar esos $k!l!$ términos se obtiene la fórmula de barajado

$$(\omega \wedge \eta)(v_1,\dots,v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(k,l)} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) \cdot \eta(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)}),$$

donde $\mathrm{Sh}(k,l)$ es el conjunto de las permutaciones que preservan el orden relativo dentro de los dos bloques. Esta expresión prueba inmediatamente la bilinealidad.

Para la asociatividad, sean los grados de $\omega,\eta,\xi$ iguales a $k,l,m$, respectivamente. Al aplicar dos veces la fórmula de barajado, tanto $(\omega \wedge \eta) \wedge \xi$ como $\omega \wedge (\eta \wedge \xi)$ se convierten en

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(k,l,m)} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\eta(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})\xi(v_{\sigma(k+l+1)},\dots,v_{\sigma(k+l+m)}),$$

donde $\mathrm{Sh}(k,l,m)$ preserva el orden dentro de cada uno de los tres bloques. Por lo tanto, el producto es asociativo.

Intercambiar los bloques de longitudes $k$ y $l$ establece una biyección entre $\mathrm{Sh}(k,l)$ y $\mathrm{Sh}(l,k)$. Para efectuar ese intercambio se realizan $kl$ transposiciones, de modo que el signo cambia por el factor $(-1)^{kl}$. Esto prueba

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega.$$

Finalmente, al aplicar repetidamente la fórmula de barajado a 1-covectores obtenemos

$$(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k)(v_1,\dots,v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{k} \omega^j(v_{\sigma(j)}),$$

que es el desarrollo por permutaciones del determinante $\det(\omega^j(v_i))$. □

**Definición 1.10.35.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Definimos el haz de $k$-tensores alternantes como

$$\Lambda^k(T^*M) := \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M).$$

**Proposición 1.10.36.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera de dimensión $n$. Entonces $\Lambda^k(T^*M)$ es un haz vectorial suave de rango $\binom{n}{k}$ sobre $M$.

*Demostración.* Sea $(U,x^1,\dots,x^n)$ una carta suave de $M$. Para cada multiíndice estrictamente creciente $I = (i_1 < \cdots < i_k)$, pongamos $\mathbf{d}x^I := \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_k}$. La Proposición 1.10.32, aplicada en cada punto $p \in U$,

muestra que

$$\left(\mathbf{d}x^I|_p\right)_{|I|=k}$$

es una base de $\Lambda^k(T_p^*M)$. Por lo tanto, el mapeo

$$\Lambda^k(T^*M)|_U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}, \qquad \sum_{|I|=k} a_I\, \mathbf{d}x^I|_p \longmapsto \left(p, (a_I)_{|I|=k}\right),$$

es una trivialización local lineal en las fibras.
Si $(V, y^1, \ldots, y^n)$ es otra carta, entonces en $U \cap V$ cada $\mathbf{d}y^J$ se expresa como

$$\mathbf{d}y^J = \sum_{|I|=k} \det\left(\frac{\partial y^{j_a}}{\partial x^{i_b}}\right)_{a,b=1}^{k} \mathbf{d}x^I.$$

Los coeficientes son suaves; en consecuencia, los cambios entre estas trivializaciones son suaves y lineales en las fibras. Esto proporciona a $\Lambda^k(T^*M)$ la estructura de haz vectorial suave, y el número de índices crecientes $I$ es $\binom{n}{k}$. □

**Definición 1.10.37.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Una sección de $\Lambda^k(T^*M)$ es llamada una $k$-**forma diferencial** o simplemente una $k$-**forma**. El entero $k$ se llama el **grado** de la forma. Denotamos el espacio vectorial de $k$-formas suaves por

$$\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k(T^*M)).$$

**Observación 1.10.38.** Todo 1-tensor covariante es alternante, por lo que $\Omega^1(M) = \Gamma(T^{(0,1)}(TM))$.

**Proposición 1.10.39.** Sea $F\colon M \longrightarrow N$ un mapeo suave entre $n$-variedades con o sin frontera. Si $(x^i)$ y $(y^i)$ son coordenadas suaves en $U \subseteq M$ y $V \subseteq N$ respectivamente y $u \in C^\infty(V)$, entonces lo siguiente se cumple en $U \cap F^{-1}(V)$:

$$F^*(u\mathbf{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}y^n) = (u \circ F)(\det DF)\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n,$$

donde $DF$ representa la matriz Jacobiana de $F$ en esas coordenadas.

*Demostración.* Por la multiplicatividad del pullback,

$$F^*(u\,\mathbf{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}y^n) = (u \circ F)\, d(y^1 \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^n \circ F).$$

En las coordenadas $x$,

$$d(y^a \circ F) = \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial (y^a \circ F)}{\partial x^b}\, \mathbf{d}x^b.$$

Al desarrollar el producto exterior se anulan los términos con índices repetidos. La suma de los términos restantes, indexados por $\sigma \in S_n$, es

$$\det\left(\frac{\partial (y^a \circ F)}{\partial x^b}\right)_{a,b=1}^{n} \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n,$$

por la fórmula de Leibniz para el determinante. La matriz entre paréntesis es $DF$ en las cartas elegidas. □

La derivada exterior prolonga el diferencial de las funciones y conserva su carácter intrínseco.

**Teorema 1.10.40.** (Existencia y unicidad de la derivada exterior) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe un único mapeo lineal

$$d\colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

que, junto con los operadores de los demás grados, satisface las propiedades siguientes.

(a) Si $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, entonces $df$ es el diferencial de $f$, es decir, $df(X) = X(f)$.

(b) Si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$, entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(c) $d \circ d = 0$.

(d) Si $F\colon M \longrightarrow N$ es un mapeo suave y $\omega \in \Omega^k(N)$, entonces

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

En una carta suave con coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$, su expresión es

$$d\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}\, \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_k}\right) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} d\omega_{i_1\ldots i_k} \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_k}. \tag{1.30}$$

*Demostración.* Construiremos primero el operador mediante una fórmula intrínseca. Para $\omega \in \Omega^k(M)$ y campos vectoriales locales $X_0, \ldots, X_k$, definimos

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_0,\ldots,X_k) = &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i\big(\omega(X_0,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_k)\big) \\ &+ \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i,X_j],X_0,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_k\big).\end{aligned} \tag{1.31}$$

En el segundo sumatorio, después del corchete aparecen los campos restantes en su orden original. Para $k = 0$ el segundo sumatorio es vacío y la fórmula se reduce a $(df)(X) = X(f)$.
La expresión es lineal sobre $\mathbb{R}$ en $\omega$ y en cada campo. La dependencia aparentemente diferencial respecto de los $X_i$ se cancela y el resultado es, de hecho, lineal sobre $C^\infty(M)$ en cada argumento. Verifiquémoslo en el argumento de índice $r$. Al sustituir $X_r$ por $fX_r$, todos los términos que no derivan a $f$ adquieren un factor $f$. Para $i < r$, el término adicional procedente de la primera suma es

$$(-1)^i X_i(f)\, \omega(X_0,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_r,\ldots,X_k).$$

En la segunda suma, el término con el par $(i,r)$ contiene

$$[X_i, fX_r] = f[X_i, X_r] + X_i(f)X_r.$$

Al mover $X_r$ desde la primera entrada de $\omega$ hasta el lugar que ocupaba en la expresión anterior se realizan $r-1$ transposiciones. Su contribución adicional tiene, por lo tanto, signo $(-1)^{i+r}(-1)^{r-1} = -(-1)^i$ y cancela el término precedente. Si $j > r$, la identidad

$$[fX_r, X_j] = f[X_r, X_j] - X_j(f)X_r$$

produce, después de mover $X_r$ a través de $r$ entradas, el signo $(-1)^{r+j+1}(-1)^r = -(-1)^j$, que cancela el término donde $X_j$ deriva a $f$ en la primera suma. No aparecen otras derivadas de $f$. Esto prueba la $C^\infty(M)$-linealidad en el argumento $r$, y $r$ era arbitrario.

En consecuencia, el valor de (1.31) en un punto depende sólo de los valores de los campos en ese punto. En particular, no depende de las extensiones locales elegidas. La fórmula define así un campo tensorial $(k+1)$-covariante bien definido.

Veamos ahora que este tensor es alternante y suave. En una carta con coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$ escribimos

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \omega_{i_1\dots i_k}\,\mathbf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x^{i_k}.$$

Como los campos coordenados conmutan, al evaluar (1.31) en ellos se obtiene

$$d\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\ \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial\omega_{i_1\dots i_k}}{\partial x^a}\,\mathbf{d}x^a\wedge\mathbf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x^{i_k}.$$

Ambos miembros son tensores y coinciden sobre todas las tuplas de campos coordenados, de modo que coinciden en la carta. El miembro derecho es una forma diferencial suave; por ello, el tensor construido es alternante y suave. Además, esta igualdad es precisamente (1.30). Puesto que se dedujo de la fórmula intrínseca, las expresiones obtenidas en cartas distintas coinciden en sus traslapes. Esto prueba la buena definición global y la independencia de coordenadas.

La regla graduada de Leibniz se comprueba en una carta. Para $d,q\in\mathbb{N}_0$, escribimos $\mathcal{J}_d^q := \{(i_1,\dots,i_q)\in\{1,\dots,d\}^q \mid i_1<\cdots<i_q\}$, con $\mathcal{J}_d^0=\{\varnothing\}$. Si $\omega=\sum_{I\in\mathcal{J}_n^k} a_I\mathbf{d}x^I$ tiene grado $k$ y $\eta=\sum_{J\in\mathcal{J}_n^\ell} b_J\mathbf{d}x^J$ tiene grado $\ell$, entonces la expresión local y la regla del producto para funciones dan

$$\begin{aligned} d(\omega\wedge\eta) &= \sum_{\substack{I\in\mathcal{J}_n^k\\ J\in\mathcal{J}_n^\ell}} d(a_Ib_J)\wedge\mathbf{d}x^I\wedge\mathbf{d}x^J \\ &= \sum_{\substack{I\in\mathcal{J}_n^k\\ J\in\mathcal{J}_n^\ell}} da_I\wedge\mathbf{d}x^I\wedge b_J\mathbf{d}x^J + \sum_{\substack{I\in\mathcal{J}_n^k\\ J\in\mathcal{J}_n^\ell}} a_I\,db_J\wedge\mathbf{d}x^I\wedge\mathbf{d}x^J \\ &= d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta. \end{aligned}$$

El signo de la última igualdad aparece al trasladar la 1-forma $db_J$ a través de los $k$ factores de $\mathbf{d}x^I$.

Aplicando dos veces la expresión local, obtenemos

$$d^2\omega = \sum_{I\in\mathcal{J}_n^k}\sum_{a,b=1}^{n}\frac{\partial^2 a_I}{\partial x^b\partial x^a}\mathbf{d}x^b\wedge\mathbf{d}x^a\wedge\mathbf{d}x^I.$$

Los términos con $a=b$ se anulan. Los términos con índices distintos se cancelan por pares, porque las derivadas parciales mixtas conmutan y $\mathbf{d}x^b\wedge\mathbf{d}x^a=-\mathbf{d}x^a\wedge\mathbf{d}x^b$. Por lo tanto, $d^2=0$.

Para probar la naturalidad, sean $F\colon M\to N$ suave y, en una carta de $N$, $\omega=\sum_{I\in\mathcal{J}^k_{\dim N}} a_I\,\mathbf{d}y^I$. La regla de la cadena da

$$d(a_I\circ F)=F^*(da_I),\qquad F^*(\mathbf{d}y^j)=d(y^j\circ F).$$

Usando la regla graduada de Leibniz y $d^2=0$, resulta

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d\left(\sum_{I\in\mathcal{J}^k_{\dim N}}(a_I\circ F)\,d(y^{i_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(y^{i_k}\circ F)\right)\\ &= \sum_{I\in\mathcal{J}^k_{\dim N}} F^*(da_I)\wedge F^*(\mathbf{d}y^I)=F^*(d\omega). \end{aligned}$$

La identidad es local alrededor de cada punto y, por consiguiente, vale en todo $M$.

Si $M$ tiene frontera, las cartas utilizadas son relativamente abiertas en el semiespacio. Sus funciones, formas y campos admiten las extensiones locales contempladas en la definición de suavidad del manuscrito. La fórmula intrínseca es independiente de dichas extensiones y la expresión coordenada anterior se obtiene por restricción. Todos los argumentos, incluidos los que usan derivadas mixtas, permanecen válidos hasta la frontera.

Sólo falta la unicidad. Sea $D$ otra familia de operadores con las propiedades del enunciado. La naturalidad aplicada a la inclusión de un dominio coordenado en $M$ permite restringir $D\omega$ y efectuar el cálculo enteramente en ese dominio. Allí, $D(\mathbf{d}x^i)=D^2x^i=0$ y la regla graduada de Leibniz implica $D(\mathbf{d}x^I)=0$. Por lo tanto,

$$D\left(\sum_{I\in\mathcal{J}_n^k} a_I\mathbf{d}x^I\right)=\sum_{I\in\mathcal{J}_n^k} da_I\wedge\mathbf{d}x^I,$$

que coincide con (1.30). Así, $D=d$ en cada carta y, por ende, en toda la variedad. □

# 2

# Variedades riemannianas

Una variedad suave posee coordenadas locales, pero no contiene por sí sola una noción intrínseca de longitud, ángulo o volumen. Para introducir estas cantidades es necesario elegir, en cada espacio tangente, un producto interno que dependa suavemente del punto. Esta estructura es una métrica riemanniana.

A partir de la métrica se definen la longitud de curvas, la distancia riemanniana y la medida de volumen. Junto con la conexión de Levi–Civita, también permite construir el gradiente, la divergencia, el laplaciano y las derivadas covariantes que aparecerán en los capítulos analíticos. La geometría riemanniana proporciona, por lo tanto, el lenguaje intrínseco en el que se formularán los espacios de Sobolev, los problemas variacionales y las ecuaciones diferenciales estudiadas más adelante.



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)



Bernhard Riemann
(1826–1866)



Henri Poincaré
(1854–1912)

**Figura 2.1.** Gauss, Riemann y Poincaré fueron figuras fundamentales en el desarrollo de la geometría moderna. Los trabajos de Gauss sobre la geometría intrínseca de superficies prepararon el camino para la geometría riemanniana, introducida por Riemann para estudiar espacios de dimensión arbitraria. Poincaré, por su parte, impulsó el estudio global de estos espacios y sentó algunas de las bases de la topología moderna.

### De las superficies de Gauss a las variedades de Riemann

Gauss descubrió que la curvatura de una superficie puede calcularse a partir de la métrica que heredan sus coordenadas, sin utilizar directamente el espacio ambiente. Riemann convirtió esa observación en un programa de alcance mucho mayor: estudiar espacios de dimensión arbitraria a partir de una regla infinitesimal

para medir longitudes. Poincaré mostró después que la geometría local debía convivir con invariantes globales. El capítulo sigue esa evolución: comienza con la métrica, construye la conexión y la curvatura, y termina con las herramientas de integración y los operadores que permiten hacer análisis sobre la variedad.

## 2.1 Métricas riemannianas

Una métrica riemanniana añade a la estructura suave un producto interno en cada espacio tangente y permite trasladar al contexto geométrico numerosas construcciones del análisis euclidiano.

**Definición 2.1.1.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Una *métrica riemanniana en $M$* es un campo tensorial suave

$$\mathbf{g} \in \Gamma\big(T^{(0,2)}(TM)\big)$$

que es simétrico y positivo definido en cada punto $p \in M$.

**Definición 2.1.2.** Una **variedad riemanniana con o sin frontera** es un par $(M, \mathbf{g})$ donde $M$ es una variedad suave con o sin frontera y $\mathbf{g}$ es una métrica riemanniana en $M$.

**Ejemplo 2.1.3.** $\mathbb{R}^n$ es una variedad riemanniana sin frontera con la **métrica euclidiana** $\overline{\mathbf{g}}$ dada en coordenadas estándar por

$$\overline{\mathbf{g}} = \delta_{ij}\, \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j$$

o por

$$\overline{\mathbf{g}} = (\mathbf{d}x^1)^2 + \cdots + (\mathbf{d}x^n)^2.$$

Si $v, w \in T_p\mathbb{R}^n$, $\overline{\mathbf{g}}_p(v,w) = \delta_{ij} v^i w^j = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i = v \cdot w$ que es el producto interno usual de $\mathbb{R}^n \cong T_p\mathbb{R}^n$.

**Observación 2.1.4.** Dada una variedad riemanniana $(M, \mathbf{g})$ con o sin frontera, tenemos que la métrica riemanniana $\mathbf{g}$ define un **producto interno** en cada espacio tangente $T_pM$ para cada $p \in M$. Si consideramos $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, en ocasiones denotaremos a $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in C^\infty(M)$ por $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$. Puntualmente tenemos que $\langle \mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p \rangle = \mathbf{g}_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p) \in \mathbb{R}$. Además, notemos que podemos definir una **norma** en $T_pM$ por $\|v\|_{\mathbf{g}} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\mathbf{g}}}$.
Finalmente, el concepto de ángulo entre dos vectores se puede extender de $\mathbb{R}^n$ a $M$ como sigue:
El ángulo entre dos vectores $v, w \in T_pM \setminus \{0\}$ es el único $\theta \in [0, \pi]$ que satisface

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle_{\mathbf{g}}}{\|v\|_{\mathbf{g}} \|w\|_{\mathbf{g}}}.$$

Dos vectores $v, w \in T_pM$ se dicen **ortogonales** si $\langle v, w \rangle_{\mathbf{g}} = 0$.

**Definición 2.1.5.** (Orden puntual de formas simétricas y comparación de métricas) Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos campos tensoriales simétricos de tipo $(0,2)$ y sea $A \subseteq M$. La notación $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ en $A$ significa que

$$\mathbf{a}_p(v,v) \leq \mathbf{b}_p(v,v) \qquad \text{para todo } p \in A \text{ y todo } v \in T_pM.$$

Equivalentemente, $(\mathbf{b}-\mathbf{a})_p(v,v) \geq 0$ para esos mismos $p$ y $v$; esto es, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ es semidefinida positiva en cada fibra sobre $A$. Éste es el significado de una desigualdad entre tensores simétricos de tipo $(0,2)$ en este libro. En particular, si $\mathbf{g}$ y $\widetilde{\mathbf{g}}$ son métricas riemannianas y $0 < c \leq C < \infty$, escribir

$$c\mathbf{g} \leq \widetilde{\mathbf{g}} \leq C\mathbf{g} \qquad \text{en } A$$

abrevia las desigualdades numéricas

$$c\,\mathbf{g}_p(v,v) \leq \widetilde{\mathbf{g}}_p(v,v) \leq C\,\mathbf{g}_p(v,v) \qquad (p \in A,\ v \in T_pM).$$

Como $\mathbf{g}_p(v,v) = |v|^2_{\mathbf{g}}$, esto equivale exactamente a

$$\sqrt{c}\,|v|_{\mathbf{g}} \leq |v|_{\widetilde{\mathbf{g}}} \leq \sqrt{C}\,|v|_{\mathbf{g}} \qquad (p \in A,\ v \in T_pM). \tag{2.1}$$

Las constantes son comunes a todos los puntos de $A$ y a todos los vectores de sus fibras. Cuando existen tales constantes, diremos que las métricas son uniformemente equivalentes en $A$.

**Observación 2.1.6.** La comparación se hace evaluando ambas métricas en el mismo vector, repetido en los dos argumentos. Si $v = \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i$, su expresión en una carta es

$$c\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)v^iv^j \leq \sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{g}_{ij}(p)v^iv^j \leq C\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)v^iv^j \qquad \text{para todo } (v^1,\dots,v^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Las entradas de las matrices, consideradas por separado, no tienen por qué satisfacer esas desigualdades. Tampoco se está afirmando una desigualdad para $\mathbf{g}_p(v,w)$ y $\widetilde{\mathbf{g}}_p(v,w)$ con $v$ y $w$ arbitrarios. La evaluación diagonal es independiente de la carta y determina la forma simétrica mediante la identidad de polarización

$$\mathbf{g}_p(v,w) = \frac{1}{4}\big(\mathbf{g}_p(v+w,v+w) - \mathbf{g}_p(v-w,v-w)\big).$$

En cada fibra de dimensión finita existen constantes de comparación; la uniformidad en el punto de la base es una afirmación adicional. En un compacto se obtiene a partir de la continuidad de las métricas, como se demostrará en el Lema 7.1.8 y, para haces vectoriales arbitrarios, en el Lema 9.1.43. El mismo convenio de evaluación diagonal se usa para comparar métricas fibradas, con $v \in \mathbf{E}_p$; en el caso complejo se comparan los valores reales de las formas hermitianas sobre $(v,v)$.

Podemos hacer uso del concepto de pullback de campos tensoriales definido en el Capítulo 1 para obtener una métrica riemanniana usando funciones suaves.

**Proposición 2.1.7.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera, sea $F\colon M \longrightarrow N$ un mapeo suave y sea $\mathbf{g}$ una métrica riemanniana en $N$. Entonces $F^*\mathbf{g}$ es una métrica riemanniana en $M$ si y sólo si $F$ es una inmersión.

*Demostración.* Por la Proposición 1.10.20, sabemos que $F^*\mathbf{g} \in \Gamma(T^{(0,2)}(TM))$, es decir, $F^*\mathbf{g}$ es un 2-campo tensorial covariante suave. La definición del pullback muestra que este tensor es simétrico; sólo resta deter-

minar cuándo es positivo definido en cada punto.
Supongamos primero que $F^*\mathbf{g}$ es una métrica riemanniana en $M$. Demostraremos que $F$ es una inmersión. Tomemos $p \in M$ y sea $v \in T_pM$ con $v \neq 0$. Por la Definición 1.5.2, hay que demostrar que $dF_p$ es inyectivo. Si tuviéramos que $dF_p(v) = 0$, entonces

$$(F^*\mathbf{g})_p(v,v) = g_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(v)) = 0$$

lo cual contradice que $F^*\mathbf{g}$ es positivo definido en $p$. Se sigue que $dF_p(v) \neq 0$ para todo $v \neq 0$; así, $dF_p$ es inyectivo y $F$ es una inmersión.
Recíprocamente, supongamos que $F$ es una inmersión. Si $p \in M$ y $v \in T_pM$ satisfacen

$$0 = (F^*\mathbf{g})_p(v,v) = \mathbf{g}_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(v)),$$

Como $\mathbf{g}_{F(p)}$ es positivo definido, la igualdad anterior implica $dF_p(v) = 0$. La inyectividad de $dF_p$ da entonces $v = 0$, por lo que $F^*\mathbf{g}$ es positivo definido. □

Toda variedad suave, con o sin frontera, admite al menos una métrica riemanniana.

**Proposición 2.1.8.** (Existencia de métricas riemannianas) Toda variedad suave con o sin frontera admite una métrica riemanniana.

*Demostración.* Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Sea $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in J}$ una familia de cartas tales que $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ forma una cubierta abierta de $M$. Por la Proposición 1.3.5, podemos encontrar una partición de la unidad $(\psi_\alpha)_{\alpha\in J}$ subordinada a la cubierta $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$. Por la Proposición 2.1.7, en cada carta coordenada, $\mathbf{g}_\alpha = \varphi_\alpha^*\overline{\mathbf{g}}$ define una métrica riemanniana en $U_\alpha$ cuya expresión coordenada es $\delta_{ij}\,\mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j$. Como $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subseteq U_\alpha$, el tensor $\psi_\alpha\mathbf{g}_\alpha$ se prolonga suavemente por cero fuera de $U_\alpha$. Definimos

$$\mathbf{g} := \sum_{\alpha\in J} \psi_\alpha \mathbf{g}_\alpha,$$

donde cada sumando se entiende con esta prolongación. La familia de soportes es localmente finita, así que alrededor de cada punto la suma es finita y define un campo tensorial suave.
El campo $\mathbf{g}$ es simétrico porque, en una vecindad de cada punto, se expresa como una suma finita de tensores simétricos.
Para ver que es positivo definido, sean $p \in M$ y $v \in T_pM \setminus \{0\}$. Para cada índice con $\psi_\alpha(p) > 0$ se tiene $p \in U_\alpha$ y $(\mathbf{g}_\alpha)_p(v,v) > 0$, mientras que todos los coeficientes $\psi_\alpha(p)$ son no negativos. Como su suma es uno, existe $\beta$ tal que $\psi_\beta(p) > 0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{g}_p(v,v) = \sum_{\alpha\in J} \psi_\alpha(p)(\mathbf{g}_\alpha)_p(v,v) > 0.$$

□

Si $(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n)$ es un marco local suave para $TM$ definido en un subconjunto abierto $U \subseteq M$ y $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ es su comarco dual, podemos escribir $\mathbf{g}$ localmente en $U$ como

$$\mathbf{g} = g_{ij}\,\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j, \qquad g_{ij}(p) := \langle \mathbf{E}_i|_p, \mathbf{E}_j|_p \rangle_{\mathbf{g}}.$$

A dichas funciones se les conoce como ***coeficientes de la métrica*** $\mathbf{g}$ ***respecto al marco local*** $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$. Decimos que $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ es un ***marco local ortonormal*** si los vectores $\mathbf{E}_1|_p,\dots,\mathbf{E}_n|_p$ forman una base ortonormal de $T_pM$ para todo $p \in U$. De forma equivalente, un marco local es ortonormal si y sólo si $\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j\rangle_{\mathbf{g}} = \delta_{ij}$.

**Proposición 2.1.9.** (Existencia de marcos locales ortonormales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Si $(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n)$ es un marco local suave para $TM$ definido en $U \subseteq M$, entonces existe un marco local ortonormal suave $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ definido en $U$ tal que

$$\operatorname{span}\{\mathbf{E}_1|_p,\dots,\mathbf{E}_k|_p\} = \operatorname{span}\{\mathbf{X}_1|_p,\dots,\mathbf{X}_k|_p\}$$

para cada $k \in \{1,\dots,n\}$ y cada $p \in U$. En particular, para cada $p \in M$, existe un marco local ortonormal definido en alguna vecindad de $p$.

*Demostración.* Por el algoritmo de Gram–Schmidt, para cada $p \in U$ los vectores $\mathbf{E}_1|_p,\dots,\mathbf{E}_n|_p$ pueden elegirse recursivamente de modo que

$$\operatorname{span}\{\mathbf{E}_1|_p,\dots,\mathbf{E}_k|_p\} = \operatorname{span}\{\mathbf{X}_1|_p,\dots,\mathbf{X}_k|_p\}$$

para todo $k$. En concreto, $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{X}_1}{\|\mathbf{X}_1\|_{\mathbf{g}}}$ y

$$\mathbf{E}_j = \frac{\mathbf{X}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle \mathbf{X}_j, \mathbf{E}_i\rangle_{\mathbf{g}} \mathbf{E}_i}{\left\| \mathbf{X}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle \mathbf{X}_j, \mathbf{E}_i\rangle_{\mathbf{g}} \mathbf{E}_i \right\|_{\mathbf{g}}}, \qquad 2 \le j \le n.$$

Cada denominador es una función suave y estrictamente positiva, porque $(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n)$ es un marco. Por lo tanto, los campos $\mathbf{E}_i$ son suaves; las identidades de Gram–Schmidt prueban que forman un marco ortonormal y satisfacen las igualdades de subespacios indicadas. □

Las métricas riemannianas son importantes pues nos permiten introducir un isomorfismo de haces entre $TM$ y $T^*M$ de la siguiente manera:

**Definición 2.1.10.** (Isomorfismos musicales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Para cada punto $p \in M$ definimos los mapeos

$$\mathbf{g}_p^\flat \colon T_pM \longrightarrow T_p^*M, \qquad X_p \mapsto \mathbf{g}_p(X_p,\cdot),$$

y

$$\mathbf{g}_p^\sharp \colon T_p^*M \longrightarrow T_pM, \qquad \omega_p \mapsto \text{el único } X_p \text{ tal que } \mathbf{g}_p(X_p,\cdot) = \omega_p.$$

Estos mapeos son inversos entre sí y definen isomorfismos de haces

$$\mathbf{g}^\flat \colon TM \longrightarrow T^*M, \qquad \mathbf{g}^\sharp \colon T^*M \longrightarrow TM,$$

denominados *isomorfismos musicales*.

**Observación 2.1.11.** En coordenadas locales $(x^1,\dots,x^n)$, si $\mathbf{X} = X^i\partial_i$ es un campo vectorial, entonces

$$\mathbf{X}^\flat = g_{ij}X^i\,\mathbf{d}x^j,$$

y si $\boldsymbol{\omega} = \omega_i\,\mathbf{d}x^i$ es una 1-forma,

$$\boldsymbol{\omega}^\sharp = g^{ij}\omega_i\partial_j,$$

donde $(g^{ij})$ es la inversa de la matriz métrica $(g_{ij})$. Así, $^\flat$ se interpreta como "bajar índices" y $^\sharp$ como "subir índices".

## 2.2 Trazas de tensores

La contracción elimina un índice covariante y uno contravariante mediante una suma independiente de la base. Esta operación aparecerá constantemente al definir divergencias, laplacianos, curvaturas y energías.
Dado un espacio vectorial $V$ de dimensión finita y un endomorfismo $T\colon V \longrightarrow V$, si $\beta = \{e_1,\dots,e_n\}$ es una base para $V$ y $(A_{ij})$ es la matriz asociada a $T$ respecto a la base $\beta$, podemos definir $\operatorname{tr}(T) := \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$. Esta definición es independiente de la base elegida y podemos generalizar esta construcción para tensores de tipo mixto:

**Definición 2.2.1.** Considerando al $(1,1)$-tensor $F(\omega^1,\dots,\omega^k,\cdot,v_1,\dots,v_l,\cdot) \in T^{(1,1)}(V)$, podemos calcular su traza (que será independiente de la base elegida) $\operatorname{tr}(F)(\omega^1,\dots,\omega^k,v_1,\dots,v_l)$. En coordenadas, las componentes de $\operatorname{tr}(F)$ son

$$(\operatorname{tr}(F))^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = F^{i_1\dots i_k m}_{j_1\dots j_l m}.$$

Con esta construcción, hemos definido un operador (que no depende de la base elegida) y que llamaremos *operador traza* $\operatorname{tr}\colon T^{(k+1,l+1)}(V) \longrightarrow T^{(k,l)}(V)$.

Al operador traza también se le conoce con el nombre de ***contracción***.

En la construcción del operador traza, lo que estamos haciendo es igualar los últimos índices superiores e inferiores lo que implica, con la notación de Einstein, que estamos sumando todos esos términos. Se puede realizar una construcción similar para cualquier par de índices, siempre y cuando uno sea covariante y el otro contravariante. En general, para dicha operación, no hay distinción con el operador tr, así que sólo ocuparemos esa notación y la describiremos explícitamente sólo cuando sea necesario.

El operador tr puede aplicarse a cualquier par formado por un índice contravariante y uno covariante. Es un mapeo lineal bien definido de $T^{(k+1,l+1)}(V)$ en $T^{(k,l)}(V)$. Si $\mathbf{F}$ es un campo tensorial de tipo $(k+1,l+1)$ sobre una variedad $M$, su contracción se define punto a punto por

$$\operatorname{tr}(\mathbf{F})|_p := \operatorname{tr}(\mathbf{F}|_p), \qquad p \in M.$$

Sea ahora $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathbf{F}$ un campo tensorial $k$-covariante. La métrica permite contraer dos índices covariantes distintos: si se contraen las posiciones $r$ y $s$, la expresión coordenada es

$$g^{i_r i_s}F_{i_1\dots i_r\dots i_s\dots i_k}, \qquad r \neq s.$$

Esta expresión transforma tensorialmente y, por lo tanto, define un campo $(k-2)$-covariante independiente de las

coordenadas. Lo denotaremos por $\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\mathbf{F})$; cuando haya más de un par posible, se indicarán explícitamente los dos índices que se contraen.

## 2.3 Producto fibrado de campos tensoriales

Dada una variedad riemanniana $(M, \mathbf{g})$ con o sin frontera, podemos definir varios conceptos interesantes a partir de $\mathbf{g}$. Uno de ellos, es el concepto de producto interno de campos tensoriales. Esto resultará ser un caso particular del caso más general que no necesariamente requiere una estructura riemanniana, el cual se conoce como producto fibrado o métrica fibrada en un haz vectorial $\mathbf{E}$.

**Definición 2.3.1.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Si $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial suave, una **métrica fibrada suave en E** es un producto interno en cada fibra $\mathbf{E}_p$ que varía suavemente en el sentido de que para cualesquiera secciones locales suaves $\sigma, \tau$ de $\mathbf{E}$, $\langle \sigma, \tau \rangle$ es una función suave.

El siguiente ejemplo construye una métrica fibrada en un haz vectorial no trivial.

**Ejemplo 2.3.2.** (Métrica fibrada en el haz de Möbius) Retomemos el haz $\mathbf{E} \to \mathbb{S}^1$ del Ejemplo 1.7.9. Para $p \in \mathbb{S}^1$ definimos un producto interno en la fibra $\pi^{-1}(p)$ como sigue. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ cumple que $\varepsilon(x_0) = p$, entonces

$$\pi^{-1}(p) = \{[(x_0, t)] \mid t \in \mathbb{R}\},$$

y consideramos el mapeo

$$j_p\colon \pi^{-1}(p) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad j_p([(x_0, t)]) = t.$$

Este mapeo está bien definido pues, si $(x_0, t) \sim (x_0, t')$, entonces $t = t'$. Definimos entonces

$$\mathbf{h}_p(u, v) = j_p(u) j_p(v), \qquad u, v \in \pi^{-1}(p).$$

De esta manera, cada fibra queda dotada de un producto interno. Falta ver que $\mathbf{h}$ es una métrica fibrada suave en el sentido de la Definición 2.3.1.
Sea la cubierta $U_{\pm} = \mathbb{S}^1 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ con las trivializaciones

$$\Phi_{\pm}\colon \pi^{-1}(U_{\pm}) \longrightarrow U_{\pm} \times \mathbb{R}, \qquad [(x, y)] \longmapsto (\varepsilon(x), y).$$

En el traslape $U_+ \cap U_-$ se cumple

$$(\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1})(p, v) = (p, \tau_{+-}(p) v), \qquad \tau_{+-}(p) \in \{\pm 1\}.$$

Esto significa que, si una sección local $\sigma$ se escribe en $U_-$ como $\Phi_-(\sigma(p)) = (p, s_-(p))$ con $s_-\colon U_- \longrightarrow \mathbb{R}$ suave, entonces para todo $p \in U_+ \cap U_-$ se tiene lo siguiente:

$$\Phi_+(\sigma(p)) = \big(\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1}\big)\big(\Phi_-(\sigma(p))\big) = \big(\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1}\big)\big(p, s_-(p)\big) = (p, \tau_{+-}(p) s_-(p)).$$

Como por definición $\Phi_+(\sigma(p)) = (p, s_+(p))$, comparando segundas coordenadas se obtiene

$$s_+(p) = \tau_{+-}(p) s_-(p).$$

De la misma forma, si $\boldsymbol{\tau}$ es otra sección, en el traslape se cumple

$$t_+(p) = \tau_{+-}(p)t_-(p),$$

donde $s_\pm, t_\pm$ son las funciones que representan a $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$ en las trivializaciones $U_\pm$. En consecuencia,

$$s_+(p)t_+(p) = \big(\tau_{+-}(p)s_-(p)\big)\big(\tau_{+-}(p)t_-(p)\big) = s_-(p)t_-(p),$$

y las expresiones locales del producto coinciden en la intersección.
Finalmente, si $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$ son secciones locales suaves sobre $U_\pm$, tenemos

$$\Phi_\pm(\boldsymbol{\sigma}(p)) = (p, s_\pm(p)), \qquad \Phi_\pm(\boldsymbol{\tau}(p)) = (p, t_\pm(p)),$$

y por definición de $\mathbf{h}$ se obtiene

$$\mathbf{h}_p(\boldsymbol{\sigma}(p), \boldsymbol{\tau}(p)) = s_\pm(p)t_\pm(p),$$

que es una función suave en $p$.
Concluimos que $\mathbf{h}$ define una métrica fibrada suave en $(\mathbf{E}, \pi, \mathbb{S}^1)$, la cual no depende de la trivialización elegida y se obtiene de manera natural al identificar cada fibra con $\mathbb{R}$ mediante $j_p$.

**Proposición 2.3.3.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Entonces existe una única métrica fibrada suave definida en cada haz tensorial $T^{(k,l)}(TM)$ con la propiedad de que si $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{k+l}, \boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_{k+l}$ son campos vectoriales o covectoriales según sea apropiado, entonces

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\alpha}_{k+l}, \boldsymbol{\beta}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\beta}_{k+l} \rangle_{\mathbf{g}} = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle_{\mathbf{g}} \dots \langle \boldsymbol{\alpha}_{k+l}, \boldsymbol{\beta}_{k+l} \rangle_{\mathbf{g}}.$$

Con este producto interno, si $(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$ es un marco local ortonormal para $TM$ y $(\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n)$ es el correspondiente comarco dual, entonces la colección de campos tensoriales

$$(\mathbf{E}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_{i_k} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{j_l})_{1 \le i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \le n}$$

forma un marco local ortonormal en $T^{(k,l)}(TM)$ (ortonormal respecto a esta métrica fibrada). En términos de cualquier marco local (no necesariamente ortonormal), esta métrica fibrada satisface: Para cualesquiera $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta} \in \Omega^1(M)$

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{\mathbf{g}} = g_{ir} X^i Y^r, \ \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{g}} = g^{js} \omega_j \eta_s.$$

Más aún, para $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \Gamma(T^{(k,l)}(TM))$,

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{\mathbf{g}} = g_{i_1 r_1} \cdots g_{i_k r_k} g^{j_1 s_1} \cdots g^{j_l s_l} F^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} G^{r_1 \dots r_k}_{s_1 \dots s_l}.$$

En ocasiones, denotamos $\mathbf{g}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) := \langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{\mathbf{g}}$.

*Demostración.* Consideremos $p \in M$ y sea $(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$ un marco local suave para $TM$ definido en $U \subseteq M$ abierto tal que $p \in U$. Podemos definir la métrica fibrada como

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = g_{i_1 r_1} \cdots g_{i_k r_k} g^{j_1 s_1} \cdots g^{j_l s_l} F^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} G^{r_1 \dots r_k}_{s_1 \dots s_l}$$

en $U$ para cualesquiera campos tensoriales $\mathbf{F},\mathbf{G}\in\Gamma(T^{(k,l)}(TM))$. Esta definición es local, lo primero que hay que verificar es que esta definición no depende del marco local elegido para que esté bien definida, lo cual además demuestra la unicidad:
Supongamos que $(\widetilde{\mathbf{E}}_1,\dots,\widetilde{\mathbf{E}}_n)$ es otro marco local definido en un abierto $V$ tal que $p\in V$. Tenemos que en $U\cap V$ se da la siguiente relación entre los marcos locales:

$$\mathbf{E}_i = A_i^j\widetilde{\mathbf{E}}_j$$

con $(A_i^j)$ una matriz de funciones suaves definidas en $U\cap V$. Sean $(\boldsymbol{\varepsilon}^1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^n)$ y $(\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^1,\dots,\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^n)$ los comarcos locales asociados a cada marco local. Sea $(A^{-1})_i^j$ la matriz inversa de $(A_j^i)$, donde el índice de abajo denota los renglones y el de arriba las columnas. Se tiene $\widetilde{\mathbf{E}}_i=(A^{-1})_i^j\mathbf{E}_j$ y además podemos denotar como $\boldsymbol{\varepsilon}^i=B_m^i\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^m$, por lo que

$$(A^{-1})_j^i=(A^{-1})_j^k\delta_k^i=(A^{-1})_j^k\boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{E}_k)=\boldsymbol{\varepsilon}^i((A^{-1})_j^k\mathbf{E}_k)=\boldsymbol{\varepsilon}^i(\widetilde{\mathbf{E}}_j)=B_m^i\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^m(\widetilde{\mathbf{E}}_j)=B_m^i\delta_j^m=B_j^i.$$

Por lo que concluimos que $\boldsymbol{\varepsilon}^i=(A^{-1})_j^i\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^j$. A su vez, como $\mathbf{E}_i=A_i^j\widetilde{\mathbf{E}}_j$, podemos deducir que $\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^i=A_j^i\boldsymbol{\varepsilon}^j$.
Verificamos ahora que la expresión no depende del marco local. Sean $\mathbf{F},\mathbf{G}\in\Gamma(T^{(k,l)}(TM))$. En $U\cap V$ se tiene:

$$g_{i_1r_1}\cdots g_{i_kr_k}g^{j_1s_1}\cdots g^{j_ls_l}F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}G^{r_1\dots r_k}_{s_1\dots s_l}$$

$$=(A^{a_1}_{i_1}A^{b_1}_{r_1}\widetilde{g}_{a_1b_1})\cdots(A^{a_k}_{i_k}A^{b_k}_{r_k}\widetilde{g}_{a_kb_k})((A^{-1})^{j_1}_{e_1}(A^{-1})^{s_1}_{f_1}\widetilde{g}^{e_1f_1})\cdots((A^{-1})^{j_l}_{e_l}(A^{-1})^{s_l}_{f_l}\widetilde{g}^{e_lf_l})$$

$$((A^{-1})^{i_1}_{c_1}\cdots(A^{-1})^{i_k}_{c_k}A^{m_1}_{j_1}\cdots A^{m_l}_{j_l}\widetilde{F}^{c_1\dots c_k}_{m_1\dots m_l})((A^{-1})^{r_1}_{d_1}\cdots(A^{-1})^{r_k}_{d_k}A^{n_1}_{s_1}\cdots A^{n_l}_{s_l}\widetilde{G}^{d_1\dots d_k}_{n_1\dots n_l})$$

$$=A^{a_1}_{i_1}(A^{-1})^{i_1}_{c_1}\cdots A^{a_k}_{i_k}(A^{-1})^{i_k}_{c_k}A^{b_1}_{r_1}(A^{-1})^{r_1}_{d_1}\cdots A^{b_k}_{r_k}(A^{-1})^{r_k}_{d_k}\widetilde{g}_{a_1b_1}\cdots\widetilde{g}_{a_kb_k}$$

$$(A^{-1})^{j_1}_{e_1}A^{m_1}_{j_1}\cdots(A^{-1})^{j_l}_{e_l}A^{m_l}_{j_l}(A^{-1})^{s_1}_{f_1}A^{n_1}_{s_1}\cdots(A^{-1})^{s_l}_{f_l}A^{n_l}_{s_l}\widetilde{g}^{e_1f_1}\dots\widetilde{g}^{e_lf_l}\widetilde{F}^{c_1\dots c_k}_{m_1\dots m_l}\widetilde{G}^{d_1\dots d_k}_{n_1\dots n_l}$$

$$=\delta^{a_1}_{c_1}\cdots\delta^{a_k}_{c_k}\delta^{b_1}_{d_1}\cdots\delta^{b_k}_{d_k}\widetilde{g}_{a_1b_1}\cdots\widetilde{g}_{a_kb_k}\delta^{m_1}_{e_1}\cdots\delta^{m_l}_{e_l}\delta^{n_1}_{f_1}\cdots\delta^{n_l}_{f_l}\widetilde{g}^{e_1f_1}\dots\widetilde{g}^{e_lf_l}\widetilde{F}^{c_1\dots c_k}_{m_1\dots m_l}\widetilde{G}^{d_1\dots d_k}_{n_1\dots n_l}$$

$$=\widetilde{g}_{a_1b_1}\cdots\widetilde{g}_{a_kb_k}\widetilde{g}^{e_1f_1}\dots\widetilde{g}^{e_lf_l}\widetilde{F}^{a_1\dots a_k}_{e_1\dots e_l}\widetilde{G}^{b_1\dots b_k}_{f_1\dots f_l}.$$

Donde la penúltima igualdad se da por definición de producto de matrices y de matriz inversa, es decir, $(A^{-1})^i_kA^k_j=\delta^i_j=A^m_j(A^{-1})^i_m$.
Por lo tanto $\langle\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle_{\mathbf{g}}$ no depende del marco local elegido.
Ahora que hemos visto que está bien definido, podemos notar que es bilineal y simétrico, por lo que basta demostrar que es positivo definido. Si $k=l=0$, se trata del producto usual en $\mathbb{R}$. Si sólo uno de los dos índices es cero, el cálculo que sigue permanece válido omitiendo las familias de índices ausentes y comenzando el argumento de invertibilidad con la primera familia que exista. Podemos suponer, por lo tanto, que $k,l\geq 1$. Sea $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ un marco local suave para $TM$ definido en un abierto $U\subseteq M$ y consideremos $\mathbf{F}\in\Gamma(T^{(k,l)}(TM))$. Como la matriz $(g_{ij})$ es positiva definida, por el teorema espectral para matrices simétricas, existe una matriz simétrica $R$ positiva definida (y por lo tanto invertible) tal que $(g_{ij})=R^2$.
Denotaremos a las entradas de $R$ por $R_{ij}$ y a las de $R^{-1}$ por $R^{ij}$. En particular, tenemos que $g_{ij}=\sum_{m=1}^{n}R_{im}R_{mj}$

y $g^{ij} = \sum_{m=1}^{n} R^{im} R^{mj}$.

En el siguiente cálculo escribiremos explícitamente las sumas del convenio de Einstein:

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle_{\mathbf{g}} = \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n\\ 1\le r_1,\dots,r_k\le n\\ 1\le s_1,\dots,s_l\le n}} g_{i_1 r_1}\cdots g_{i_k r_k} g^{j_1 s_1}\cdots g^{j_l s_l} F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} F^{r_1\dots r_k}_{s_1\dots s_l} =$$

$$\sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n\\ 1\le r_1,\dots,r_k\le n\\ 1\le s_1,\dots,s_l\le n}} \left(\sum_{a_1=1}^{n} R_{i_1 a_1} R_{a_1 r_1}\right)\cdots\left(\sum_{a_k=1}^{n} R_{i_k a_k} R_{a_k r_k}\right)\left(\sum_{b_1=1}^{n} R^{j_1 b_1} R^{b_1 s_1}\right)\cdots\left(\sum_{b_l=1}^{n} R^{j_l b_l} R^{b_l s_l}\right) F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} F^{r_1\dots r_k}_{s_1\dots s_l}$$

$$= \sum_{\substack{1\le a_1,\dots,a_k\le n\\ 1\le b_1,\dots,b_l\le n}} \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n\\ 1\le r_1,\dots,r_k\le n\\ 1\le s_1,\dots,s_l\le n}} R_{i_1 a_1} R_{a_1 r_1}\cdots R_{i_k a_k} R_{a_k r_k} R^{j_1 b_1} R^{b_1 s_1}\cdots R^{j_l b_l} R^{b_l s_l} F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} F^{r_1\dots r_k}_{s_1\dots s_l}$$

$$= \sum_{\substack{1\le a_1,\dots,a_k\le n\\ 1\le b_1,\dots,b_l\le n}} \left(\sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n}} R_{i_1 a_1}\cdots R_{i_k a_k} R^{j_1 b_1}\cdots R^{j_l b_l} F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\right)\left(\sum_{\substack{1\le r_1,\dots,r_k\le n\\ 1\le s_1,\dots,s_l\le n}} R_{a_1 r_1}\cdots R_{a_k r_k} R^{b_1 s_1}\cdots R^{b_l s_l} F^{r_1\dots r_k}_{s_1\dots s_l}\right)$$

$$= \sum_{\substack{1\le a_1,\dots,a_k\le n\\ 1\le b_1,\dots,b_l\le n}} \left(\sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n}} R_{i_1 a_1}\cdots R_{i_k a_k} R^{j_1 b_1}\cdots R^{j_l b_l} F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\right)^2 \ge 0,$$

el cual es un término no negativo y donde hemos usado que $R$ y $R^{-1}$ son matrices simétricas. Además podemos notar que si $\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle_{\mathbf{g}} = 0$, entonces

$$\sum_{\substack{1\le a_1,\dots,a_k\le n\\ 1\le b_1,\dots,b_l\le n}} \left(\sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n}} R_{i_1 a_1}\cdots R_{i_k a_k} R^{j_1 b_1}\cdots R^{j_l b_l} F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\right)^2 = 0,$$

por lo que para cualesquiera $a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_l$,

$$\sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n}} R_{i_1 a_1}\cdots R_{i_k a_k} R^{j_1 b_1}\cdots R^{j_l b_l} F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = 0,$$

esto puede reescribirse como sigue:

$$\sum_{i_1=1}^{n} R_{i_1 a_1}\left(\sum_{\substack{1\le i_2,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n}} R_{i_2 a_2}\cdots R_{i_k a_k} R^{j_1 b_1}\cdots R^{j_l b_l} F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\right) = 0,$$

y esto se cumple para todo $a_1 \in \{1,\dots,n\}$. Al variar $a_1 \in \{1,\dots,n\}$, obtenemos un sistema de ecuaciones de

$n \times n$ que tiene una única solución pues $R$ es invertible, a saber

$$\sum_{\substack{1\leq i_2,\dots,i_k\leq n\\ 1\leq j_1,\dots,j_l\leq n}} R_{i_2 a_2}\cdots R_{i_k a_k} R^{j_1 b_1}\cdots R^{j_l b_l} F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = 0$$

para todo $i_1 \in \{1,\dots,n\}$.
Usando que $R$ y $R^{-1}$ son invertibles, procediendo del mismo modo de forma iterativa e inductiva con $i_2$ hasta $j_{l-1}$, concluimos que

$$\sum_{j_l=1}^{n} R^{j_l b_l} F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = 0$$

para cualesquiera $i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_{l-1} \in \{1,\dots,n\}$. Podemos repetir lo mismo y usar que $R^{-1}$ es invertible para concluir que para cualesquiera $i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l \in \{1,\dots,n\}$,

$$F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = 0.$$

Por lo tanto $\mathbf{F} = 0$ y $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{g}}$ es positivo definido. Sus coeficientes en cualquier marco tensorial son suaves. En un marco ortonormal, la fórmula se reduce a productos de deltas de Kronecker y muestra que el marco tensorial indicado en el enunciado es ortonormal. Finalmente, los tensores descomponibles generan cada fibra, de modo que la propiedad exigida determina el producto interno de manera única. □

Probaremos una propiedad que será útil más adelante.

**Proposición 2.3.4.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave con o sin frontera. Si $\mathbf{F} \in \Gamma(T^{(k_1,l_1)}(TM))$ y $\mathbf{G} \in \Gamma(T^{(k_2,l_2)}(TM))$, entonces

$$|\mathbf{F}\otimes\mathbf{G}|^2_{\mathbf{g}} = |\mathbf{F}|^2_{\mathbf{g}}|\mathbf{G}|^2_{\mathbf{g}}.$$

*Demostración.* Sea $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ un marco local suave definido en un abierto $U \subseteq M$. Supongamos que $F^{i_1\dots i_{k_1}}_{j_1\dots j_{l_1}}$ y $G^{\widetilde{i}_1\dots\widetilde{i}_{k_2}}_{\widetilde{j}_1\dots\widetilde{j}_{l_2}}$ son las coordenadas de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ en $U$ respecto a dicho marco local suave. Sabemos que las coordenadas de $\mathbf{F}\otimes\mathbf{G}$ están dadas por

$$(\mathbf{F}\otimes\mathbf{G})^{i_1\dots i_{k_1+k_2}}_{j_1\dots j_{l_1+l_2}} = F^{i_1\dots i_{k_1}}_{j_1\dots j_{l_1}} G^{i_{k_1+1}\dots i_{k_1+k_2}}_{j_{l_1+1}\dots j_{l_1+l_2}}.$$

Entonces:

$$|\mathbf{F}\otimes\mathbf{G}|^2_{\mathbf{g}} =$$

$$\sum_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_{k_1+k_2}\leq n\\ 1\leq j_1,\dots,j_{l_1+l_2}\leq n\\ 1\leq r_1,\dots,r_{k_1+k_2}\leq n\\ 1\leq s_1,\dots s_{l_1+l_2}\leq n}} g_{i_1 r_1}\cdots g_{i_{k_1} r_{k_1}} g_{i_{k_1+1} r_{k_1+1}}\cdots g_{i_{k_1+k_2} r_{k_1+k_2}} g^{j_1 s_1}\cdots g^{j_{l_1} s_{l_1}} g^{j_{l_1+1} s_{l_1+1}}\cdots g^{j_{l_1+l_2} s_{l_1+l_2}}$$

$$F^{i_1\dots i_{k_1}}_{j_1\dots j_{l_1}} G^{i_{k_1+1}\dots i_{k_1+k_2}}_{j_{l_1+1}\dots j_{l_1+l_2}} F^{r_1\dots r_{k_1}}_{s_1\dots s_{l_1}} G^{r_{k_1+1}\dots r_{k_1+k_2}}_{s_{l_1+1}\dots s_{l_1+l_2}} = \left( \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_{k_1}\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_{l_1}\le n\\ 1\le r_1,\dots,r_{k_1}\le n\\ 1\le s_1,\dots s_{l_1}\le n}} g_{i_1 r_1}\cdots g_{i_{k_1} r_{k_1}} g^{j_1 s_1}\cdots g^{j_{l_1} s_{l_1}} F^{i_1\dots i_{k_1}}_{j_1\dots j_{l_1}} F^{r_1\dots r_{k_1}}_{s_1\dots s_{l_1}} \right)$$

$$\left( \sum_{\substack{1\le i_{k_1+1},\dots,i_{k_1+k_2}\le n\\ 1\le j_{l_1+1},\dots,j_{l_1+l_2}\le n\\ 1\le r_{k_1+1},\dots,r_{k_1+k_2}\le n\\ 1\le s_{l_1+1},\dots s_{l_1+l_2}\le n}} g_{i_{k_1+1} r_{k_1+1}}\cdots g_{i_{k_1+k_2} r_{k_1+k_2}} g^{j_{l_1+1} s_{l_1+1}}\cdots g^{j_{l_1+l_2} s_{l_1+l_2}} G^{i_{k_1+1}\dots i_{k_1+k_2}}_{j_{l_1+1}\dots j_{l_1+l_2}} G^{r_{k_1+1}\dots r_{k_1+k_2}}_{s_{l_1+1}\dots s_{l_1+l_2}} \right)$$

$$= |\mathbf{F}|^2_{\mathbf{g}} |\mathbf{G}|^2_{\mathbf{g}}.$$

□

## 2.4 Conexiones

Un campo vectorial toma valores en espacios tangentes distintos, de modo que la diferencia directa entre sus valores en dos puntos carece de sentido intrínseco. Una conexión resuelve este problema al indicar cómo derivar un campo en una dirección y cómo comparar vectores a lo largo de una curva. Comenzaremos en el caso euclidiano, donde la derivada direccional ofrece el modelo que después se transportará a la variedad.

**Ejemplo 2.4.1.** Consideremos la variedad suave sin frontera $\mathbb{R}^n$ y campos $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Recordemos que los campos vectoriales $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ en $\mathbb{R}^n$ se pueden pensar como funciones suaves $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El concepto de derivada direccional nos dice que para cada $p \in \mathbb{R}^n$,

$$(D_{\mathbf{X}_p}(\mathbf{Y}))(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x^i}(p).$$

Esta derivada direccional nos dice la razón de cambio de $\mathbf{Y}$ en $p$ respecto a $\mathbf{X}(p)$. Variando $p \in \mathbb{R}^n$, obtenemos un campo vectorial suave que puntualmente actúa como $(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_p := (D_{\mathbf{X}_p}\mathbf{Y})(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x^i}(p)$. Para dar este concepto de derivada de un campo vectorial respecto a otro, estamos usando fuertemente la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, pues en la definición de derivada direccional tenemos

$$(D_{\mathbf{X}_p}(\mathbf{Y}))(p) := \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{Y}(p + t\mathbf{X}_p) - \mathbf{Y}(p)}{t}$$

y en general $\mathbf{Y}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{Y}(p + t\mathbf{X}_p) \in T_{p+t\mathbf{X}_p}\mathbb{R}^n$ y ambos espacios tangentes se identifican con $\mathbb{R}^n$ de manera canónica. A pesar de no poder pensar en esto directamente en variedades, podemos abstraer las propiedades de $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ heredadas directamente de las propiedades de las derivadas direccionales:

(a) Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $\nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{Y} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$.

(b) $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ es $\mathbb{R}$-lineal en $\mathbf{Y}$.

(c) Para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + (\mathbf{X}f)\mathbf{Y}.$$

A la función $\nabla\colon \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)\times\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ definida de esta manera se le conoce como *conexión trivial* o *conexión euclidiana*.

El ejemplo anterior nos permite formular la siguiente definición que nos dará un concepto de derivada direccional de manera intrínseca en variedades:

**Definición 2.4.2.** Sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave sobre una variedad suave $M$ con o sin frontera. Una **conexión en E** es un mapeo

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M)\times\Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}), \qquad (\mathbf{X},\mathbf{u}) \longmapsto \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u},$$

que satisface:

(a) $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}$ es $C^\infty(M)$-lineal en $\mathbf{X}$.

(b) $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}$ es $\mathbb{R}$-lineal en $\mathbf{u}$.

(c) Para cada $f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{u}) = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u} + (\mathbf{X}f)\mathbf{u}.$$

**Ejercicio 2.4.3.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\nabla$ una conexión en $TM$. Sea $\mathbf{A}\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ un mapeo bilineal sobre $C^\infty(M)$, es decir, que satisface

$$\mathbf{A}(f\mathbf{X},\mathbf{Y}) = f\mathbf{A}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \quad \text{y} \quad \mathbf{A}(\mathbf{X},f\mathbf{Y}) = f\mathbf{A}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \qquad \forall f \in C^\infty(M),\ \forall \mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M).$$

Demuestre que el mapeo

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \mathbf{A}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \qquad \mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M),$$

define nuevamente una conexión en $TM$.

**Observación 2.4.4.** Si $\nabla$ es una conexión en $TM$ y $(U,(x^i))$ es una carta coordenada de $M$, entonces $\nabla$ determina $n^3$ funciones suaves $\Gamma_{ij}^k\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k.$$

Estas funciones describen completamente el comportamiento local de la conexión, por lo que son de gran importancia y reciben el nombre de ***símbolos de Christoffel***.

**Ejemplo 2.4.5.** Sea $M = \mathbb{R}^n$, considerada como variedad suave sin frontera, y sea $\nabla$ la conexión euclidiana definida en el ejemplo anterior. Recordemos que para cada $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$,

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_p = (D_{\mathbf{X}_p}\mathbf{Y})(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p)\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x^i}(p).$$

Consideremos ahora el marco coordenado canónico $\{\partial_1,\dots,\partial_n\}$, donde $\partial_i$ denota el campo vectorial constante cuya $i$-ésima componente es 1 y las demás son 0. Como los campos $\partial_i$ son constantes, sus derivadas parciales se anulan:

$$\frac{\partial(\partial_j)}{\partial x^i} = 0 \quad \text{para todo } i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

Por la definición de $\nabla$, se sigue que

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = 0 \quad \text{para todo } i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

De esta forma, los coeficientes de la conexión euclidiana en coordenadas cartesianas satisfacen

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad \text{para todo } i,j,k \in \{1,\dots,n\}.$$

**Observación 2.4.6.** Una conexión en $\mathbf{E}$ es $C^\infty(M)$-lineal en $\mathbf{X}$, así que cada $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$ define un homomorfismo de haces

$$\nabla\sigma \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Gamma(\mathbf{E})).$$

Por la Proposición 1.7.31 sabemos que hay un isomorfismo canónico

$$\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Gamma(\mathbf{E})) \cong \Gamma(\mathrm{Hom}(TM,\mathbf{E}))$$

y por la Proposición 1.10.14 sabemos que $\mathrm{Hom}(TM,\mathbf{E}) \cong (TM)^*\otimes\mathbf{E} = T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}$, por lo que concluimos que

$$\nabla\sigma \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Gamma(\mathbf{E})) \cong \Gamma(T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}), \quad \forall\sigma\in\Gamma(\mathbf{E}).$$

Otras propiedades interesantes que caracterizan de manera única la conexión euclidiana son las siguientes:

**Proposición 2.4.7.** Sea $M=\mathbb{R}^n$, que es una variedad suave sin frontera, con el producto interno usual $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y sea $\nabla$ la conexión euclidiana definida, para $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, por

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_p = (D_{\mathbf{X}_p}\mathbf{Y})(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p)\partial_i\mathbf{Y}(p).$$

Entonces $\nabla$ satisface las siguientes propiedades:

(a) Para cualesquiera $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbf{X}(\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle) = \langle\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle + \langle\mathbf{Y},\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle.$$

(b) Para cualesquiera $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$,

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}] = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X},$$

donde $[\mathbf{X},\mathbf{Y}](f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$ para toda $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Además, $\nabla$ es la única conexión en $\mathbb{R}^n$ que cumple simultáneamente estas dos propiedades.

*Demostración.* Sea $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Para demostrar la primera propiedad, escribimos $\mathbf{Y}=(Y^1,\dots,Y^n)$ y $\mathbf{Z}=(Z^1,\dots,Z^n)$. Como $\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle=\sum_{k=1}^{n}Y^kZ^k$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle)&=\sum_{i,k=1}^{n}X^i\partial_i(Y^kZ^k)\\&=\sum_{i,k=1}^{n}X^i\big((\partial_iY^k)Z^k+Y^k(\partial_iZ^k)\big).\end{aligned}$$

Por definición de $\nabla$, se cumple $(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^k=\sum_{i=1}^{n}X^i\partial_iY^k$ y $(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z})^k=\sum_{i=1}^{n}X^i\partial_iZ^k$. Sustituyendo,

$$\mathbf{X}(\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle)=\sum_{k=1}^{n}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^kZ^k+\sum_{k=1}^{n}Y^k(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z})^k=\langle\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle+\langle\mathbf{Y},\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle.$$

Para la segunda propiedad, recordemos que $[\mathbf{X},\mathbf{Y}](f)=\mathbf{X}(\mathbf{Y}(f))-\mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$. Aplicando a $x^k$,

$$\begin{aligned}[\mathbf{X},\mathbf{Y}](x^k)&=\mathbf{X}(Y^k)-\mathbf{Y}(X^k)\\&=\sum_{i=1}^{n}\big(X^i\partial_iY^k-Y^i\partial_iX^k\big),\end{aligned}$$

por lo que $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]^k=\sum_{i=1}^{n}\big(X^i\partial_iY^k-Y^i\partial_iX^k\big)$. Pero también $(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}-\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X})^k=\sum_{i=1}^{n}\big(X^i\partial_iY^k-Y^i\partial_iX^k\big)$, y por lo tanto $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}-\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$.

Para la unicidad, sea $\widetilde{\nabla}$ otra conexión que satisface (a) y (b). En el marco coordenado $\{\partial_1,\dots,\partial_n\}$ escribimos $\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^k\partial_k$. De (b), como $[\partial_i,\partial_j]=0$, se obtiene $\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j=\widetilde{\nabla}_{\partial_j}\partial_i$, es decir,

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k. \tag{2.2}$$

Por (a), usando que $\langle\partial_j,\partial_k\rangle=\delta_{jk}$ es constante,

$$0=\partial_i\langle\partial_j,\partial_k\rangle=\langle\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j,\partial_k\rangle+\langle\partial_j,\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_k\rangle=\Gamma_{ij}^k+\Gamma_{ik}^j, \tag{2.3}$$

de donde

$$\Gamma_{ij}^k=-\Gamma_{ik}^j. \tag{2.4}$$

Veamos que de (2.2) y (2.4) se deduce $\Gamma_{ij}^k=0$. Si $j=k$, entonces $\Gamma_{ij}^j=-\Gamma_{ij}^j$, luego $\Gamma_{ij}^j=0$. Si $j\neq k$, encadenando (2.2) y (2.4),

$$\Gamma_{ij}^k=-\Gamma_{ik}^j=-\Gamma_{ki}^j=\Gamma_{kj}^i=\Gamma_{jk}^i=-\Gamma_{ij}^k,$$

de donde $\Gamma_{ij}^k=0$.

Por consiguiente, $\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j=0$, y $\widetilde{\nabla}$ coincide con la conexión euclidiana. □

Como vimos en el ejemplo anterior, estas propiedades caracterizan totalmente a la conexión euclidiana y la

relacionan con la métrica riemanniana estándar en $\mathbb{R}^n$. Formalizaremos estas dos propiedades de la siguiente manera para cualquier variedad riemanniana:

**Definición 2.4.8.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\nabla$ una conexión en $TM$. Decimos que:

(a) $\nabla$ es **compatible con g** si para cualesquiera $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathbf{X}(\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle) = \langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle$.

(b) $\nabla$ es **libre de torsión** si para cualesquiera $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$, donde

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)).$$

Ambas condiciones son independientes entre sí como muestra el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.4.9.** Sea $\nabla$ la conexión euclidiana en la variedad sin frontera $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbf{g}})$, definida por derivadas direccionales.
Consideremos dos modificaciones de $\nabla$ que alteran, respectivamente, la torsión y la compatibilidad con la métrica. Estas modificaciones se obtendrán de sumar un término $C^\infty(M)$-bilineal a la conexión, lo cual se justifica con el Ejercicio 2.4.3.

(a) *Conexión compatible con la métrica pero con torsión.*

En $\mathbb{R}^3$ definamos, para $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$,

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \mathbf{X} \times \mathbf{Y},$$

donde $\times$ denota el producto vectorial usual en $\mathbb{R}^3$. El término adicional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ es bilineal sobre $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, de modo que $\widetilde{\nabla}$ define una conexión.

Para verificar que $\widetilde{\nabla}$ preserva la métrica, notemos que

$$\mathbf{X}\big(\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle\big) = \langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle,$$

y que el producto vectorial satisface

$$\langle \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle = -\langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \times \mathbf{Z}\rangle.$$

Así,

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{Y}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle &= \langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \times \mathbf{Z}\rangle \\ &= \langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle = \mathbf{X}\big(\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle\big),\end{aligned}$$

por lo que $\widetilde{\nabla}$ preserva la métrica.

La torsión de $\widetilde{\nabla}$ está dada por

$$\begin{aligned}T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \widetilde{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \\ &= (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) + (\mathbf{X} \times \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \times \mathbf{X}) \\ &= 2\mathbf{X} \times \mathbf{Y},\end{aligned}$$

la cual es no nula en general. En consecuencia, $\widetilde{\nabla}$ preserva la métrica, pero no es libre de torsión.

(b) *Conexión libre de torsión pero que no preserva la métrica.*

Sea $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ un campo vectorial suave y definamos

$$\widehat{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle \mathbf{V}.$$

El término adicional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle \mathbf{V}$ es simétrico en $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ y bilineal sobre $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, por lo que $\widehat{\nabla}$ es también una conexión.

La torsión se anula, pues

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \widehat{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] &= \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle \mathbf{V} - \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{V} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Verifiquemos ahora si $\widehat{\nabla}$ preserva la métrica. Se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{X}\big(\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle\big) &= \langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle, \\ \langle \widehat{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle &= \langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle \langle \mathbf{V}, \mathbf{Z}\rangle, \\ \langle \mathbf{Y}, \widehat{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle &= \langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{X}, \mathbf{Z}\rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{V}\rangle.\end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$\mathbf{X}\big(\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle\big) - \langle \widehat{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle - \langle \mathbf{Y}, \widehat{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle = -\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle \langle \mathbf{V}, \mathbf{Z}\rangle - \langle \mathbf{X}, \mathbf{Z}\rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{V}\rangle,$$

que no se anula en general. Por lo tanto, $\widehat{\nabla}$ es libre de torsión, pero no preserva la métrica euclidiana.

Al igual que $\mathbb{R}^n$, toda variedad riemanniana admitirá una única conexión compatible con la métrica y libre de torsión, la cual será conocida con el nombre de conexión de Levi–Civita. Dicho resultado recibe el nombre de ***Teorema Fundamental de la Geometría riemanniana***.

**Teorema 2.4.10.** (Teorema Fundamental de la Geometría riemanniana) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Entonces existe una única conexión $\nabla$ en $TM$ que es compatible con $\mathbf{g}$ y libre de torsión. Se le llama **conexión de Levi-Civita de g**.

*Demostración.* Si una conexión es compatible con la métrica y libre de torsión, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{X}\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle &= \langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle + \langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle, \\ \mathbf{Y}\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X}\rangle &= \langle \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}, \mathbf{X}\rangle + \langle \mathbf{Z}, \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}\rangle, \\ \mathbf{Z}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle &= \langle \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle + \langle \mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y}\rangle.\end{aligned}$$

Sumamos las dos primeras identidades, restamos la tercera y usamos $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Se obtiene necesariamente la fórmula de Koszul

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle = \mathbf{X}\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\rangle + \mathbf{Y}\langle \mathbf{Z}, \mathbf{X}\rangle - \mathbf{Z}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle \\ - \langle \mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]\rangle - \langle \mathbf{Z}, [\mathbf{Y}, \mathbf{X}]\rangle + \langle \mathbf{X}, [\mathbf{Z}, \mathbf{Y}]\rangle.\end{aligned}$$

Como la métrica es no degenerada, esta identidad determina $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ de manera única.

Para la existencia, denotemos por $\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ el miembro derecho de la fórmula anterior. Las identidades

$$[f\mathbf{X},\mathbf{Z}] = f[\mathbf{X},\mathbf{Z}] - \mathbf{Z}(f)\mathbf{X}, \qquad [\mathbf{Z},f\mathbf{Y}] = f[\mathbf{Z},\mathbf{Y}] + \mathbf{Z}(f)\mathbf{Y}$$

muestran, al sustituir y cancelar los términos que contienen derivadas de $f$, que

$$\mathcal{K}(f\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = f\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}), \qquad \mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y},f\mathbf{Z}) = f\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}).$$

Asimismo,

$$\mathcal{K}(\mathbf{X},f\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = f\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}) + 2\mathbf{X}(f)\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle.$$

Por lo tanto, para cada $\mathbf{X},\mathbf{Y}$, la función $\mathbf{Z} \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ es $C^\infty(M)$-lineal. La no degeneración de la métrica define un único campo vectorial $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ por

$$2\langle\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle = \mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}) \quad \text{para todo } \mathbf{Z}.$$

Las tres identidades precedentes prueban las reglas de conexión

$$\nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{Y} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \qquad \nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \mathbf{X}(f)\mathbf{Y}.$$

La suavidad se comprueba evaluando en un marco local, pues las componentes resultantes son combinaciones de funciones suaves y sus derivadas.
Finalmente, la propia fórmula de Koszul da

$$\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}) + \mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}) = 2\mathbf{X}\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle$$

y

$$\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}) - \mathcal{K}(\mathbf{Y},\mathbf{X},\mathbf{Z}) = 2\langle[\mathbf{X},\mathbf{Y}],\mathbf{Z}\rangle.$$

La primera identidad prueba la compatibilidad métrica; la segunda y la no degeneración prueban que la torsión es nula. □

La conexión de Levi-Civita será fundamental en el análisis no lineal en variedades, pues la mayoría de los espacios con los que trabajaremos requieren una conexión compatible con la métrica. El siguiente corolario reúne sus expresiones locales y sus propiedades básicas.

**Corolario 2.4.11.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\nabla$ su conexión de Levi-Civita.

(a) Para cualesquiera $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple la ***fórmula de Koszul***:

$$\langle\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle = \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle + \mathbf{Y}\langle\mathbf{Z},\mathbf{X}\rangle - \mathbf{Z}\langle\mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle - \langle\mathbf{Y},[\mathbf{X},\mathbf{Z}]\rangle - \langle\mathbf{Z},[\mathbf{Y},\mathbf{X}]\rangle + \langle\mathbf{X},[\mathbf{Z},\mathbf{Y}]\rangle\right).$$

(b) En cualquier carta coordenada $(U,\varphi)$ se tiene

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right).$$

(c) En un marco local $(\mathbf{E}_i)$ definido en $U \subseteq M$, si $c_{ij}^k \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ son las $n^3$ funciones suaves definidas por

$$[\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j] = c_{ij}^k \mathbf{E}_k,$$

entonces los coeficientes de la conexión de Levi-Civita respecto a este marco son

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \mathbf{E}_i g_{jl} + \mathbf{E}_j g_{il} - \mathbf{E}_l g_{ij} - g_{jm} c_{il}^m - g_{lm} c_{ji}^m + g_{im} c_{lj}^m \right).$$

(d) Si $(\mathbf{E}_i)$ es ortonormal, la expresión se reduce a $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( c_{ij}^k - c_{ik}^j - c_{jk}^i \right)$.

*Demostración.* El inciso (1) es la fórmula obtenida en la demostración del teorema anterior. En un marco coordenado, los corchetes $[\partial_i, \partial_j]$ se anulan. Al tomar $\mathbf{X} = \partial_i$, $\mathbf{Y} = \partial_j$ y $\mathbf{Z} = \partial_l$, resulta

$$2 g_{kl} \Gamma_{ij}^k = \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}.$$

La contracción con $g^{lr}$ da (2).
Para un marco arbitrario $(\mathbf{E}_i)$, sustituimos $[\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j] = c_{ij}^k \mathbf{E}_k$ en la fórmula de Koszul. Se obtiene

$$2 g_{kl} \Gamma_{ij}^k = \mathbf{E}_i g_{jl} + \mathbf{E}_j g_{il} - \mathbf{E}_l g_{ij} - g_{jm} c_{il}^m - g_{lm} c_{ji}^m + g_{im} c_{lj}^m,$$

y la contracción con la métrica inversa prueba (3). Si el marco es ortonormal, $g_{ij} = \delta_{ij}$ y sus derivadas se anulan; la fórmula se reduce a

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (c_{ij}^k - c_{ik}^j - c_{jk}^i),$$

que es (4). □

El siguiente lema reúne las reglas de transformación de los símbolos de Christoffel, de las componentes de la métrica y de las componentes de su inversa.

**Lema 2.4.12.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Sean $(U, \varphi)$ y $(V, \psi)$ dos cartas de $M$ tales que $U \cap V \neq \varnothing$. Denotemos por $g_{ij}$, $g^{ij}$ y $\Gamma_{ij}^k$ las componentes de la métrica, de la métrica inversa y los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi–Civita en las coordenadas $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, y por $\widetilde{g}_{ab}$, $\widetilde{g}^{ab}$ y $\widetilde{\Gamma}_{ab}^c$ las correspondientes componentes en las coordenadas $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$. Entonces, para todo $p \in U \cap V$, se satisfacen las siguientes fórmulas:

(a) Las componentes de la métrica se transforman según

$$g_{ij}(p) = \frac{\partial y^a}{\partial x^i}(p) \frac{\partial y^b}{\partial x^j}(p) \widetilde{g}_{ab}(p).$$

(b) Las componentes de la inversa de la métrica se transforman según

$$g^{ij}(p) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a}(p) \frac{\partial x^j}{\partial y^b}(p) \widetilde{g}^{ab}(p).$$

(c) Los símbolos de Christoffel se transforman según

$$\Gamma_{ij}^{k}(p) = \frac{\partial x^k}{\partial y^c}(p)\frac{\partial y^a}{\partial x^i}(p)\frac{\partial y^b}{\partial x^j}(p)\widetilde{\Gamma}_{ab}^{c}(p) + \frac{\partial x^k}{\partial y^c}(p)\frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j}(p).$$

*Demostración.* Sea $p \in U \cap V$. Comenzamos con la métrica. Por la regla de la cadena,

$$\partial_i\Big|_p = \frac{\partial y^a}{\partial x^i}(p)\,\partial_a\Big|_p.$$

Por lo tanto,

$$g_{ij}(p) = \mathbf{g}_p\left(\partial_i\Big|_p, \partial_j\Big|_p\right) = \frac{\partial y^a}{\partial x^i}(p)\frac{\partial y^b}{\partial x^j}(p)\,\mathbf{g}_p\left(\partial_a\Big|_p, \partial_b\Big|_p\right).$$

Como $\mathbf{g}_p\left(\partial_a|_p, \partial_b|_p\right) = \widetilde{g}_{ab}(p)$, obtenemos

$$g_{ij}(p) = \frac{\partial y^a}{\partial x^i}(p)\frac{\partial y^b}{\partial x^j}(p)\,\widetilde{g}_{ab}(p).$$

Pasemos ahora a la métrica inversa. La identidad anterior puede escribirse matricialmente como

$$G(p) = J(p)^T\,\widetilde{G}(p)\,J(p),$$

donde $G(p) = \left(g_{ij}(p)\right)$, $\widetilde{G}(p) = \left(\widetilde{g}_{ab}(p)\right)$ y $J(p) = \left(\dfrac{\partial y^a}{\partial x^i}(p)\right)$. Invirtiendo esta igualdad, obtenemos

$$G(p)^{-1} = J(p)^{-1}\,\widetilde{G}(p)^{-1}\left(J(p)^T\right)^{-1}.$$

Como

$$J(p)^{-1} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a}(p)\right),$$

se sigue que

$$g^{ij}(p) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a}(p)\frac{\partial x^j}{\partial y^b}(p)\,\widetilde{g}^{ab}(p).$$

Probemos finalmente la fórmula de transformación de los símbolos de Christoffel. Por definición,

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^{k}\partial_k.$$

Usando de nuevo la relación entre los campos coordenados,

$$\partial_i = \frac{\partial y^a}{\partial x^i}\partial_a, \qquad \partial_j = \frac{\partial y^b}{\partial x^j}\partial_b,$$

y la regla de Leibniz para la conexión, tenemos

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\partial_a}\left(\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\partial_b\right) = \frac{\partial y^a}{\partial x^i}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\nabla_{\partial_a}\partial_b + \frac{\partial y^a}{\partial x^i}\partial_a\left(\frac{\partial y^c}{\partial x^j}\right)\partial_c.$$

Como $\nabla_{\partial_a}\partial_b = \widetilde{\Gamma}^c_{ab}\partial_c$, resulta

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\widetilde{\Gamma}^c_{ab} + \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j}\right)\partial_c.$$

Por otra parte, $\partial_c = \dfrac{\partial x^k}{\partial y^c}\partial_k$. Sustituyendo esta identidad en la expresión anterior, obtenemos

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^c}\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\widetilde{\Gamma}^c_{ab} + \frac{\partial x^k}{\partial y^c}\frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j}\right)\partial_k.$$

Comparando con $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k$, concluimos que

$$\Gamma^k_{ij}(p) = \frac{\partial x^k}{\partial y^c}(p)\frac{\partial y^a}{\partial x^i}(p)\frac{\partial y^b}{\partial x^j}(p)\widetilde{\Gamma}^c_{ab}(p) + \frac{\partial x^k}{\partial y^c}(p)\frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j}(p).$$

Esto concluye la demostración. □

La conexión en $TM$ induce conexiones en todos los haces tensoriales. La construcción comienza en el dual y en el producto tensorial.

**Proposición 2.4.13.** (Conexiones inducidas en haces tensoriales) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\nabla$ una conexión en $TM$. Entonces existe una única familia de conexiones, denotadas también por $\nabla$, en

$$T^{(k,l)}(TM) = TM^{\otimes k} \otimes (T^*M)^{\otimes l}, \qquad k, l \in \mathbb{N}_0,$$

con las propiedades siguientes.

(a) En $TM$ coincide con la conexión inicial y en $T^{(0,0)}(TM) = M \times \mathbb{R}$ está dada por $\nabla_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X}(f)$.

(b) La conexión dual satisface

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\omega)(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\big(\omega(\mathbf{Y})\big) - \omega(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}), \tag{2.5}$$

y, por lo tanto, el apareamiento natural es paralelo:

$$\mathbf{X}\big(\omega(\mathbf{Y})\big) = (\nabla_{\mathbf{X}}\omega)(\mathbf{Y}) + \omega(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}).$$

(c) Si $\mathbf{S} \in \Gamma(T^{(r,s)}(TM))$ y $\mathbf{T} \in \Gamma(T^{(p,q)}(TM))$, entonces

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{S}) \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T}). \tag{2.6}$$

(d) Si $\mathbf{T} \in \Gamma(T^{(k,l)}(TM))$, entonces

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{Y}_1,\dots,\mathbf{Y}_l) \\ = \mathbf{X}\big(\mathbf{T}(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{Y}_1,\dots,\mathbf{Y}_l)\big) \\ - \sum_{a=1}^{k}\mathbf{T}(\omega^1,\dots,\nabla_{\mathbf{X}}\omega^a,\dots,\omega^k,\mathbf{Y}_1,\dots,\mathbf{Y}_l)\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$-\sum_{b=1}^{l}\mathbf{T}(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{Y}_1,\dots,\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}_b,\dots,\mathbf{Y}_l).$$

(e) La conexión conmuta con toda contracción entre un índice contravariante y uno covariante. Si $C$ denota una de estas contracciones,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(CT)=C(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T}).$$

También conmuta con las permutaciones de factores, la simetrización y la alternación. En particular, para formas diferenciales,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\omega\wedge\eta)=(\nabla_{\mathbf{X}}\omega)\wedge\eta+\omega\wedge(\nabla_{\mathbf{X}}\eta).$$

Si $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ es un marco local con comarco dual $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ y $\nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{E}_i=\Gamma_{ai}^s\mathbf{E}_s$, entonces

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{T})^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}&=\mathbf{E}_a\big(T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\big)+\sum_{r=1}^{k}\Gamma^{i_r}_{as}T^{i_1\dots s\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\\&\quad-\sum_{t=1}^{l}\Gamma^{s}_{aj_t}T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots s\dots j_l}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

*Demostración.* Construimos primero la conexión dual. Para $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in\mathfrak{X}(M)$ y $\omega\in\Omega^1(M)$ definimos $\nabla_{\mathbf{X}}\omega$ mediante (2.5). El miembro derecho es lineal sobre $C^\infty(M)$ en $\mathbf{Y}$. Si $f\in C^\infty(M)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{X}\big(\omega(f\mathbf{Y})\big)-\omega(\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}))&=\mathbf{X}(f)\omega(\mathbf{Y})+f\mathbf{X}\big(\omega(\mathbf{Y})\big)\\&\quad-\mathbf{X}(f)\omega(\mathbf{Y})-f\,\omega(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})\\&=f\big[\mathbf{X}(\omega(\mathbf{Y}))-\omega(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})\big].\end{aligned}$$

Por el criterio tensorial, esto determina una 1-forma. Es suave porque sus evaluaciones en los elementos de un marco local son funciones suaves. Además,

$$\nabla_{f\mathbf{X}}\omega=f\nabla_{\mathbf{X}}\omega,\qquad\nabla_{\mathbf{X}}(f\omega)=\mathbf{X}(f)\omega+f\nabla_{\mathbf{X}}\omega,$$

como se obtiene sustituyendo en (2.5). Así, se trata de una conexión en $T^*M$. La identidad del apareamiento es la propia fórmula de definición y determina de manera única a $\nabla_{\mathbf{X}}\omega$, por lo que la conexión dual es única. Consideremos ahora, de manera más general, dos haces vectoriales suaves $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ provistos de conexiones $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $\nabla^{\mathbf{F}}$. Sobre secciones locales descomponibles proponemos

$$\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\sigma\otimes\tau)=(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\sigma)\otimes\tau+\sigma\otimes(\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\tau).\tag{2.9}$$

Esta regla respeta la relación de balanceo. En efecto,

$$\nabla_{\mathbf{X}}((f\sigma)\otimes\tau)=\mathbf{X}(f)\sigma\otimes\tau+f(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\sigma)\otimes\tau+f\sigma\otimes\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\tau,$$

mientras que

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\sigma\otimes(f\tau))=f(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\sigma)\otimes\tau+\mathbf{X}(f)\sigma\otimes\tau+f\sigma\otimes\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\tau.$$

Por lo tanto, ambas representaciones del mismo tensor producen el mismo resultado. En un abierto trivializante, el isomorfismo

$$\Gamma(\mathbf{E}|_U)\otimes_{C^\infty(U)}\Gamma(\mathbf{F}|_U)\longrightarrow\Gamma((\mathbf{E}\otimes\mathbf{F})|_U)$$

permite extender (2.9) por aditividad a toda sección. Esto prueba expresamente que la definición no depende de la representación como suma de tensores descomponibles. En marcos locales, la fórmula sólo contiene coeficientes suaves y sus derivadas, de modo que produce una sección suave. También da directamente

$$\nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{S}=f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{S},\qquad \nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{S})=\mathbf{X}(f)\mathbf{S}+f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{S}.$$

Las definiciones locales coinciden en los traslapes porque están caracterizadas por la misma regla sobre secciones descomponibles; por ello se pegan en una conexión global. Puesto que dichas secciones generan localmente $\Gamma(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F})$, la regla determina la conexión de manera única.

Aplicamos sucesivamente esta construcción a $TM$ y a la conexión dual en $T^*M$. Obtenemos conexiones en $TM^{\otimes k}\otimes(T^*M)^{\otimes l}$. La unicidad de la conexión producto muestra que estas conexiones son compatibles con las identificaciones asociativas canónicas, por lo que no dependen de cómo se coloquen los paréntesis en el producto tensorial.

Para obtener (2.7), contraemos $\mathbf{T}\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^k\otimes\mathbf{Y}_1\otimes\cdots\otimes\mathbf{Y}_l$ hasta obtener una función. La regla del producto tensorial y la identidad paralela del apareamiento dan

$$\begin{aligned}\mathbf{X}\big(\mathbf{T}(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{Y}_1,\dots,\mathbf{Y}_l)\big)&=(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{Y}_1,\dots,\mathbf{Y}_l)\\&\quad+\sum_{a=1}^{k}\mathbf{T}(\omega^1,\dots,\nabla_{\mathbf{X}}\omega^a,\dots,\omega^k,\mathbf{Y}_1,\dots,\mathbf{Y}_l)\\&\quad+\sum_{b=1}^{l}\mathbf{T}(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{Y}_1,\dots,\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}_b,\dots,\mathbf{Y}_l).\end{aligned}$$

Al despejar el primer término se obtiene la fórmula intrínseca, incluidos los signos negativos de todos los argumentos contravariantes y covariantes en los que se evalúa $\mathbf{T}$.

Una contracción elemental es el apareamiento de un factor $TM$ con uno $T^*M$. Al derivar un tensor descomponible, los dos términos en los que la conexión actúa sobre esos factores se combinan, por (2.5), en la derivada de su apareamiento. Los demás factores permanecen sin cambio. Por linealidad se sigue que $\nabla_{\mathbf{X}}(CT)=C(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T})$ para toda contracción $C$.

Si $P_\sigma$ permuta factores del mismo tipo, la fórmula producto aplicada a un tensor descomponible muestra término a término que $\nabla_{\mathbf{X}}P_\sigma=P_\sigma\nabla_{\mathbf{X}}$. La simetrización y la alternación son combinaciones lineales de estos operadores, por lo que también conmutan con la conexión. Como el producto cuña es la alternación normalizada del producto tensorial, obtenemos

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega}\wedge\eta)=(\nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega})\wedge\eta+\boldsymbol{\omega}\wedge(\nabla_{\mathbf{X}}\eta).$$

Finalmente, la identidad $\boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{E}_i)=\delta^j_i$ y la compatibilidad con el apareamiento dan

$$0=\mathbf{E}_a(\delta^j_i)=(\nabla_{\mathbf{E}_a}\boldsymbol{\varepsilon}^j)(\mathbf{E}_i)+\boldsymbol{\varepsilon}^j(\nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{E}_i),$$

y, por consiguiente,

$$\nabla_{\mathbf{E}_a}\boldsymbol{\varepsilon}^j = -\Gamma^j_{as}\boldsymbol{\varepsilon}^s.$$

Al derivar

$$\mathbf{T} = T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\,\mathbf{E}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{i_k}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_l}$$

aparece un signo positivo por cada factor $\mathbf{E}_{i_r}$ y un signo negativo por cada factor $\boldsymbol{\varepsilon}^{j_t}$. La reindexación de estos términos da exactamente (2.8).
Las reglas anteriores determinan la conexión sobre todos los elementos de un marco tensorial local y la regla de Leibniz determina su acción sobre los coeficientes. Esto prueba también la unicidad de toda la familia de conexiones inducidas. □

Con esta proposición podemos reescribir la compatibilidad de la métrica con la conexión de Levi–Civita como sigue:

**Teorema 2.4.14.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\nabla$ su conexión de Levi–Civita. La conexión de Levi–Civita es compatible con $\mathbf{g}$ en el sentido de que $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{g} = 0$ para todo $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M)$.

*Demostración.* Por la Definición 2.4.8, como $\nabla$ es una conexión compatible con $\mathbf{g}$, sabemos que para cualesquiera $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}\in\mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_{\mathbf{X}}\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle = \langle\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle + \langle\mathbf{Y},\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle,$$

por lo que de la Proposición 2.4.13,

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = \mathbf{X}(\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})) - \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}) - \mathbf{g}(\mathbf{Y},\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z})$$

$$= \nabla_{\mathbf{X}}\langle\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle - \langle\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle - \langle\mathbf{Y},\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\rangle = 0.$$

□

En coordenadas locales la derivada covariante de un campo tensorial se ve como sigue:

**Lema 2.4.15.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\nabla$ una conexión en $TM$. Sea $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ un marco local suave de $TM$ sobre $U\subseteq M$ y $(\boldsymbol{\varepsilon}^1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^n)$ su comarco dual. Si $\mathbf{F}$ es un campo tensorial de tipo $(k,l)$ escrito respecto a este marco como

$$\mathbf{F} = \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n}} F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\,\mathbf{E}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{i_k}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_l},$$

entonces, para cada $a\in\{1,\dots,n\}$,

$$\left(\nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F}\right)^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \mathbf{E}_a\left(F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\right) + \sum_{r=1}^{k}\Gamma^{i_r}_{as}F^{i_1\dots s\dots i_k}_{j_1\dots j_l} - \sum_{t=1}^{l}\Gamma^{s}_{aj_t}F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots s\dots j_l},$$

donde $\Gamma^c_{ai}$ son los coeficientes de conexión de $\nabla$ relativos al marco $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$, es decir, $\nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{E}_i = \Gamma^c_{ai}\mathbf{E}_c$.

*Demostración.* Sea $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ un marco local suave de $TM$ sobre $U$ y $(\boldsymbol{\varepsilon}^1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^n)$ el comarco dual, de modo que $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^j, \mathbf{E}_i\rangle = \delta_i^j$. Fijemos $a \in \{1,\dots,n\}$.
Como $\nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{E}_i = \Gamma_{ai}^s \mathbf{E}_s$, la regla del producto para el apareamiento (Proposición 2.4.13) aplicada a $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^j, \mathbf{E}_i\rangle$ da

$$0 = \mathbf{E}_a(\delta_i^j) = \nabla_{\mathbf{E}_a}\langle \boldsymbol{\varepsilon}^j, \mathbf{E}_i\rangle = \langle \nabla_{\mathbf{E}_a}\boldsymbol{\varepsilon}^j, \mathbf{E}_i\rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}^j, \nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{E}_i\rangle = \langle \nabla_{\mathbf{E}_a}\boldsymbol{\varepsilon}^j, \mathbf{E}_i\rangle + \Gamma_{ai}^j,$$

y por lo tanto $\langle \nabla_{\mathbf{E}_a}\boldsymbol{\varepsilon}^j, \mathbf{E}_i\rangle = -\Gamma_{ai}^j$ para todo $i$, lo cual equivale a

$$\nabla_{\mathbf{E}_a}\boldsymbol{\varepsilon}^j = -\Gamma_{as}^j \boldsymbol{\varepsilon}^s.$$

Escribiendo el campo tensorial $\mathbf{F}$ respecto al marco como

$$\mathbf{F} = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{n} F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k}\, \mathbf{E}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{i_k}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_l},$$

y usando la regla de Leibniz para productos tensoriales junto con $\nabla_{\mathbf{E}_a} f = \mathbf{E}_a(f)$, se obtiene una combinación lineal de campos tensoriales del marco en la que aparecen los términos provenientes de derivar los coeficientes y de derivar cada factor $\mathbf{E}_{i_r}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^{j_t}$. Sustituyendo $\nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{E}_{i_r} = \Gamma_{ai_r}^s \mathbf{E}_s$ y $\nabla_{\mathbf{E}_a}\boldsymbol{\varepsilon}^{j_t} = -\Gamma_{as}^{j_t}\boldsymbol{\varepsilon}^s$, y reexpresando en la base de campos tensoriales asociada al marco, se concluye que

$$\left(\nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F}\right)_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k} = \mathbf{E}_a\left(F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k}\right) + \sum_{r=1}^{k}\Gamma_{as}^{i_r} F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots s\dots i_k} - \sum_{t=1}^{l}\Gamma_{aj_t}^{s} F_{j_1\dots s\dots j_l}^{i_1\dots i_k}.$$

□

Con esta proposición, el Teorema 2.4.14 queda como sigue:

**Corolario 2.4.16.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera con conexión de Levi–Civita $\nabla$. En un marco local $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ con comarco dual $(\boldsymbol{\varepsilon}^1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^n)$, se tiene

$$\mathbf{E}_a(g_{ij}) = \Gamma_{ai}^s g_{sj} + \Gamma_{aj}^s g_{is}.$$

*Demostración.* Aplicando el Teorema 2.4.14 y el Lema 2.4.15 al $(0,2)$-campo tensorial $\mathbf{g}$, se obtiene

$$0 = (\nabla_a \mathbf{g})_{ij} = \mathbf{E}_a(g_{ij}) - \Gamma_{ai}^s g_{sj} - \Gamma_{aj}^s g_{is}.$$

De aquí se sigue directamente que

$$\mathbf{E}_a(g_{ij}) = \Gamma_{ai}^s g_{sj} + \Gamma_{aj}^s g_{is}.$$

□

**Corolario 2.4.17.** Bajo las mismas hipótesis del Corolario 2.4.16, para la inversa de la métrica $g^{ij}$ se cumple la relación

$$\mathbf{E}_a(g^{ij}) = -\left(\Gamma_{as}^i g^{sj} + \Gamma_{as}^j g^{is}\right).$$

*Demostración.* Partimos de la identidad $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$. Aplicando $E_a$ y usando la regla de Leibniz, se obtiene

$$E_a(g^{ik})g_{kj} + g^{ik}E_a(g_{kj}) = 0.$$

Sustituyendo la expresión de $E_a(g_{kj})$ dada por el Corolario 2.4.16, se tiene

$$E_a(g^{ik})g_{kj} + g^{ik}\left(\Gamma^s_{ak}g_{sj} + \Gamma^s_{aj}g_{ks}\right) = 0.$$

Desarrollando y usando que $g^{ik}g_{ks} = \delta^i_s$, resulta

$$E_a(g^{ik})g_{kj} + g^{ik}\Gamma^s_{ak}g_{sj} + \Gamma^i_{aj} = 0.$$

Multiplicando por la derecha por $g^{jm}$, se obtiene

$$E_a(g^{ik})\delta^m_k + g^{ik}\Gamma^s_{ak}\delta^m_s + \Gamma^i_{aj}g^{jm} = 0.$$

Esto es,

$$E_a(g^{im}) + g^{ik}\Gamma^m_{ak} + \Gamma^i_{aj}g^{jm} = 0.$$

Renombrando índices mudos y despejando, se concluye que

$$E_a(g^{ij}) = -\left(\Gamma^i_{as}g^{sj} + \Gamma^j_{as}g^{is}\right).$$

□

La conexión en los haces tensoriales inducida por la conexión de Levi-Civita es compatible con el producto interno inducido en tensores:

**Proposición 2.4.18.** (Compatibilidad de la conexión de Levi-Civita con el producto interno para tensores) Supongamos que $(M, \mathbf{g})$ es una variedad riemanniana con o sin frontera. La conexión inducida en cada haz tensorial por la conexión de Levi-Civita es compatible con el producto interno de campos tensoriales en el siguiente sentido:

$$\mathbf{X}\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle = \langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle + \langle \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{G}\rangle$$

para cualquier $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y cualesquiera $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \Gamma(T^{(k,l)}(TM))$.

*Demostración.* La conexión inducida conmuta con productos tensoriales y contracciones. Por lo tanto, basta verificar la identidad sobre tensores simples. Sean

$$\mathbf{F} = \mathbf{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{Y}_k \otimes \boldsymbol{\alpha}^1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\alpha}^l$$

y una expresión análoga para $\mathbf{G}$, con factores $\mathbf{Z}_i$ y $\boldsymbol{\beta}^a$. Su producto interno es el producto de los emparejamientos de los factores:

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle = \prod_{i=1}^{k}\langle \mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i\rangle \prod_{a=1}^{l}\langle \boldsymbol{\alpha}^a, \boldsymbol{\beta}^a\rangle.$$

La regla de Leibniz ordinaria expresa $\mathbf{X}\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle$ como la suma de los términos en los que se deriva uno de esos

factores. La compatibilidad de Levi–Civita en $TM$ da

$$\mathbf{X}\langle \mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i\rangle = \langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i\rangle + \langle \mathbf{Y}_i, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}_i\rangle.$$

En el dual, la definición

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{Y})) - \boldsymbol{\alpha}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})$$

y la compatibilidad de la métrica dan la misma identidad para covectores. Agrupando los términos en los que se deriva un factor de $\mathbf{F}$ y los términos en los que se deriva uno de $\mathbf{G}$, se obtiene exactamente

$$\mathbf{X}\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle = \langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle + \langle \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{G}\rangle.$$

La bilinealidad extiende la igualdad a campos tensoriales arbitrarios. □

La derivada covariante total reúne en un solo tensor las derivadas en todas las direcciones y servirá como análogo geométrico de las derivadas totales de orden superior.

**Proposición 2.4.19.** (La derivada covariante total) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y $\nabla$ una conexión en $TM$. Para cada $\mathbf{F} \in \Gamma(T^{(k,l)}(TM))$, el mapeo

$$\nabla\mathbf{F}\colon \underbrace{\Omega^1(M)\times\cdots\times\Omega^1(M)}_{k\text{–veces}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{(l+1)\text{–veces}} \longrightarrow C^\infty(M)$$

dado por

$$(\nabla\mathbf{F})(\boldsymbol{\omega}^1,\dots,\boldsymbol{\omega}^k,\mathbf{X},\mathbf{Y}_1,\dots,\mathbf{Y}_l) = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{F})(\boldsymbol{\omega}^1,\dots,\boldsymbol{\omega}^k,\mathbf{Y}_1,\dots,\mathbf{Y}_l)$$

define un $(k,l+1)$-campo tensorial suave en $M$ llamado la **derivada covariante total de $\mathbf{F}$**.

*Demostración.* Por el Lema 1.10.18, como $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{F}$ es un $(k,l)$ campo tensorial, es $C^\infty(M)$ multilineal en sus $k+l$ argumentos y es lineal sobre $C^\infty(M)$ en $\mathbf{X}$ por definición de conexión, por lo que $\nabla\mathbf{F}$ define un $(k,l+1)$-campo tensorial suave en $M$. □

El Lema 2.4.15 se traduce en términos de la derivada covariante total como sigue:

**Corolario 2.4.20.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera con una conexión $\nabla$ y $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ un marco local suave de $TM$ sobre $U \subseteq M$, con comarco dual $(\boldsymbol{\varepsilon}^1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^n)$. Si $\mathbf{F}$ es un campo tensorial de tipo $(k,l)$, su derivada covariante total $\nabla\mathbf{F}$ se ve respecto a este marco como

$$\nabla\mathbf{F} = \sum_{a=1}^{n}\sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n}} (\nabla_a\mathbf{F})^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\mathbf{E}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{i_k}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^a\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_l}.$$

En particular, sus componentes son

$$(\nabla\mathbf{F})^{i_1\dots i_k}_{aj_1\dots j_l} = (\nabla_a\mathbf{F})^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \mathbf{E}_a\left(F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\right) + \sum_{r=1}^{k}\Gamma^{i_r}_{as}F^{i_1\dots s\dots i_k}_{j_1\dots j_l} - \sum_{t=1}^{l}\Gamma^{s}_{aj_t}F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots s\dots j_l},$$

donde $\nabla_a := \nabla_{\mathbf{E}_a}$ y los coeficientes de conexión $\Gamma^c_{ab}$ están definidos por $\nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{E}_b = \Gamma^c_{ab}\mathbf{E}_c$.

*Demostración.* La definición de derivada covariante total implica

$$(\nabla \mathbf{F})(\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1},\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^{i_k},\mathbf{E}_a,\mathbf{E}_{j_1},\dots,\mathbf{E}_{j_l}) = (\nabla_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F})(\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1},\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^{i_k},\mathbf{E}_{j_1},\dots,\mathbf{E}_{j_l}).$$

El Lema 2.4.15 calcula el miembro derecho como

$$\mathbf{E}_a\left(F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\right) + \sum_{r=1}^{k}\Gamma^{i_r}_{as}F^{i_1\dots s\dots i_k}_{j_1\dots j_l} - \sum_{t=1}^{l}\Gamma^{s}_{aj_t}F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots s\dots j_l}.$$

Éstas son precisamente las componentes de $\nabla\mathbf{F}$ en el marco y el comarco indicados; al reconstruir el tensor a partir de sus componentes se obtiene la primera fórmula del enunciado. □

**Observación 2.4.21.** Como hemos definido $\nabla\mathbf{F}$ para un $(k,l)$-campo tensorial y resulta ser un $(k,l+1)$-campo tensorial, podemos definir $\nabla^2\mathbf{F} = \nabla(\nabla\mathbf{F})$, que resulta ser un $(k,l+2)$-campo tensorial. En general, denotamos $\nabla^s\mathbf{F} := \underbrace{\nabla(\nabla(\dots(\nabla\mathbf{F})))}_{s-\text{veces}} \in \Gamma(T^{(k,l+s)}(TM))$. Para una función $u \in C^\infty(M)$, considerada como tensor de tipo $(0,0)$, la misma construcción define sus derivadas covariantes iteradas $\nabla^s u$.

Las conexiones en $TM$ y sus haces tensoriales se relacionan del siguiente modo con el producto cuña:

**Proposición 2.4.22.** (Compatibilidad de la conexión con el producto cuña) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\nabla$ una conexión en $TM$. Entonces para cualesquiera $k,l \geq 0$, si $\omega \in \Gamma(\Lambda^k T^*M)$ y $\eta \in \Gamma(\Lambda^l T^*M)$, se cumple que

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\omega\wedge\eta) = (\nabla_{\mathbf{X}}\omega)\wedge\eta + \omega\wedge(\nabla_{\mathbf{X}}\eta) \qquad \text{para todo } \mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M).$$

*Demostración.* Sea $\omega \in \Gamma(\Lambda^k T^*M)$ y $\eta \in \Gamma(\Lambda^l T^*M)$. Por definición,

$$\omega\wedge\eta = \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\operatorname{sgn}\sigma)^\sigma(\omega\otimes\eta),$$

donde para $\mathbf{T}\in\Gamma(T^{(0,k+l)}(TM))$ y $\sigma\in S_{k+l}$ se define

$$({}^\sigma\mathbf{T})(v_1,\dots,v_{k+l}) = \mathbf{T}(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k+l)}).$$

Para $\mathbf{T}\in\Gamma(T^{(0,k+l)}(TM))$ se tiene, de acuerdo con (2.7),

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(w_1,\dots,w_{k+l}) = \mathbf{X}(\mathbf{T}(w_1,\dots,w_{k+l})) - \sum_{j=1}^{k+l}\mathbf{T}(w_1,\dots,\nabla_{\mathbf{X}}w_j,\dots,w_{k+l}).$$

Aplicando esto a ${}^\sigma\mathbf{T}$ y evaluando en $(v_1,\dots,v_{k+l})$ se obtiene

$$(\nabla_{\mathbf{X}}({}^\sigma\mathbf{T}))(v_1,\dots,v_{k+l}) = \mathbf{X}(\mathbf{T}(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})) - \sum_{j=1}^{k+l}\mathbf{T}(v_{\sigma(1)},\dots,\nabla_{\mathbf{X}}v_{\sigma(j)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$$

$$= (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k+l)}) = ({}^\sigma(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T}))(v_1,\dots,v_{k+l}),$$

de donde se concluye $\nabla_{\mathbf{X}}({}^{\sigma}\mathbf{T}) = {}^{\sigma}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T})$.
Derivando la expresión de $\omega \wedge \eta$ y usando linealidad,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\omega \wedge \eta) = \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)\nabla_{\mathbf{X}}\left({}^{\sigma}(\omega\otimes\eta)\right).$$

De lo anterior,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\omega \wedge \eta) = \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)^{\sigma}\left(\nabla_{\mathbf{X}}(\omega\otimes\eta)\right).$$

Por (2.6),

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\omega\otimes\eta) = (\nabla_{\mathbf{X}}\omega)\otimes\eta + \omega\otimes(\nabla_{\mathbf{X}}\eta).$$

Sustituyendo,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\omega \wedge \eta) = \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)^{\sigma}\left((\nabla_{\mathbf{X}}\omega)\otimes\eta + \omega\otimes(\nabla_{\mathbf{X}}\eta)\right)$$

$$= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)^{\sigma}((\nabla_{\mathbf{X}}\omega)\otimes\eta) + \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)^{\sigma}(\omega\otimes(\nabla_{\mathbf{X}}\eta)).$$

Reconociendo la definición del producto cuña en cada término se concluye

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\omega \wedge \eta) = (\nabla_{\mathbf{X}}\omega)\wedge\eta + \omega\wedge(\nabla_{\mathbf{X}}\eta).$$

□

Otra operación que satisface la regla de Leibniz respecto a las conexiones es la multiplicación interior:

**Lema 2.4.23.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, $\nabla$ una conexión para $TM$ y $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ un marco local suave de $TM$ con comarco dual $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$. Para todo campo tensorial $\mathbf{F}\in\Gamma(T^{(k,l+1)}(TM))$, se cumple que

$$\nabla_a\left(\iota_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F}\right) = \iota_{\nabla_a\mathbf{E}_a}\mathbf{F} + \iota_{\mathbf{E}_a}(\nabla_a\mathbf{F}).$$

*Demostración.* Por la Proposición 1.10.24 sabemos que si $\mathbf{F}$ tiene componentes en los marcos $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ y $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ dadas por $F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_{l+1}}$, entonces las componentes de $\iota_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F}$ son $(\iota_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F})^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = F^{i_1\dots i_k}_{aj_1\dots j_l}$. Aplicando el Lema 2.4.15 se obtiene

$$(\nabla_a(\iota_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F}))^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \mathbf{E}_a\left(F^{i_1\dots i_k}_{aj_1\dots j_l}\right) + \sum_{r=1}^{k}\Gamma^{i_r}_{as}F^{i_1\dots s\dots i_k}_{aj_1\dots j_l} - \sum_{t=1}^{l}\Gamma^{s}_{aj_t}F^{i_1\dots i_k}_{aj_1\dots s\dots j_l}. \tag{2.10}$$

Por otra parte, la Observación 1.10.25 nos dice que $\nabla_a\mathbf{E}_a = \Gamma^s_{aa}\mathbf{E}_s$, por lo que se tiene

$$\left(\iota_{\nabla_a\mathbf{E}_a}\mathbf{F}\right)^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \Gamma^s_{aa}F^{i_1\dots i_k}_{sj_1\dots j_l}.$$

Finalmente, por el Lema 2.4.15,

$$\left(\iota_{\mathbf{E}_a}(\nabla_a\mathbf{F})\right)^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = (\nabla_a\mathbf{F})^{i_1\dots i_k}_{aj_1\dots j_l}$$

$$= \mathbf{E}_a\left(F^{i_1\dots i_k}_{aj_1\dots j_l}\right) + \sum_{r=1}^{k} \Gamma^{i_r}_{as} F^{i_1\dots s\dots i_k}_{aj_1\dots j_l} - \Gamma^{s}_{aa} F^{i_1\dots i_k}_{sj_1\dots j_l} - \sum_{t=1}^{l} \Gamma^{s}_{aj_t} F^{i_1\dots i_k}_{aj_1\dots s\dots j_l}.$$

Por lo tanto

$$(\nabla_a(\iota_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F}))^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \left(\iota_{\nabla_a\mathbf{E}_a}\mathbf{F}\right)^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} + \left(\iota_{\mathbf{E}_a}(\nabla_a\mathbf{F})\right)^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}.$$

□

Se puede generalizar la noción de conexión en los haces tensoriales para el producto tensorial de dos haces vectoriales como sigue:

**Proposición 2.4.24.** Sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves sobre una variedad suave $M$ con o sin frontera, provistos de conexiones $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $\nabla^{\mathbf{F}}$ en el sentido de la Definición 2.4.2. Entonces:

(a) Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ tienen conexiones $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $\nabla^{\mathbf{F}}$, el haz tensorial $\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}$ admite una única conexión $\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}\colon \mathfrak{X}(M)\times\Gamma(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F})$ determinada por la regla

$$\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\sigma\otimes\tau) = (\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\sigma)\otimes\tau + \sigma\otimes(\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\tau), \qquad \mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M),\ \sigma\in\Gamma(\mathbf{E}),\ \tau\in\Gamma(\mathbf{F}),$$

y extendida por bilinealidad y la propiedad

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{T}) = f\,\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T} + (\mathbf{X}f)\,\mathbf{T}, \qquad f\in C^\infty(M).$$

(b) La conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ induce una única conexión $\nabla^{\mathbf{E}^*}\colon \mathfrak{X}(M)\times\Gamma(\mathbf{E}^*) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}^*)$ caracterizada por la identidad

$$\mathbf{X}\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \langle\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{v},\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\rangle, \qquad \mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E}),\ \mathbf{v}\in\Gamma(\mathbf{E}^*),\ \mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M).$$

(c) La conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ induce una conexión $\nabla^{\mathrm{End}(\mathbf{E})}$ en $\mathrm{End}(\mathbf{E})\cong\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{E}$, definida para todo $\mathbf{T}\in\Gamma(\mathrm{End}(\mathbf{E}))$ por

$$(\nabla^{\mathrm{End}(\mathbf{E})}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(\mathbf{u}) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}\mathbf{u}) - \mathbf{T}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E}),\ \mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M).$$

(d) Las conexiones $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $\nabla^{\mathbf{F}}$ inducen una conexión $\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})}$ en el haz $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})\cong\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{F}$, determinada por la regla

$$(\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Phi})(\mathbf{u}) = \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u})) - \boldsymbol{\Phi}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}), \qquad \boldsymbol{\Phi}\in\Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})),\ \mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E}),\ \mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M).$$

Equivalente y de forma intrínseca, si $\boldsymbol{\Phi}\in\Gamma(\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{F})$, entonces $\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})}$ es la conexión inducida por las de $\mathbf{E}^*$ y $\mathbf{F}$ a través del producto tensorial.

*Demostración.* Para el producto tensorial definimos la conexión sobre secciones locales descomponibles mediante la fórmula del inciso (a). Si $f\in C^\infty(M)$, los dos desarrollos

$$\nabla_{\mathbf{X}}((f\mathbf{u})\otimes\mathbf{v}) = \mathbf{X}(f)\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} + f(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v} + f\mathbf{u}\otimes\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v},$$
$$\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}\otimes(f\mathbf{v})) = f(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v} + \mathbf{X}(f)\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} + f\mathbf{u}\otimes\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}$$

coinciden. La regla respeta, por lo tanto, las relaciones de balanceo y no depende de la representación

de una sección como suma de tensores descomponibles. En marcos locales produce coeficientes suaves y satisface las dos reglas de una conexión. La unicidad se sigue de que las secciones descomponibles generan localmente $\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}$.

Para el dual ponemos

$$(\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\mathbf{v})(\mathbf{u}) := \mathbf{X}(\mathbf{v}(\mathbf{u})) - \mathbf{v}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}).$$

El mismo cálculo

$$\mathbf{X}(\mathbf{v}(f\mathbf{u})) - \mathbf{v}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{u})) = f\left[\mathbf{X}(\mathbf{v}(\mathbf{u})) - \mathbf{v}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\right]$$

muestra que el miembro derecho es lineal sobre $C^\infty(M)$ en $\mathbf{u}$ y define una sección suave de $\mathbf{E}^*$. La linealidad sobre $C^\infty(M)$ en $\mathbf{X}$ y la regla $\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{v}) = \mathbf{X}(f)\mathbf{v} + f\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}$ se verifican directamente. La identidad del apareamiento determina esta conexión de manera única.

La conexión producto en $\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{E}$ induce la conexión en $\mathrm{End}(\mathbf{E})$. Al derivar la identidad $\mathbf{Tu}$ y usar que el apareamiento es paralelo, se obtiene

$$(\nabla^{\mathrm{End}(\mathbf{E})}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(\mathbf{u}) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Tu}) - \mathbf{T}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}).$$

El mismo argumento en $\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{F}$ da

$$(\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Phi})(\mathbf{u}) = \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{\Phi}(\mathbf{u})) - \mathbf{\Phi}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}).$$

Estas fórmulas también prueban la unicidad en los dos últimos casos. □

Una conexión se puede definir de manera equivalente como un operador entre secciones de ciertos haces vectoriales como muestra la siguiente proposición. En análisis global esta equivalencia suele usarse por la mayoría de autores en casi todas las situaciones en las que se trabaja con conexiones.

**Proposición 2.4.25.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave. Dar una conexión en $\mathbf{E}$ en el sentido de la Definición 2.4.2 es equivalente a dar un operador

$$\nabla\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma\left(T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\right),$$

lineal sobre $\mathbb{R}$ y que satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(f\sigma) = df\otimes\sigma + f\nabla\sigma, \qquad f\in C^\infty(M), \sigma\in\Gamma(\mathbf{E}).$$

La relación entre ambas formulaciones se describe usando el isomorfismo canónico

$$\Upsilon:\ \Gamma\left(T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\right) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\left(\mathfrak{X}(M),\Gamma(\mathbf{E})\right).$$

Con esta identificación, para $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M)$ y $\sigma\in\Gamma(\mathbf{E})$ se tiene

$$\Upsilon(\nabla\sigma)(\mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{X}}\sigma.$$

*Demostración.* Por la Proposición 1.10.14, aplicada a $TM$ y $\mathbf{E}$, existe un isomorfismo canónico de haces

vectoriales

$$\Phi:\ T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\ \xrightarrow{\cong}\ \mathrm{Hom}(TM,\mathbf{E}),\qquad \Phi_p(\omega_p\otimes v)(\mathbf{X}_p)=\omega_p(\mathbf{X}_p)v,$$

para todo $p\in M$, $\omega_p\in T_p^*M$, $v\in\mathbf{E}_p$ y $\mathbf{X}_p\in T_pM$.
Al pasar a secciones obtenemos

$$\Gamma(\Phi):\ \Gamma\big(T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)\ \longrightarrow\ \Gamma\big(\mathrm{Hom}(TM,\mathbf{E})\big),\qquad \big(\Gamma(\Phi)(\mathbf{s})\big)(p)=\Phi_p\big(\mathbf{s}(p)\big).$$

Componiendo con la identificación de la Proposición 1.7.31,

$$\Theta:\ \Gamma\big(\mathrm{Hom}(TM,\mathbf{E})\big)\ \xrightarrow{\cong}\ \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\big(\mathfrak{X}(M),\Gamma(\mathbf{E})\big),\qquad \Theta(\mathbf{A})(\mathbf{X})(p)=\mathbf{A}(p)\big(\mathbf{X}_p\big),$$

obtenemos el isomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos

$$\Upsilon\ :=\ \Theta\circ\Gamma(\Phi):\ \Gamma\big(T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)\ \xrightarrow{\cong}\ \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\big(\mathfrak{X}(M),\Gamma(\mathbf{E})\big),$$

dado explícitamente por

$$\big(\Upsilon(\mathbf{s})\big)(\mathbf{X})(p)=\Theta\big(\Gamma(\Phi)(\mathbf{s})\big)(\mathbf{X})(p)=\Gamma(\Phi)(\mathbf{s})(p)\big(\mathbf{X}_p\big)=\Phi_p\big(\mathbf{s}(p)\big)\big(\mathbf{X}_p\big).$$

Denotamos por $\Upsilon^{-1}$ a su inversa.
($\Rightarrow$) Supongamos que tenemos una conexión en el sentido de la Definición 2.4.2. Fijada $\sigma\in\Gamma(\mathbf{E})$, el mapeo

$$F_\sigma:\ \mathfrak{X}(M)\longrightarrow\Gamma(\mathbf{E}),\qquad \mathbf{X}\longmapsto\nabla_{\mathbf{X}}\sigma,$$

es $C^\infty(M)$-lineal en $\mathbf{X}$. Por lo tanto $F_\sigma\in\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\big(\mathfrak{X}(M),\Gamma(\mathbf{E})\big)$ y, por el isomorfismo $\Upsilon^{-1}$, existe una única sección $\mathbf{s}=\nabla\sigma\in\Gamma\big(T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ tal que

$$\Upsilon(\nabla\sigma)(\mathbf{X})\ =\ \nabla_{\mathbf{X}}\sigma,\qquad\forall\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M).$$

En particular, para todo $p\in M$ y $\mathbf{X}_p\in T_pM$,

$$\Phi_p\big((\nabla\sigma)(p)\big)(\mathbf{X}_p)\ =\ \nabla_{\mathbf{X}}\sigma(p).$$

Sea ahora $f\in C^\infty(M)$. Usando la regla de Leibniz de la conexión,

$$\Upsilon\big(\nabla(f\sigma)\big)(\mathbf{X})=\nabla_{\mathbf{X}}(f\sigma)=(\mathbf{X}f)\sigma+f\nabla_{\mathbf{X}}\sigma.$$

Por otra parte,

$$\Upsilon(df\otimes\sigma)(\mathbf{X})(p)=\Phi_p\big((df\otimes\sigma)(p)\big)(\mathbf{X}_p)=df_p(\mathbf{X}_p)\sigma(p)=(\mathbf{X}f)(p)\sigma(p),$$

y, como $\Upsilon$ es $C^\infty(M)$-lineal,

$$\Upsilon(f\nabla\sigma)(\mathbf{X})=f\cdot\Upsilon(\nabla\sigma)(\mathbf{X})=f\nabla_{\mathbf{X}}\sigma.$$

De este modo,

$$\Upsilon\big(\nabla(f\sigma)\big)(\mathbf{X})=\Upsilon\big(df\otimes\sigma+f\nabla\sigma\big)(\mathbf{X}),\qquad\forall\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M).$$

Como $\Upsilon$ es un isomorfismo, concluimos

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma.$$

($\Leftarrow$) Recíprocamente, sea $\nabla\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma\big(T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ un operador lineal sobre $\mathbb{R}$ que satisface

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma.$$

Definimos, para $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$\nabla_{\mathbf{X}}\sigma \;:=\; \Upsilon(\nabla\sigma)(\mathbf{X}), \quad \text{es decir} \quad \nabla_{\mathbf{X}}\sigma(p) = \Phi_p\big((\nabla\sigma)(p)\big)(\mathbf{X}_p).$$

Entonces $\nabla_{\mathbf{X}}$ es lineal en $\sigma$, y además, usando la identidad de Leibniz en el lado de secciones y la $C^\infty(M)$-linealidad de $\Upsilon$,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\sigma) = \Upsilon\big(\nabla(f\sigma)\big)(\mathbf{X}) = \Upsilon\big(df\otimes\sigma + f\nabla\sigma\big)(\mathbf{X}) = \Upsilon(df\otimes\sigma)(\mathbf{X}) + f\Upsilon(\nabla\sigma)(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}f)\sigma + f\nabla_{\mathbf{X}}\sigma.$$

Finalmente, como $\Upsilon(\nabla\sigma) \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Gamma(\mathbf{E}))$ es $C^\infty(M)$-lineal en $\mathbf{X}$, se tiene

$$\nabla_{f\mathbf{X}}\sigma = \Upsilon(\nabla\sigma)(f\mathbf{X}) = f\Upsilon(\nabla\sigma)(\mathbf{X}) = f\nabla_{\mathbf{X}}\sigma.$$

Por lo tanto, $(\mathbf{X},\sigma) \mapsto \nabla_{\mathbf{X}}\sigma$ cumple las propiedades de la Definición 2.4.2 y define una conexión.

□

Dado que ambos acercamientos son equivalentes, en ocasiones usaremos ambos conceptos para describir una conexión de manera indistinta.

**Ejemplo 2.4.26.** (Conexión trivial) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\underline{\mathbb{R}}^k_M = M\times\mathbb{R}^k$ el haz trivial de rango $k$ sobre $M$. El espacio de secciones $\Gamma(\underline{\mathbb{R}}^k_M)$ coincide con el espacio $C^\infty(M,\mathbb{R}^k)$ de funciones suaves con valores en $\mathbb{R}^k$ y tenemos que $(\underline{\mathbb{R}}^k_M)_p \cong \mathbb{R}^k$ (los espacios de fibras del haz trivial).
Sea $(e_1,\dots,e_k)$ la base canónica de $\mathbb{R}^k$ y denotemos por $\mathbf{e}_i(p) := (p,e_i)$ las secciones constantes correspondientes. Si $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_k) \in C^\infty(M,\mathbb{R}^k)$, definimos

$$\nabla\sigma \;:=\; \sum_{i=1}^k d\sigma_i\otimes\mathbf{e}_i \;\in\; \Gamma\big(T^*M\otimes\underline{\mathbb{R}}^k_M\big).$$

En otras palabras, para cada $p\in M$,

$$(\nabla\sigma)(p) \;=\; \sum_{i=1}^k d\sigma_i(p)\otimes\mathbf{e}_i(p) \;\in\; T^*_pM\otimes\mathbb{R}^k.$$

Si $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial, entonces

$$(\nabla\sigma)_p(\mathbf{X}) \;=\; \sum_{i=1}^k d\sigma_i(p)(\mathbf{X}_p)\mathbf{e}_i(p) = \;(\mathbf{X}\sigma_1(p),\dots,\mathbf{X}\sigma_k(p)),$$

es decir, se obtiene derivando coordenada a coordenada la sección $\sigma$.

La regla de Leibniz se verifica directamente: para $f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla(f\sigma) = \sum_{i=1}^{k} d(f\sigma_i)\otimes \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{k} \big((df)\sigma_i + f\,d\sigma_i\big)\otimes \mathbf{e}_i = df\otimes\sigma + f\nabla\sigma.$$

Por lo tanto, $\nabla$ define una conexión en $\underline{\mathbb{R}}^k_M$, llamada la *conexión trivial*.

Las conexiones y las métricas fibradas deben ser compatibles con las operaciones tensoriales. Las construcciones siguientes permiten derivar tensores, duales y homomorfismos, y serán necesarias al definir espacios de Sobolev de secciones.

**Proposición 2.4.27.** (Conexiones inducidas en productos tensoriales, duales y homomorfismos) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales suaves con conexiones $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $\nabla^{\mathbf{F}}$.

(a) Existe una única conexión $\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}$ en $\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}$ tal que, para cualesquiera $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M)$, $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$ y $\mathbf{v}\in\Gamma(\mathbf{F})$,

$$\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = (\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v} + \mathbf{u}\otimes(\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}). \tag{2.11}$$

(b) Existe una única conexión $\nabla^{\mathbf{E}^*}$ en el haz dual $\mathbf{E}^*$ caracterizada por

$$\mathbf{X}\big(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u})\big) = (\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\alpha}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}) \tag{2.12}$$

para cualesquiera $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M)$, $\boldsymbol{\alpha}\in\Gamma(\mathbf{E}^*)$ y $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$.

(c) El haz $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})\cong\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{F}$ posee la conexión inducida determinada por

$$(\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(\mathbf{u}) = \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}\mathbf{u}) - \mathbf{T}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}). \tag{2.13}$$

En particular, para $\mathbf{F}=\mathbf{E}$ se obtiene la conexión en $\mathrm{End}(\mathbf{E})$ y

$$(\nabla^{\mathrm{End}(\mathbf{E})}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(\mathbf{u}) = [\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}},\mathbf{T}]\mathbf{u}.$$

Las construcciones anteriores son compatibles con iteraciones de productos tensoriales y con las identificaciones canónicas entre haces tensoriales.

*Demostración.* Comenzamos con el producto tensorial. En un abierto trivializante $U$, toda sección de $\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}$ es una suma finita de secciones tensoriales simples. Definimos el miembro derecho de (2.11) sobre esas secciones y lo extendemos por aditividad. Debemos comprobar que la definición respeta las relaciones de balanceo del producto tensorial. Para $f\in C^\infty(U)$,

$$\begin{aligned}&\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}((f\mathbf{u})\otimes\mathbf{v})\\ &\quad= \mathbf{X}(f)\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} + f(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v} + f\,\mathbf{u}\otimes\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v},\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}\otimes(f\mathbf{v}))\\ = (\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\otimes f\mathbf{v} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{X}(f)\mathbf{v} + \mathbf{u}\otimes f\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Las dos expresiones coinciden después de usar $(f\mathbf{u})\otimes\mathbf{v} = \mathbf{u}\otimes(f\mathbf{v})$. Por lo tanto, la definición es independiente de la representación de una sección como suma de tensores simples. Las propiedades

$$\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}_{f\mathbf{X}}\mathbf{S} = f\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{S}$$

y

$$\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{S}) = \mathbf{X}(f)\mathbf{S} + f\nabla^{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{S}$$

se verifican primero en tensores simples y después por aditividad. Esto prueba la existencia de la conexión. La unicidad se sigue porque las secciones tensoriales simples generan localmente el módulo de secciones de $\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}$.

Para el haz dual definimos, para $\boldsymbol{\alpha}\in\Gamma(\mathbf{E}^*)$,

$$(\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{u}) := \mathbf{X}\big(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u})\big) - \boldsymbol{\alpha}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}). \tag{2.14}$$

El miembro derecho es $C^\infty(M)$-lineal en $\mathbf{u}$. Para $f\in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{X}\big(\boldsymbol{\alpha}(f\mathbf{u})\big) - \boldsymbol{\alpha}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{u}))\\ &\quad= \mathbf{X}(f)\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u}) + f\mathbf{X}\big(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u})\big) - \mathbf{X}(f)\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u}) - f\boldsymbol{\alpha}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\\ &\quad= f\left[\mathbf{X}\big(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u})\big) - \boldsymbol{\alpha}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\right].\end{aligned}$$

Así, (2.14) define una sección de $\mathbf{E}^*$. La $C^\infty(M)$-linealidad respecto de $\mathbf{X}$ y la regla de Leibniz respecto de $\boldsymbol{\alpha}$ se obtienen directamente de la misma fórmula. Por construcción se satisface (2.12), y esta identidad determina unívocamente $\nabla^{\mathbf{E}^*}$.

Identificamos ahora $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ con $\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{F}$ y usamos la conexión producto ya construida. Si localmente $\mathbf{T} = \sum_{a=1}^{N}\boldsymbol{\alpha}_a\otimes\mathbf{v}_a$, entonces

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{N}\boldsymbol{\alpha}_a(\mathbf{u})\mathbf{v}_a.$$

Las reglas de Leibniz y (2.12) dan

$$\begin{aligned}\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}\mathbf{u}) = &\sum_{a=1}^{N}(\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\alpha}_a)(\mathbf{u})\mathbf{v}_a + \sum_{a=1}^{N}\boldsymbol{\alpha}_a(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\mathbf{v}_a\\ &+ \sum_{a=1}^{N}\boldsymbol{\alpha}_a(\mathbf{u})\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}_a.\end{aligned}$$

Los términos primero y tercero forman $(\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(\mathbf{u})$, mientras que el segundo es $\mathbf{T}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})$. Esto prueba (2.13). El caso de endomorfismos es la especialización $\mathbf{F} = \mathbf{E}$. Finalmente, las iteraciones se obtienen aplicando sucesivamente la construcción del producto tensorial, y su compatibilidad con las identificaciones

canónicas resulta de la unicidad demostrada. □

**Lema 2.4.28.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera provista de una conexión $\nabla$ en $TM$, y $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $r$ provisto de una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ un marco local de $TM$ sobre un abierto $U \subseteq M$, $(\boldsymbol{\varepsilon}^1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^n)$ su comarco dual, y $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ un marco local de $\mathbf{E}\restriction_U$.
Sea $\mathbf{F} \in \Gamma(T^{(k,l)}(TM)\otimes\mathbf{E})$, escrita en los marcos anteriores como

$$\mathbf{F} = \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_l\le n\\ 1\le a\le r}} F^{i_1\dots i_k\, a}_{j_1\dots j_l}\, \mathbf{E}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{i_k}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_l}\otimes\mathbf{e}_a.$$

Entonces, para cada $c\in\{1,\dots,n\}$, las componentes de la derivada covariante

$$\nabla_{\partial_c}\mathbf{F} := \left(\nabla^{\mathbf{T}^{(k,l)}\otimes\mathbf{E}}\right)_{\partial_c}\mathbf{F}$$

vienen dadas por

$$(\nabla_{\partial_c}\mathbf{F})^{i_1\dots i_k\, a}_{j_1\dots j_l} = \partial_c\big(F^{i_1\dots i_k\, a}_{j_1\dots j_l}\big) + \sum_{r=1}^{k}\Gamma^{i_r}_{cs}\,F^{i_1\dots s\dots i_k\, a}_{j_1\dots j_l} - \sum_{t=1}^{l}\Gamma^{s}_{cj_t}\,F^{i_1\dots i_k\, a}_{j_1\dots s\dots j_l} + \sum_{b=1}^{r}(A_c)^a_b\,F^{i_1\dots i_k\, b}_{j_1\dots j_l},$$

donde $\nabla_{\partial_c}\mathbf{E}_i = \Gamma^s_{ci}\mathbf{E}_s$ y $\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_c}\mathbf{e}_b = (A_c)^a_b\,\mathbf{e}_a$.

*Demostración.* Por la Proposición 2.4.24, la conexión $\nabla$ en $TM$ induce una conexión en $T^{(k,l)}(TM)$ caracterizada por la regla del producto respecto a los factores contravariantes y covariantes. En el marco

$$\left\{\mathbf{E}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{i_k}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_l}\right\}$$

se tiene, para todo $\mathbf{T}\in\Gamma\big(T^{(k,l)}(TM)\big)$,

$$(\nabla_{\partial_c}\mathbf{T})^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \partial_c\big(T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\big) + \sum_{r=1}^{k}\Gamma^{i_r}_{cs}\,T^{i_1\dots s\dots i_k}_{j_1\dots j_l} - \sum_{t=1}^{l}\Gamma^{s}_{cj_t}\,T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots s\dots j_l}.$$

Escribimos ahora $\mathbf{F} = \sum_{a=1}^{r}\mathbf{F}^{(a)}\otimes\mathbf{e}_a$, donde para cada $a\in\{1,\dots,r\}$ el campo tensorial $\mathbf{F}^{(a)}\in\Gamma\big(T^{(k,l)}(TM)\big)$ tiene componentes $\big(\mathbf{F}^{(a)}\big)^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = F^{i_1\dots i_k\, a}_{j_1\dots j_l}$.
La conexión inducida en $T^{(k,l)}(TM)\otimes\mathbf{E}$ está determinada por

$$\nabla_{\partial_c}(\mathbf{S}\otimes\boldsymbol{\sigma}) = (\nabla_{\partial_c}\mathbf{S})\otimes\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{S}\otimes\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_c}\boldsymbol{\sigma}, \qquad \mathbf{S}\in\Gamma\big(T^{(k,l)}(TM)\big),\ \boldsymbol{\sigma}\in\Gamma(\mathbf{E}),$$

de modo que, para $\mathbf{F} = \sum_{a=1}^{r}\mathbf{F}^{(a)}\otimes\mathbf{e}_a$, se obtiene

$$\nabla_{\partial_c}\mathbf{F} = \sum_{a=1}^{r}\Big((\nabla_{\partial_c}\mathbf{F}^{(a)})\otimes\mathbf{e}_a + \mathbf{F}^{(a)}\otimes\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_c}\mathbf{e}_a\Big).$$

En el marco $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ se cumple $\nabla_{\partial_c}\mathbf{E}_i = \Gamma_{ci}^{s}\mathbf{E}_s$ y, por definición de los coeficientes de la conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ en el marco $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$, $\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_c}\mathbf{e}_b = (A_c)_b^a\,\mathbf{e}_a$.
Aplicando el Lema 2.4.15 a cada $\mathbf{F}^{(a)}$ se obtiene

$$(\nabla_{\partial_c}\mathbf{F}^{(a)})_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k} = \partial_c\big(F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,a}\big) + \sum_{r=1}^{k}\Gamma_{cs}^{i_r}\,F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots s\dots i_k\,a} - \sum_{t=1}^{l}\Gamma_{cj_t}^{s}\,F_{j_1\dots s\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,a}.$$

Por otro lado, usando la expresión local de la conexión en $\mathbf{E}$, $\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_c}\mathbf{e}_a = \sum_{b=1}^{r}(A_c)_a^b\,\mathbf{e}_b$, obtenemos

$$\mathbf{F}^{(a)}\otimes\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_c}\mathbf{e}_a = \sum_{b=1}^{r}(A_c)_a^b\,\big(\mathbf{F}^{(a)}\otimes\mathbf{e}_b\big).$$

Cada uno de estos términos se escribe en la base

$$\Big\{\mathbf{E}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{i_k}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_l}\otimes\mathbf{e}_a\Big\},$$

pues $\mathbf{F}^{(a)}\otimes\mathbf{e}_b = F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,a}\,\mathbf{E}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{i_k}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_l}\otimes\mathbf{e}_b$.
En consecuencia, el término $\mathbf{F}^{(a)}\otimes\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_c}\mathbf{e}_a$ aporta, en las componentes correspondientes al índice de salida $a$, la suma

$$\sum_{b=1}^{r}(A_c)_b^a\,F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,b}.$$

Para obtener las componentes de $\nabla_{\partial_c}\mathbf{F}$ basta ahora fijar $a\in\{1,\dots,r\}$ y sumar las contribuciones de los dos bloques anteriores al tensor base con último factor $\mathbf{e}_a$:

- el bloque $(\nabla_{\partial_c}\mathbf{F}^{(a)})\otimes\mathbf{e}_a$ aporta

$$\mathbf{E}_c\big(F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,a}\big) + \sum_{r=1}^{k}\Gamma_{cs}^{i_r}\,F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots s\dots i_k\,a} - \sum_{t=1}^{l}\Gamma_{cj_t}^{s}\,F_{j_1\dots s\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,a},$$

- y el bloque $\mathbf{F}^{(b)}\otimes\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_c}\mathbf{e}_b$ aporta

$$\sum_{b=1}^{r}(A_c)_b^a\,F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,b}.$$

Agrupando estas contribuciones se obtiene

$$(\nabla_{\partial_c}\mathbf{F})_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,a} = \partial_c\big(F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,a}\big) + \sum_{r=1}^{k}\Gamma_{cs}^{i_r}\,F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots s\dots i_k\,a} - \sum_{t=1}^{l}\Gamma_{cj_t}^{s}\,F_{j_1\dots s\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,a} + \sum_{b=1}^{r}(A_c)_b^a\,F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k\,b},$$

que es la fórmula deseada. □

**Proposición 2.4.29.** (Fórmulas para las derivadas covariantes segunda y tercera) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera provista de una conexión $\nabla^M$ en $TM$, y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave con una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. En los haces $T^{(0,q)}(TM)\otimes\mathbf{E}$ usamos las conexiones producto inducidas por $\nabla^M$ y $\nabla^{\mathbf{E}}$. Para

$\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$ definimos

$$\nabla^0 \mathbf{u} := \mathbf{u}, \qquad \nabla^{q+1}\mathbf{u} := \nabla(\nabla^q \mathbf{u}), \qquad q \in \mathbb{N}_0.$$

Así,

$$\nabla^q \mathbf{u} \in \Gamma\big(T^{(0,q)}(TM) \otimes \mathbf{E}\big),$$

y el nuevo índice covariante introducido en cada paso se coloca en la primera entrada. Equivalentemente,

$$(\nabla^{q+1}\mathbf{u})(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_q) = \big(\nabla_{\mathbf{X}_0}(\nabla^q \mathbf{u})\big)(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_q).$$

En particular, para cualesquiera $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla^2 \mathbf{u})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathbf{u}. \tag{2.15}$$

Además, para cualesquiera $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}(\nabla^3 \mathbf{u})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = {} & \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Z}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Z}} \mathbf{u} \\ & + \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{X}} \nabla^M_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}} \mathbf{u} + \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{Y}} \nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}} \mathbf{u}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

*Demostración.* La primera derivada covariante se interpreta como la 1-forma con valores en $\mathbf{E}$ dada por

$$(\nabla \mathbf{u})(\mathbf{X}) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \mathbf{u}.$$

La conexión producto en $T^*M \otimes \mathbf{E}$ satisface la regla de Leibniz para la evaluación. Por ello,

$$\begin{aligned}(\nabla^2 \mathbf{u})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \big(\nabla_{\mathbf{X}}(\nabla \mathbf{u})\big)(\mathbf{Y}) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\big((\nabla \mathbf{u})(\mathbf{Y})\big) - (\nabla \mathbf{u})(\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) \\ &= \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathbf{u}.\end{aligned}$$

lo cual prueba (2.15).

Para el tercer orden consideramos $\nabla^2 \mathbf{u}$ como un 2-tensor covariante con valores en $\mathbf{E}$. La definición de la conexión inducida da

$$(\nabla^3 \mathbf{u})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\big((\nabla^2 \mathbf{u})(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\big) - (\nabla^2 \mathbf{u})(\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - (\nabla^2 \mathbf{u})(\mathbf{Y}, \nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}). \tag{2.17}$$

Desarrollamos por separado los tres términos. Por (2.15),

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\big((\nabla^2 \mathbf{u})(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\big) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Z}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}} \mathbf{u}.$$

Asimismo,

$$(\nabla^2 \mathbf{u})(\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Z}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathbf{Z}} \mathbf{u},$$

y

$$(\nabla^2 \mathbf{u})(\mathbf{Y}, \nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}} \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^M_{\mathbf{Y}} \nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}} \mathbf{u}.$$

Sustituir estas tres identidades en (2.17), respetando los dos signos negativos de su segunda línea, produce exactamente (2.16). □

**Observación 2.4.30.** (Sobre el uso de coordenadas normales en tercer orden) Aunque se elijan coordenadas normales centradas en un punto $p$, la identidad

$$(\nabla^2\mathbf{u})(\mathbf{X},\mathbf{Y})(p) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}}\mathbf{u}(p)$$

solamente vale para extensiones de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ cuyas primeras derivadas covariantes se anulan en $p$. No puede derivarse como si fuera una igualdad válida en una vecindad de $p$. En efecto, la fórmula (2.16) contiene términos con segundas derivadas covariantes de los campos auxiliares, como $\nabla^M_{\mathbf{Y}}\nabla^M_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}$, que no se anulan únicamente por haber escogido coordenadas normales. Por esta razón, al contraer o conmutar derivadas covariantes de orden superior se establecerán primero identidades tensoriales y sólo después se evaluarán en un marco normal. Los operadores obtenidos mediante tales contracciones se definirán en el capítulo dedicado a operadores diferenciales sobre haces.

**Lema 2.4.31.** (Regla de Leibniz para la multiplicación interior) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera provista de una conexión $\nabla$ en $TM$. Sea $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ un marco local suave de $TM$ con comarco dual $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$. Sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$.
Para todo tensor

$$\mathbf{F}\in\Gamma\big(T^{(k,l+1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big),$$

se cumple que

$$\nabla_a\big(\iota_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F}\big) = \iota_{\nabla_a\mathbf{E}_a}\mathbf{F} + \iota_{\mathbf{E}_a}(\nabla_a\mathbf{F}),$$

donde $\nabla_a = \nabla_{\mathbf{E}_a}$ es la conexión total en $T^{(k,l+1)}(TM)\otimes\mathbf{E}$, y $\iota_{\mathbf{E}_a}$ actúa únicamente en el bloque covariante del tensor.

*Demostración.* La identidad vale para cada índice $a$ antes de efectuar la suma de Einstein. Fijemos un punto $p$ y evaluemos ambos miembros en covectores y vectores arbitrarios que ocupen los demás índices de $\mathbf{F}$. Extendemos esos argumentos localmente de modo que sus derivadas covariantes en la dirección $\mathbf{E}_a$ se anulen en $p$. Por definición de la conexión inducida y de la contracción,

$$\big(\iota_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F}\big)(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_l) = \mathbf{F}(\omega^1,\dots,\omega^k,\mathbf{E}_a,\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_l).$$

Al derivar esta igualdad en la dirección $\mathbf{E}_a$ y evaluar en $p$, la regla de Leibniz de la conexión produce exactamente dos términos:

$$\begin{aligned}\nabla_a\big(\iota_{\mathbf{E}_a}\mathbf{F}\big)(\omega^1,\dots,\mathbf{X}_l) = {}& \mathbf{F}(\omega^1,\dots,\nabla_a\mathbf{E}_a,\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_l)\\ &+ (\nabla_a\mathbf{F})(\omega^1,\dots,\mathbf{E}_a,\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_l).\end{aligned}$$

El primer sumando es $\big(\iota_{\nabla_a\mathbf{E}_a}\mathbf{F}\big)(\omega^1,\dots,\mathbf{X}_l)$ y el segundo es $\big(\iota_{\mathbf{E}_a}\nabla_a\mathbf{F}\big)(\omega^1,\dots,\mathbf{X}_l)$. Como el punto y los argumentos fueron arbitrarios, se obtiene la identidad tensorial; sumar en $a$ da la fórmula escrita en el enunciado. □

Consideremos la siguiente regla de Leibniz:

**Proposición 2.4.32.** (Regla de Leibniz para tensores $(0,2)$) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $\mathbf{T} \in \Gamma(\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*)$, entonces para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$ y todo $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene

$$\mathbf{X}\big(\mathbf{T}(\mathbf{u},\mathbf{v})\big) = (\nabla^{\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{T}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{T}(\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}).$$

*Demostración.* Por definición, para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$ la función $\mathbf{T}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in C^\infty(M)$ viene dada por

$$\mathbf{T}(\mathbf{u},\mathbf{v})(p) = \mathbf{T}_p(\mathbf{u}_p,\mathbf{v}_p), \qquad p \in M.$$

Como $\Gamma(\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*)$ es un $C^\infty(M)$–módulo generado por tensores simples, basta probar la identidad cuando $\mathbf{T} = \alpha \otimes \beta$ con $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathbf{E}^*)$, y luego concluir por linealidad. En ese caso,

$$\mathbf{T}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle \alpha, \mathbf{u}\rangle\langle \beta, \mathbf{v}\rangle.$$

Aplicando la regla del producto para funciones y la caracterización de la conexión inducida en el dual (Proposición 2.4.27),

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\big(\mathbf{T}(\mathbf{u},\mathbf{v})\big) &= \mathbf{X}\big(\langle \alpha, \mathbf{u}\rangle\langle \beta, \mathbf{v}\rangle\big) \\
&= \mathbf{X}\langle \alpha, \mathbf{u}\rangle\langle \beta, \mathbf{v}\rangle + \langle \alpha, \mathbf{u}\rangle\mathbf{X}\langle \beta, \mathbf{v}\rangle \\
&= \big(\langle \nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\alpha, \mathbf{u}\rangle + \langle \alpha, \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\rangle\big)\langle \beta, \mathbf{v}\rangle + \langle \alpha, \mathbf{u}\rangle\big(\langle \nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\beta, \mathbf{v}\rangle + \langle \beta, \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}\rangle\big) \\
&= \underbrace{\langle \nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\alpha, \mathbf{u}\rangle\langle \beta, \mathbf{v}\rangle + \langle \alpha, \mathbf{u}\rangle\langle \nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\beta, \mathbf{v}\rangle}_{(\nabla^{\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}(\alpha\otimes\beta))(\mathbf{u},\mathbf{v}) \text{ por Proposición 2.4.27.}} + \underbrace{\langle \alpha, \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\rangle\langle \beta, \mathbf{v}\rangle}_{\mathbf{T}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u},\mathbf{v})} + \underbrace{\langle \alpha, \mathbf{u}\rangle\langle \beta, \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}\rangle}_{\mathbf{T}(\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v})}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathbf{X}\big(\mathbf{T}(\mathbf{u},\mathbf{v})\big) = (\nabla^{\mathbf{E}^*\otimes\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{T}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{T}(\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v})$$

para $\mathbf{T} = \alpha \otimes \beta$. Por linealidad de todos los términos, la igualdad se extiende a todo $\mathbf{T} \in \Gamma(\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*)$. □

Esta regla de Leibniz motiva el siguiente concepto más general, que nos dice cuándo un homomorfismo de haces respeta las estructuras dadas por la conexión.

**Definición 2.4.33.** (Homomorfismos suaves de haces paralelos) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \to M$ haces vectoriales suaves con conexiones $\nabla^{\mathbf{E}}, \nabla^{\mathbf{F}}, \nabla^{\mathbf{G}}$. Un homomorfismo suave de haces $\Phi\colon \mathbf{E}\otimes\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ se dice paralelo si, para todo $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$, $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{F})$ y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple

$$\nabla^{\mathbf{G}}_{\mathbf{X}}\big(\Phi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\big) = \Phi\big((\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v}\big) + \Phi\big(\mathbf{u}\otimes(\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v})\big).$$

Esto se puede escribir de forma equivalente como muestra la siguiente proposición:

**Proposición 2.4.34.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \to M$ haces vectoriales suaves con conexiones $\nabla^{\mathbf{E}}, \nabla^{\mathbf{F}}, \nabla^{\mathbf{G}}$, y sea

$$\Phi\colon \mathbf{E}\otimes\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$$

un homomorfismo suave de haces. Entonces, $\Phi$ es un homomorfismo suave de haces paralelo en el sentido de la Definición 2.4.33 si y sólo si, al considerarlo como sección de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}, \mathbf{G})$, se cumple que $\nabla_{\mathbf{X}}\Phi = 0$, $\forall \mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, donde $\nabla$ es la conexión inducida en $\mathrm{Hom}(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}, \mathbf{G})$.

*Demostración.* Por definición de la conexión en $\mathrm{Hom}(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F},\mathbf{G})$, se tiene

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\Phi)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = \nabla^{\mathbf{G}}_{\mathbf{X}}\big(\Phi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\big) - \Phi\big(\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\big),$$

para todo $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$, $\mathbf{v}\in\Gamma(\mathbf{F})$ y $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M)$.
Como $\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = (\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v} + \mathbf{u}\otimes(\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v})$, se obtiene

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\Phi)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = \nabla^{\mathbf{G}}_{\mathbf{X}}\big(\Phi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\big) - \Phi\big((\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v}\big) - \Phi\big(\mathbf{u}\otimes(\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v})\big).$$

Por lo tanto, $(\nabla_{\mathbf{X}}\Phi)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = 0$ para todo $\mathbf{u},\mathbf{v}$ si y sólo si

$$\nabla^{\mathbf{G}}_{\mathbf{X}}\big(\Phi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\big) = \Phi\big((\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v}\big) + \Phi\big(\mathbf{u}\otimes(\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v})\big),$$

es decir, si y sólo si $\Phi$ es un homomorfismo suave de haces paralelo en el sentido de la Definición 2.4.33.
Como estos campos tensoriales simples generan $\Gamma(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F})$, la equivalencia es válida para toda sección, lo que concluye la prueba. □

**Ejemplo 2.4.35.** (La evaluación) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $\nabla^{\mathbf{E}^*}$ la conexión inducida en el dual.
Definimos el homomorfismo suave de haces llamado *homomorfismo de evaluación*

$$\mathrm{ev}\colon \mathbf{E}^*\otimes\mathbf{E}\longrightarrow M\times\mathbb{R}$$

puntualmente como

$$\mathrm{ev}_p(\mathbf{v}_p\otimes\mathbf{u}_p) = \langle\mathbf{v}_p,\mathbf{u}_p\rangle, \qquad p\in M, \mathbf{v}_p\in\mathbf{E}^*_p, \mathbf{u}_p\in\mathbf{E}_p.$$

El haz trivial $M\times\mathbb{R}$ lleva la conexión trivial, es decir, si $f\in C^\infty(M)$ lo vemos como sección de $M\times\mathbb{R}$, entonces

$$\nabla^{M\times\mathbb{R}}_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X}(f).$$

Sean $\mathbf{v}\in\Gamma(\mathbf{E}^*)$, $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$ y $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M)$. En el lado izquierdo:

$$\nabla^{M\times\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}(\mathrm{ev}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})) = \nabla^{M\times\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}\big(p\mapsto\langle\mathbf{v}_p,\mathbf{u}_p\rangle\big) = \mathbf{X}(\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle).$$

En el lado derecho:

$$\mathrm{ev}\big((\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\mathbf{v})\otimes\mathbf{u} + \mathbf{v}\otimes\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\big) = \langle\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{v},\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\rangle.$$

Por definición de la conexión inducida en $\mathbf{E}^*$,

$$\mathbf{X}(\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle) = \langle\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{v},\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\rangle.$$

De este modo,

$$\nabla^{M\times\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}\big(\mathrm{ev}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\big) = \mathrm{ev}\big((\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\mathbf{v})\otimes\mathbf{u} + \mathbf{v}\otimes\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\big),$$

y concluimos que la evaluación es un homomorfismo suave de haces paralelo.

**Ejemplo 2.4.36.** (La contracción) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$, y sea $\mathbf{F} \to M$ otro haz con conexión $\nabla^{\mathbf{F}}$.
Definimos el homomorfismo suave llamado *homomorfismo de contracción*

$$\operatorname{contr}\colon \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}$$

puntualmente como

$$\operatorname{contr}_p(\mathbf{v}_p \otimes \mathbf{u}_p \otimes \mathbf{w}_p) = \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p \rangle \mathbf{w}_p, \qquad p \in M, \mathbf{v}_p \in \mathbf{E}_p^*, \mathbf{u}_p \in \mathbf{E}_p, \mathbf{w}_p \in \mathbf{F}_p.$$

La noción de homomorfismo paralelo se extiende de manera natural a tres factores: un homomorfismo

$$\Phi\colon \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$$

es paralelo si para todo $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E}^*)$, $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$, $\mathbf{w} \in \Gamma(\mathbf{F})$ y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple

$$\nabla^{\mathbf{G}}_{\mathbf{X}}(\Phi(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})) = \Phi\big((\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}} \mathbf{v}) \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}\big) + \Phi\big(\mathbf{v} \otimes (\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{w}\big) + \Phi\big(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}} \mathbf{w}\big).$$

Verifiquemos que la contracción cumple esta propiedad.
Para el lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\operatorname{contr}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})) &= \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\big(p \mapsto \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p \rangle \mathbf{w}_p\big) \\ &= \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Por la regla de Leibniz en $\mathbf{F}$ se sigue que

$$\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{X}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle)\mathbf{w} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}} \mathbf{w},$$

de modo que

$$\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\operatorname{contr}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})) = \mathbf{X}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle)\mathbf{w} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}} \mathbf{w}.$$

Queremos calcular

$$\operatorname{contr}\big((\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}} \mathbf{v}) \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}\big) + \operatorname{contr}\big(\mathbf{v} \otimes (\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{w}\big) + \operatorname{contr}\big(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}} \mathbf{w}\big).$$

Evaluando cada términos usando la definición de contracción tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{contr}\big((\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}} \mathbf{v}) \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}\big) &= \langle \nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}} \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{w}, \\ \operatorname{contr}\big(\mathbf{v} \otimes (\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{w}\big) &= \langle \mathbf{v}, \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \mathbf{u} \rangle \mathbf{w}, \\ \operatorname{contr}\big(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}} \mathbf{w}\big) &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Así,

$$\operatorname{contr}\big((\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}} \mathbf{v}) \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}\big) + \operatorname{contr}\big(\mathbf{v} \otimes (\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{w}\big) + \operatorname{contr}\big(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}} \mathbf{w}\big) = \langle \nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}} \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{w} + \langle \mathbf{v}, \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \mathbf{u} \rangle \mathbf{w} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}} \mathbf{w}.$$

Finalmente, por la definición de la conexión en el dual $\mathbf{E}^*$ se cumple

$$\mathbf{X}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle) = \langle \nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}} \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \mathbf{u} \rangle.$$

Igualando ambos términos tenemos que

$$\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathrm{contr}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})) = \mathrm{contr}\big((\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}} \mathbf{v}) \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}\big) + \mathrm{contr}\big(\mathbf{v} \otimes (\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{w}\big) + \mathrm{contr}\big(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}} \mathbf{w}\big).$$

Por lo tanto, la contracción es un homomorfismo suave de haces paralelo.

**Proposición 2.4.37.** (Compatibilidad de la conexión con las contracciones) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_N, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves provistos de conexiones, y sea

$$C \colon \mathbf{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_N \longrightarrow \mathbf{F}$$

un homomorfismo suave de haces paralelo. Entonces, para toda sección $\mathbf{T} \in \Gamma(\mathbf{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_N)$ y todo $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}\big(C(\mathbf{T})\big) = C(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{T}). \tag{2.18}$$

En particular, las conexiones inducidas conmutan con la evaluación, con las permutaciones de factores y con todas las contracciones canónicas.
Si $(M, \mathbf{g})$ es riemanniana y $\nabla^M$ es la conexión de Levi–Civita, entonces la contracción métrica es paralela. Por ello, para todo tensor $S$ con dos índices covariantes susceptibles de ser contraídos,

$$\nabla\big(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} S\big) = \mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla S). \tag{2.19}$$

La misma identidad vale para cualquier composición finita de contracciones métricas.

*Demostración.* Por la Proposición 2.4.34, la condición de paralelismo de $C$ equivale a $\nabla C = 0$ cuando $C$ se considera como sección del haz de homomorfismos correspondiente. La regla de Leibniz para la evaluación da

$$\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(C(\mathbf{T})) = (\nabla_{\mathbf{X}} C)(\mathbf{T}) + C(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{T}) = C(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{T}),$$

lo cual prueba (2.18).
La evaluación y la contracción son paralelas por los ejemplos anteriores. Las permutaciones de factores son paralelas porque la conexión producto deriva cada factor y la permutación sólo cambia su orden. En el caso riemanniano, $\nabla^M g = 0$ y también $\nabla^M g^{-1} = 0$; por lo tanto, elevar índices y contraerlos mediante $g^{-1}$ son homomorfismos paralelos. La identidad (2.19) es entonces un caso de (2.18). La afirmación para una composición finita se obtiene aplicando el mismo argumento sucesivamente. □

Finalmente, dejamos un ejemplo que muestra por qué el concepto de paralelismo de homomorfismos es algo más general que la regla de Leibniz para campos tensoriales de tipo $(0,2)$:

**Ejemplo 2.4.38.** (La evaluación y la regla de Leibniz) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea

$\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Definimos el mapeo

$$\widetilde{\mathrm{ev}}\colon (\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*) \otimes (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) \longrightarrow M \times \mathbb{R}, \qquad \widetilde{\mathrm{ev}}_p(\beta_p \otimes (\mathbf{u}_p \otimes \mathbf{v}_p)) = \langle \beta_p, \mathbf{u}_p \otimes \mathbf{v}_p \rangle = \beta_p(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p).$$

Entonces, para todo $\mathbf{T} \in \Gamma(\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$ y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, la regla de Leibniz

$$\mathbf{X}\big(\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\big) = (\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*} \mathbf{T})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{T}(\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{T}(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{v})$$

es equivalente a que $\widetilde{\mathrm{ev}}$ sea un homomorfismo suave de haces paralelo, es decir,

$$\nabla_{\mathbf{X}}^{M \times \mathbb{R}}\big(\widetilde{\mathrm{ev}}(\mathbf{T} \otimes (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}))\big) = \widetilde{\mathrm{ev}}\big((\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*} \mathbf{T}) \otimes (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\big) + \widetilde{\mathrm{ev}}\big(\mathbf{T} \otimes ((\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v})\big) + \widetilde{\mathrm{ev}}\big(\mathbf{T} \otimes (\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{v})\big).$$

*Demostración.* Por definición puntual,

$$\widetilde{\mathrm{ev}}(\mathbf{T} \otimes (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \rangle = \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \qquad \nabla_{\mathbf{X}}^{M \times \mathbb{R}} f = \mathbf{X}(f) \text{ para } f \in C^\infty(M).$$

Si $\widetilde{\mathrm{ev}}$ es paralelo, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\big(\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\big) &= \nabla_{\mathbf{X}}^{M \times \mathbb{R}}\big(\widetilde{\mathrm{ev}}(\mathbf{T} \otimes (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}))\big) \\
&= \widetilde{\mathrm{ev}}\big((\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*} \mathbf{T}) \otimes (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\big) + \widetilde{\mathrm{ev}}\big(\mathbf{T} \otimes ((\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v})\big) + \widetilde{\mathrm{ev}}\big(\mathbf{T} \otimes (\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{v})\big) \\
&= \langle \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*} \mathbf{T}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{T}, (\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{T}, \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{v} \rangle \\
&= (\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*} \mathbf{T})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{T}(\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{T}(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Se recupera así la regla de Leibniz.
Recíprocamente, si la regla de Leibniz vale para todo $\mathbf{T}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$, entonces

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{X}}^{M \times \mathbb{R}}\big(\widetilde{\mathrm{ev}}(\mathbf{T} \otimes (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}))\big) &= \mathbf{X}\big(\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\big) \\
&= (\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*} \mathbf{T})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{T}(\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{T}(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{v}) \\
&= \langle \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*} \mathbf{T}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{T}, (\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{T}, \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{v} \rangle \\
&= \widetilde{\mathrm{ev}}\big((\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*} \mathbf{T}) \otimes (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\big) + \widetilde{\mathrm{ev}}\big(\mathbf{T} \otimes ((\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v})\big) + \widetilde{\mathrm{ev}}\big(\mathbf{T} \otimes (\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E}} \mathbf{v})\big).
\end{aligned}$$

Esto prueba que la regla de Leibniz es equivalente a que $\widetilde{\mathrm{ev}}$ sea paralelo. □

La condición de que una conexión $\nabla$ en un haz vectorial suave $\mathbf{E}$ sea compatible con una métrica fibrada $\mathbf{h}$ se puede definir de manera compacta como sigue:

**Definición 2.4.39.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave, sea $\nabla$ una conexión en $\mathbf{E}$ y sea $\mathbf{h}$ una métrica fibrada en $\mathbf{E}$. Decimos que $\nabla$ es compatible con $\mathbf{h}$ si

$$\nabla^{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^*} \mathbf{h} = 0.$$

En este caso se dice también que la métrica $\mathbf{h}$ es *paralela* con respecto a $\nabla$.

Esta condición es equivalente a la que habíamos dado en la Proposición 2.4.18:

**Proposición 2.4.40.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave, sea $\nabla$ una conexión en $\mathbf{E}$ y sea $\mathbf{h}$ una métrica fibrada en $\mathbf{E}$. Entonces $\nabla$ es compatible con $\mathbf{h}$ si y sólo si para cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$ y cualquier $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathbf{X}\big(\mathbf{h}(\mathbf{u},\mathbf{v})\big) = \mathbf{h}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{h}(\mathbf{u},\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v}).$$

*Demostración.* Por la Proposición 2.4.32, la derivada covariante de la sección $\mathbf{h} \in \Gamma(T^{(0,2)}(\mathbf{E}))$ satisface

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{h})(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{X}\big(\mathbf{h}(\mathbf{u},\mathbf{v})\big) - \mathbf{h}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u},\mathbf{v}) - \mathbf{h}(\mathbf{u},\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v}).$$

La compatibilidad métrica es la identidad $\nabla\mathbf{h} = 0$. Por lo tanto, esta identidad equivale exactamente a la fórmula del enunciado para todo $\mathbf{X}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. □

## 2.5 Haces hermitianos y conjugación de conexiones

Las métricas fibradas introducidas al comienzo del capítulo son reales. Fijamos aquí su versión compleja y la relación exacta entre conjugación, duales y conexiones. En toda esta sección los campos vectoriales del espacio base son reales y los productos hermitianos son lineales en la primera variable.

**Definición 2.5.1.** (Métrica hermitiana fibrada) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial complejo suave. Una *métrica hermitiana fibrada* es una familia suave $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ de formas hermitianas definidas positivas en las fibras, lineales en la primera variable y antilineales en la segunda. Equivalentemente, el mapeo bilineal

$$\widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}} \colon \mathbf{E} \times_M \overline{\mathbf{E}} \longrightarrow \underline{\mathbb{C}}_M, \qquad \widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}(v,\overline{w}) = \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(v,w),$$

es una sección suave de $\mathbf{E}^* \otimes (\overline{\mathbf{E}})^*$ y es definido positivo en el sentido $\widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}(v,\overline{v}) > 0$ para $v \neq 0$.

**Proposición 2.5.2.** (Métrica del haz conjugado) La fórmula

$$\mathbf{h}_{\overline{\mathbf{E}}}(\overline{v},\overline{w}) := \overline{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(v,w)} \tag{2.20}$$

define una métrica hermitiana suave sobre $\overline{\mathbf{E}}$, lineal en la primera variable y antilineal en la segunda. Bajo la identificación $\overline{\overline{\mathbf{E}}} \cong \mathbf{E}$, la métrica doblemente conjugada es $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$.

*Demostración.* Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la estructura escalar de $\overline{\mathbf{E}}$ y la convención sobre $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ dan

$$\mathbf{h}_{\overline{\mathbf{E}}}(\lambda\overline{v},\mu\overline{w}) = \overline{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\overline{\lambda}v,\overline{\mu}w)} = \lambda\overline{\mu}\,\overline{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(v,w)}.$$

La simetría hermitiana, la positividad y la suavidad se obtienen conjugando las propiedades correspondientes de $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Conjugar dos veces recupera la fórmula original. □

**Proposición 2.5.3.** (Isomorfismo de Riesz fibrado) El mapeo

$$\mathcal{R}_{\mathbf{E}} \colon \overline{\mathbf{E}} \longrightarrow \mathbf{E}^*, \qquad \mathcal{R}_{\mathbf{E}}(\overline{v})(w) := \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(w,v), \tag{2.21}$$

es un isomorfismo complejo–lineal suave de haces, compatible con restricciones. Para cada $\overline{v}$, el funcional $w \mapsto \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(w,v)$ es complejo–lineal. En un marco local unitario $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$, si $\ell = \sum_{a=1}^{r} \ell_a \mathbf{e}^a$, entonces

$$\mathcal{R}_{\mathbf{E}}^{-1}(\ell) = \overline{\sum_{a=1}^{r} \overline{\ell_a}\, \mathbf{e}_a}. \tag{2.22}$$

En particular, el mapeo $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^*$, $v \mapsto \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\cdot, v)$, es antilineal, mientras que $\mathcal{R}_{\mathbf{E}} \colon \overline{\mathbf{E}} \to \mathbf{E}^*$ es complejo–lineal. En el caso real la conjugación desaparece y se recupera la identificación real usual.

*Demostración.* La linealidad en $w$ forma parte de la convención hermitiana. Para la linealidad respecto de $\overline{v}$, usando $\lambda\overline{v} = \overline{\overline{\lambda} v}$, obtenemos

$$\mathcal{R}_{\mathbf{E}}(\lambda\overline{v})(w) = \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(w, \overline{\lambda} v) = \lambda \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(w,v).$$

En un marco unitario, $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\sum_{a=1}^{r} w^a \mathbf{e}_a, \sum_{a=1}^{r} v^a \mathbf{e}_a) = \sum_{a=1}^{r} w^a \overline{v^a}$; de aquí se deduce directamente (2.22). Esta fórmula prueba a la vez la biyectividad y la suavidad local de $\mathcal{R}_{\mathbf{E}}$ y de su inversa. Como la definición es intrínseca, las fórmulas locales se pegan y conmutan con toda restricción a un abierto. La afirmación sobre $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^*$ resulta de $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(w, \lambda v) = \overline{\lambda}\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(w,v)$. □

**Definición 2.5.4.** (Conexión compleja, dual y conjugada) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo suave. Una *conexión compleja* en $\mathbf{E}$ es un mapeo

$$\nabla^{\mathbf{E}} \colon \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E})$$

que es $C^\infty(M,\mathbb{R})$–lineal en el campo real, aditivo en la sección, satisface

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{u}) = \mathbf{X}(f)\mathbf{u} + f\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}, \qquad f \in C^\infty(M,\mathbb{C}),$$

y es complejo–lineal en $\mathbf{u}$ para $\mathbf{X}$ fijo.
La conexión dual $\nabla^{\mathbf{E}^*}$ y la conexión conjugada $\nabla^{\overline{\mathbf{E}}}$ se definen, respectivamente, por

$$(\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\ell})(\mathbf{u}) := \mathbf{X}(\boldsymbol{\ell}(\mathbf{u})) - \boldsymbol{\ell}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}), \tag{2.23}$$

$$\nabla^{\overline{\mathbf{E}}}_{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{u}} := \overline{\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}}. \tag{2.24}$$

**Proposición 2.5.5.** (Buena definición y naturalidad) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales complejos suaves provistos de conexiones complejas. Las fórmulas (2.23) y (2.24) definen conexiones complejas. Conmutan con restricciones y la doble conjugación recupera $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $\mathbf{A} \colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ es paralelo, es decir, $\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{A}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u})$, entonces $\overline{\mathbf{A}}$ es paralelo para las conexiones conjugadas. En marcos conjugados, la matriz de $\nabla^{\overline{\mathbf{E}}}$ es la conjugada de la matriz de $\nabla^{\mathbf{E}}$.

*Demostración.* Sólo la regla de Leibniz para la conexión conjugada requiere atención. Si $f \in C^\infty(M,\mathbb{C})$, entonces $f\overline{\mathbf{u}} = \overline{\overline{f}\,\mathbf{u}}$ y, como $\mathbf{X}$ es real, $\mathbf{X}(\overline{f}) = \overline{\mathbf{X}(f)}$. Por ello

$$\nabla^{\overline{\mathbf{E}}}_{\mathbf{X}}(f\overline{\mathbf{u}}) = \overline{\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}(\overline{f}\,\mathbf{u})} = \overline{\mathbf{X}(f)\mathbf{u} + \overline{f}\,\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}}$$

$$= \mathbf{X}(f)\overline{\mathbf{u}} + f\nabla^{\overline{\mathbf{E}}}_{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{u}}.$$

Las propiedades de la conexión dual se obtienen expandiendo $\mathbf{X}(\boldsymbol{\ell}(f\mathbf{u}))$ y usando la regla de Leibniz de $\nabla^{\mathbf{E}}$; la cancelación de $\mathbf{X}(f)\boldsymbol{\ell}(\mathbf{u})$ deja $(\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\ell})(f\mathbf{u}) = f(\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\ell})(\mathbf{u})$. Las restantes afirmaciones se verifican directamente en secciones locales. □

**Definición 2.5.6.** (Conexión hermitiana) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo suave con métrica hermitiana fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y sea $\nabla^{\mathbf{E}}$ una conexión compleja. La conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ es *compatible con* $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ o *hermitiana* si, para todo $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$\mathbf{X}\big(\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{v})\big) = \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}). \tag{2.25}$$

**Proposición 2.5.7.** (Paralelismo de Riesz) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo suave con métrica hermitiana fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y conexión compleja $\nabla^{\mathbf{E}}$. La conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ es hermitiana si y sólo si el isomorfismo de Riesz es paralelo:

$$\nabla^{\mathbf{E}^*}_{\mathbf{X}}\big(\mathcal{R}_{\mathbf{E}}(\overline{\mathbf{v}})\big) = \mathcal{R}_{\mathbf{E}}\big(\nabla^{\overline{\mathbf{E}}}_{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{v}}\big), \qquad \mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M), \quad \mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E}). \tag{2.26}$$

En tal caso, $\nabla^{\overline{\mathbf{E}}}$ es compatible con $\mathbf{h}_{\overline{\mathbf{E}}}$ y $\mathcal{R}^{-1}_{\mathbf{E}}$ también es paralelo.

*Demostración.* Evaluando el miembro izquierdo de (2.26) en $\mathbf{u}$ y usando la conexión dual se obtiene

$$\mathbf{X}(\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{v})) - \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

El miembro derecho evaluado en $\mathbf{u}$ es $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v})$. Por consiguiente, la igualdad para todos $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{X}$ es equivalente exactamente a (2.25). Conjugar esa identidad prueba la compatibilidad de la conexión conjugada con $\mathbf{h}_{\overline{\mathbf{E}}}$. Finalmente, derivar $\mathcal{R}^{-1}_{\mathbf{E}}\mathcal{R}_{\mathbf{E}} = \mathrm{id}_{\overline{\mathbf{E}}}$ y usar (2.26) prueba el paralelismo de la inversa. □

## 2.6 Haces principales y conexiones principales

Un haz vectorial describe vectores que varían sobre la base, pero una trivialización local exige además elegir un marco en cada fibra. Los distintos marcos se relacionan mediante el grupo estructural, y esa información no queda representada por un vector particular del haz. Un haz principal registra simultáneamente todos los marcos admisibles y la acción del grupo que los transforma.

Esta descripción también aclara por qué se necesita una conexión. Para comparar datos situados en fibras distintas hay que especificar qué desplazamientos en el espacio total se consideran horizontales. El transporte paralelo resultante depende, en general, del camino; la curvatura mide de forma infinitesimal esa dependencia. Más adelante, las conexiones principales y su curvatura serán las variables naturales de Yang–Mills, mientras que las transformaciones gauge expresarán los cambios de marco.

En esta sección todos los haces principales llevan una acción derecha. Las convenciones se eligen de modo que, si $\mathbf{s}_\beta = \mathbf{s}_\alpha g_{\alpha\beta}$ son dos secciones locales, los potenciales de conexión satisfagan

$$\mathbf{A}_\beta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}_{\alpha\beta}}\mathbf{A}_\alpha + g^{-1}_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}.$$

Esta es también la convención que producirá posteriormente la acción gauge derecha $\mathbf{A} \triangleleft \mathbf{u} = \mathbf{u}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{u}^{-1}d\mathbf{u}$. Para una exposición externa compatible de haces principales y sus conexiones véase [21, Cap. 15]; las identidades de transición, curvatura y gauge necesarias en el libro se verifican a continuación con la convención derecha fijada arriba.

**Definición 2.6.1.** (Haz principal) Sean $G$ un grupo de Lie y $M$ una variedad suave con o sin frontera. Un *haz principal derecho con grupo estructural* $G$ es una variedad suave $\mathbf{P}$, un mapeo suave sobreyectivo $\pi\colon \mathbf{P} \to M$ y una acción suave derecha

$$R\colon \mathbf{P} \times G \longrightarrow \mathbf{P}, \qquad (p, g) \longmapsto p \cdot g,$$

tales que:

(a) $\pi(p \cdot g) = \pi(p)$ para todo $p \in \mathbf{P}$ y $g \in G$;

(b) la acción es libre;

(c) cada $x \in M$ posee un abierto $U \ni x$ y un difeomorfismo $G$-equivariante

$$\Phi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G, \qquad \Phi(p \cdot g) = \big(\pi(p), \mathrm{pr}_2(\Phi(p))g\big),$$

tal que $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi = \pi$.

Toda trivialización determina una sección local $\mathbf{s}\colon U \to \mathbf{P}$, $\mathbf{s}(x) = \Phi^{-1}(x, e)$, y cada $p \in \pi^{-1}(U)$ se escribe de manera única como

$$p = \mathbf{s}(x) \cdot g, \qquad x = \pi(p).$$

Si $\mathbf{s}_\alpha$ y $\mathbf{s}_\beta$ son secciones locales, existe un único mapeo suave

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

tal que

$$\mathbf{s}_\beta = \mathbf{s}_\alpha g_{\alpha\beta}. \tag{2.27}$$

**Proposición 2.6.2.** (Cociclos, reconstrucción y trivialidad) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal derecho. Las funciones de transición satisfacen

$$g_{\alpha\alpha} = e, \qquad g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}^{-1}, \qquad g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$$

en los dominios correspondientes. Recíprocamente, una cubierta $(U_\alpha)$ y mapeos suaves con estas identidades determinan, hasta isomorfismo principal, un haz principal derecho: se pegan los $U_\alpha \times G$ mediante

$$(x, h)_\beta \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)h)_\alpha. \tag{2.28}$$

Además, un haz principal es trivial si y sólo si admite una sección global suave.

*Demostración.* Las dos primeras identidades resultan de la unicidad en (2.27); en una intersección triple, $\mathbf{s}_\gamma = \mathbf{s}_\beta g_{\beta\gamma} = \mathbf{s}_\alpha g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$ prueba la tercera. Esas mismas identidades hacen que (2.28) sea una relación de equivalencia. Los cocientes locales se pegan suavemente, la acción $[x, h]_\alpha \cdot k = [x, hk]_\alpha$ está bien definida y

las cartas $[x,h]_\alpha \mapsto (x,h)$ son trivializaciones principales. Dos realizaciones obtenidas de este modo admiten un isomorfismo principal que es la identidad en las cartas prescritas. La unicidad se entiende respecto de esas cartas, pues un haz puede tener automorfismos gauge no triviales.
Si $\mathbf{s}\colon M \to \mathbf{P}$ es global, cada $p \in \mathbf{P}_x$ se escribe de manera única $p = \mathbf{s}(x)g$ y $\mathbf{P} \to M \times G$, $\mathbf{s}(x)g \mapsto (x,g)$, es una trivialización principal. La sección $x \mapsto (x,e)$ prueba la recíproca. □

**Definición 2.6.3.** (Morfismo y pullback principal) Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera, sean $\mathbf{P} \to M$ y $\mathbf{Q} \to N$ haces principales con el mismo grupo $G$, y sea $f\colon M \to N$ un mapeo suave. Un morfismo entre haces principales con el mismo grupo es un mapeo suave $\Phi\colon \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ que cubre $f$ y satisface $\Phi(pg) = \Phi(p)g$. El pullback de $\mathbf{Q} \to N$ por $f$ es

$$f^*\mathbf{Q} := \{(x,q) \in M \times \mathbf{Q} \mid f(x) = \pi_{\mathbf{Q}}(q)\}, \qquad (x,q)g = (x,qg).$$

Con la proyección sobre $M$ es un haz principal, y $(x,q) \mapsto q$ es el morfismo universal que cubre $f$.

*Demostración.* Una trivialización de $\mathbf{Q}$ sobre $V \subseteq N$ induce $f^{-1}(V) \times G \cong (f^*\mathbf{Q})|_{f^{-1}(V)}$, lo que prueba la afirmación local. Si $\Psi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Q}$ cubre $f \circ \pi_{\mathbf{R}}$, el único morfismo $\mathbf{R} \to f^*\mathbf{Q}$ sobre $M$ que se proyecta a $\Psi$ es $r \mapsto (\pi_{\mathbf{R}}(r), \Psi(r))$. □

**Definición 2.6.4.** (Haz asociado) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal derecho con grupo $G$ y sea $\rho\colon G \to GL(V)$ una representación lineal finito–dimensional, real o compleja. Definimos

$$\mathbf{P} \times_\rho V := (\mathbf{P} \times V)/\!\sim,$$

donde

$$(p \cdot g, v) \sim (p, \rho(g)v).$$

Escribimos $[p,v]_\rho$ para la clase de $(p,v)$. La proyección

$$[p,v]_\rho \longmapsto \pi(p)$$

convierte a $\mathbf{P} \times_\rho V$ en un haz vectorial suave sobre $M$.

**Proposición 2.6.5.** (Trivializaciones y cociclos asociados) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal derecho. Si $\mathbf{s}_\alpha$ es una sección principal local, entonces

$$\Psi_\alpha\colon (\mathbf{P} \times_\rho V)|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times V, \qquad \Psi_\alpha([\mathbf{s}_\alpha(x)g, v]) = (x, \rho(g)v),$$

está bien definida y es una trivialización de haz vectorial. Si $\mathbf{s}_\beta = \mathbf{s}_\alpha g_{\alpha\beta}$, las coordenadas se relacionan por

$$v_\beta = \rho(g_{\alpha\beta}^{-1})v_\alpha.$$

Por lo tanto, el haz asociado depende sólo del haz principal y de la representación, no de las secciones locales elegidas.

*Demostración.* La relación $(pg, v) \sim (p, \rho(g)v)$ muestra que $[\mathbf{s}_\alpha gh, v] = [\mathbf{s}_\alpha g, \rho(h)v]$; ambos representantes tienen la misma imagen por $\Psi_\alpha$. El inverso es $(x, v) \mapsto [\mathbf{s}_\alpha(x), v]$. Finalmente, $[\mathbf{s}_\beta, v_\beta] = [\mathbf{s}_\alpha, \rho(g_{\alpha\beta})v_\beta]$, de modo que $v_\alpha = \rho(g_{\alpha\beta})v_\beta$, que equivale a la fórmula enunciada. □

**Proposición 2.6.6.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} = \mathbf{P} \times_\rho V \to M$ un haz asociado. Las secciones suaves de $\mathbf{E}$ están en correspondencia biyectiva con los mapeos suaves $\widetilde{u}\colon \mathbf{P} \to V$ que satisfacen

$$\widetilde{u}(p \cdot g) = \rho(g^{-1})\widetilde{u}(p). \tag{2.29}$$

La correspondencia está dada por

$$\mathbf{u}(x) = [p, \widetilde{u}(p)]_\rho, \qquad p \in \mathbf{P}_x.$$

*Demostración.* Si $p$ se reemplaza por $p \cdot g$, entonces

$$[p \cdot g, \widetilde{u}(p \cdot g)]_\rho = [p, \rho(g)\rho(g^{-1})\widetilde{u}(p)]_\rho = [p, \widetilde{u}(p)]_\rho.$$

Así, la fórmula define una sección. Recíprocamente, dado $\mathbf{u}(x)$ y $p \in \mathbf{P}_x$, existe un único $v \in V$ tal que $\mathbf{u}(x) = [p, v]_\rho$; ponemos $\widetilde{u}(p) = v$. La unicidad de $v$ da (2.29). La suavidad en ambas direcciones se comprueba en una trivialización principal. □

**Definición 2.6.7.** (Haces adjunto y de grupos adjuntos) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal derecho con grupo $G$. Definimos dos haces distintos:

(a) El *haz de grupos adjuntos*

$$\mathrm{Ad}(\mathbf{P}) := \mathbf{P} \times_{\mathrm{Conj}} G, \qquad \mathrm{Conj}_g(h) = ghg^{-1}.$$

Sus fibras son grupos; en general no es un haz vectorial.

(b) El *haz adjunto*

$$\mathrm{ad}(\mathbf{P}) := \mathbf{P} \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}.$$

Este sí es un haz vectorial, de rango $\dim \mathfrak{g}$.

La multiplicación fibra a fibra de $\mathrm{Ad}(\mathbf{P})$ está bien definida. Sus secciones $\mathbf{u}$ se identifican con mapeos suaves $\widehat{u}\colon \mathbf{P} \to G$ que satisfacen

$$\widehat{u}(p \cdot g) = g^{-1}\widehat{u}(p)g. \tag{2.30}$$

En cambio, las secciones $\xi$ de $\mathrm{ad}(\mathbf{P})$ se identifican con mapeos $\widehat{\xi}\colon \mathbf{P} \to \mathfrak{g}$ tales que

$$\widehat{\xi}(p \cdot g) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\widehat{\xi}(p).$$

**Definición 2.6.8.** (Formas horizontales y equivariantes) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal derecho con grupo $G$ y sea $\rho\colon G \to GL(V)$ una representación. Una forma $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^k(\mathbf{P}; V)$ es *horizontal* si se anula cuando al menos uno de sus argumentos pertenece a

$$\mathbf{V}_p\mathbf{P} := \ker(d\pi_p).$$

Es $\rho$-*equivariante* si

$$R_{\mathbf{g}}^{*}\boldsymbol{\alpha} = \rho(g^{-1})\boldsymbol{\alpha} \qquad (g \in G).$$

**Proposición 2.6.9.** (Formas con valores en un haz asociado) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} = \mathbf{P} \times_{\rho} V \to M$ un haz asociado. Existe un isomorfismo natural

$$\Omega^{k}(M;\mathbf{E}) \cong \{\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^{k}(\mathbf{P};V) \mid \boldsymbol{\alpha} \text{ es horizontal y } \rho\text{-equivariante}\}.$$

Si $\boldsymbol{\alpha}$ está en el segundo espacio, la forma asociada $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ se define mediante

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_{x}(X_1,\dots,X_k) := [p, \boldsymbol{\alpha}_p(\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_k)]_{\rho}, \tag{2.31}$$

donde $p \in \mathbf{P}_x$ y $d\pi_p \widetilde{X}_i = X_i$.

*Demostración.* La horizontalidad muestra que (2.31) no depende de las elevaciones $\widetilde{X}_i$. Si $p$ se reemplaza por $p \cdot g$, podemos elegir las elevaciones $(dR_{\mathbf{g}})_p \widetilde{X}_i$; entonces la equivarianza da

$$\boldsymbol{\alpha}_{p\cdot g}\big((dR_{\mathbf{g}})\widetilde{X}_1,\dots,(dR_{\mathbf{g}})\widetilde{X}_k\big) = \rho(g^{-1})\boldsymbol{\alpha}_p(\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_k),$$

y la relación de equivalencia del haz asociado prueba que la clase en (2.31) no cambia.
Recíprocamente, dada $\boldsymbol{\beta} \in \Omega^{k}(M;\mathbf{E})$ y $p \in \mathbf{P}_x$, existe un único $v \in V$ tal que

$$\boldsymbol{\beta}_x(d\pi\,\widetilde{X}_1,\dots,d\pi\,\widetilde{X}_k) = [p,v]_{\rho}.$$

Definimos $\boldsymbol{\alpha}_p(\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_k) := v$. Esta forma es horizontal y la unicidad de $v$ prueba su equivarianza. En una trivialización principal ambas construcciones se reducen a las identificaciones usuales con formas $V$-valuadas, lo que prueba la suavidad y que las dos operaciones son inversas. □

Para $\xi \in \mathfrak{g}$ denotamos por

$$\xi_{\mathbf{P}}(p) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{0} p \cdot \exp_G(t\xi)$$

el campo fundamental positivo de la acción derecha. Por (1.27),

$$[\xi_{\mathbf{P}}, \eta_{\mathbf{P}}] = [\xi,\eta]_{\mathbf{P}}.$$

Para cada $p$, el mapeo $\xi \mapsto \xi_{\mathbf{P}}(p)$ es un isomorfismo $\mathfrak{g} \to \mathbf{V}_p\mathbf{P}$.

**Definición 2.6.10.** (Conexión principal) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal derecho. Una *forma de conexión principal* en $\mathbf{P}$ es una forma $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^{1}(\mathbf{P};\mathfrak{g})$ tal que

$$\boldsymbol{\omega}(\xi_{\mathbf{P}}) = \xi, \tag{2.32}$$

$$R_{\mathbf{g}}^{*}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\boldsymbol{\omega}. \tag{2.33}$$

La distribución horizontal correspondiente es

$$\mathbf{H}_p\mathbf{P} := \ker \boldsymbol{\omega}_p.$$

Entonces

$$T_p\mathbf{P} = \mathbf{H}_p\mathbf{P} \oplus \mathbf{V}_p\mathbf{P}, \qquad (dR_{\mathbf{g}})_p \mathbf{H}_p\mathbf{P} = \mathbf{H}_{p\cdot g}\mathbf{P}.$$

**Proposición 2.6.11.** (Distribuciones horizontales y formas de conexión) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal derecho. Asignar $\mathbf{H}_p\mathbf{P} = \ker \boldsymbol{\omega}_p$ establece una biyección entre las formas de conexión principal y las distribuciones suaves $\mathbf{H} \subset T\mathbf{P}$ tales que

$$T_p\mathbf{P} = \mathbf{H}_p \oplus \mathbf{V}_p\mathbf{P}, \qquad (dR_{\mathbf{g}})_p \mathbf{H}_p = \mathbf{H}_{pg}.$$

La forma correspondiente a $\mathbf{H}$ se obtiene escribiendo de manera única $Z = Z^{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{P}}(p)$ y poniendo $\boldsymbol{\omega}_p(Z) = \xi$.

*Demostración.* Para una forma de conexión, la primera propiedad implica que $\boldsymbol{\omega}_p|_{\mathbf{V}_p\mathbf{P}} \colon \mathbf{V}_p\mathbf{P} \to \mathfrak{g}$ es la inversa de $\xi \mapsto \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{P}}(p)$, de donde resulta la suma directa. La segunda propiedad implica la invariancia de los núcleos. Recíprocamente, el isomorfismo suave $\mathfrak{g} \to \mathbf{V}_p\mathbf{P}$, $\xi \mapsto \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{P}}(p)$, y la proyección suave sobre $\mathbf{V}_p\mathbf{P}$ a lo largo de $\mathbf{H}_p\mathbf{P}$ definen la forma indicada. Se tiene $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{P}}) = \xi$. La invariancia de $\mathbf{H}$ y la identidad $(dR_{\mathbf{g}})_p \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{P}}(p) = (\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi)_{\mathbf{P}}(pg)$ implican $R_{\mathbf{g}}^* \boldsymbol{\omega} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \boldsymbol{\omega}$. Las dos construcciones son inversas por la unicidad de la descomposición horizontal–vertical. □

**Definición 2.6.12.** (Corchete cuña) Sea $N$ una variedad suave con o sin frontera. Para $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^k(N;\mathfrak{g})$ y $\boldsymbol{\beta} \in \Omega^\ell(N;\mathfrak{g})$ definimos

$$[\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}](\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{k+\ell}) := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(k,\ell)} \mathrm{sgn}(\sigma) \left[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{X}_{\sigma(k)}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}_{\sigma(k+1)}, \dots, \mathbf{X}_{\sigma(k+\ell)})\right],$$

donde $\mathrm{Sh}(k,\ell)$ es el conjunto de permutaciones $(k,\ell)$-barajadas. En particular,

$$[\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}](\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{Y})] - [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{Y}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})]$$

para $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \Omega^1(N;\mathfrak{g})$.

**Lema 2.6.13.** (Álgebra graduada del corchete cuña) Sea $N$ una variedad suave con o sin frontera. Para formas homogéneas sobre $N$ se cumplen

$$[\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\alpha}] = -(-1)^{k\ell}[\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}], \tag{2.34}$$

$$d[\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}] = [d\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}] + (-1)^k [\boldsymbol{\alpha} \wedge d\boldsymbol{\beta}], \tag{2.35}$$

y la identidad de Jacobi graduada. En particular, si $\mathbf{A} \in \Omega^1(N;\mathfrak{g})$, entonces

$$[\mathbf{A} \wedge [\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}]] = 0. \tag{2.36}$$

*Demostración.* Las dos primeras identidades se obtienen reordenando los conjuntos finitos de barajadas y usando, respectivamente, la antisimetría del corchete de $\mathfrak{g}$ y la regla de Leibniz para el producto exterior. La suma cíclica que define la identidad de Jacobi graduada se agrupa, para cada partición ordenada de los argumentos, en una identidad de Jacobi de $\mathfrak{g}$. Al tomar tres veces la forma $\mathbf{A}$ de grado uno, los tres sumandos de Jacobi graduada son iguales, lo que da (2.36). □

**Definición 2.6.14.** (Curvatura principal) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\boldsymbol{\omega}$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$. La curvatura de $\boldsymbol{\omega}$ es

$$\boldsymbol{\Omega}_{\omega} := d\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}] \in \Omega^2(\mathbf{P}; \mathfrak{g}). \tag{2.37}$$

Usaremos una identidad elemental para formas y flujos.

**Lema 2.6.15.** (Fórmula de Cartan) Sea $N$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{X}$ un campo vectorial cuyo flujo local permanezca en $N$ y sea $\boldsymbol{\alpha}$ una forma diferencial. Entonces

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\alpha} := \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Phi_t^*\boldsymbol{\alpha} = d(\iota_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\alpha}) + \iota_{\mathbf{X}}(d\boldsymbol{\alpha}).$$

*Demostración.* Ambos lados son derivaciones graduadas de grado cero respecto del producto exterior y conmutan con restricciones. Para una función $f$, ambos lados son $\mathbf{X}f$. En coordenadas, toda forma es suma de productos de funciones y diferenciales $\mathbf{d}x^i$; sobre estos últimos,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{d}x^i) = d(\mathbf{X}x^i) = d(\iota_{\mathbf{X}}\mathbf{d}x^i).$$

La regla de Leibniz concluye la identidad para toda forma. □

**Proposición 2.6.16.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\boldsymbol{\omega}$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$. La curvatura $\boldsymbol{\Omega}_{\omega}$ es horizontal y Ad-equivariante:

$$R_{\mathbf{g}}^*\boldsymbol{\Omega}_{\omega} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\boldsymbol{\Omega}_{\omega}.$$

Por lo tanto, mediante la Proposición 2.6.9, determina una forma global

$$\mathbf{F}_{\omega} \in \Omega^2(M; \mathrm{ad}(\mathbf{P})).$$

*Demostración.* La equivarianza se sigue de $R_{\mathbf{g}}^* d\boldsymbol{\omega} = d(R_{\mathbf{g}}^*\boldsymbol{\omega})$ y de que $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$ preserva el corchete.
El flujo de $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{P}}$ es $R_{\exp(t\xi)}$. Derivando la equivarianza de $\boldsymbol{\omega}$ se obtiene

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{P}}}\boldsymbol{\omega} = -\mathrm{ad}_{\xi}\,\boldsymbol{\omega} = -[\xi, \boldsymbol{\omega}].$$

Como $\iota_{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{P}}}\boldsymbol{\omega} = \xi$ es constante, la fórmula de Cartan da

$$\iota_{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{P}}} d\boldsymbol{\omega} = -[\xi, \boldsymbol{\omega}].$$

Por otra parte, la definición del corchete cuña implica

$$\frac{1}{2}\iota_{\xi_{\mathbf{P}}}[\omega\wedge\omega]=[\xi,\omega].$$

Los dos términos se cancelan, así que $\iota_{\xi_{\mathbf{P}}}\mathbf{\Omega}_\omega=0$. Todo vector vertical es de la forma $\xi_{\mathbf{P}}(p)$, y por ello la curvatura es horizontal. □

**Proposición 2.6.17.** (Potenciales y curvaturas locales) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P}\to M$ y sea $\mathbf{s}_\alpha\colon U_\alpha\to\mathbf{P}$ una sección local. Definimos

$$\mathbf{A}_\alpha:=\mathbf{s}_\alpha^*\omega\in\Omega^1(U_\alpha;\mathfrak{g}),\qquad \mathbf{F}_\alpha:=\mathbf{s}_\alpha^*\mathbf{\Omega}_\omega.$$

Entonces

$$\mathbf{F}_\alpha=d\mathbf{A}_\alpha+\frac{1}{2}[\mathbf{A}_\alpha\wedge\mathbf{A}_\alpha]. \tag{2.38}$$

Si $\mathbf{s}_\beta=\mathbf{s}_\alpha g_{\alpha\beta}$, entonces

$$\mathbf{A}_\beta=\mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}^{-1}}\mathbf{A}_\alpha+g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}, \tag{2.39}$$

$$\mathbf{F}_\beta=\mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}^{-1}}\mathbf{F}_\alpha. \tag{2.40}$$

Aquí $g^{-1}dg$ denota el pullback de la forma de Maurer–Cartan izquierda de $G$.

*Demostración.* La primera identidad es el pullback de (2.37). Sea $X\in T_xM$ y escribamos $g=g_{\alpha\beta}(x)$. Diferenciando $\mathbf{s}_\beta=\mathbf{s}_\alpha g_{\alpha\beta}$ se obtiene

$$d(\mathbf{s}_\beta)_xX=(dR_{\mathbf{g}})_{\mathbf{s}_\alpha(x)}d(\mathbf{s}_\alpha)_xX+\big(g^{-1}dg(X)\big)_{\mathbf{P}}\big|_{\mathbf{s}_\beta(x)}.$$

Al aplicar $\omega$ y usar (2.32)–(2.33) resulta (2.39).
Para la curvatura, el segundo sumando de la expresión anterior es vertical y $\mathbf{\Omega}_\omega$ es horizontal. Los sumandos horizontales se transforman por $dR_{\mathbf{g}}$, y la equivarianza de $\mathbf{\Omega}_\omega$ da (2.40). □

**Definición 2.6.18.** (Derivada exterior covariante) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P}\to M$, sea $\rho\colon G\to GL(V)$ una representación y sea $\rho_*\colon\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$ su diferencial. Para una forma horizontal y $\rho$-equivariante $\boldsymbol{\alpha}\in\Omega^k(\mathbf{P};V)$ definimos

$$D_\omega\boldsymbol{\alpha}:=d\boldsymbol{\alpha}+\rho_*(\omega)\wedge\boldsymbol{\alpha}. \tag{2.41}$$

La segunda operación está dada por

$$\big(\rho_*(\omega)\wedge\boldsymbol{\alpha}\big)(\mathbf{X}_0,\dots,\mathbf{X}_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\rho_*(\omega(\mathbf{X}_i))\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}_0,\dots,\widehat{\mathbf{X}}_i,\dots,\mathbf{X}_k).$$

**Proposición 2.6.19.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\omega$, $\rho$ y $\boldsymbol{\alpha}$ como en la definición

anterior. La forma $D_\omega \boldsymbol{\alpha}$ vuelve a ser horizontal y $\rho$-equivariante. En consecuencia, desciende a un operador

$$d_\omega \colon \Omega^k(M; \mathbf{P} \times_\rho V) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M; \mathbf{P} \times_\rho V).$$

En una sección local $\mathbf{s}_\alpha$, si $\mathbf{a}_\alpha := \mathbf{s}_\alpha^* \boldsymbol{\alpha}$, entonces

$$(d_\omega \mathbf{a})_\alpha = d_{\mathbf{A}_\alpha} \mathbf{a}_\alpha := d\mathbf{a}_\alpha + \rho_*(\mathbf{A}_\alpha) \wedge \mathbf{a}_\alpha. \tag{2.42}$$

Si $\mathbf{a}_\beta = \rho(g_{\alpha\beta}^{-1})\mathbf{a}_\alpha$, entonces

$$d_{\mathbf{A}_\beta} \mathbf{a}_\beta = \rho(g_{\alpha\beta}^{-1}) d_{\mathbf{A}_\alpha} \mathbf{a}_\alpha. \tag{2.43}$$

Para la representación adjunta,

$$d_{\mathbf{A}} \mathbf{a} = d\mathbf{a} + [\mathbf{A} \wedge \mathbf{a}].$$

*Demostración.* La equivarianza de $D_\omega \boldsymbol{\alpha}$ se obtiene aplicando $R_{\mathbf{g}}^*$ a (2.41) y usando

$$\rho_*(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \xi) = \rho(g^{-1}) \rho_*(\xi) \rho(g).$$

Para probar la horizontalidad, sea $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{P}}$ un campo vertical fundamental. La equivarianza infinitesimal de $\boldsymbol{\alpha}$ da

$$\mathcal{L}_{\xi_{\mathbf{P}}} \boldsymbol{\alpha} = -\rho_*(\xi) \boldsymbol{\alpha}.$$

Como $\iota_{\xi_{\mathbf{P}}} \boldsymbol{\alpha} = 0$, la fórmula de Cartan implica

$$\iota_{\xi_{\mathbf{P}}} d\boldsymbol{\alpha} = -\rho_*(\xi) \boldsymbol{\alpha}.$$

Por otro lado,

$$\iota_{\xi_{\mathbf{P}}} \big( \rho_*(\boldsymbol{\omega}) \wedge \boldsymbol{\alpha} \big) = \rho_*(\xi) \boldsymbol{\alpha},$$

y los términos se cancelan. Así, $D_\omega \boldsymbol{\alpha}$ desciende por la Proposición 2.6.9.
La fórmula local se obtiene tomando el pullback por $\mathbf{s}_\alpha$. La identidad de covarianza expresa que dos pullbacks locales representan la misma forma global. También se comprueba directamente sustituyendo (2.39) y $\mathbf{a}_\beta = \rho(g_{\alpha\beta}^{-1})\mathbf{a}_\alpha$. Para $\rho = \mathrm{Ad}$ se tiene $\rho_*(\xi)\eta = [\xi, \eta]$. □

**Corolario 2.6.20.** (Conexión inducida en un haz asociado) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$ y sea $\rho \colon G \to GL(V)$ una representación. Para $\mathbf{E} = \mathbf{P} \times_\rho V$, el operador de grado cero

$$\nabla^{\mathbf{E},\omega} := d_\omega \colon \Gamma(\mathbf{E}) = \Omega^0(M; \mathbf{E}) \longrightarrow \Omega^1(M; \mathbf{E})$$

es una conexión compleja, o real según $V$. Si $u_\alpha$ son las componentes locales de una sección $\mathbf{u}$, entonces

$$(\nabla^{\mathbf{E},\omega} \mathbf{u})_\alpha = du_\alpha + \rho_*(\mathbf{A}_\alpha) u_\alpha. \tag{2.44}$$

Equivalentemente, si $\widetilde{u} \colon \mathbf{P} \to V$ es el mapeo equivariante asociado y $\widetilde{\mathbf{X}}$ es la elevación horizontal de un campo $\mathbf{X}$, entonces

$$(\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{E},\omega} \mathbf{u})(x) = [p, d\widetilde{u}_p(\widetilde{\mathbf{X}}_p)]_\rho.$$

*Demostración.* La fórmula local (2.42) con $k = 0$ es (2.44). De ella se obtienen la linealidad y $\nabla(f\mathbf{u}) = df \otimes \mathbf{u} + f\nabla\mathbf{u}$. La identidad de covarianza (2.43) prueba que las expresiones se pegan. En el modelo equivariante, $\omega(\widetilde{\mathbf{X}}) = 0$, así que $D_\omega \widetilde{u}(\widetilde{\mathbf{X}}) = d\widetilde{u}(\widetilde{\mathbf{X}})$; el descenso de formas prueba la última fórmula. □

**Teorema 2.6.21.** (Cuadrado de la derivada covariante y Bianchi) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{A}$ un potencial local de una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$. Para toda representación $\rho$ y toda forma local $\mathbf{a}$ con valores en $V$,

$$d_{\mathbf{A}}^2 \mathbf{a} = \rho_*(\mathbf{F}_{\mathbf{A}}) \wedge \mathbf{a}. \tag{2.45}$$

En particular, para formas con valores en $\mathrm{ad}(\mathbf{P})$,

$$d_{\mathbf{A}}^2 \mathbf{a} = [\mathbf{F}_{\mathbf{A}} \wedge \mathbf{a}]. \tag{2.46}$$

La curvatura satisface la identidad de Bianchi

$$d_{\mathbf{A}} \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = d\mathbf{F}_{\mathbf{A}} + [\mathbf{A} \wedge \mathbf{F}_{\mathbf{A}}] = 0. \tag{2.47}$$

Estas identidades son compatibles con cambios de sección local y, por lo tanto, son globales.

*Demostración.* Escribamos $\mathbf{B} = \rho_*(\mathbf{A})$. Usando la regla de Leibniz exterior,

$$(d + \mathbf{B}\wedge)^2 \mathbf{a} = d\mathbf{B} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{a}.$$

Como $\rho_*$ es un homomorfismo de álgebras de Lie,

$$\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{2}\rho_*([\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}]).$$

Esto prueba (2.45), y la representación adjunta da (2.46).
Para Bianchi, por $\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = d\mathbf{A} + \frac{1}{2}[\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}]$ y el Lema 2.6.13,

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\big([d\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}] - [\mathbf{A} \wedge d\mathbf{A}]\big) = -[\mathbf{A} \wedge d\mathbf{A}].$$

Además,

$$[\mathbf{A} \wedge \mathbf{F}_{\mathbf{A}}] = [\mathbf{A} \wedge d\mathbf{A}] + \frac{1}{2}[\mathbf{A} \wedge [\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}]] = [\mathbf{A} \wedge d\mathbf{A}].$$

La suma es cero. La covarianza (2.43) y (2.40) muestran que todas estas identidades se pegan. □

**Teorema 2.6.22.** (Existencia de conexiones principales) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Todo haz principal suave $\mathbf{P} \to M$ admite una conexión principal.

*Demostración.* Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta trivializante. En $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times G$ definimos

$$\omega_\alpha(X, \zeta) := \theta_g^L(\zeta), \qquad (X, \zeta) \in T_x U_\alpha \oplus T_g G,$$

donde $\theta^L_g = (dL_{g^{-1}})_g$ es la forma de Maurer–Cartan izquierda. Se verifica directamente que

$$\omega_\alpha(\xi_{\mathbf{P}}) = \xi, \qquad R_h^*\omega_\alpha = \mathrm{Ad}_{h^{-1}}\,\omega_\alpha;$$

por lo tanto, $\omega_\alpha$ es una conexión principal local.
Sea $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una partición suave de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$, cuya existencia está dada por el Teorema 1.3.5. Cada forma $(\pi^*\chi_\alpha)\omega_\alpha$, extendida por cero fuera de $\pi^{-1}(U_\alpha)$, es suave, y la familia es localmente finita. Definimos

$$\omega := \sum_{\alpha\in I}(\pi^*\chi_\alpha)\omega_\alpha.$$

Como $\sum_{\alpha\in I}\chi_\alpha = 1$,

$$\omega(\xi_{\mathbf{P}}) = \sum_{\alpha\in I}(\pi^*\chi_\alpha)\xi = \xi.$$

Las funciones $\pi^*\chi_\alpha$ son invariantes bajo la acción derecha y cada $\omega_\alpha$ es equivariante, así que $R_{\mathbf{g}}^*\omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\omega$. Por lo tanto, $\omega$ es una conexión principal global. □

**Teorema 2.6.23.** (Estructura afín del espacio de conexiones) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P}\to M$ un haz principal. Sea $\mathrm{Conn}(\mathbf{P})$ el conjunto de conexiones principales en $\mathbf{P}$. Si $\omega_0,\omega_1\in\mathrm{Conn}(\mathbf{P})$, entonces

$$\mathbf{a} := \omega_1 - \omega_0$$

es horizontal y Ad-equivariante y, por lo tanto, corresponde a un único elemento de

$$\Omega^1(M;\mathrm{ad}(\mathbf{P})).$$

Recíprocamente, si $\omega_0$ es una conexión y $\mathbf{a}\in\Omega^1(M;\mathrm{ad}(\mathbf{P}))$, la forma horizontal y equivariante $\widetilde{\mathbf{a}}$ correspondiente satisface que

$$\omega_0 + \widetilde{\mathbf{a}}$$

es una conexión principal. En consecuencia, $\mathrm{Conn}(\mathbf{P})$ es un espacio afín modelado sobre $\Omega^1(M;\mathrm{ad}(\mathbf{P}))$.

*Demostración.* Para todo $\xi\in\mathfrak{g}$,

$$\mathbf{a}(\xi_{\mathbf{P}}) = \omega_1(\xi_{\mathbf{P}}) - \omega_0(\xi_{\mathbf{P}}) = \xi - \xi = 0,$$

así que $\mathbf{a}$ es horizontal. La equivarianza se obtiene restando las identidades de equivarianza de $\omega_1$ y $\omega_0$. La Proposición 2.6.9 identifica entonces $\mathbf{a}$ con una forma en $\Omega^1(M;\mathrm{ad}(\mathbf{P}))$.
Recíprocamente, una forma horizontal equivariante se anula sobre los campos fundamentales y satisface la misma ley de transformación que una forma de conexión. Por lo tanto,

$$(\omega_0+\widetilde{\mathbf{a}})(\xi_{\mathbf{P}}) = \xi, \qquad R_{\mathbf{g}}^*(\omega_0+\widetilde{\mathbf{a}}) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_0+\widetilde{\mathbf{a}}).$$

□

**Corolario 2.6.24.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal con grupo compacto $G$. Cualquier producto interno Ad-invariante dado por el Corolario 1.9.23 induce una métrica fibrada bien definida en $\mathrm{ad}(\mathbf{P})$ mediante

$$\langle [p,\xi],[p,\eta]\rangle_{\mathrm{ad}(\mathbf{P})} := \langle \xi,\eta\rangle_{\mathfrak{g}}.$$

*Demostración.* Al reemplazar $p$ por $p\cdot g$, los representantes se reemplazan por $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi$ y $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\eta$. La invariancia del producto interno muestra que el valor no cambia. □

## 2.6.1 Transporte paralelo y holonomía

**Teorema 2.6.25.** (Elevación horizontal) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$, sea $\gamma\colon [a,b] \to M$ una curva suave por pedazos y sea $p_0 \in \mathbf{P}_{\gamma(a)}$. Existe una única curva suave por pedazos $\widetilde{\gamma}_{p_0}\colon [a,b] \to \mathbf{P}$ tal que

$$\widetilde{\gamma}_{p_0}(a) = p_0, \qquad \pi\circ\widetilde{\gamma}_{p_0} = \gamma, \qquad \dot{\widetilde{\gamma}}_{p_0}(t) \in \mathbf{H}_{\widetilde{\gamma}_{p_0}(t)}\mathbf{P}$$

en cada intervalo de suavidad. Además,

$$\widetilde{\gamma}_{p_0 g}(t) = \widetilde{\gamma}_{p_0}(t)g.$$

*Demostración.* En una trivialización escribimos $\widetilde{\gamma}(t) = \mathbf{s}(\gamma(t))g(t)$ y $\mathbf{A} = \mathbf{s}^*\omega$. La condición de horizontalidad es la ecuación diferencial en $G$

$$\theta^L_{g(t)}\dot{g}(t) = -\mathrm{Ad}_{g(t)^{-1}}\mathbf{A}_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)),$$

con un dato inicial prescrito. La existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales da una solución mientras la curva permanece en la trivialización. Una subdivisión finita de $[a,b]$ por dominios trivializantes pega las soluciones únicas. La invariancia $(dR_{\mathbf{g}})\mathbf{H} = \mathbf{H}$ muestra que $\widetilde{\gamma}_{p_0}g$ es la elevación horizontal con dato inicial $p_0 g$, y la unicidad prueba la última fórmula. □

**Definición 2.6.26.** (Transporte paralelo principal) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$ y sea $\gamma\colon [a,b] \to M$ una curva suave por pedazos. El **transporte paralelo principal** de $\gamma$ es

$$\mathcal{P}^{\omega}_{\gamma}\colon \mathbf{P}_{\gamma(a)} \longrightarrow \mathbf{P}_{\gamma(b)}, \qquad \mathcal{P}^{\omega}_{\gamma}(p) := \widetilde{\gamma}_p(b).$$

**Proposición 2.6.27.** (Leyes del transporte principal) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$. El transporte principal es $G$-equivariante y satisface

$$\mathcal{P}^{\omega}_{\gamma^{-1}} = (\mathcal{P}^{\omega}_{\gamma})^{-1}, \qquad \mathcal{P}^{\omega}_{\gamma_2 * \gamma_1} = \mathcal{P}^{\omega}_{\gamma_2}\circ\mathcal{P}^{\omega}_{\gamma_1},$$

donde $\gamma_2 * \gamma_1$ recorre primero $\gamma_1$ y después $\gamma_2$. También es invariante bajo reparametrizaciones que preservan la orientación.

*Demostración.* La equivariancia es la última afirmación del teorema anterior. Invertir el parámetro de una elevación horizontal produce una elevación horizontal de la curva inversa. Para una concatenación, se pegan

la elevación de $\gamma_1$ y la de $\gamma_2$ cuyo dato inicial es el extremo de la primera; la unicidad da la fórmula. El mismo argumento prueba la invariancia bajo reparametrización. □

**Definición 2.6.28.** (Grupo de holonomía principal) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$ y sea $x = \pi(p)$. El **grupo de holonomía de $\omega$ basado en** $p$ es

$$\mathrm{Hol}_p(\omega) := \{g \in G \mid \mathcal{P}^{\omega}_{\gamma}(p) = pg \text{ para algún lazo suave por pedazos } \gamma \text{ basado en } x\}.$$

**Proposición 2.6.29.** (Estructura y cambio de base de la holonomía) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$ y sea $p \in \mathbf{P}$. El conjunto $\mathrm{Hol}_p(\omega)$ es un subgrupo de $G$. Si $h \in G$, entonces

$$\mathrm{Hol}_{ph}(\omega) = h^{-1}\,\mathrm{Hol}_p(\omega)h.$$

Si $\lambda$ es una curva de $x$ a $y$ y $q = \mathcal{P}^{\omega}_{\lambda}(p)$, entonces $\mathrm{Hol}_q(\omega) = \mathrm{Hol}_p(\omega)$. Para otra elección $qh \in \mathbf{P}_y$, los grupos quedan conjugados por $h$.

*Demostración.* El lazo constante representa a $e$. Si los lazos $\alpha, \beta$ representan $g, h$, respectivamente, recorriendo primero $\beta$ y luego $\alpha$ se llega, por equivariancia, de $p$ a $pgh$; invertir un lazo que representa $g$ produce $g^{-1}$. Esto prueba que es un subgrupo. Si se inicia en $ph$, la elevación de un lazo que desde $p$ termina en $pg$ acaba en $pgh = (ph)(h^{-1}gh)$, lo que da la fórmula de conjugación. Finalmente, conjugar un lazo basado en $y$ por $\lambda$ y $\lambda^{-1}$ conserva el elemento de $G$ cuando $q$ es el transporte de $p$. La última afirmación combina este hecho con la fórmula en una misma fibra. □

**Proposición 2.6.30.** (Holonomía de un haz asociado) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$ y sea $\mathbf{E} = \mathbf{P} \times_{\rho} V$. El transporte inducido por $\omega$ es

$$\mathcal{P}^{\mathbf{E},\omega}_{\gamma}[p, v] := [\mathcal{P}^{\omega}_{\gamma}(p), v].$$

Está bien definido, es lineal y satisface las leyes de inversión y concatenación. Por lo tanto,

$$\mathrm{Hol}_x(\mathbf{E}, \omega) := \{\mathcal{P}^{\mathbf{E},\omega}_{\gamma} \mid \gamma \text{ es un lazo basado en } x\} \subseteq GL(\mathbf{E}_x)$$

es un subgrupo. Si $\mathcal{P}^{\omega}_{\gamma}(p) = pg$, la identificación $\mathbf{E}_x \cong V$ determinada por $p$ representa $\mathcal{P}^{\mathbf{E},\omega}_{\gamma}$ por $\rho(g)$. Al cambiar el punto base, los grupos de holonomía vectorial se conjugan mediante el transporte paralelo a lo largo de una curva que una los puntos.

*Demostración.* Si $[pg, v] = [p, \rho(g)v]$, la equivariancia principal da

$$[\mathcal{P}^{\omega}_{\gamma}(pg), v] = [\mathcal{P}^{\omega}_{\gamma}(p)g, v] = [\mathcal{P}^{\omega}_{\gamma}(p), \rho(g)v],$$

así que la definición no depende del representante. Las demás afirmaciones se siguen de la Proposición 2.6.27. □

**Definición 2.6.31.** (Sección paralela del haz de grupos adjuntos) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$. Una sección $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathrm{Ad}(\mathbf{P}))$ es **$\omega$-paralela** si su mapeo

equivariante $\widehat{u}\colon \mathbf{P} \to G$ es constante a lo largo de toda curva horizontal. Denotamos por $\Gamma^{\omega}_{\mathrm{par}}(\mathrm{Ad}(\mathbf{P}))$ el grupo de estas secciones.

**Teorema 2.6.32.** (Secciones paralelas y centralizador de la holonomía) Sea $M$ una variedad suave conexa con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$ y fijemos $p \in \mathbf{P}$. La evaluación

$$\mathrm{ev}_p\colon \Gamma^{\omega}_{\mathrm{par}}(\mathrm{Ad}(\mathbf{P})) \longrightarrow G, \qquad \mathbf{u} \longmapsto \widehat{u}(p),$$

es un isomorfismo de grupos sobre $Z_G(\mathrm{Hol}_p(\omega))$.

*Demostración.* Sea $\mathbf{u}$ paralela, sea $\widehat{u}$ su representante equivariante y pongamos $c = \widehat{u}(p)$. Si un lazo tiene elevación horizontal de $p$ a $pg$, la constancia horizontal y la equivariancia dan

$$c = \widehat{u}(p) = \widehat{u}(pg) = g^{-1}\widehat{u}(p)g = g^{-1}cg.$$

Por lo tanto, $c$ centraliza $\mathrm{Hol}_p(\omega)$.
Recíprocamente, sea $c \in Z_G(\mathrm{Hol}_p(\omega))$. Para $q \in \mathbf{P}_y$, elegimos una curva $\gamma$ de $\pi(p)$ a $y$ y escribimos de manera única

$$q = \mathcal{P}^{\omega}_{\gamma}(p)h.$$

Definimos $\widehat{u}(q) := h^{-1}ch$. Si otra curva produce $q = \mathcal{P}^{\omega}_{\gamma'}(p)h'$, entonces $\mathcal{P}^{\omega}_{\gamma'}(p) = \mathcal{P}^{\omega}_{\gamma}(p)a$ para algún $a \in \mathrm{Hol}_p(\omega)$ y $h' = a^{-1}h$. Como $ac = ca$, ambas fórmulas para $\widehat{u}(q)$ coinciden. La construcción satisface $\widehat{u}(qk) = k^{-1}\widehat{u}(q)k$ y es constante en elevaciones horizontales. En una vecindad trivializante se eligen caminos que dependen suavemente del punto; la dependencia suave del transporte prueba que $\widehat{u}$ es suave.
La construcción es inversa a la evaluación. También muestra que una sección paralela que vale $e$ en $p$ es la sección identidad, de modo que la evaluación es inyectiva. Como la multiplicación es puntual, es un isomorfismo de grupos. □

**Definición 2.6.33.** (Grupo gauge y acción derecha sobre conexiones) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal derecho. Una *transformación gauge* $\mathbf{u}$ es una sección de $\mathrm{Ad}(\mathbf{P})$, o equivalentemente está representada por un mapeo suave $\widehat{u}\colon \mathbf{P} \to G$ que satisface

$$\widehat{u}(p \cdot g) = g^{-1}\widehat{u}(p)g.$$

El automorfismo principal correspondiente es

$$\Phi_{\mathbf{u}}\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}, \qquad \Phi_{\mathbf{u}}(p) := p \cdot \widehat{u}(p).$$

Definimos la acción gauge derecha sobre conexiones por

$$\omega \triangleleft \mathbf{u} := \Phi_{\mathbf{u}}^{*}\omega.$$

**Proposición 2.6.34.** (Tres modelos del grupo gauge) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal derecho. Existe una correspondencia de grupos entre:

(a) los automorfismos principales $\Phi\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ que cubren $\mathrm{id}_M$;

(b) los mapeos suaves equivariantes $\widehat{u}\colon \mathbf{P} \to G$ con $\widehat{u}(pg) = g^{-1}\widehat{u}(p)g$;

(c) las secciones suaves $\mathbf{u}$ de $\mathrm{Ad}(\mathbf{P})$.

La correspondencia entre los dos primeros modelos es $\Phi_{\mathbf{u}}(p) = p\cdot\widehat{u}(p)$. Para una conexión $\omega$, el estabilizador es

$$\mathrm{Stab}(\omega) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{G}(\mathbf{P}) \mid \omega \triangleleft \mathbf{u} = \omega\}.$$

Si $\xi \in \Gamma(\mathrm{ad}(\mathbf{P}))$ y $\mathbf{u}_t$ es la transformación gauge cuyo representante equivariante es $\widehat{u}_t(p) = \exp_G(t\widehat{\xi}(p))$, la diferencial en la identidad de la acción gauge derecha es

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left(\omega \triangleleft \mathbf{u}_t\right) = d_\omega \xi; \tag{2.48}$$

por lo tanto, el espacio de direcciones infinitesimales que anulan la órbita en $\omega$ es $\ker d_\omega$. La identificación de este núcleo con el álgebra de Lie del estabilizador Sobolev se demostrará posteriormente, cuando se haya construido esa estructura de grupo de Lie.

*Demostración.* Si $\Phi$ cubre la identidad, la libertad y transitividad de la acción en cada fibra dan un único $\widehat{u}(p)$ con $\Phi(p) = p\cdot\widehat{u}(p)$. De $\Phi(pg) = \Phi(p)g$ resulta $(p\cdot g)\cdot\widehat{u}(p\cdot g) = (p\cdot\widehat{u}(p))\cdot g$ y, por libertad, $\widehat{u}(pg) = g^{-1}\widehat{u}(p)g$. En trivializaciones la función $\widehat{u}$ es suave. La recíproca se verifica sustituyendo la ley de equivarianza, y la Proposición 2.6.6, aplicada a la acción por conjugación, da el tercer modelo.
En una sección local, sean $\mathbf{A}$ el potencial de la conexión y $\xi_U$ el representante local de $\xi$. Derivar $u_t^{-1}\mathbf{A}u_t + u_t^{-1}du_t$ para $u_t = \exp_G(t\xi_U)$ da $d\xi_U + [\mathbf{A}, \xi_U] = d_{\mathbf{A}}\xi_U$. Así, el núcleo del diferencial del mapeo órbita en la identidad es exactamente $\ker d_\omega$, que es la afirmación infinitesimal del enunciado. □

**Proposición 2.6.35.** (Fórmulas gauge) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$ y sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{G}(\mathbf{P})$. Con multiplicación puntual de transformaciones gauge,

$$\Phi_{\mathbf{u}} \circ \Phi_{\mathbf{v}} = \Phi_{\mathbf{uv}}, \qquad (\omega \triangleleft \mathbf{u}) \triangleleft \mathbf{v} = \omega \triangleleft (\mathbf{uv}).$$

Si $\mathbf{s}\colon U \to \mathbf{P}$ es una sección local, $\mathbf{A} = \mathbf{s}^*\omega$ y $u_U = \widehat{u} \circ \mathbf{s}$, entonces

$$\mathbf{A} \triangleleft u_U := \mathbf{s}^*(\omega \triangleleft \mathbf{u}) = \mathrm{Ad}_{u_U^{-1}} \mathbf{A} + u_U^{-1} du_U, \tag{2.49}$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A}\triangleleft u_U} = \mathrm{Ad}_{u_U^{-1}} \mathbf{F}_{\mathbf{A}}. \tag{2.50}$$

Para un grupo matricial,

$$\mathbf{A} \triangleleft u = u^{-1}\mathbf{A}u + u^{-1}du, \qquad \mathbf{F}_{\mathbf{A}\triangleleft u} = u^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{A}}u.$$

*Demostración.* La equivarianza de los representantes $\widehat{u}$ y $\widehat{v}$ da

$$\Phi_{\mathbf{u}}(\Phi_{\mathbf{v}}(p)) = p\,\widehat{v}(p)\,\widehat{u}(p\widehat{v}(p)) = p\,\widehat{v}(p)\,\widehat{v}(p)^{-1}\widehat{u}(p)\widehat{v}(p) = p\,\widehat{u}(p)\widehat{v}(p) = \Phi_{\mathbf{uv}}(p).$$

Por contravarianza del pullback,

$$\Phi_{\mathbf{v}}^*\Phi_{\mathbf{u}}^*\omega = (\Phi_{\mathbf{u}} \circ \Phi_{\mathbf{v}})^*\omega = \Phi_{\mathbf{uv}}^*\omega,$$

lo que prueba la ley de acción derecha.

Además,

$$\Phi_{\mathbf{u}} \circ \mathbf{s} = \mathbf{s}\, u_U.$$

La fórmula de transformación local (2.39), aplicada a las secciones $\mathbf{s}$ y $\mathbf{s}\,u_U$, produce (2.49). La horizontalidad y equivarianza de la curvatura, o equivalentemente (2.40), dan (2.50). □

**Teorema 2.6.36.** (Estabilizador suave y holonomía) Sea $M$ una variedad suave conexa con o sin frontera, sea $\omega$ una conexión principal en $\mathbf{P} \to M$ y fijemos $p \in \mathbf{P}$. Para una transformación gauge suave $\mathbf{u}$, con representante equivariante $\widehat{u}$, son equivalentes:

(a) $\omega \triangleleft \mathbf{u} = \omega$;

(b) el mapeo equivariante $\widehat{u}\colon \mathbf{P} \to G$ es constante a lo largo de toda curva horizontal;

(c) la sección $\mathbf{u}$ de $\mathrm{Ad}(\mathbf{P})$ es $\omega$-paralela.

En consecuencia, la evaluación en $p$ induce un isomorfismo

$$\mathrm{Stab}_{C^\infty}(\omega) \xrightarrow{\cong} Z_G(\mathrm{Hol}_p(\omega)). \tag{2.51}$$

Además, la evaluación identifica las direcciones infinitesimales:

$$\ker\big(d_\omega\colon \Omega^0(M;\mathrm{ad}(\mathbf{P})) \to \Omega^1(M;\mathrm{ad}(\mathbf{P}))\big) \cong \mathrm{Lie}\, Z_G(\mathrm{Hol}_p(\omega)). \tag{2.52}$$

*Demostración.* Sobre un vector horizontal $X \in \mathbf{H}_q\mathbf{P}$, la fórmula global de transformación de una conexión se reduce a

$$(\Phi_{\mathbf{u}}^*\omega)_q(X) = \theta^L_{\widehat{u}(q)}(d\widehat{u}_q X),$$

porque $\omega_q(X) = 0$. Por lo tanto, $\Phi_{\mathbf{u}}^*\omega = \omega$ implica $d\widehat{u}(X) = 0$ para todo vector horizontal. Recíprocamente, esta última condición hace que ambas formas de conexión se anulen sobre $\mathbf{H}$; sobre los vectores verticales ambas reproducen el generador infinitesimal. Como $T\mathbf{P} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{V}$, las formas coinciden. Esto prueba la equivalencia de (a)–(c).

El isomorfismo (2.51) es ahora el Teorema 2.6.32. Para el enunciado infinitesimal, la fórmula de la conexión inducida en $\mathrm{ad}(\mathbf{P})$ muestra que $d_\omega \xi = 0$ si y sólo si el mapeo equivariante $\widehat{\xi}\colon \mathbf{P} \to \mathfrak{g}$ es constante sobre las curvas horizontales. El mismo argumento de evaluación lo identifica con los vectores fijos por $\mathrm{Ad}(\mathrm{Hol}_p(\omega))$, que forman el álgebra de Lie del centralizador por (1.24). □

## 2.7 Derivada covariante a lo largo de curvas y transporte paralelo

En muchas construcciones geométricas no basta derivar secciones definidas sobre abiertos de la variedad. Con frecuencia necesitamos estudiar objetos que sólo están definidos a lo largo de una curva. Este fenómeno aparece, por ejemplo, cuando se quiere comparar elementos que pertenecen a fibras distintas, cuando se estudia la variación de una sección a lo largo de una trayectoria o, en el caso particular del haz tangente, cuando se define la aceleración covariante de una curva.

La dificultad es que, si $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial suave y $\gamma\colon I \longrightarrow M$ es una curva suave, entonces una sección de $\mathbf{E}$ a lo largo de $\gamma$ asigna a cada $t \in I$ un vector de la fibra $\mathbf{E}_{\gamma(t)}$. Como estas fibras son, en principio,

espacios vectoriales distintos, no tiene sentido derivar dicha sección mediante una diferencia directa de valores. La conexión permite resolver este problema: proporciona una forma intrínseca de derivar secciones en direcciones tangentes y, a partir de ello, induce una derivada para secciones definidas solamente sobre la curva.

Antes de formalizar esta construcción, recordamos la noción de pullback de un haz vectorial.

**Definición 2.7.1.** (Pullback de haces vectoriales) Sean $M$ y $N$ variedades suaves, con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $k$ y sea $f\colon N \longrightarrow M$ un mapeo suave. Definimos el *pullback* de $\mathbf{E}$ por $f$ como el conjunto

$$f^*\mathbf{E} := \{(y,e) \in N \times \mathbf{E} \mid \pi(e) = f(y)\}.$$

Dotamos a $f^*\mathbf{E}$ de la proyección $\pi_{f^*\mathbf{E}}\colon f^*\mathbf{E} \longrightarrow N$ dada por $\pi_{f^*\mathbf{E}}(y,e) := y$. Para cada $y \in N$, la fibra de $f^*\mathbf{E}$ sobre $y$ está dada por $(f^*\mathbf{E})_y = \{(y,e) \in f^*\mathbf{E} \mid e \in \mathbf{E}_{f(y)}\}$. Mediante la identificación natural $(y,e) \mapsto e$, identificaremos $(f^*\mathbf{E})_y$ con $\mathbf{E}_{f(y)}$.

**Proposición 2.7.2.** Sean $M$ y $N$ variedades suaves, con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $k$ y sea $f\colon N \longrightarrow M$ un mapeo suave. Entonces $f^*\mathbf{E} \longrightarrow N$ admite una estructura natural de haz vectorial suave de rango $k$.

*Demostración.* Recordemos que $f^*\mathbf{E} = \{(y,e) \in N \times \mathbf{E} \mid \pi(e) = f(y)\}$, con proyección $\pi_{f^*\mathbf{E}}(y,e) = y$. Para cada $y \in N$, la fibra de $f^*\mathbf{E}$ sobre $y$ está dada por $(f^*\mathbf{E})_y = \{(y,e) \mid e \in \mathbf{E}_{f(y)}\}$, la cual identificaremos con $\mathbf{E}_{f(y)}$ mediante $(y,e) \mapsto e$.
Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cubierta trivializante de $\mathbf{E}$, con trivializaciones $\Phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^k$. Entonces $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es una cubierta abierta de $N$, pues $f$ es continua.
Para cada $\alpha$, definimos

$$\widetilde{\Phi}_\alpha : \pi^{-1}_{f^*\mathbf{E}}(f^{-1}(U_\alpha)) \longrightarrow f^{-1}(U_\alpha) \times \mathbb{K}^k$$

por

$$\widetilde{\Phi}_\alpha(y,e) := \big(y, \mathrm{pr}_2(\Phi_\alpha(e))\big),$$

donde $\mathrm{pr}_2\colon U_\alpha \times \mathbb{K}^k \longrightarrow \mathbb{K}^k$ es la segunda proyección. Esta expresión está bien definida porque, si $(y,e) \in f^*\mathbf{E}$ y $y \in f^{-1}(U_\alpha)$, entonces $f(y) \in U_\alpha$ y, como $\pi(e) = f(y)$, se tiene $e \in \pi^{-1}(U_\alpha)$.
Veamos que $\widetilde{\Phi}_\alpha$ es biyectiva. Sea $(y,v) \in f^{-1}(U_\alpha) \times \mathbb{K}^k$. Como $f(y) \in U_\alpha$, existe un único $e \in \mathbf{E}_{f(y)}$ tal que $\Phi_\alpha(e) = (f(y), v)$. Por lo tanto, $(y,e) \in f^*\mathbf{E}$ y $\widetilde{\Phi}_\alpha(y,e) = (y,v)$. Esto muestra la sobreyectividad.
Si $\widetilde{\Phi}_\alpha(y,e) = \widetilde{\Phi}_\alpha(y',e')$, entonces $y = y'$ y $\mathrm{pr}_2(\Phi_\alpha(e)) = \mathrm{pr}_2(\Phi_\alpha(e'))$. Además, como $(y,e)$ y $(y,e')$ pertenecen a $f^*\mathbf{E}$, se tiene $\pi(e) = f(y) = \pi(e')$. Por lo tanto, la primera componente de $\Phi_\alpha(e)$ y de $\Phi_\alpha(e')$ también coincide. Así, $\Phi_\alpha(e) = \Phi_\alpha(e')$. Como $\Phi_\alpha$ es inyectiva, se obtiene $e = e'$. Luego $\widetilde{\Phi}_\alpha$ es inyectiva. De hecho, su inversa está dada por

$$\widetilde{\Phi}^{-1}_\alpha(y,v) = \big(y, \Phi^{-1}_\alpha(f(y),v)\big).$$

Además, la restricción de $\widetilde{\Phi}_\alpha$ a cada fibra $(f^*\mathbf{E})_y$ es un isomorfismo lineal sobre $\{y\} \times \mathbb{K}^k$, pues coincide con la trivialización de $\mathbf{E}$ en la fibra $\mathbf{E}_{f(y)}$ bajo la identificación natural $(f^*\mathbf{E})_y \cong \mathbf{E}_{f(y)}$.
Ahora consideremos $\alpha, \beta$ tales que $f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \neq \varnothing$. En $U_\alpha \cap U_\beta$, las trivializaciones de $\mathbf{E}$ satisfacen

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(p,v) = (p, \tau_{\alpha\beta}(p)v),$$

donde $\tau_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(k,\mathbb{K})$ es suave. Entonces, para $y \in f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, se tiene

$$\widetilde{\Phi}_\alpha \circ \widetilde{\Phi}_\beta^{-1}(y,v) = \big(y, \tau_{\alpha\beta}(f(y))v\big).$$

Por lo tanto, las funciones de transición del sistema $\{\widetilde{\Phi}_\alpha\}$ están dadas por $\widetilde{\tau}_{\alpha\beta}(y) = \tau_{\alpha\beta}(f(y))$. Como $\tau_{\alpha\beta}$ y $f$ son suaves, también $\widetilde{\tau}_{\alpha\beta}$ es suave.
Por el Lema 1.7.8, existe una única topología y estructura suave sobre $f^*\mathbf{E}$ que lo convierten en un haz vectorial suave de rango $k$ sobre $N$, con proyección $\pi_{f^*\mathbf{E}}$ y trivializaciones locales $\widetilde{\Phi}_\alpha$. □

**Definición 2.7.3.** (Secciones a lo largo de una curva) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave y sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva suave. Una sección de $\mathbf{E}$ a lo largo de $\gamma$ es una sección del haz pullback $\gamma^*\mathbf{E} \longrightarrow I$.
Usando la identificación natural $(\gamma^*\mathbf{E})_t \cong \mathbf{E}_{\gamma(t)}$, pensaremos una sección de $\mathbf{E}$ a lo largo de $\gamma$ como un mapeo $\mathbf{u}\colon I \longrightarrow \mathbf{E}$ tal que $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{E}_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$. Con esta identificación, escribiremos $\Gamma^k(\gamma^*\mathbf{E})$ para denotar el espacio de secciones de clase $C^k$ de $\mathbf{E}$ a lo largo de $\gamma$, y escribiremos $\Gamma(\gamma^*\mathbf{E}) = \Gamma^\infty(\gamma^*\mathbf{E})$.
Diremos que $\mathbf{u} \in \Gamma^k(\gamma^*\mathbf{E})$ es extendible si existe una sección $\widetilde{\mathbf{u}} \in \Gamma^k(\mathbf{E})$, definida en una vecindad de $\gamma(I)$, tal que $\mathbf{u}(t) = \widetilde{\mathbf{u}}(\gamma(t))$ para todo $t \in I$.

**Observación 2.7.4.** Cuando $\mathbf{E} = TM$, los elementos de $\Gamma^k(\gamma^*TM)$ son precisamente los campos vectoriales de clase $C^k$ a lo largo de $\gamma$. Más generalmente, si $\mathbf{E} = T^{(r,s)}(TM)$ con la conexión inducida por una conexión en $TM$, se obtiene la noción de campo tensorial de tipo $(r,s)$ a lo largo de $\gamma$.

El siguiente resultado introduce la derivada covariante a lo largo de una curva. La condición fundamental es que, si una sección a lo largo de $\gamma$ proviene de restringir una sección $\widetilde{\mathbf{u}}$ de $\mathbf{E}$, entonces su derivada a lo largo de la curva debe coincidir con $\nabla^{\mathbf{E}}_{\dot\gamma}\widetilde{\mathbf{u}}$. El contenido del resultado es que esta condición determina de manera única una derivada para cualquier sección de clase $C^1$ de $\gamma^*\mathbf{E}$.

**Teorema 2.7.5.** (Derivada covariante a lo largo de una curva) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ y sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva suave. Existe un único operador

$$\frac{D}{dt}\colon \Gamma^1(\gamma^*\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma^0(\gamma^*\mathbf{E})$$

que satisface las siguientes propiedades:

(a) $\dfrac{D}{dt}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\dfrac{D\mathbf{u}}{dt} + b\dfrac{D\mathbf{v}}{dt}$ para todo $a,b \in \mathbb{K}$ y todo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \Gamma^1(\gamma^*\mathbf{E})$.

(b) $\dfrac{D}{dt}(f\mathbf{u}) = \dfrac{df}{dt}\mathbf{u} + f\dfrac{D\mathbf{u}}{dt}$ para toda $f \in C^1(I)$ y todo $\mathbf{u} \in \Gamma^1(\gamma^*\mathbf{E})$.

(c) Si $\mathbf{u}$ es extendible y $\widetilde{\mathbf{u}}$ es una extensión de clase $C^1$ de $\mathbf{u}$ a una vecindad de $\gamma(I)$, entonces $\dfrac{D\mathbf{u}}{dt}(t) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\dot\gamma(t)}\widetilde{\mathbf{u}}$ para todo $t \in I$.

Si $\mathbf{u} \in \Gamma^k(\gamma^*\mathbf{E})$ con $k \geq 1$, entonces $\dfrac{D\mathbf{u}}{dt} \in \Gamma^{k-1}(\gamma^*\mathbf{E})$. En particular, el operador anterior restringe a un operador $\dfrac{D}{dt}\colon \Gamma(\gamma^*\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\gamma^*\mathbf{E})$.

*Demostración.* Primero construiremos el operador en una trivialización local y después probaremos que la construcción no depende de las elecciones.

Sea $t_0 \in I$. Tomemos una carta suave $(U,\varphi)$ de $M$, con coordenadas locales $(x^1,\dots,x^n)$, tal que $\gamma(t_0) \in U$, y tomemos un marco local suave $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ de $\mathbf{E}$ sobre $U$. Como $\gamma^{-1}(U)$ es abierto en $I$ y contiene a $t_0$, existe un intervalo $J \subseteq I$, abierto en $I$, tal que $t_0 \in J$ y $\gamma(J) \subseteq U$.

En $J$, toda sección $\mathbf{u} \in \Gamma^1(\gamma^*\mathbf{E})$ se escribe de manera única como $\mathbf{u}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t))$, donde $u^1,\dots,u^r$ son funciones de clase $C^1$ en $J$. Definimos los coeficientes locales de la conexión por $\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{e}_\beta = \Gamma^\alpha_{i\beta}\mathbf{e}_\alpha$. Entonces definimos localmente

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt}(t) = \left(\frac{du^\alpha}{dt}(t) + \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma(t))u^\beta(t)\right)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)). \tag{2.53}$$

Veamos que esta definición no depende del marco local. Sea $(\widetilde{\mathbf{e}}_1,\dots,\widetilde{\mathbf{e}}_r)$ otro marco local de $\mathbf{E}$ sobre el mismo abierto, y escribamos $\widetilde{\mathbf{e}}_a = B^\beta_a\mathbf{e}_\beta$, donde $B = (B^\beta_a)$ es una matriz de funciones suaves con valores en $GL(r,\mathbb{K})$. Si

$$\mathbf{u}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)) = \widetilde{u}^a(t)\widetilde{\mathbf{e}}_a(\gamma(t)),$$

entonces $u^\alpha(t) = B^\alpha_a(\gamma(t))\widetilde{u}^a(t)$. Por otra parte, si $\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\widetilde{\mathbf{e}}_b = \widetilde{\Gamma}^a_{ib}\widetilde{\mathbf{e}}_a$, entonces, usando $\widetilde{\mathbf{e}}_b = B^\beta_b\mathbf{e}_\beta$, obtenemos

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\widetilde{\mathbf{e}}_b = (\partial_i B^\alpha_b)\mathbf{e}_\alpha + B^\beta_b\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{e}_\beta = (\partial_i B^\alpha_b + B^\beta_b\Gamma^\alpha_{i\beta})\mathbf{e}_\alpha.$$

Como también

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\widetilde{\mathbf{e}}_b = \widetilde{\Gamma}^a_{ib}\widetilde{\mathbf{e}}_a = \widetilde{\Gamma}^a_{ib}B^\alpha_a\mathbf{e}_\alpha,$$

se tiene

$$\partial_i B^\alpha_b + B^\beta_b\Gamma^\alpha_{i\beta} = B^\alpha_a\widetilde{\Gamma}^a_{ib}.$$

Derivando $u^\alpha = B^\alpha_a(\gamma)\widetilde{u}^a$ con respecto a $t$, obtenemos

$$\frac{du^\alpha}{dt} = \frac{d\gamma^i}{dt}(\partial_i B^\alpha_a)(\gamma)\widetilde{u}^a + B^\alpha_a(\gamma)\frac{d\widetilde{u}^a}{dt}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{du^\alpha}{dt} + \frac{d\gamma^i}{dt}\Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma)u^\beta = B^\alpha_a(\gamma)\frac{d\widetilde{u}^a}{dt} + \frac{d\gamma^i}{dt}\left(\partial_i B^\alpha_b + B^\beta_b\Gamma^\alpha_{i\beta}\right)(\gamma)\widetilde{u}^b.$$

Usando la relación anterior entre los coeficientes de conexión, resulta

$$\frac{du^\alpha}{dt} + \frac{d\gamma^i}{dt}\Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma)u^\beta = B^\alpha_a(\gamma)\left(\frac{d\widetilde{u}^a}{dt} + \frac{d\gamma^i}{dt}\widetilde{\Gamma}^a_{ib}(\gamma)\widetilde{u}^b\right).$$

Al multiplicar por $\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t))$ y usar $B^\alpha_a\mathbf{e}_\alpha = \widetilde{\mathbf{e}}_a$, se obtiene exactamente la expresión de (2.53) escrita en el marco $\widetilde{\mathbf{e}}_a$. Así, la definición no depende del marco local.

Como la expresión obtenida es intrínseca respecto del marco, también coincide en los traslapes de trivializaciones locales. Por lo tanto, define una sección global $\frac{D\mathbf{u}}{dt} \in \Gamma^0(\gamma^*\mathbf{E})$. Si $\mathbf{u} \in \Gamma^k(\gamma^*\mathbf{E})$, la fórmula local muestra que $\frac{D\mathbf{u}}{dt} \in \Gamma^{k-1}(\gamma^*\mathbf{E})$.

La linealidad sobre $\mathbb{K}$ se verifica directamente en la fórmula local. Para la regla de Leibniz, sea $f \in C^1(I)$.

Las componentes de $f\mathbf{u}$ son $fu^\alpha$, y entonces

$$\frac{D(f\mathbf{u})}{dt} = \left(\frac{d(fu^\alpha)}{dt} + \frac{d\gamma^i}{dt}\Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma) f u^\beta\right)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)).$$

Como $\dfrac{d(fu^\alpha)}{dt} = \dfrac{df}{dt}u^\alpha + f\dfrac{du^\alpha}{dt}$, obtenemos $\dfrac{D(f\mathbf{u})}{dt} = \dfrac{df}{dt}\mathbf{u} + f\dfrac{D\mathbf{u}}{dt}$.
Probemos ahora la compatibilidad con extensiones. Supongamos que $\mathbf{u}(t) = \widetilde{\mathbf{u}}(\gamma(t))$, donde $\widetilde{\mathbf{u}}$ es una sección de clase $C^1$ de $\mathbf{E}$ definida en una vecindad de $\gamma(I)$. En un marco local escribimos $\widetilde{\mathbf{u}} = \widetilde{u}^\alpha\mathbf{e}_\alpha$. Entonces las componentes de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\gamma$ son $\widetilde{u}^\alpha(\gamma(t))$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}\big(\widetilde{u}^\alpha(\gamma(t))\big) = \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\partial_i\widetilde{u}^\alpha(\gamma(t)).$$

Sustituyendo en (2.53), resulta

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt}(t) = \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\left(\partial_i\widetilde{u}^\alpha(\gamma(t)) + \Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma(t))\widetilde{u}^\beta(\gamma(t))\right)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)).$$

La expresión entre paréntesis es la expresión local de $\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\widetilde{\mathbf{u}}$ en el marco $\mathbf{e}_\alpha$. Por lo tanto, $\dfrac{D\mathbf{u}}{dt}(t) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\dot\gamma(t)}\widetilde{\mathbf{u}}$.
Finalmente probamos la unicidad. Supongamos que $\mathcal{D}$ es otro operador que satisface las tres propiedades del enunciado. En un intervalo $J$ con $\gamma(J) \subseteq U$, escribimos $\mathbf{u}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t))$. Como cada $\mathbf{e}_\alpha \circ \gamma$ es extendible, las propiedades de $\mathcal{D}$ implican

$$\mathcal{D}\mathbf{u} = \frac{du^\alpha}{dt}\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)) + u^\alpha(t)\mathcal{D}(\mathbf{e}_\alpha \circ \gamma).$$

Por la propiedad de compatibilidad con extensiones, $\mathcal{D}(\mathbf{e}_\alpha \circ \gamma)(t) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\dot\gamma(t)}\mathbf{e}_\alpha$. Usando $\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\partial_i|_{\gamma(t)}$ y $\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{e}_\beta = \Gamma^\alpha_{i\beta}\mathbf{e}_\alpha$, se obtiene precisamente la fórmula (2.53). Por lo tanto, $\mathcal{D} = \frac{D}{dt}$ localmente. Como $t_0$ era arbitrario, $\mathcal{D} = \frac{D}{dt}$ en todo $I$. □

**Observación 2.7.6.** Si se consideran las conexiones inducidas sobre $\mathbf{E}^*$, sobre productos tensoriales y, en particular, sobre haces tensoriales construidos a partir de $TM$, la derivada covariante a lo largo de curvas conmuta con las contracciones y satisface la regla de Leibniz respecto del producto tensorial. En particular, si $\mathbf{E} = T^{(r,s)}(TM)$, se obtiene la derivada covariante de campos tensoriales de tipo $(r,s)$ a lo largo de una curva.

**Proposición 2.7.7.** (Expresión local de la derivada covariante a lo largo de una curva) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $r$ con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ y sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva suave. Supongamos que $\gamma(J) \subseteq U$, donde $(U,\varphi)$ es una carta suave de $M$ con coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$, y sea $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ un marco local suave de $\mathbf{E}$ sobre $U$.
Si $\mathbf{u}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t))$, con $t \in J$, y si los coeficientes locales de la conexión están dados por $\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{e}_\beta = \Gamma^\alpha_{i\beta}\mathbf{e}_\alpha$, entonces

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt}(t) = \left(\frac{du^\alpha}{dt}(t) + \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma(t))u^\beta(t)\right)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)).$$

*Demostración.* Escribimos $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha \circ \gamma$. Por la regla de Leibniz,

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt} = \frac{du^\alpha}{dt}\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)) + u^\alpha \frac{D(\mathbf{e}_\alpha \circ \gamma)}{dt}.$$

Como $\mathbf{e}_\alpha \circ \gamma$ es extendible, se tiene $\dfrac{D(\mathbf{e}_\alpha \circ \gamma)}{dt}(t) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\dot\gamma(t)}\mathbf{e}_\alpha$. Usando $\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\partial_i|_{\gamma(t)}$ y $\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{e}_\beta = \Gamma^\alpha_{i\beta}\mathbf{e}_\alpha$, obtenemos

$$\frac{D(\mathbf{e}_\beta \circ \gamma)}{dt}(t) = \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma(t))\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)).$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula de $\frac{D\mathbf{u}}{dt}$, resulta

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt}(t) = \frac{du^\alpha}{dt}(t)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)) + u^\beta(t)\frac{d\gamma^i}{dt}(t)\Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma(t))\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)).$$

Agrupando los coeficientes de $\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t))$, obtenemos la fórmula deseada. □

El resultado anterior muestra que la derivada covariante de una sección a lo largo de una curva se calcula mediante un sistema local de funciones ordinarias. En particular, si una sección global se restringe a una curva, la derivada a lo largo de la curva sólo depende de los valores de la sección sobre dicha curva y de la velocidad de la curva.

**Proposición 2.7.8.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $p \in M$, $v \in T_pM$, y sean $\mathbf{s}, \widetilde{\mathbf{s}}$ secciones de clase $C^1$ de $\mathbf{E}$ definidas en una vecindad de $p$. Supongamos que existe una curva suave $\gamma\colon I \longrightarrow M$ y un punto $t_0 \in I$ tales que $\gamma(t_0) = p$, $\dot\gamma(t_0) = v$, y $\mathbf{s}(\gamma(t)) = \widetilde{\mathbf{s}}(\gamma(t))$ para todo $t$ en una vecindad de $t_0$. Entonces $\nabla^{\mathbf{E}}_v \mathbf{s} = \nabla^{\mathbf{E}}_v \widetilde{\mathbf{s}}$.

*Demostración.* Definimos una sección $\mathbf{u}$ de $\gamma^*\mathbf{E}$ cerca de $t_0$ por $\mathbf{u}(t) = \mathbf{s}(\gamma(t)) = \widetilde{\mathbf{s}}(\gamma(t))$. Entonces $\mathbf{s}$ y $\widetilde{\mathbf{s}}$ son dos extensiones locales de $\mathbf{u}$. Por la propiedad de compatibilidad con extensiones del Teorema 2.7.5, se tiene

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\dot\gamma(t_0)}\mathbf{s} = \frac{D\mathbf{u}}{dt}(t_0) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\dot\gamma(t_0)}\widetilde{\mathbf{s}}.$$

Como $\dot\gamma(t_0) = v$, concluimos que $\nabla^{\mathbf{E}}_v \mathbf{s} = \nabla^{\mathbf{E}}_v \widetilde{\mathbf{s}}$. □

**Definición 2.7.9.** (Secciones paralelas a lo largo de una curva) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ y sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva suave. Decimos que una sección $\mathbf{u} \in \Gamma^1(\gamma^*\mathbf{E})$ es paralela a lo largo de $\gamma$ si $\dfrac{D\mathbf{u}}{dt} \equiv 0$.

En un marco local, la condición de paralelismo se traduce en un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias. Si $\mathbf{u}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t))$, entonces $\mathbf{u}$ es paralela a lo largo de $\gamma$ si y sólo si

$$\frac{du^\alpha}{dt}(t) = -\frac{d\gamma^i}{dt}(t)\Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma(t))u^\beta(t), \qquad \alpha \in \{1,\dots,r\}. \tag{2.54}$$

Esta observación reduce la existencia y unicidad de secciones paralelas a un teorema clásico de existencia y unicidad para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Proposición 2.7.10.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ y sea $\mathbf{s} \in \Gamma^1(\mathbf{E})$. Entonces $\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s} = 0$ si y sólo si, para toda curva suave $\gamma\colon I \longrightarrow M$, la sección $\mathbf{s} \circ \gamma$ de $\gamma^*\mathbf{E}$ es paralela a lo largo de $\gamma$.

*Demostración.* Supongamos primero que $\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s} = 0$. Para toda curva suave $\gamma\colon I \longrightarrow M$, la sección $\mathbf{s} \circ \gamma$ es extendible por $\mathbf{s}$. Por el Teorema 2.7.5, se tiene $\dfrac{D(\mathbf{s} \circ \gamma)}{dt}(t) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\dot\gamma(t)}\mathbf{s} = 0$. Así, $\mathbf{s} \circ \gamma$ es paralela a lo largo de $\gamma$. Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{s} \circ \gamma$ es paralela a lo largo de toda curva suave $\gamma$. Sea $p \in M$ y sea $v \in T_pM$. Tomamos una curva suave $\gamma$ definida cerca de 0 tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot\gamma(0) = v$. Entonces

$$\nabla^{\mathbf{E}}_v \mathbf{s} = \nabla^{\mathbf{E}}_{\dot\gamma(0)}\mathbf{s} = \frac{D(\mathbf{s} \circ \gamma)}{dt}(0) = 0.$$

Como $p$ y $v$ eran arbitrarios, se concluye que $\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s} = 0$. □

**Teorema 2.7.11.** (Existencia, unicidad y suavidad para ODEs lineales) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y, para $1 \leq \beta, \alpha \leq r$, sea $A^\alpha_\beta\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$ una función suave. Para todo $t_0 \in I$ y todo vector inicial $c = (c^1, \ldots, c^r) \in \mathbb{K}^r$, el problema lineal de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dU^\alpha}{dt}(t) = A^\alpha_\beta(t)U^\beta(t), \\ U^\alpha(t_0) = c^\alpha, \end{cases} \tag{2.55}$$

tiene una única solución suave definida en todo $I$. Además, para $t_0$ fijo, la solución depende suavemente de $(t, c) \in I \times \mathbb{K}^r$.

*Demostración.* Primero probaremos el resultado en el caso $t_0 = 0$ y $0 \in I$. Para simplificar la escritura, presentamos el argumento sobre $\mathbb{R}$. En el caso complejo, se aplica el mismo razonamiento a las partes real e imaginaria, identificando $\mathbb{C}^r$ con $\mathbb{R}^{2r}$.
Sean $(x^0, x^1, \ldots, x^r)$ las coordenadas estándar de $I \times \mathbb{R}^r$. Consideremos el campo vectorial suave

$$\mathbf{Y} = \partial_0 + A^\alpha_\beta(x^0)x^\beta\partial_\alpha$$

en $I \times \mathbb{R}^r$.
Si $U(t) = (U^1(t), \ldots, U^r(t))$ es una solución de (2.55) definida en un intervalo $I_0 \subseteq I$, entonces $\eta(t) = (t, U^1(t), \ldots, U^r(t))$ es una curva integral de $\mathbf{Y}$. La primera componente satisface $\dot\eta^0(t) = 1$, y las demás satisfacen

$$\dot\eta^\alpha(t) = \frac{dU^\alpha}{dt}(t) = A^\alpha_\beta(t)U^\beta(t) = A^\alpha_\beta(\eta^0(t))\eta^\beta(t).$$

Recíprocamente, si $\eta(t) = (\eta^0(t), \eta^1(t), \ldots, \eta^r(t))$ es una curva integral de $Y$ con $\eta(0) = (0, c^1, \ldots, c^r)$, entonces $\dot\eta^0(t) = 1$ y $\eta^0(0) = 0$. Por lo tanto, $\eta^0(t) = t$. Definiendo $U(t) = (\eta^1(t), \ldots, \eta^r(t))$, obtenemos una solución del sistema (2.55) con condición inicial $U(0) = c$. Así, las soluciones del sistema lineal están en correspondencia con las curvas integrales de $Y$ que pasan por $(0, c)$.
Por el Teorema 1.8.15, existe una única curva integral maximal de $Y$ con condición inicial $(0, c)$, definida en un intervalo abierto maximal $I_0 \subseteq I$ que contiene a 0. Por lo anterior, esto equivale a la existencia y unicidad de una solución maximal $U\colon I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^r$ del sistema lineal. Falta demostrar que $I_0 = I$.

Escribamos $I = (a, b)$ e $I_0 = (a_0, b_0)$, con $a, b, a_0, b_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Supongamos, buscando una contradicción, que $b_0 < b$. Entonces $b_0$ es finito y $[0, b_0] \subseteq I$. Para $t \in [0, b_0)$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2 = 2\frac{dU^\alpha}{dt}(t)U^\alpha(t) = 2A^\alpha_\beta(t)U^\beta(t)U^\alpha(t).$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para la norma de Frobenius, obtenemos $\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2 \leq 2\|A(t)\|_F\|U(t)\|^2$. Como las funciones $A^\alpha_\beta$ son continuas, existe $C > 0$ tal que $\|A(t)\|_F \leq C$ para todo $t \in [0, b_0]$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2Ct}\|U(t)\|^2\right) = e^{-2Ct}\left(\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2 - 2C\|U(t)\|^2\right) \leq 0.$$

Así, $e^{-2Ct}\|U(t)\|^2 \leq \|U(0)\|^2$ para todo $t \in [0, b_0)$, y entonces $\|U(t)\| \leq e^{Cb_0}\|U(0)\|$. Por consiguiente, la curva integral correspondiente permanece en el compacto

$$[0, b_0] \times \overline{B}_{\text{euc}}(0, R) \subseteq I \times \mathbb{R}^r, \qquad R = e^{Cb_0}\|U(0)\|.$$

Esto contradice el Lema 1.8.18. En consecuencia, $b_0 = b$.

Para probar que $a_0 = a$, consideremos la solución reparametrizada $W(s) = U(-s)$, la cual satisface el sistema lineal $\frac{dW^\alpha}{ds}(s) = -A^\alpha_\beta(-s)W^\beta(s)$. El argumento anterior, aplicado a $W$, muestra que la solución tampoco puede dejar de existir antes de alcanzar el extremo izquierdo de $I$. Concluimos que $I_0 = I$.

La dependencia suave respecto de $(t, c)$ se sigue de la dependencia suave del flujo de $Y$ respecto del tiempo y de las condiciones iniciales, pues la solución $U(t)$ es la componente en $\mathbb{R}^r$ de la curva integral de $Y$ que inicia en $(0, c)$.

Finalmente, consideremos el caso general $t_0 \in I$. Definimos $\widetilde{I} = I - t_0$ y $\widetilde{A}^\alpha_\beta(s) = A^\alpha_\beta(s + t_0)$. El sistema trasladado

$$\frac{d\widetilde{U}^\alpha}{ds}(s) = \widetilde{A}^\alpha_\beta(s)\widetilde{U}^\beta(s), \qquad \widetilde{U}^\alpha(0) = c^\alpha,$$

tiene una única solución suave en todo $\widetilde{I}$. Definiendo $U(t) = \widetilde{U}(t - t_0)$, obtenemos la solución del sistema original en todo $I$. La unicidad y la dependencia suave se preservan bajo el cambio de variable $s = t - t_0$. □

**Teorema 2.7.12.** (Existencia y unicidad del transporte paralelo) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva suave, sea $t_0 \in I$ y sea $v \in \mathbf{E}_{\gamma(t_0)}$. Entonces existe una única sección paralela $\mathbf{u} \in \Gamma(\gamma^*\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}(t_0) = v$.

*Demostración.* Primero resolvemos el problema localmente. Supongamos que $\gamma(J) \subseteq U$, donde $J \subseteq I$ es un intervalo y $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r)$ es un marco local suave de $\mathbf{E}$ sobre $U$. Si $\mathbf{u}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t))$, entonces, por (2.54), la condición $\frac{D\mathbf{u}}{dt} = 0$ equivale al sistema lineal

$$\frac{du^\alpha}{dt}(t) = -\frac{d\gamma^i}{dt}(t)\Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma(t))u^\beta(t).$$

Definiendo $A^\alpha_\beta(t) = -\frac{d\gamma^i}{dt}(t)\Gamma^\alpha_{i\beta}(\gamma(t))$, obtenemos un sistema de la forma $\frac{du^\alpha}{dt}(t) = A^\alpha_\beta(t)u^\beta(t)$. Como $\gamma$ es suave y los coeficientes $\Gamma^\alpha_{i\beta}$ son suaves, las funciones $A^\alpha_\beta$ son suaves en $J$. Por el Teorema 2.7.11, para toda condición inicial en un punto de $J$ existe una única solución suave en todo $J$. Por lo tanto, en cualquier intervalo de parámetros cuya imagen esté contenida en una misma trivialización local de $\mathbf{E}$, existe una

única sección paralela con valor inicial prescrito.
Probemos ahora la existencia y unicidad global hacia la derecha de $t_0$; el extremo izquierdo se trata invirtiendo el parámetro. Sea $b = \sup I$ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{S} = \{s \in I \mid s > t_0 \text{ y existe una única sección paralela en } [t_0, s] \text{ con valor inicial } v\}.$$

Este conjunto no es vacío. Tomemos una trivialización local de $\mathbf{E}$ en una vecindad $U$ de $\gamma(t_0)$. Como $\gamma^{-1}(U)$ es abierto en $I$ y contiene a $t_0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I) \subseteq U$. Por el caso local, existe una única sección paralela en $[t_0, s]$ para todo $s \in I$ con $t_0 < s < t_0 + \varepsilon$.
Sea $\beta = \sup \mathcal{S}$. Para cada $s \in \mathcal{S}$, denotemos por $\mathbf{u}_s$ la única sección paralela en $[t_0, s]$ con $\mathbf{u}_s(t_0) = v$. Si $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ y $s_1 < s_2$, entonces $\mathbf{u}_{s_2}|_{[t_0, s_1]}$ es una sección paralela en $[t_0, s_1]$ con valor inicial $v$. Por la unicidad que define a $s_1 \in \mathcal{S}$, se tiene $\mathbf{u}_{s_2}|_{[t_0, s_1]} = \mathbf{u}_{s_1}$. Así, las soluciones $\mathbf{u}_s$ son compatibles entre sí.
Usando esta compatibilidad, definimos una sección $\mathbf{u}$ en $[t_0, \beta)$ de la siguiente manera. Si $t \in [t_0, \beta)$, elegimos $s \in \mathcal{S}$ tal que $t \leq s < \beta$ y ponemos $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_s(t)$. La definición no depende de la elección de $s$, precisamente por la compatibilidad anterior. Además, $\mathbf{u}$ es suave y paralela en $[t_0, \beta)$, pues localmente coincide con alguna de las secciones suaves y paralelas $\mathbf{u}_s$.
Veamos que $\beta = b$. Supongamos, buscando una contradicción, que $\beta < b$. Entonces $\beta \in I$. Tomemos una trivialización local de $\mathbf{E}$ sobre una vecindad $U$ de $\gamma(\beta)$. Como $\gamma^{-1}(U)$ es abierto en $I$ y contiene a $\beta$, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma((\beta - \delta, \beta + \delta) \cap I) \subseteq U$. Escogemos $\tau \in \mathcal{S}$ con $\beta - \frac{\delta}{2} < \tau < \beta$. Por el caso local, existe una única sección paralela $\widetilde{\mathbf{u}}$ a lo largo de $\gamma$ en $(\beta - \delta, \beta + \delta) \cap I$ tal que $\widetilde{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{u}(\tau)$.
Afirmamos que $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ en $[\tau, \beta)$. Sea $t \in [\tau, \beta)$. Elegimos $s \in \mathcal{S}$ tal que $t \leq s < \beta$. En el intervalo $[\tau, s]$, tanto $\widetilde{\mathbf{u}}$ como $\mathbf{u}_s$ son secciones paralelas con el mismo valor en $\tau$. Por la unicidad local dentro de la trivialización sobre $U$, se tiene $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_s$ en $[\tau, s]$. Como $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$ en $[\tau, s]$, concluimos que $\widetilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t)$. Puesto que $t$ era arbitrario, $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ en $[\tau, \beta)$.
Elegimos ahora $\varepsilon > 0$ tal que $\beta + \varepsilon \in I$ y $\varepsilon < \delta$. Definimos una sección $\widehat{\mathbf{u}}$ en $[t_0, \beta + \varepsilon]$ por

$$\widehat{\mathbf{u}}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t), & t \in [t_0, \tau], \\ \widetilde{\mathbf{u}}(t), & t \in [\tau, \beta + \varepsilon]. \end{cases}$$

Esta definición es suave, pues $\mathbf{u}$ y $\widetilde{\mathbf{u}}$ coinciden en un intervalo a la derecha de $\tau$. Además, $\widehat{\mathbf{u}}$ es paralela, ya que localmente coincide con secciones paralelas.
Probemos también la unicidad de $\widehat{\mathbf{u}}$. Sea $\mathbf{w}$ otra sección paralela en $[t_0, \beta + \varepsilon]$ con $\mathbf{w}(t_0) = v$. Entonces $\mathbf{w}|_{[t_0, \tau]}$ es una sección paralela con el mismo valor inicial que $\mathbf{u}_\tau$. Por la unicidad en $[t_0, \tau]$, se tiene $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ en $[t_0, \tau]$. En particular, $\mathbf{w}(\tau) = \mathbf{u}(\tau) = \widetilde{\mathbf{u}}(\tau)$. Por la unicidad local en la trivialización sobre $U$, se obtiene $\mathbf{w} = \widetilde{\mathbf{u}}$ en $[\tau, \beta + \varepsilon]$. Por lo tanto, $\mathbf{w} = \widehat{\mathbf{u}}$ en todo $[t_0, \beta + \varepsilon]$.
Esto muestra que $\beta + \varepsilon \in \mathcal{S}$, lo cual contradice la definición de $\beta = \sup \mathcal{S}$. Por lo tanto, $\beta = b$, y existe una única sección paralela hacia la derecha de $t_0$.
El mismo argumento hacia la izquierda, usando intervalos de la forma $[s, t_0]$ con $s < t_0$, muestra que existe una única sección paralela hacia la izquierda de $t_0$. Pegando ambas secciones, obtenemos una única sección paralela en todo $I$ con valor inicial $v$. □

**Definición 2.7.13.** (Transporte paralelo) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ y sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva suave. Dados $t_0, t_1 \in I$, definimos el

transporte paralelo de $t_0$ a $t_1$ a lo largo de $\gamma$ como el mapeo

$$P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1}\colon \mathbf{E}_{\gamma(t_0)} \longrightarrow \mathbf{E}_{\gamma(t_1)}$$

dado por $P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1}(v) = \mathbf{u}(t_1)$, donde $\mathbf{u}$ es la única sección paralela a lo largo de $\gamma$ tal que $\mathbf{u}(t_0) = v$.
Cuando el haz sea claro por el contexto, omitiremos el superíndice y escribiremos $P_{\gamma,t_0\to t_1}$.

**Proposición 2.7.14.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ y sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva suave. Para cualesquiera $t_0, t_1 \in I$, el transporte paralelo $P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1}\colon \mathbf{E}_{\gamma(t_0)} \longrightarrow \mathbf{E}_{\gamma(t_1)}$ es un isomorfismo lineal. Además, $P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_1\to t_0} = (P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1})^{-1}$. Más generalmente, si $t_0, t_1, t_2 \in I$, entonces

$$P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_1\to t_2} \circ P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1} = P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_2}.$$

*Demostración.* La linealidad se sigue de la linealidad de la ecuación de paralelismo. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son las secciones paralelas con condiciones iniciales $v$ y $z$ en $t_0$, entonces $a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$ es paralela y satisface $(a\mathbf{u} + b\mathbf{w})(t_0) = av + bz$. Por unicidad, $a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$ es la sección paralela correspondiente al dato inicial $av + bz$. Evaluando en $t_1$, obtenemos

$$P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1}(av + bz) = aP^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1}(v) + bP^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1}(z).$$

Para probar la fórmula de la inversa, sea $v \in \mathbf{E}_{\gamma(t_0)}$ y sea $\mathbf{u}$ la sección paralela con $\mathbf{u}(t_0) = v$. Entonces $\mathbf{u}(t_1) = P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1}(v)$. Si transportamos $\mathbf{u}(t_1)$ desde $t_1$ hasta $t_0$, la sección paralela obtenida debe ser nuevamente $\mathbf{u}$, por unicidad. Por lo tanto,

$$P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_1\to t_0}(P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1}(v)) = v.$$

El mismo argumento, intercambiando $t_0$ y $t_1$, muestra que la composición en el otro orden también es la identidad. Así, $P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_1\to t_0} = (P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1})^{-1}$.
Finalmente, sea $\mathbf{u}$ la sección paralela con $\mathbf{u}(t_0) = v$. Entonces $P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1}(v) = \mathbf{u}(t_1)$. Al transportar este vector desde $t_1$ hasta $t_2$, se obtiene nuevamente el valor $\mathbf{u}(t_2)$, por unicidad. Por lo tanto,

$$P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_1\to t_2}(P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_1}(v)) = \mathbf{u}(t_2) = P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t_2}(v).$$

Como $v$ era arbitrario, se obtiene la identidad de composición. □

**Observación 2.7.15.** (Marcos paralelos a lo largo de una curva) Sea $(b_1,\dots,b_r)$ una base de $\mathbf{E}_{\gamma(t_0)}$. Para cada $\alpha \in \{1,\dots,r\}$, sea $\mathbf{E}_\alpha$ la sección paralela a lo largo de $\gamma$ tal que $\mathbf{E}_\alpha(t_0) = b_\alpha$. Como el transporte paralelo es un isomorfismo lineal, para cada $t \in I$ la familia $(\mathbf{E}_1(t),\dots,\mathbf{E}_r(t))$ es una base de $\mathbf{E}_{\gamma(t)}$. A esta familia de secciones paralelas se le llama un marco paralelo a lo largo de $\gamma$.
Si $\mathbf{u} \in \Gamma^1(\gamma^*\mathbf{E})$, entonces existe una única familia de funciones $u^1,\dots,u^r$ de clase $C^1$ tal que $\mathbf{u}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{E}_\alpha(t)$. Como $\frac{D\mathbf{E}_\alpha}{dt} = 0$, se obtiene

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt}(t) = \frac{du^\alpha}{dt}(t)\mathbf{E}_\alpha(t).$$

En consecuencia, una sección $\mathbf{u}$ es paralela a lo largo de $\gamma$ si y sólo si sus componentes respecto de un marco paralelo son constantes.

El transporte paralelo sobre una sola curva produce un marco a lo largo de esa curva. En una vecindad nor-

mal puede realizarse simultáneamente sobre todas las geodésicas radiales; esta construcción será la trivialización natural para los espacios de secciones sobre variedades de geometría acotada.

**Definición 2.7.16.** (Marco síncrono) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $p \in M$ y sea $U$ una vecindad normal de $p$. Para $q \in U$, sea

$$\gamma_q(t) := \exp_p\big(t \exp_p^{-1}(q)\big), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Si $\pi_{\mathbf{E}} \colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $(b_1,\dots,b_r)$ es una base de $\mathbf{E}_p$, el marco

$$\mathbf{e}_a(q) := P^{\mathbf{E}}_{\gamma_q,0\to 1}(b_a), \qquad a \in \{1,\dots,r\},$$

se llama *marco síncrono centrado en* $p$.

**Proposición 2.7.17.** (Propiedades de los marcos síncronos) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $p \in M$, sea $U$ una vecindad normal de $p$ y sea $\pi_{\mathbf{E}} \colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. El marco síncrono centrado en $p$ es suave y su restricción a cada geodésica radial es paralela. Si la conexión es compatible con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y la base inicial es ortonormal, el marco es ortonormal en todo $U$. En coordenadas normales centradas en $p$, si $\nabla^{\mathbf{E}} = d + \mathbf{A}$ y $\mathbf{A} = A_i\,\mathbf{d}x^i$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x^i A_i(x) = 0, \qquad A_i(0) = 0 \quad (i \in \{1,\dots,n\}).$$

*Demostración.* En una trivialización fija, el transporte de $b_a$ satisface

$$\frac{dv_a}{dt}(t,q) = -\Gamma_i\big(\gamma_q(t)\big)\dot\gamma_q^i(t) v_a(t,q), \qquad v_a(0,q) = b_a.$$

La dependencia suave de las soluciones respecto de parámetros prueba la suavidad del marco, y la unicidad prueba el paralelismo radial. La compatibilidad métrica da $\frac{d}{dt}\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b) = 0$. En coordenadas normales, el rayo que termina en $x$ es $t \mapsto tx$; el paralelismo implica

$$0 = \nabla^{\mathbf{E}}_{\sum_{i=1}^{n} x^i \partial_i} \mathbf{e}_a = \left(\sum_{i=1}^{n} x^i A_i(x)\right)\mathbf{e}_a.$$

La identidad radial se sigue porque los $\mathbf{e}_a$ forman una base. Sustituir $x = tv$, dividir por $t > 0$ y dejar $t \to 0$ da $A_i(0) = 0$. □

**Proposición 2.7.18.** (Ecuación local del transporte paralelo) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi \colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$, sea $\gamma \colon I \longrightarrow M$ una curva suave y supongamos que $\gamma(J) \subseteq U$, donde $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ es un marco local de $\mathbf{E}$ sobre $U$. Fijemos $t_0 \in J$ y representemos el transporte paralelo $R(t) := P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t_0\to t} \colon \mathbf{E}_{\gamma(t_0)} \longrightarrow \mathbf{E}_{\gamma(t)}$ mediante una matriz $r(t)$ en el marco $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r$. Es decir, si $v = v^\beta \mathbf{e}_\beta(\gamma(t_0))$, entonces

$$R(t)v = r^\alpha_\beta(t) v^\beta \mathbf{e}_\alpha(\gamma(t)).$$

Entonces $r(t)$ satisface

$$\frac{dr}{dt}(t) + \dot{\gamma}^i(t)\Gamma_i(\gamma(t))r(t) = 0, \qquad r(t_0) = I,$$

donde $\Gamma_i = (\Gamma_{i\beta}^{\alpha})_{\alpha,\beta}$. En particular, si $\dot{\gamma}(t_0) = \partial_i|_{\gamma(t_0)}$, entonces $r'(t_0) = -\Gamma_i(\gamma(t_0))$.
Además, si $Q(t) := R(t)^{-1} = P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t\to t_0}$ y $q(t) = r(t)^{-1}$ es su matriz, entonces $q(t)$ depende suavemente de $t$ y satisface

$$\frac{dq}{dt}(t) = q(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma_i(\gamma(t)).$$

*Demostración.* Sea $v = v^\beta \mathbf{e}_\beta(\gamma(t_0))$. Por definición, $\mathbf{u}(t) := R(t)v$ es la sección paralela a lo largo de $\gamma$ con $\mathbf{u}(t_0) = v$. En el marco local escribimos $\mathbf{u}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t))$, donde $u^\alpha(t) = r^\alpha_\beta(t)v^\beta$.
Como $\mathbf{u}$ es paralela, la ecuación local (2.54) da

$$\frac{du^\alpha}{dt}(t) = -\dot{\gamma}^i(t)\Gamma^\alpha_{i\mu}(\gamma(t))u^\mu(t).$$

Sustituyendo $u^\alpha(t) = r^\alpha_\beta(t)v^\beta$, obtenemos

$$\frac{dr^\alpha_{\ \beta}}{dt}(t)v^\beta = -\dot{\gamma}^i(t)\Gamma^\alpha_{i\mu}(\gamma(t))r^\mu_{\ \beta}(t)v^\beta.$$

Como $v$ es arbitrario, se sigue que

$$\frac{dr^\alpha_{\ \beta}}{dt}(t) + \dot{\gamma}^i(t)\Gamma^\alpha_{i\mu}(\gamma(t))r^\mu_{\ \beta}(t) = 0.$$

En forma matricial, esto es $\frac{dr}{dt}(t)+\dot{\gamma}^i(t)\Gamma_i(\gamma(t))r(t) = 0$. Además, como $R(t_0)$ es la identidad de $\mathbf{E}_{\gamma(t_0)}$, se tiene $r(t_0) = I$. Si $\dot{\gamma}(t_0) = \partial_i|_{\gamma(t_0)}$, entonces $\dot{\gamma}^j(t_0) = \delta^j_i$, y al evaluar la ecuación en $t_0$ obtenemos $r'(t_0) = -\Gamma_i(\gamma(t_0))$.
Finalmente, $q(t) = r(t)^{-1}$ es suave porque $r(t)$ es suave y toma valores en $GL(r,\mathbb{K})$. Derivando la identidad $q(t)r(t) = I$, obtenemos $q'(t)r(t) + q(t)r'(t) = 0$. Por lo tanto, $q'(t) = -q(t)r'(t)r(t)^{-1}$. Usando $r'(t) = -\dot{\gamma}^i(t)\Gamma_i(\gamma(t))r(t)$, resulta $q'(t) = q(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma_i(\gamma(t))$. □

**Teorema 2.7.19.** (Derivada covariante mediante transporte paralelo) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$, sea $\gamma\colon I \longrightarrow M$ una curva suave y sea $\mathbf{u} \in \Gamma^1(\gamma^*\mathbf{E})$. Entonces, para todo $t_0 \in I$,

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t\to t_0}\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)}{t - t_0}.$$

El límite se toma en el espacio vectorial fijo $\mathbf{E}_{\gamma(t_0)}$. Si $t_0$ es un extremo del intervalo de definición, el límite se entiende como límite lateral.

*Demostración.* Tomemos un marco paralelo $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_r)$ a lo largo de $\gamma$. Escribimos $\mathbf{u}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{E}_\alpha(t)$. Por la observación anterior,

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt}(t_0) = \frac{du^\alpha}{dt}(t_0)\mathbf{E}_\alpha(t_0).$$

Por otra parte, como $\mathbf{E}_\alpha$ es paralelo, el transporte paralelo de $\mathbf{E}_\alpha(t)$ desde $t$ hasta $t_0$ es $\mathbf{E}_\alpha(t_0)$. Por linealidad

del transporte paralelo,

$$P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t\to t_0}\mathbf{u}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{E}_\alpha(t_0).$$

Entonces

$$\frac{P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t\to t_0}\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}(t_0)}{t-t_0} = \frac{u^\alpha(t)-u^\alpha(t_0)}{t-t_0}\mathbf{E}_\alpha(t_0).$$

Al tomar el límite cuando $t \to t_0$, obtenemos

$$\lim_{t\to t_0}\frac{P^{\mathbf{E}}_{\gamma,t\to t_0}\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}(t_0)}{t-t_0} = \frac{du^\alpha}{dt}(t_0)\mathbf{E}_\alpha(t_0) = \frac{D\mathbf{u}}{dt}(t_0).$$

□

**Corolario 2.7.20.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $\mathbf{s} \in \Gamma^1(\mathbf{E})$, sea $p \in M$ y sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Si $\gamma$ es una curva suave definida cerca de 0 tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot\gamma(0) = \mathbf{X}_p$, entonces

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{s}(p) = \lim_{h\to 0}\frac{P^{\mathbf{E}}_{\gamma,h\to 0}\mathbf{s}(\gamma(h))-\mathbf{s}(p)}{h}.$$

*Demostración.* Definimos una sección $\mathbf{u}$ de $\gamma^*\mathbf{E}$ por $\mathbf{u}(h) = \mathbf{s}(\gamma(h))$. Como $\mathbf{u}$ es la restricción de la sección $\mathbf{s}$ a la curva $\gamma$, el Teorema 2.7.5 implica que

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt}(0) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\dot\gamma(0)}\mathbf{s} = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}_p}\mathbf{s} = \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{s}(p).$$

Usando el Teorema 2.7.19 en $t_0 = 0$, obtenemos

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{P^{\mathbf{E}}_{\gamma,h\to 0}\mathbf{u}(h)-\mathbf{u}(0)}{h}.$$

Como $\mathbf{u}(h) = \mathbf{s}(\gamma(h))$ y $\mathbf{u}(0) = \mathbf{s}(p)$, se obtiene la fórmula. □

**Lema 2.7.21.** (Teorema fundamental del cálculo covariante) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi_{\mathbf{F}}\colon \mathbf{F} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave provisto de una conexión $\nabla^{\mathbf{F}}$. Sea $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ una curva suave y sea $\mathbf{s} \in \Gamma^1(\gamma^*\mathbf{F})$. Para $t, t_0 \in [a,b]$, denotemos por $P^{\mathbf{F}}_{\gamma,t\to t_0}\colon \mathbf{F}_{\gamma(t)} \longrightarrow \mathbf{F}_{\gamma(t_0)}$ el transporte paralelo a lo largo de $\gamma$ desde $\gamma(t)$ hasta $\gamma(t_0)$. Entonces

$$P^{\mathbf{F}}_{\gamma,t\to t_0}(\mathbf{s}(t)) - \mathbf{s}(t_0) = \int_{t_0}^{t} P^{\mathbf{F}}_{\gamma,\tau\to t_0}\left(\frac{D\mathbf{s}}{d\tau}(\tau)\right)d\tau.$$

La integral se toma en el espacio vectorial finito-dimensional $\mathbf{F}_{\gamma(t_0)}$.

*Demostración.* Fijemos $t_0 \in [a,b]$. Elegimos una base $v_1,\dots,v_r$ de la fibra $\mathbf{F}_{\gamma(t_0)}$. Para cada $\mu \in \{1,\dots,r\}$, sea $\mathbf{e}_\mu$ la sección paralela de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\gamma$ que satisface $\mathbf{e}_\mu(t_0) = v_\mu$. Entonces $\mathbf{e}_1(t),\dots,\mathbf{e}_r(t)$ es una base de $\mathbf{F}_{\gamma(t)}$ para todo $t \in [a,b]$.

Como $\mathbf{s}$ es una sección de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\gamma$, existen funciones $a^1,\dots,a^r \in C^1([a,b])$ tales que $\mathbf{s}(t) =$

$\sum_{\mu=1}^{r} a^\mu(t)\mathbf{e}_\mu(t)$. Puesto que cada $\mathbf{e}_\mu$ es paralela, su derivada covariante a lo largo de $\gamma$ se anula y, por lo tanto, $\dfrac{D\mathbf{s}}{dt}(t) = \sum_{\mu=1}^{r} \dfrac{da^\mu}{dt}(t)\mathbf{e}_\mu(t)$.

Además, por la definición de transporte paralelo, $P^{\mathbf{F}}_{\gamma,t\to t_0}(\mathbf{e}_\mu(t)) = \mathbf{e}_\mu(t_0) = v_\mu$. En consecuencia, $P^{\mathbf{F}}_{\gamma,t\to t_0}(\mathbf{s}(t)) = \sum_{\mu=1}^{r} a^\mu(t)v_\mu$ y $P^{\mathbf{F}}_{\gamma,t\to t_0}\left(\dfrac{D\mathbf{s}}{dt}(t)\right) = \sum_{\mu=1}^{r} \dfrac{da^\mu}{dt}(t)v_\mu$.

Aplicando componente a componente el teorema fundamental del cálculo en la base $(v_1,\dots,v_r)$ de $\mathbf{F}_{\gamma(t_0)}$, obtenemos

$$P^{\mathbf{F}}_{\gamma,t\to t_0}(\mathbf{s}(t)) - \mathbf{s}(t_0) = \sum_{\mu=1}^{r} (a^\mu(t) - a^\mu(t_0))\, v_\mu.$$

Como $a^\mu(t) - a^\mu(t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{da^\mu}{d\tau}(\tau)\, d\tau$, se sigue que

$$P^{\mathbf{F}}_{\gamma,t\to t_0}(\mathbf{s}(t)) - \mathbf{s}(t_0) = \int_{t_0}^{t} P^{\mathbf{F}}_{\gamma,\tau\to t_0}\left(\frac{D\mathbf{s}}{d\tau}(\tau)\right) d\tau,$$

lo cual prueba la identidad. □

**Lema 2.7.22.** (Criterio integral para la derivada covariante) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\pi_{\mathbf{F}}\colon \mathbf{F} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave provisto de una conexión $\nabla^{\mathbf{F}}$. Sean $\mathbf{s} \in \Gamma^0(\mathbf{F})$ y $\mathbf{A} \in \Gamma^0(T^*M \otimes \mathbf{F})$. Supongamos que, para toda curva suave $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ y para cualesquiera $t, t_0 \in [a,b]$, se satisface

$$P^{\mathbf{F}}_{\gamma,t\to t_0}(\mathbf{s}(\gamma(t))) - \mathbf{s}(\gamma(t_0)) = \int_{t_0}^{t} P^{\mathbf{F}}_{\gamma,\tau\to t_0}\left(\mathbf{A}_{\gamma(\tau)}(\dot\gamma(\tau))\right) d\tau.$$

Entonces $\mathbf{s} \in \Gamma^1(\mathbf{F})$ y $\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{s} = \mathbf{A}$.

*Demostración.* Fijemos $p \in M$. Elegimos una carta $(U,\varphi)$ alrededor de $p$, con $\varphi = (x^1,\dots,x^d)$, y un marco local suave $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r$ de $\mathbf{F}$ sobre $U$.

Escribimos $\mathbf{s} = \sum_{\mu=1}^{r} s^\mu \mathbf{e}_\mu$, donde las funciones $s^\mu\colon U \longrightarrow \mathbb{K}$ son continuas. Asimismo, escribimos

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{\mu=1}^{r} A_i^\mu\, \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{e}_\mu,$$

donde las funciones $A_i^\mu\colon U \longrightarrow \mathbb{K}$ son continuas.

Denotemos por $\Gamma_{i\nu}^\mu$ los coeficientes de la conexión $\nabla^{\mathbf{F}}$ en el marco elegido, es decir,

$$\nabla^{\mathbf{F}}_{\partial_i}\mathbf{e}_\nu = \sum_{\mu=1}^{r} \Gamma_{i\nu}^\mu \mathbf{e}_\mu, \qquad \partial_i := \partial_i.$$

Fijemos $i \in \{1,\dots,d\}$. Trabajaremos con la curva coordenada en dirección $i$. Si $p$ es un punto interior, toma-

mos $\delta > 0$ de modo que

$$\gamma_i\colon (-\delta,\delta) \longrightarrow U, \qquad \gamma_i(t) := \varphi^{-1}\big(\varphi(p) + te_i\big),$$

esté bien definida. Si $p \in \partial M$ y una dirección coordenada sólo está definida unilateralmente dentro de la carta de borde, tomamos el correspondiente intervalo lateral. El argumento siguiente se aplica sin cambios, reemplazando los límites usuales por límites laterales en esa dirección. En todos los casos se tiene $\gamma_i(0) = p$ y $\dot\gamma_i(t) = \partial_i|_{\gamma_i(t)}$ para los valores admisibles de $t$.

Sea $R_i(t)\colon \mathbf{F}_p \longrightarrow \mathbf{F}_{\gamma_i(t)}$ el transporte paralelo desde $p = \gamma_i(0)$ hasta $\gamma_i(t)$, y sea $Q_i(t) := R_i(t)^{-1} = P^{\mathbf{F}}_{\gamma_i, t\to 0}$. En el marco local $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r$, representamos $R_i(t)$ y $Q_i(t)$ mediante matrices, que denotaremos por $r_i(t)$ y $q_i(t)$, respectivamente. Así, $q_i(t) = r_i(t)^{-1}$ y $r_i(0) = q_i(0) = I$.

Por la Proposición 2.7.18, la ecuación diferencial local del transporte paralelo da

$$r_i'(t) + \Gamma_i(\gamma_i(t))\, r_i(t) = 0,$$

donde $\Gamma_i := \big(\Gamma_{i\nu}^{\mu}\big)_{\mu,\nu}$. En particular, $r_i'(0) = -\Gamma_i(p)$.

Usamos la hipótesis del lema con la curva $\gamma_i$ y con $t_0 = 0$. Como $\dot\gamma_i(t) = \partial_i|_{\gamma_i(t)}$, obtenemos

$$P^{\mathbf{F}}_{\gamma_i, t\to 0}(\mathbf{s}(\gamma_i(t))) - \mathbf{s}(p) = \int_0^t P^{\mathbf{F}}_{\gamma_i,\tau\to 0}\left(\mathbf{A}_{\gamma_i(\tau)}(\partial_i)\right) d\tau.$$

Expresamos esta identidad en el marco local. Definimos

$$\widehat{s} := \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^r \end{pmatrix}, \qquad \widehat{A}_i := \begin{pmatrix} A_i^1 \\ \vdots \\ A_i^r \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$q_i(t)\widehat{s}(\gamma_i(t)) - \widehat{s}(p) = \int_0^t q_i(\tau)\widehat{A}_i(\gamma_i(\tau))\, d\tau.$$

Multiplicando por $r_i(t)$, obtenemos

$$\widehat{s}(\gamma_i(t)) = r_i(t)\widehat{s}(p) + r_i(t)\int_0^t q_i(\tau)\widehat{A}_i(\gamma_i(\tau))\, d\tau.$$

Restamos $\widehat{s}(p)$ y dividimos entre $t \neq 0$:

$$\frac{\widehat{s}(\gamma_i(t)) - \widehat{s}(p)}{t} = \frac{r_i(t) - I}{t}\,\widehat{s}(p) + r_i(t)\,\frac{1}{t}\int_0^t q_i(\tau)\widehat{A}_i(\gamma_i(\tau))\, d\tau.$$

Haremos $t \to 0$ dentro de los valores admisibles de la curva. Como $r_i$ es diferenciable y $r_i'(0) = -\Gamma_i(p)$, se tiene

$$\frac{r_i(t) - I}{t} \longrightarrow -\Gamma_i(p).$$

Además, $r_i(t) \to I$, $q_i(t) \to I$ y $\widehat{A}_i(\gamma_i(t)) \to \widehat{A}_i(p)$ por continuidad. Por lo tanto, la función $\tau \mapsto q_i(\tau)\widehat{A}_i(\gamma_i(\tau))$ es continua en 0, y en consecuencia

$$\frac{1}{t}\int_0^t q_i(\tau)\widehat{A}_i(\gamma_i(\tau))\, d\tau \longrightarrow \widehat{A}_i(p).$$

Concluimos que

$$\frac{\widehat{s}(\gamma_i(t)) - \widehat{s}(p)}{t} \longrightarrow -\Gamma_i(p)\widehat{s}(p) + \widehat{A}_i(p).$$

El lado izquierdo es el cociente incremental de las componentes de $\mathbf{s}$ en la dirección coordenada $\partial_i$. Por lo tanto, $\partial_i \widehat{s}(p)$ existe, en el sentido usual si $p$ es interior y en el sentido lateral correspondiente si $p$ está en una carta de borde, y satisface

$$\partial_i \widehat{s}(p) = \widehat{A}_i(p) - \Gamma_i(p)\widehat{s}(p).$$

Como $p \in U$ era arbitrario, obtenemos en todo $U$ la identidad $\partial_i \widehat{s} = \widehat{A}_i - \Gamma_i \widehat{s}$. El lado derecho es continuo, pues $\widehat{A}_i$, $\Gamma_i$ y $\widehat{s}$ son continuas. Así, las derivadas parciales de las componentes $s^\mu$ existen y son continuas en las cartas correspondientes. Por lo tanto, $\mathbf{s}$ es de clase $C^1$ sobre $U$.
Finalmente, por la fórmula local de la derivada covariante,

$$\nabla^{\mathbf{F}}_{\partial_i} \mathbf{s} = \sum_{\mu=1}^{r} \left( \partial_i s^\mu + \sum_{\nu=1}^{r} \Gamma_{i\nu}^{\mu} s^\nu \right) \mathbf{e}_\mu.$$

La identidad $\partial_i \widehat{s} = \widehat{A}_i - \Gamma_i \widehat{s}$ implica

$$\nabla^{\mathbf{F}}_{\partial_i} \mathbf{s} = \sum_{\mu=1}^{r} A_i^\mu \mathbf{e}_\mu = \mathbf{A}(\partial_i).$$

Como esto vale para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, concluimos que $\nabla^{\mathbf{F}} \mathbf{s} = \mathbf{A}$ sobre $U$.
Puesto que $p \in M$ era arbitrario, se sigue que $\mathbf{s} \in \Gamma^1(\mathbf{F})$ y $\nabla^{\mathbf{F}} \mathbf{s} = \mathbf{A}$ en todo $M$. □

**Observación 2.7.23.** En el caso particular $\mathbf{E} = TM$, el transporte paralelo permite comparar vectores tangentes en puntos distintos de una curva. Si $\nabla$ es una conexión en $TM$, la velocidad $\dot{\gamma}$ de una curva suave $\gamma$ es una sección de $\gamma^* TM$, y por lo tanto tiene sentido considerar $\dfrac{D\dot{\gamma}}{dt}$. Esto conduce a la noción de geodésica: una curva cuya velocidad es paralela a lo largo de sí misma, es decir, una curva que satisface $\dfrac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$.

### 2.7.1 Descomposición horizontal–vertical inducida por una conexión

La derivada covariante a lo largo de curvas permite describir también la geometría del espacio total de un haz vectorial. La construcción que sigue se realiza primero para un haz arbitrario; la descomposición del cotangente que se utilizará después en el cálculo simbólico será una especialización de ella.

Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional con o sin frontera, sea $\pi_{\mathbf{E}} \colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango finito sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y sea $\nabla^{\mathbf{E}}$ una conexión lineal en $\mathbf{E}$. Para $e \in \mathbf{E}_x$ definimos el **espacio vertical** en $e$ por

$$V_e \mathbf{E} := \ker(d\pi_{\mathbf{E}})_e \subseteq T_e \mathbf{E}. \tag{2.56}$$

Si $w \in \mathbf{E}_x$, la curva $t \mapsto e + tw$ permanece en $\mathbf{E}_x$ y determina el **levantamiento vertical**

$$w_e^{\mathrm{V}} := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e + tw) \in V_e \mathbf{E}. \tag{2.57}$$

Aquí y en el caso complejo se considera el espacio tangente real; la estructura compleja de $\mathbf{E}_x$ induce de manera canónica la correspondiente estructura compleja en $V_e \mathbf{E}$.

**Proposición 2.7.24.** (Subhaz vertical y levantamiento vertical) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional con o sin frontera y sea $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango finito. El conjunto

$$V\mathbf{E} := \coprod_{e\in\mathbf{E}} V_e\mathbf{E}$$

es un subhaz vectorial suave de $T\mathbf{E} \to \mathbf{E}$. Para cada $e \in \mathbf{E}_x$, el mapeo

$$\mathbf{E}_x \longrightarrow V_e\mathbf{E}, \qquad w \longmapsto w_e^{\mathrm{V}}, \tag{2.58}$$

es un isomorfismo lineal canónico.

*Demostración.* Sea $U \subseteq M$ un abierto trivializante y escribamos un punto de $\mathbf{E}|_U$ como $(x,u) \in U \times \mathbb{K}^r$. La diferencial de la proyección es

$$(d\pi_{\mathbf{E}})_{(x,u)}(X,W) = X, \qquad (X,W) \in T_xM \times \mathbb{K}^r.$$

Por lo tanto,

$$V_{(x,u)}\mathbf{E} = \{(0,W) \mid W \in \mathbb{K}^r\}.$$

Estas descripciones locales muestran que $V\mathbf{E}$ tiene rango constante y que sus trivializaciones son suaves. En las mismas coordenadas, la curva $t \mapsto (x, u+tw)$ da

$$w^{\mathrm{V}}_{(x,u)} = (0,w).$$

Así, (2.58) es un isomorfismo lineal. La definición mediante la suma y la multiplicación escalar de la fibra no usa una trivialización; por ello el isomorfismo es canónico. □

La conexión selecciona un complemento del subhaz vertical. Para construirlo sin elegir coordenadas, asociamos a cada vector tangente al espacio total la derivada covariante del vector de la fibra que lo representa.

**Definición 2.7.25.** (Mapeo de conexión y subhaz horizontal) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave provisto de una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $v \in T_e\mathbf{E}$, con $e \in \mathbf{E}_x$. En coordenadas locales de haz asociadas a un marco $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$, escribamos

$$e = u^\beta \mathbf{e}_\beta(x), \qquad v = X^i\partial_i\Big|_e + W^\alpha \partial_{u^\alpha}\Big|_e, \qquad \nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{e}_\beta = \Gamma^\alpha_{i\beta}\mathbf{e}_\alpha.$$

El **mapeo de conexión** se define por

$$K^{\nabla^{\mathbf{E}}}(v) := \big(W^\alpha + \Gamma^\alpha_{i\beta}(x)X^i u^\beta\big)\mathbf{e}_\alpha(x) \in \mathbf{E}_x. \tag{2.59}$$

La ley de transformación de los coeficientes de conexión hace que esta expresión sea independiente de las coordenadas y del marco. Si $\mathbf{s}(t) \in \mathbf{E}_{\gamma(t)}$ es una curva suave con $\mathbf{s}(0) = e$ y $\dot{\mathbf{s}}(0) = v$, entonces $K^{\nabla^{\mathbf{E}}}(v) = \frac{D\mathbf{s}}{dt}\Big|_{t=0}$. El **espacio horizontal** en $e$ es

$$H^{\nabla^{\mathbf{E}}}_e\mathbf{E} := \ker K^{\nabla^{\mathbf{E}}}_e, \tag{2.60}$$

donde $K^{\nabla^{\mathbf{E}}}_e$ denota la restricción a $T_e\mathbf{E}$.

**Proposición 2.7.26.** (Descomposición horizontal–vertical) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional con o sin frontera y sea $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango finito, provisto de una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Las expresiones locales (2.59) son compatibles en los traslapes y definen un mapeo suave $K^{\nabla^{\mathbf{E}}}\colon T\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ que cubre a $\pi_{\mathbf{E}}$, y cada

$$K_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}\colon T_e\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}_x$$

es lineal sobre $\mathbb{R}$; su restricción al subespacio vertical es lineal sobre $\mathbb{K}$ bajo el isomorfismo (2.58). Además,

$$K_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}(w_e^{\mathrm{V}}) = w, \qquad w \in \mathbf{E}_x,$$

y se tienen las descomposiciones suaves

$$T_e\mathbf{E} = H_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E} \oplus V_e\mathbf{E}, \qquad T\mathbf{E} = H^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E} \oplus V\mathbf{E}. \tag{2.61}$$

La restricción

$$(d\pi_{\mathbf{E}})_e\big|_{H_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E}}\colon H_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E} \longrightarrow T_xM \tag{2.62}$$

es un isomorfismo. Su inversa envía $X \in T_xM$ al **levantamiento horizontal** $X_e^{\mathrm{H}}$.

*Demostración.* Tomemos coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$ en un abierto $U \subseteq M$ y un marco local $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ de $\mathbf{E}|_U$. Escribimos

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{e}_\beta = \Gamma_{i\beta}^{\alpha}\mathbf{e}_\alpha.$$

Si $\mathbf{s}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(\gamma(t))$, la fórmula local de la derivada covariante a lo largo de una curva, obtenida en (2.53), da

$$K^{\nabla^{\mathbf{E}}}(x,u;X,W) = \left(x, W^\alpha + \Gamma_{i\beta}^{\alpha}(x)X^i u^\beta\right). \tag{2.63}$$

El miembro derecho sólo depende de $(x,u;X,W) = \dot{\mathbf{s}}(0)$ y no de los términos de orden superior de la curva. Esto prueba la independencia de la curva representante. La misma fórmula prueba la suavidad y la linealidad de $K_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}$ en $(X,W)$.

Para un vector vertical se tiene $X = 0$; por lo tanto,

$$K^{\nabla^{\mathbf{E}}}(x,u;0,W) = (x,W).$$

En virtud de (2.58), la restricción de $K_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}$ a $V_e\mathbf{E}$ es precisamente la inversa del levantamiento vertical. En particular, $H_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E} \cap V_e\mathbf{E} = \{0\}$. Para $v \in T_e\mathbf{E}$, pongamos

$$v^{\mathrm{V}} := \left(K^{\nabla^{\mathbf{E}}}(v)\right)_e^{\mathrm{V}}.$$

Entonces $v - v^{\mathrm{V}} \in H_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E}$ y $v = (v - v^{\mathrm{V}}) + v^{\mathrm{V}}$. Esto demuestra la primera igualdad de (2.61). La fórmula local (2.63) muestra además que los núcleos $H_e^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E}$ varían suavemente, de modo que se obtiene la igualdad de subhaces.

Si un vector horizontal pertenece al núcleo de $(d\pi_{\mathbf{E}})_e$, también es vertical y, por la suma directa, es nulo. La restricción (2.62) es, pues, inyectiva. Para $X = X^i\partial_i|_x$, la fórmula

$$X_e^{\mathrm{H}} = X^i\left(\partial_i - \Gamma_{i\beta}^{\alpha}(x)u^\beta\partial_{u^\alpha}\right)_{(x,u)} \tag{2.64}$$

define un vector horizontal que se proyecta sobre $X$. Esto prueba la sobreyectividad y concluye la demostración. □

Una curva $\mathbf{s}(t) \in \mathbf{E}$ es horizontal si $\dot{\mathbf{s}}(t)$ pertenece a $H^{\nabla^{\mathbf{E}}}_{\mathbf{s}(t)}\mathbf{E}$ para todo $t$. Por la definición del mapeo de conexión, esto equivale a $\frac{D\mathbf{s}}{dt} = 0$; es decir, $\mathbf{s}$ es horizontal si y sólo si el vector de la fibra que representa es paralelo a lo largo de $\pi_{\mathbf{E}} \circ \mathbf{s}$. Por consiguiente, $H^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E}$ es la conexión de Ehresmann inducida por la conexión lineal $\nabla^{\mathbf{E}}$. El subhaz $V\mathbf{E}$ es canónico, mientras que $H^{\nabla^{\mathbf{E}}}\mathbf{E}$ depende de la conexión elegida. Esta construcción no debe confundirse con las conexiones no lineales que se introducen en geometría de Finsler: aquí la distribución horizontal procede de una conexión lineal en un haz vectorial.

Especializamos ahora la construcción al haz cotangente. Sea $\nabla$ una conexión lineal en $TM$ y dotemos a $T^*M$ de la conexión dual caracterizada en la Proposición 2.4.27. Sea $\pi\colon T^*M \to M$ la proyección. Entonces

$$V(T^*M) = \ker d\pi, \qquad H^{\nabla}(T^*M) := H^{\nabla^{T^*M}}(T^*M).$$

**Proposición 2.7.27.** (Levantamiento horizontal en el cotangente) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional con o sin frontera, sea $\nabla$ una conexión lineal en $TM$ y sean $(x^1,\dots,x^n)$ coordenadas locales. Escribamos

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k, \qquad \boldsymbol{\xi} = \xi_j\,\mathbf{d}x^j.$$

Con estas convenciones, el levantamiento horizontal de $\partial_i$ a $T^*M$ es

$$\mathbf{H}_i = \partial_i + \Gamma^k_{ij}(x)\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_j}. \tag{2.65}$$

*Demostración.* Sea $x(t)$ una curva y sea $\boldsymbol{\xi}(t) = \xi_j(t)\mathbf{d}x^j|_{x(t)}$ una sección del cotangente a lo largo de ella. La conexión dual satisface

$$(\nabla_{\dot{x}}\boldsymbol{\xi})_j = \dot{\xi}_j - \Gamma^k_{ij}(x(t))\dot{x}^i\xi_k.$$

La curva $(x(t),\boldsymbol{\xi}(t))$ es horizontal si y sólo si el miembro izquierdo se anula. Por lo tanto,

$$\dot{\xi}_j = \Gamma^k_{ij}(x(t))\dot{x}^i\xi_k.$$

Si $\dot{x}(0) = \partial_i|_x$, la componente vertical de la velocidad es $\Gamma^k_{ij}(x)\xi_k\partial_{\xi_j}$, lo que demuestra (2.65) y, en particular, fija su signo. En cambio, para $v = v^j\partial_j \in T_xM$, la ecuación $\nabla_{\dot{x}}v = 0$ da $\dot{v}^k = -\Gamma^k_{ij}\dot{x}^iv^j$; de acuerdo con (2.64), el levantamiento en $TM$ lleva el signo opuesto. □

Resta precisar cómo actúa esta descomposición sobre secciones del pullback de un haz de homomorfismos. Sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito, con conexiones $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $\nabla^{\mathbf{F}}$. La conexión inducida $\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})}$ está caracterizada por (2.13). La conexión pullback sobre $\pi^*\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \to T^*M$ es la única conexión que, para una sección local $\mathbf{A}$ de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $\mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(T^*M)$, satisface

$$(\pi^*\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})})_{\mathbf{Z}}(\pi^*\mathbf{A}) = \pi^*\left(\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})}_{d\pi(\mathbf{Z})}\mathbf{A}\right), \tag{2.66}$$

y se extiende a todas las secciones mediante la regla de Leibniz. Su existencia y unicidad se verifican en los marcos pullback asociados a las trivializaciones de la Proposición 2.7.2; las formas locales de conexión son las formas de $\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})}$ compuestas con $\pi$.

Para

$$\mathbf{a} \in \Gamma(\pi^* \operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})), \quad X \in T_xM, \quad \eta \in T_x^*M, \quad \xi \in T_x^*M,$$

definimos, en el punto $(x,\xi)$,

$$\nabla^{\mathrm{H}}_X \mathbf{a} := (\pi^*\nabla^{\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})})_{X^{\mathrm{H}}_{(x,\xi)}} \mathbf{a}, \qquad \nabla^{\mathrm{V}}_\eta \mathbf{a} := (\pi^*\nabla^{\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})})_{\eta^{\mathrm{V}}_{(x,\xi)}} \mathbf{a}. \tag{2.67}$$

Estas son, respectivamente, la **derivada covariante horizontal** y la **derivada covariante vertical** de $\mathbf{a}$.

**Proposición 2.7.28.** (Fórmulas locales en el haz cotangente) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. En las coordenadas anteriores, elijamos marcos locales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ y denotemos por $\omega_i^{\mathbf{E}}$ y $\omega_i^{\mathbf{F}}$ sus matrices de conexión. Si $a(x,\xi)$ es la matriz local de una sección de $\pi^*\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces

$$\nabla^{\mathrm{V}}_j a = \frac{\partial a}{\partial \xi_j}, \qquad \nabla^{\mathrm{H}}_i a = \frac{\partial a}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij}\xi_k \frac{\partial a}{\partial \xi_j} + \omega_i^{\mathbf{F}} a - a\omega_i^{\mathbf{E}}. \tag{2.68}$$

Las dos derivadas definidas en (2.67) son independientes de las coordenadas y de los marcos utilizados para calcular estas expresiones.

*Demostración.* El vector vertical $\partial_{\xi_j}$ se proyecta en cero. Por (2.66), la conexión pullback no aporta entonces ningún término de conexión y queda $\nabla^{\mathrm{V}}_j a = \frac{\partial a}{\partial \xi_j}$. Para la dirección horizontal, (2.65) deriva las componentes de $a$ mediante

$$\partial_i + \Gamma^k_{ij}\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

La conexión de $\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, dada por (2.13), añade exactamente $\omega_i^{\mathbf{F}} a - a\omega_i^{\mathbf{E}}$. Esto prueba (2.68). Finalmente, $X^{\mathrm{H}}$ y $\eta^{\mathrm{V}}$ se definieron como levantamientos intrínsecos, y la conexión pullback también es intrínseca. Por lo tanto, un cambio de coordenadas o de marcos sólo transforma las matrices de la fórmula según las leyes de esos objetos y no altera las derivadas resultantes. □

## 2.8 Geodésicas

Las líneas rectas en el espacio euclidiano poseen varias caracterizaciones equivalentes. Por una parte, son las curvas que localmente realizan la menor longitud entre puntos suficientemente cercanos. Por otra, pueden describirse como aquellas cuya velocidad permanece constante, en el sentido de que su aceleración se anula, es decir, satisfacen $\gamma''(t) = 0$.

En una variedad riemanniana surge de manera natural la pregunta por un análogo de estas curvas. La noción euclidiana de línea recta deja de tener sentido de manera directa, pero la estructura métrica permite medir longitudes y formular el problema de encontrar curvas que conecten dos puntos con longitud mínima. Estas curvas se conocen como *geodésicas*.

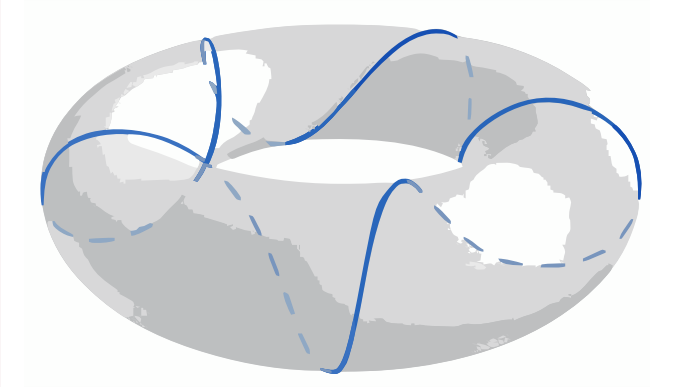


Figura 2.2. Geodésicas en el toro. Estas pueden cerrarse periódicamente o llenar densamente el toro.

Sin embargo, para obtener una caracterización intrínseca análoga a la condición $\gamma''(t) = 0$ en $\mathbb{R}^n$, no basta derivar la curva como si sus velocidades pertenecieran todas al mismo espacio vectorial. Si $\gamma\colon I \longrightarrow M$ es una curva suave, su velocidad $\dot\gamma(t)$ pertenece al espacio tangente $T_{\gamma(t)}M$, el cual depende del punto $\gamma(t)$. Por lo tanto, no tiene sentido comparar directamente $\dot\gamma(t)$ con $\dot\gamma(t+h)$ mediante una resta ordinaria.

La sección anterior resuelve precisamente esta dificultad: una conexión en $TM$ induce una derivada covariante sobre secciones de $\gamma^*TM$. Como la velocidad $\dot\gamma$ es una sección de $\gamma^*TM$, podemos considerar su derivada covariante $\frac{D\dot\gamma}{dt}$. Esto permite formular la condición de aceleración covariante nula y, con ello, definir las geodésicas asociadas a una conexión.

**Definición 2.8.1.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\nabla$ una conexión en $TM$. Decimos que una curva suave $\gamma\colon I \longrightarrow M$ es una **geodésica** si

$$\frac{D\dot\gamma}{dt} \equiv 0.$$

Equivalentemente, si $(U,\varphi)$ es una carta suave tal que $\gamma(I) \subset U$ y

$$x(t) = (\varphi \circ \gamma)(t) = (x^1(t),\dots,x^n(t)),$$

entonces $\gamma$ es una geodésica si y sólo si satisface las ecuaciones geodésicas

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}(t) + \frac{dx^i}{dt}(t)\frac{dx^j}{dt}(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0. \tag{2.69}$$

Ya definimos las geodésicas, las cuales en términos de sus coordenadas se interpretan como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Es importante preguntarnos si dichas curvas realmente existen para toda condición inicial antes de proceder con un estudio más profundo. Las geodésicas existen localmente, como garantiza el teorema fundamental del flujo. Para verlo de manera geométrica, primero introducimos el *campo geodésico*.

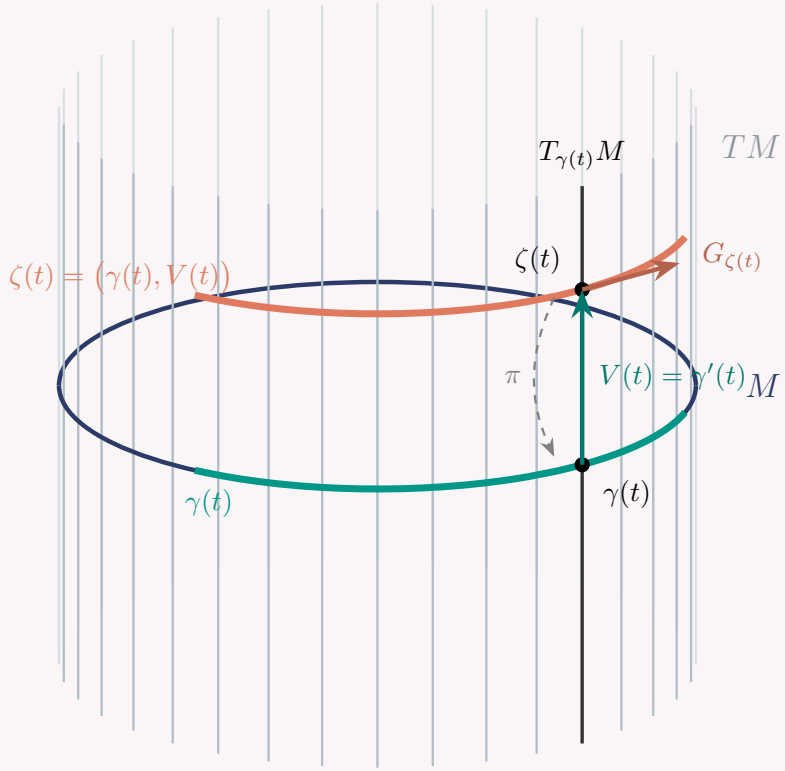



**Figura 2.3.** Representación esquemática del campo geodésico en $TM$. La curva $\zeta(t) = (\gamma(t), \mathbf{V}(t))$ es una curva integral de $\mathbf{G}$ si y sólo si $\mathbf{V}(t) = \dot{\gamma}(t)$ y $\frac{D\mathbf{V}}{dt}(t) = 0$; en particular, cuando $\mathbf{V}(t) = \dot{\gamma}(t)$, las curvas integrales de $\mathbf{G}$ corresponden a las geodésicas de $M$.

**Proposición 2.8.2.** (campo-geodesico) Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\nabla$ una conexión en $TM$. Entonces existe un único campo vectorial suave $\mathbf{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ con la siguiente propiedad: para toda curva suave

$$\zeta \colon I \longrightarrow TM, \qquad \zeta(t) = \big(\gamma(t), \mathbf{V}(t)\big),$$

se tiene que $\zeta$ es una curva integral de $\mathbf{G}$ si y solo si

$$\mathbf{V}(t) = \dot{\gamma}(t) \quad \text{y} \quad \frac{D\mathbf{V}}{dt}(t) = 0$$

para todo $t \in I$.
Además, si $(U, \varphi)$ es una carta suave de $M$ y $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ son las coordenadas inducidas en $\pi^{-1}(U) \subset TM$, entonces $\mathbf{G}$ se escribe como

$$\mathbf{G} = v^k \partial_{x^k} - v^i v^j \Gamma_{ij}^k(x) \partial_{v^k}.$$

En particular, si $\zeta \colon I \longrightarrow TM$ está dada por $\zeta(t) = \big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$, entonces $\zeta$ es una curva integral de $\mathbf{G}$ si y solo si $\gamma$ es una geodésica.

*Demostración.* Sea $(U,\varphi)$ una carta suave de $M$. Consideremos en $\pi^{-1}(U)$ el campo vectorial dado, en las coordenadas inducidas $(x^1,\dots,x^n,v^1,\dots,v^n)$, por

$$\mathbf{G}_U = v^k\partial_{x^k} - v^i v^j \Gamma_{ij}^k(x)\partial_{v^k}.$$

Veamos primero qué curvas son integrales de $\mathbf{G}_U$. Sea $\zeta\colon I \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ una curva suave y escribamos $\zeta(t) = \big(\gamma(t),\mathbf{V}(t)\big)$, donde $\gamma = \pi\circ\zeta$ y $\mathbf{V}(t)\in T_{\gamma(t)}M$ para todo $t\in I$. Sea $\widetilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U)\longrightarrow \varphi(U)\times\mathbb{R}^n$ el difeomorfismo que define las coordenadas inducidas en $TM$. Escribimos la representación coordenada de $\zeta$ como $\widetilde{\varphi}\circ\zeta = (\xi^1,\dots,\xi^n,\eta^1,\dots,\eta^n)\colon I\longrightarrow \varphi(U)\times\mathbb{R}^n$. Entonces $\varphi\circ\gamma = (\xi^1,\dots,\xi^n)$ y $\mathbf{V}(t) = \eta^k(t)\partial_k|_{\gamma(t)}$.
Por definición de curva integral, $\zeta$ es una curva integral de $\mathbf{G}_U$ si y solo si

$$\frac{d\xi^k}{dt}(t) = \eta^k(t), \qquad \frac{d\eta^k}{dt}(t) = -\Gamma_{ij}^k(\xi(t))\eta^i(t)\eta^j(t)$$

para todo $t\in I$.
La primera ecuación equivale a $\mathbf{V}(t) = \dot\gamma(t)$. Como $\varphi\circ\gamma = (\xi^1,\dots,\xi^n)$, se tiene $\dot\gamma(t) = \frac{d\xi^k}{dt}(t)\partial_k|_{\gamma(t)}$, de modo que $\dot\gamma(t) = \mathbf{V}(t)$ si y sólo si $\frac{d\xi^k}{dt}(t) = \eta^k(t)$ para todo $k$.
Por otra parte, por la Proposición 2.7.7,

$$\frac{D\mathbf{V}}{dt}(t) = \left(\frac{d\eta^k}{dt}(t) + \frac{d\xi^i}{dt}(t)\eta^j(t)\Gamma_{ij}^k(\xi(t))\right)\partial_k\big|_{\gamma(t)}.$$

Si además $\mathbf{V}(t) = \dot\gamma(t)$, entonces $\frac{d\xi^i}{dt}(t) = \eta^i(t)$, y por consiguiente $\frac{D\mathbf{V}}{dt}(t) = 0$ equivale a

$$\frac{d\eta^k}{dt}(t) = -\Gamma_{ij}^k(\xi(t))\eta^i(t)\eta^j(t).$$

Hemos probado entonces que $\zeta$ es una curva integral de $\mathbf{G}_U$ si y sólo si $\mathbf{V}(t) = \dot\gamma(t)$ y $\frac{D\mathbf{V}}{dt}(t) = 0$ para todo $t\in I$.
Probemos ahora que estos campos locales son compatibles en los traslapes. Sean $(U,\varphi)$ y $(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$ dos cartas suaves con $U\cap\widetilde{U}\neq\varnothing$, y sea $F = \widetilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}$. Si $(x^1,\dots,x^n,v^1,\dots,v^n)$ y $(\widetilde{x}^1,\dots,\widetilde{x}^n,\widetilde{v}^1,\dots,\widetilde{v}^n)$ denotan las coordenadas inducidas correspondientes, entonces $\widetilde{x}^a = F^a(x)$ y $\widetilde{v}^a = \frac{\partial F^a}{\partial x^i}(x)v^i$.
Sea $\zeta$ una curva integral de $\mathbf{G}_U$ contenida en $\pi^{-1}(U\cap\widetilde{U})$. Si escribimos su representación coordenada en el sistema $(x,v)$ como $\widetilde{\varphi}_U\circ\zeta = (\xi^1,\dots,\xi^n,\eta^1,\dots,\eta^n)$, entonces

$$\frac{d\xi^k}{dt}(t) = \eta^k(t), \qquad \frac{d\eta^k}{dt}(t) = -\Gamma_{ij}^k(\xi(t))\eta^i(t)\eta^j(t).$$

Las componentes de la misma curva en el sistema $(\widetilde{x},\widetilde{v})$ son $\widetilde{\xi}^a(t) = F^a(\xi(t))$ y $\widetilde{\eta}^a(t) = \frac{\partial F^a}{\partial x^i}(\xi(t))\eta^i(t)$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d\widetilde{\xi}^a}{dt}(t) = \widetilde{\eta}^a(t).$$

Además,

$$\frac{d\widetilde{\eta}^a}{dt}(t) = \frac{\partial^2 F^a}{\partial x^i\partial x^j}(\xi(t))\eta^i(t)\eta^j(t) + \frac{\partial F^a}{\partial x^k}(\xi(t))\frac{d\eta^k}{dt}(t).$$

Sustituyendo la ecuación para $\frac{d\eta^k}{dt}$, obtenemos

$$\frac{d\widetilde{\eta}^a}{dt}(t) = \left(\frac{\partial^2 F^a}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial F^a}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}\right)(\xi(t))\eta^i(t)\eta^j(t).$$

Por la ley de transformación de los símbolos de Christoffel (Lema 2.4.12),

$$\widetilde{\Gamma}^a_{bc}(F(x))\frac{\partial F^b}{\partial x^i}(x)\frac{\partial F^c}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial F^a}{\partial x^k}(x)\Gamma^k_{ij}(x) - \frac{\partial^2 F^a}{\partial x^i \partial x^j}(x).$$

Aplicando esta identidad en $x = \xi(t)$, concluimos que

$$\frac{d\widetilde{\eta}^a}{dt}(t) = -\widetilde{\Gamma}^a_{bc}(\widetilde{\xi}(t))\widetilde{\eta}^b(t)\widetilde{\eta}^c(t).$$

Esto muestra que, en las coordenadas inducidas asociadas a $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$, la curva $\zeta$ satisface el sistema diferencial correspondiente al campo $\mathbf{G}_{\widetilde{U}}$. Por lo tanto, los campos locales $\mathbf{G}_U$ y $\mathbf{G}_{\widetilde{U}}$ son compatibles en los traslapes, y definen un campo vectorial suave global $\mathbf{G} \in \mathfrak{X}(TM)$.

Veamos ahora que este campo global satisface la propiedad enunciada. Sea $\zeta\colon I \longrightarrow TM$ una curva suave y escribamos $\zeta(t) = \big(\gamma(t), \mathbf{V}(t)\big)$. Supongamos primero que $\zeta$ es una curva integral de $\mathbf{G}$. Fijado $t_0 \in I$, existe una carta $(U, \varphi)$ de $M$ y un intervalo abierto $J \subseteq I$ con $t_0 \in J$ tales que $\zeta(J) \subseteq \pi^{-1}(U)$. Entonces $\zeta|_J$ es una curva integral de $\mathbf{G}_U$, y por lo ya probado, $\mathbf{V}(t) = \dot{\gamma}(t)$ y $\frac{D\mathbf{V}}{dt}(t) = 0$ para todo $t \in J$. Como $t_0$ es arbitrario, concluimos que estas igualdades valen para todo $t \in I$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{V}(t) = \dot{\gamma}(t)$ y $\frac{D\mathbf{V}}{dt}(t) = 0$ para todo $t \in I$. Dado $t_0 \in I$, elegimos de nuevo una carta $(U, \varphi)$ y un intervalo abierto $J \subseteq I$ con $t_0 \in J$ tales que $\zeta(J) \subseteq \pi^{-1}(U)$. Por el resultado local ya probado, la restricción $\zeta|_J$ es una curva integral de $\mathbf{G}_U$, y por lo tanto de $\mathbf{G}$. Como esto ocurre para todo $t_0 \in I$, se sigue que $\zeta$ es una curva integral de $\mathbf{G}$ en todo $I$.

Esto prueba la propiedad caracterizadora de $\mathbf{G}$.

Para la unicidad, sea $\mathbf{H} \in \mathfrak{X}(TM)$ otro campo vectorial suave con la misma propiedad. Sea $(U, \varphi)$ una carta suave de $M$ y sea $q \in \pi^{-1}(U)$. Consideremos la curva integral $\zeta$ de $\mathbf{G}$ tal que $\zeta(0) = q$. Por la propiedad caracterizadora, $\zeta$ satisface $\mathbf{V}(t) = \dot{\gamma}(t)$ y $\frac{D\mathbf{V}}{dt}(t) = 0$, y por lo tanto también es una curva integral de $\mathbf{H}$. En consecuencia, $\mathbf{G}_q = \zeta'(0) = \mathbf{H}_q$. Como $q$ es arbitrario, concluimos que $\mathbf{G} = \mathbf{H}$.

La última afirmación se sigue inmediatamente: si $\zeta(t) = \big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$, entonces la condición $\mathbf{V}(t) = \dot{\gamma}(t)$ y $\frac{D\mathbf{V}}{dt}(t) = 0$ equivale a $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0$, que es precisamente la ecuación de las geodésicas. □

Una geodésica $\gamma\colon I \longrightarrow M$ que no se pueda extender a una geodésica en un intervalo más grande se llama ***geodésica maximal***. Un ***segmento geodésico*** es una geodésica cuyo dominio es un intervalo compacto. La existencia de geodésicas maximales se establece en el siguiente teorema:

**Teorema 2.8.3.** (Existencia, unicidad y maximalidad de las geodésicas) Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\nabla$ una conexión en $TM$. Para cada $p \in M$, $v \in T_pM$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una única geodésica maximal

$$\gamma_{(p,v,t_0)}\colon I_{(p,v,t_0)} \longrightarrow M$$

tal que $t_0 \in I_{(p,v,t_0)}$ y $\gamma_{(p,v,t_0)}(t_0) = p$, $\dot{\gamma}_{(p,v,t_0)}(t_0) = v$.

Además, si $\gamma_1\colon I_1 \longrightarrow M$ y $\gamma_2\colon I_2 \longrightarrow M$ son geodésicas tales que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ y $\dot{\gamma}_1(t_0) = \dot{\gamma}_2(t_0)$, entonces

$\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

*Demostración.* Sea $\mathbf{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ el campo geodésico dado por la Proposición 2.8.2. Por el Teorema 1.8.15, para cada $(p,v) \in TM$ existe una única curva integral maximal $\zeta_{(p,v,t_0)} \colon I_{(p,v,t_0)} \longrightarrow TM$ tal que $\zeta_{(p,v,t_0)}(t_0) = (p,v)$. Definimos $\gamma_{(p,v,t_0)} := \pi \circ \zeta_{(p,v,t_0)}$. Entonces $\gamma_{(p,v,t_0)}$ es una curva suave en $M$ y $\gamma_{(p,v,t_0)}(t_0) = \pi(\zeta_{(p,v,t_0)}(t_0)) = p$. Escribimos $\zeta_{(p,v,t_0)}(t) = \big(\gamma_{(p,v,t_0)}(t), \mathbf{V}(t)\big)$ para $t \in I_{(p,v,t_0)}$, donde $\mathbf{V}(t) \in T_{\gamma_{(p,v,t_0)}(t)}M$. Por la Proposición 2.8.2, se tiene que $\mathbf{V}(t) = \dot{\gamma}_{(p,v,t_0)}(t)$ para todo $t \in I_{(p,v,t_0)}$, y además

$$\frac{D\dot{\gamma}_{(p,v,t_0)}}{dt}(t) = 0.$$

Por lo tanto, $\gamma_{(p,v,t_0)}$ es una geodésica. Evaluando en $t = t_0$ obtenemos $\mathbf{V}(t_0) = v$, es decir, $\dot{\gamma}_{(p,v,t_0)}(t_0) = v$. Esto prueba la existencia.

Probemos ahora la unicidad. Sea $\widetilde{\gamma} \colon J \longrightarrow M$ una geodésica tal que $\widetilde{\gamma}(t_0) = p$ y $\dot{\widetilde{\gamma}}(t_0) = v$. Definimos $\widetilde{\zeta} \colon J \longrightarrow TM$ por $\widetilde{\zeta}(t) := \dot{\widetilde{\gamma}}(t)$. Como $\widetilde{\gamma}$ es una geodésica, la Proposición 2.8.2 implica que $\widetilde{\zeta}$ es una curva integral de $\mathbf{G}$. Además, $\widetilde{\zeta}(t_0) = (p,v) = \zeta_{(p,v,t_0)}(t_0)$. Por la unicidad de curvas integrales del campo $\mathbf{G}$, se sigue que $\widetilde{\zeta}(t) = \zeta_{(p,v,t_0)}(t)$ para todo $t \in J \cap I_{(p,v,t_0)}$. Aplicando la proyección $\pi$, obtenemos $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma_{(p,v,t_0)}(t)$ para todo $t \in J \cap I_{(p,v,t_0)}$. Esto prueba la unicidad.

Veamos finalmente la maximalidad. Supongamos que $\gamma_{(p,v,t_0)}$ no es maximal. Entonces existe una geodésica $\overline{\gamma} \colon \widetilde{I} \longrightarrow M$ tal que $I_{(p,v,t_0)} \subsetneq \widetilde{I}$ y $\overline{\gamma}(t) = \gamma_{(p,v,t_0)}(t)$ para todo $t \in I_{(p,v,t_0)}$. Definimos $\overline{\zeta} \colon \widetilde{I} \longrightarrow TM$ por $\overline{\zeta}(t) := \dot{\overline{\gamma}}(t)$. Como $\overline{\gamma}$ es una geodésica, la Proposición 2.8.2 implica que $\overline{\zeta}$ es una curva integral de $\mathbf{G}$. Además, para todo $t \in I_{(p,v,t_0)}$ se tiene $\overline{\zeta}(t) = \dot{\overline{\gamma}}(t) = \dot{\gamma}_{(p,v,t_0)}(t) = \zeta_{(p,v,t_0)}(t)$. Por lo tanto, $\overline{\zeta}$ es una prolongación propia de la curva integral $\zeta_{(p,v,t_0)}$, lo cual contradice la maximalidad de esta última. Concluimos que $\gamma_{(p,v,t_0)}$ es maximal. □

A partir de ahora denotaremos esta única geodésica maximal como $\gamma_v$ y supondremos que $t_0 = 0$ para simplificar la notación.

**Observación 2.8.4.** Por el Teorema 2.8.3, existe un único flujo maximal $\Phi_t$ asociado al campo geodésico $\mathbf{G}$, dado por

$$\Phi_t(p,v) = \big(\gamma_v(t), \dot{\gamma}_v(t)\big).$$

Por definición del campo vectorial como derivada de su flujo, se tiene

$$\mathbf{G}_{(p,v)} = \frac{d}{dt}\Phi_t(p,v)\Big|_{t=0}.$$

Por lo tanto, para toda $f \in C^\infty(TM)$,

$$\mathbf{G}f(p,v) = df_{(p,v)}\big(\mathbf{G}_{(p,v)}\big) = \frac{d}{dt}\Big(f(\Phi_t(p,v))\Big)\Big|_{t=0}.$$

Sustituyendo la expresión del flujo, se obtiene

$$\mathbf{G}f(p,v) = \frac{d}{dt}\Big(f(\gamma_v(t), \dot{\gamma}_v(t))\Big)\Big|_{t=0}.$$

Por otra parte, en coordenadas inducidas $(x^1,\dots,x^n,v^1,\dots,v^n)$ sobre $\pi^{-1}(U)$, se tiene

$$\mathbf{G} = v^k\partial_k - v^i v^j \Gamma_{ij}^k(x)\partial_{v^k},$$

y por consiguiente, para toda $f \in C^\infty(\pi^{-1}(U))$,

$$\mathbf{G}f = v^k \frac{\partial f}{\partial x^k} - v^i v^j \Gamma_{ij}^k(x)\frac{\partial f}{\partial v^k}.$$

En particular, si $f \in C^\infty(M)$, entonces para su levantamiento $\pi^* f = f\circ\pi$ se tiene

$$\mathbf{G}(\pi^* f)(p,v) = \frac{d}{dt}\Big(f(\gamma_v(t))\Big)\Big|_{t=0} = df_p(v).$$

El mapeo exponencial compara una vecindad del origen en $T_pM$ con una vecindad de $p$ en la variedad. Antes de construirlo, conviene observar cómo cambia una geodésica cuando se reescala su velocidad inicial.

**Lema 2.8.5.** (de reescalamiento) Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\nabla$ una conexión en $TM$. Para todo $p \in M$, $v \in T_pM$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$$

para todo $t$ tal que ambos lados estén definidos.

*Demostración.* Si $c = 0$, entonces ambas curvas son constantes e iguales a $p$, por lo que la afirmación es trivial. Supongamos $c \neq 0$.
Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ el dominio maximal de $\gamma_v$ y definamos

$$\widetilde{\gamma}_v \colon c^{-1}I \longrightarrow M, \qquad \widetilde{\gamma}_v(t) = \gamma_v(ct).$$

Mostraremos que $\widetilde{\gamma}_v$ es una geodésica con punto inicial $p$ y velocidad inicial $cv$. Por la unicidad y maximalidad de $\gamma_{cv}$, se seguirá que $\widetilde{\gamma}_v = \gamma_{cv}$.
Ambas curvas parten de $p$, pues $\widetilde{\gamma}_v(0) = \gamma_v(0) = p$. Consideremos una carta $(U,\varphi)$ y supongamos que

$$(\varphi\circ\gamma_v)(t) = (x^1(t),\dots,x^n(t)).$$

Entonces

$$(\varphi\circ\widetilde{\gamma}_v)(t) = (x^1(ct),\dots,x^n(ct)).$$

Por la regla de la cadena,

$$\dot{\widetilde{\gamma}}_v^i(t) = \frac{d}{dt}x^i(ct) = c\,\dot{x}^i(ct).$$

En particular,

$$\dot{\widetilde{\gamma}}_v(0) = c\,\dot{\gamma}_v(0) = cv.$$

Para ver que $\widetilde{\gamma}_v$ es una geodésica, calculamos su derivada covariante. Usando la expresión local,

$$\frac{D\dot{\widetilde{\gamma}}_v}{dt}(t) = \left(\frac{d}{dt}\dot{\widetilde{\gamma}}_v^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\widetilde{\gamma}_v(t))\dot{\widetilde{\gamma}}_v^i(t)\dot{\widetilde{\gamma}}_v^j(t)\right)\partial_k.$$

Sustituyendo la expresión anterior para $\dot{\widetilde{\gamma}}_v^i(t)$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\dot{\widetilde{\gamma}}_v^k(t) = c^2\ddot{x}^k(ct),$$

y

$$\dot{\widetilde{\gamma}}_v^i(t)\dot{\widetilde{\gamma}}_v^j(t) = c^2\dot{x}^i(ct)\dot{x}^j(ct).$$

Por lo tanto,

$$\frac{D\dot{\widetilde{\gamma}}_v}{dt}(t) = c^2\left(\ddot{x}^k(ct) + \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(ct))\dot{x}^i(ct)\dot{x}^j(ct)\right)\partial_k.$$

Como $\gamma_v$ es una geodésica, el término entre paréntesis es cero, y por consiguiente

$$\frac{D\dot{\widetilde{\gamma}}_v}{dt}(t) = 0.$$

Esto muestra que $\widetilde{\gamma}_v$ es una geodésica con condiciones iniciales $(p, cv)$, por lo que $\widetilde{\gamma}_v = \gamma_{cv}$. □

### 2.8.1 El mapeo exponencial

La asignación $v \mapsto \gamma_v$ define un mapeo de $TM$ en el conjunto de geodésicas de $M$. Además, por el lema de reescalamiento, podemos definir una función de un subconjunto de $TM$ a $M$ que mande cada línea que contenga al origen de $T_pM$ en una geodésica:

**Definición 2.8.6.** Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\nabla$ una conexión en $TM$. Por el Teorema 2.8.3, cada $p \in M$ y $v \in T_pM$ determinan una única geodésica maximal $\gamma_v$, lo cual define un mapeo $v \mapsto \gamma_v$ de $TM$ al conjunto de geodésicas en $M$.
Sea

$$\mathcal{E} = \{v \in TM \mid \gamma_v \text{ está definida en un intervalo que contiene a } [0,1]\}.$$

Definimos el **mapeo exponencial** $\exp\colon \mathcal{E} \longrightarrow M$ por $\exp(v) = \gamma_v(1)$. Para cada $p \in M$, el **mapeo exponencial restringido a** $p$, denotado por $\exp_p$, es la restricción del mapeo exponencial al conjunto $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_pM$.

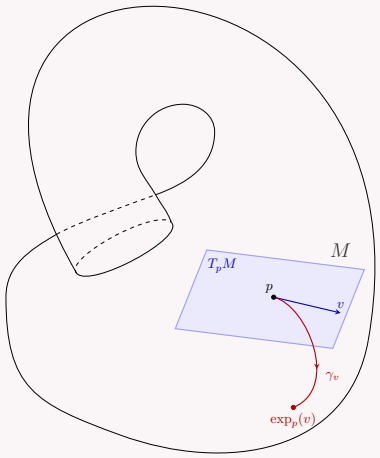



Figura 2.4. Mapeo exponencial en una variedad riemanniana.

A partir de este punto, cuando $(M, \mathbf{g})$ sea una variedad riemanniana, las geodésicas y el mapeo exponencial se entenderán asociados a la conexión de Levi–Civita de $\mathbf{g}$, salvo indicación contraria. Los resultados anteriores formulados para una conexión arbitraria conservan su significado original.

La proposición siguiente reúne las propiedades básicas del mapeo exponencial que se utilizarán al construir coordenadas normales y estudiar la geometría local.

**Proposición 2.8.7.** (Propiedades del mapeo exponencial) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\exp\colon \mathcal{E} \longrightarrow M$ el mapeo exponencial de su conexión de Levi–Civita.

(a) $\mathcal{E}$ es un subconjunto abierto de $TM$ que contiene a $0_p \in T_pM$ para todo $p \in M$, y cada $\mathcal{E}_p \subseteq T_pM$ es un conjunto estrellado respecto a 0.

(b) Para cada $v \in TM$, la geodésica $\gamma_v$ está dada por

$$\gamma_v(t) = \exp(tv)$$

para todo $t$ tal que ambos lados estén definidos.

(c) exp es suave.

(d) Para cada $p \in M$, el diferencial

$$d(\exp_p)_0\colon T_0(T_pM) \cong T_pM \longrightarrow T_pM$$

es la identidad, bajo la identificación usual de $T_0(T_pM)$ con $T_pM$.

*Demostración.* Por el Lema 2.8.5, para todo $v \in TM$ y todo $t \in \mathbb{R}$ tal que ambos lados estén definidos, se tiene

$$\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp(tv).$$

Esto prueba (b).
Además, para cada $p \in M$, la geodésica constante en $p$ tiene velocidad inicial $0_p$, de modo que $0_p \in \mathcal{E}_p$. Si ahora $v \in \mathcal{E}_p$, entonces $\gamma_v$ está definida en $t = 1$. Por el Lema 2.8.5, para todo $t \in [0,1]$ se tiene

$$\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t),$$

y en particular $tv \in \mathcal{E}_p$. Esto muestra que $\mathcal{E}_p$ es estrellado respecto a 0.
Veamos ahora que $\mathcal{E}$ es abierto y que exp es suave. Sea $\mathbf{G}$ el campo geodésico y sea

$$\Phi\colon \mathcal{D}(\Phi) \longrightarrow TM$$

su flujo maximal. Por el Teorema 1.8.15, el dominio $\mathcal{D}(\Phi) \subseteq \mathbb{R} \times TM$ es abierto y el mapeo $\Phi$ es suave. Por la Observación 2.8.4, se tiene

$$\Phi_t(v) = \big(\gamma_v(t), \dot{\gamma}_v(t)\big)$$

siempre que ambos lados estén definidos.
Por definición de $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E} = \{v \in TM \mid \gamma_v(1) \text{ está definida}\}.$$

Como el dominio maximal de $\gamma_v$ contiene a 0, se sigue que $\gamma_v(1)$ está definida si y sólo si $(1, v) \in \mathcal{D}(\Phi)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{E} = \{v \in TM \mid (1, v) \in \mathcal{D}(\Phi)\}.$$

Si definimos $\iota\colon TM \longrightarrow \mathbb{R} \times TM$ por $\iota(v) = (1, v)$, entonces

$$\mathcal{E} = \iota^{-1}(\mathcal{D}(\Phi)).$$

Como $\iota$ es continua y $\mathcal{D}(\Phi)$ es abierto, concluimos que $\mathcal{E}$ es abierto.
Además, para todo $v \in \mathcal{E}$,

$$\exp(v) = \gamma_v(1) = \pi\big(\Phi_1(v)\big).$$

Por consiguiente,

$$\exp = \pi \circ \Phi_1\big|_{\mathcal{E}},$$

y como $\Phi$ y $\pi$ son suaves, se sigue que exp es suave. Esto prueba (c), y concluye también la demostración de (a).
Finalmente, fijemos $p \in M$ y sea $v \in T_pM$. Consideremos la curva $\alpha(t) = tv \in T_pM$. Por (b),

$$(\exp_p \circ \alpha)(t) = \exp_p(tv) = \gamma_v(t)$$

para todo $t$ perteneciente a un intervalo abierto alrededor de 0 en el que la expresión está definida. Derivando en $t = 0$, obtenemos

$$d(\exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt}\Big(\exp_p(tv)\Big)\Big|_{t=0} = \dot{\gamma}_v(0) = v.$$

Bajo la identificación usual de $T_0(T_pM)$ con $T_pM$, esto muestra que $d(\exp_p)_0$ es la identidad. Queda probado (d). □

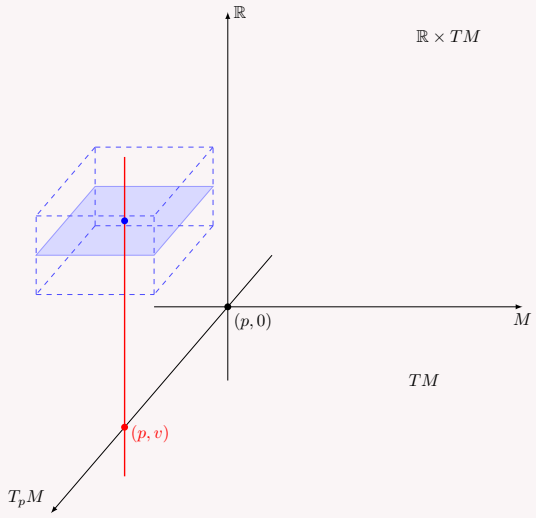



Figura 2.5. $\mathcal{E}$ es abierto.

### 2.8.2 Coordenadas normales geodésicas

Entre las propiedades del mapeo exponencial, obtuvimos que $d(\exp_p)_0$ es invertible, por lo que el Teorema de la función inversa para variedades (Teorema 1.5.6) garantiza que existen abiertos $V \subseteq T_pM$ y $U \subseteq M$ tales que $0 \in V$, $p \in U$ y

$$\exp_p \colon V \longrightarrow U$$

es un difeomorfismo.

Si $V$ es estrellada respecto al origen decimos que $U$ es una ***vecindad normal de*** $p$. Toda base ortonormal $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ de $T_pM$ determina un isomorfismo canónico $B \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$ por $B(x^1, \ldots, x^n) = x^i \beta_i$. Si $U = \exp_p(V)$ es una vecindad normal de $p$, podemos combinar este isomorfismo con el mapeo exponencial para obtener una carta suave de $M$ que contiene a $p$, $(U, \varphi)$, donde $\varphi = B^{-1} \circ (\exp_p |_V)^{-1} \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dichas coordenadas se llaman ***coordenadas normales centradas en*** $p$. Estas coordenadas son únicas en el siguiente sentido:

**Proposición 2.8.8.** Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de dimensión $n$, $p \in M$ y $U$ una vecindad normal de $p$. Para cada carta coordenada normal $(U, \varphi)$ centrada en $p$, la base coordenada $\{\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p\} \subseteq T_pM$ es ortonormal. Recíprocamente, para cada base ortonormal $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ de $T_pM$, existe una única carta coordenada normal $(x^i)$ en $U$ tal que $\partial_i|_p = \beta_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, cualesquiera dos cartas coordenadas normales $(x^i)$ y $(\tilde{x}^i)$ están relacionadas por

$$\tilde{x}^j = A^j_i x^i$$

para alguna matriz $(A^j_i) \in O(n)$.

*Demostración.* Sea $(U,\varphi)$ una carta coordenada normal centrada en $p$, con funciones coordenadas $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$. Por definición,

$$\varphi = B^{-1}\circ \exp_p^{-1},$$

donde $B\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$ es un isomorfismo determinado por una base ortonormal $\{b_1,\dots,b_n\}$ de $T_pM$. Entonces

$$\varphi^{-1} = \exp_p \circ B,$$

y por lo tanto

$$d(\varphi^{-1})_0 = d(\exp_p)_0 \circ dB_0 = B,$$

ya que $d(\exp_p)_0 = \mathrm{Id}_{T_pM}$ y $B$ es lineal. En consecuencia,

$$\partial_i|_p = d(\varphi^{-1})_0(\partial_i|_0) = B(\partial_i|_0) = b_i,$$

lo que muestra que la base $\{\partial_i|_p\}$ es ortonormal.
Recíprocamente, dada una base ortonormal $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ de $T_pM$, ésta determina un isomorfismo $B\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$, y por lo tanto una carta coordenada normal $\varphi = B^{-1}\circ \exp_p^{-1}$, que satisface $\partial_i|_p = \beta_i$.
Si $\widetilde{\varphi} = \widetilde{B}^{-1}\circ \exp_p^{-1}$ es otra carta coordenada normal centrada en $p$, entonces el cambio de coordenadas viene dado por

$$\widetilde{\varphi}\circ\varphi^{-1} = \widetilde{B}^{-1}\circ B,$$

que es una isometría lineal de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, existe una matriz constante $(A_i^j) \in O(n)$ tal que

$$\widetilde{x}^j = A_i^j x^i.$$

Esto prueba la unicidad. □

Entre otras propiedades de las coordenadas normales tenemos lo siguiente:

**Proposición 2.8.9.** (Propiedades de las coordenadas normales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $(U,\varphi)$ una carta coordenada normal centrada en $p \in M$.

(a) Las coordenadas de $p$ son $(0,\dots,0)$.

(b) Las componentes de la métrica en $p$ son $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.

(c) Para $v = v^i\partial_i|_p \in T_pM$, la geodésica $\gamma_v$ que comienza en $p$ con $\dot\gamma(0) = v$ está representada en coordenadas normales como

$$(\varphi\circ\gamma_v)(t) = (tv^1,\dots,tv^n)$$

si $t \in I$, donde $I$ es un intervalo tal que $0 \in I$ y $\gamma_v(I) \subseteq U$.

(d) Los símbolos de Christoffel en esas coordenadas se anulan en $p$.

(e) Las primeras derivadas de las componentes de la métrica se anulan en $p$:

$$\partial_k g_{ij}(p) = 0 \quad \text{para todos } i,j,k.$$

*Demostración.* El inciso (a) se sigue directamente de la definición de coordenadas normales, pues $\varphi(p) = 0$. Para (b), por la Proposición 2.8.8, la base coordenada $\{\partial_i|_p\}$ es ortonormal, de donde $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.
El inciso (c) se deduce de la Proposición 2.8.7(b): como $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, al componer con $\varphi = B^{-1} \circ \exp_p^{-1}$ se obtiene

$$(\varphi \circ \gamma_v)(t) = B^{-1}(tv) = (tv^1, \dots, tv^n).$$

Para probar (d), sea $v = v^i \partial_i|_p \in T_pM$. Por (c), escribiendo $x^i(t) = (\varphi \circ \gamma_v)^i(t)$, se tiene $x^i(t) = tv^i$, por lo que $\dot{x}^i(t) = v^i$ y $\ddot{x}^k(t) = 0$. Sustituyendo en la ecuación de la geodésica (2.69), obtenemos

$$\Gamma_{ij}^k(x(t))\, v^i v^j = 0.$$

Evaluando en $t = 0$, es decir, en $p$, se concluye que

$$\Gamma_{ij}^k(p)\, v^i v^j = 0$$

para todo $k$ y todo $v \in T_pM$.
La conexión de Levi–Civita es libre de torsión; por lo tanto, en un marco coordenado,

$$\Gamma_{ab}^k = \Gamma_{ba}^k.$$

Tomando $v = \partial_a|_p$ se obtiene $\Gamma_{aa}^k(p) = 0$. Si $a \neq b$, al tomar $v = \partial_a|_p + \partial_b|_p$ obtenemos

$$0 = \Gamma_{aa}^k(p) + \Gamma_{ab}^k(p) + \Gamma_{ba}^k(p) + \Gamma_{bb}^k(p) = 2\Gamma_{ab}^k(p).$$

Así, $\Gamma_{ab}^k(p) = 0$ para todos $a, b, k$, lo que prueba (d).
Finalmente, la conexión de Levi–Civita es compatible con $\mathbf{g}$. El Corolario 2.4.16, aplicado a $\mathbf{E}_k = \partial_k$ y evaluado en $p$, da

$$\partial_k g_{ij}(p) = \Gamma_{ki}^a(p) g_{aj}(p) + \Gamma_{kj}^a(p) g_{ia}(p) = 0,$$

por (d). Esto prueba (e). □

La continuidad de la métrica permite hacer cuantitativa, en una bola suficientemente pequeña, la identidad $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$. El resultado siguiente precisará el tipo de coordenadas normales que utilizaremos en los argumentos de aproximación.

**Proposición 2.8.10.** (Bolas coordenadas normales con control euclidiano) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $p \in \mathrm{Int}(M)$ y sea $0 < \theta < 1$. Existen números $0 < r < R$ y una isometría lineal $B_p \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow (T_pM, \mathbf{g}_p)$ tales que $\exp_p$ es un difeomorfismo de $B_{\mathbf{g}_p}(0, R)$ sobre un abierto $U_p' \subseteq \mathrm{Int}(M)$ y, al poner

$$U_p := \exp_p\big(B_{\mathbf{g}_p}(0, r)\big), \qquad \kappa_p := B_p^{-1} \circ \exp_p^{-1} \colon U_p \longrightarrow B_{\mathrm{euc}}(0, r),$$

la pareja $(U_p, \kappa_p)$ es una bola coordenada normal regular centrada en $p$, con $\overline{U}_p \subseteq U_p'$, y satisface

$$(1 - \theta)\|w\| \leq \left| d(\kappa_p^{-1})_z w \right|_{\mathbf{g}} \leq (1 + \theta)\|w\|$$

para cualesquiera $z \in B_{\mathrm{euc}}(0, r)$ y $w \in \mathbb{R}^n$.

*Demostración.* Como $d(\exp_p)_0 = \mathrm{Id}_{T_pM}$, el Teorema de la función inversa proporciona una vecindad abierta $W \subseteq T_pM$ de 0 sobre la cual $\exp_p$ es un difeomorfismo. Puesto que $p$ es interior, podemos reducir $W$ para que su imagen esté contenida en $\mathrm{Int}(M)$. Elegimos $R > 0$ de modo que $\overline{B}_{\mathbf{g}_p}(0,R) \subseteq W$ y fijamos una isometría lineal $B_p \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow (T_pM, \mathbf{g}_p)$. La carta normal

$$\kappa_p' := B_p^{-1} \circ \exp_p^{-1} : U_p' := \exp_p\big(B_{\mathbf{g}_p}(0,R)\big) \longrightarrow B_{\mathrm{euc}}(0,R)$$

está centrada en $p$. Si $G(z)$ denota la matriz de la métrica en estas coordenadas, la Proposición 2.8.9 implica $G(0) = I_n$. Como $z \mapsto G(z)$ es continua también respecto de la norma de operadores, existe $0 < r < R$ tal que

$$(1-\theta)^2\|w\|^2 \le \langle G(z)w, w\rangle_{\mathbb{R}^n} \le (1+\theta)^2\|w\|^2$$

para todo $z \in \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,r)$ y todo $w \in \mathbb{R}^n$. En efecto, basta hacer que $\|G(z) - I_n\|_{\mathrm{op}}$ sea menor que el mínimo de $1-(1-\theta)^2$ y $(1+\theta)^2 - 1$.
La restricción de $\kappa_p'$ a $U_p := \exp_p(B_{\mathbf{g}_p}(0,r))$ es la carta $\kappa_p$ del enunciado. Además, $\overline{U}_p = \exp_p(\overline{B}_{\mathbf{g}_p}(0,r))$ es compacta y está contenida en $U_p'$, por lo que $U_p$ es una bola coordenada normal regular en el sentido de la Definición 1.2.9. Finalmente,

$$\left| d(\kappa_p^{-1})_z w \right|_{\mathbf{g}}^2 = \langle G(z)w, w\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

y al tomar raíces cuadradas se obtienen las desigualdades requeridas. □

## 2.9 La función distancia riemanniana

La métrica actúa primero de manera infinitesimal, pues asigna una longitud a cada vector tangente. Al integrar esas longitudes a lo largo de curvas obtenemos una noción global de distancia entre puntos. El paso no es meramente formal: la distancia resultante refleja tanto la geometría local como la manera en que las curvas pueden recorrer la variedad.

**Definición 2.9.1.** Sea $M$ una variedad riemanniana con o sin frontera.

(a) Un **segmento de curva** es una curva suave cuyo dominio es un intervalo compacto.

(b) Una curva suave $\gamma \colon I \longrightarrow M$ se llama **curva regular** si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ (lo cual implica que $\gamma$ es una inmersión).

(c) Un segmento de curva continuo $\gamma \colon [a,b] \longrightarrow M$ se dice **regular por pedazos** si existe una partición $\{t_0, \ldots, t_k\}$ de $[a,b]$ tal que $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ es un segmento de curva regular (suave) para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$. También les llamaremos **curvas admisibles** y a las particiones que cumplen lo anterior les diremos **particiones admisibles para** $\gamma$. Por conveniencia consideraremos una curva $\gamma \colon \{a\} \longrightarrow M$ como una curva admisible.

(d) Si $\gamma \colon I \longrightarrow M$ es una curva suave, definimos una **reparametrización de** $\gamma$ como una curva de la forma $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi \colon I' \longrightarrow M$ donde $I'$ es un intervalo y $\varphi \colon I' \longrightarrow I$ es un difeomorfismo. Si $\varphi$ es estrictamente creciente, decimos que $\widetilde{\gamma}$ es una **parametrización hacia adelante** o una **parametrización que preserva la orientación**. Si $\varphi$ es estrictamente decreciente, diremos que $\widetilde{\gamma}$ es una **parametrización hacia atrás** o una **parametrización que invierte la orientación**.

(e) Para una curva admisible $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ definimos una **reparametrización de** $\gamma$ como una curva de la forma $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ donde $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es un homeomorfismo para el cual existe una partición $\{c_0,\ldots,c_k\}$ de $[c,d]$ tal que la restricción $\varphi|_{[c_{i-1},c_i]}$ es un difeomorfismo en su imagen para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$.

(f) Si $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ es una curva admisible, definimos la **longitud de** $\gamma$ como

$$L_{\mathbf{g}}(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathbf{g}}\, dt.$$

Podemos definir la distancia entre dos puntos en una variedad riemanniana conexa como sigue:

**Definición 2.9.2.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa con o sin frontera. Para cada par de puntos $p,q \in M$, definimos la **distancia riemanniana de** $p$ **a** $q$, denotada por $d_{\mathbf{g}}(p,q)$, como

$$d_{\mathbf{g}}(p,q) := \inf\{L_{\mathbf{g}}(\gamma) \mid \gamma \text{ es una curva admisible de } p \text{ a } q\}.$$

El ínfimo es finito en cada componente conexa por el resultado siguiente.

**Proposición 2.9.3.** Si $M$ es una variedad suave conexa (con o sin frontera), entonces cualesquiera dos puntos de $M$ se pueden unir con una curva admisible.

*Demostración.* Fijemos $p \in M$ y sea $A$ el conjunto de puntos que pueden unirse con $p$ mediante una curva admisible. El conjunto $A$ no es vacío. Si $q \in A$, elegimos una carta alrededor de $q$ cuya imagen contenga una bola euclidiana, o una bola relativa de $\mathbb{H}^n$, centrada en la imagen de $q$. Después de reducirla, ese conjunto es convexo. Los segmentos rectos en la carta, transportados a $M$, unen $q$ con todos los puntos de una vecindad suya; al concatenarlos con una curva de $p$ a $q$ se obtiene una curva admisible. Por lo tanto, $A$ es abierto. El mismo argumento muestra que $M \setminus A$ es abierto: si uno de sus puntos tuviera en esa vecindad un punto de $A$, el segmento local lo uniría también con $p$. Como $M$ es conexa, se sigue que $A = M$. □

Toda variedad riemanniana es metrizable mediante la distancia riemanniana.

**Teorema 2.9.4.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa con o sin frontera. Con la función distancia $d_{\mathbf{g}}$, $M$ es un espacio métrico cuya topología como espacio métrico es la misma topología que tenía como variedad suave.

*Demostración.* La proposición anterior muestra que $d_{\mathbf{g}}(p,q)$ es finita. La no negatividad es inmediata. Al invertir el parámetro de una curva se prueba que $d_{\mathbf{g}}(p,q) = d_{\mathbf{g}}(q,p)$, y la concatenación de curvas admisibles, seguida de la toma de ínfimos, da

$$d_{\mathbf{g}}(p,r) \le d_{\mathbf{g}}(p,q) + d_{\mathbf{g}}(q,r).$$

Resta probar que los puntos distintos tienen distancia positiva y comparar las topologías. Fijemos $p \in M$. En una carta $(U,x)$ alrededor de $p$ elegimos $r > 0$ de modo que la bola relativa

$$Q := B_{\text{euc}}(x(p), 2r) \cap \mathbb{H}^n$$

esté contenida en $x(U)$ y tenga clausura contenida en $x(U)$; en una carta interior se omite la intersección

con $\mathbb{H}^n$. La continuidad y la positividad definida de la métrica proporcionan constantes $0 < c \le C$ tales que

$$c|v| \le \left| d(x^{-1})_z v \right|_{\mathbf{g}} \le C|v| \tag{2.70}$$

para $z \in \overline{Q}$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tangente al semiespacio. Pongamos

$$V := x^{-1}\left(B_{\mathrm{euc}}(x(p), r) \cap \mathbb{H}^n\right).$$

Si $q \in V$, el segmento recto de $x(p)$ a $x(q)$ permanece en la bola relativa, y la segunda desigualdad de (2.70) muestra que

$$d_{\mathbf{g}}(p, q) \le C|x(q) - x(p)|.$$

Por otra parte, toda curva admisible de $p$ a un punto exterior a $V$ debe alcanzar primero la esfera coordenada de radio $r$. En el tramo anterior a ese primer punto de salida, la primera desigualdad de (2.70) da una longitud al menos $cr$. Si $q \in V$ y una curva de $p$ a $q$ no sale de $V$, la misma desigualdad y la desigualdad euclidiana entre longitud y desplazamiento dan una longitud al menos $c|x(q)-x(p)|$; si sale de $V$, su longitud es al menos $cr$ y la misma cota sigue siendo válida. En consecuencia,

$$c|x(q) - x(p)| \le d_{\mathbf{g}}(p, q) \le C|x(q) - x(p)|, \qquad q \in V. \tag{2.71}$$

Estas cotas prueban primero que $d_{\mathbf{g}}(p, q) > 0$ cuando $p \neq q$: si $q \notin V$, se usa la cota $cr$, y si $q \in V$, la primera desigualdad de (2.71). Por lo tanto, $d_{\mathbf{g}}$ es una métrica. La segunda desigualdad muestra que la convergencia en la topología de la variedad implica convergencia para $d_{\mathbf{g}}$ cerca de cada punto; la primera, junto con la barrera $cr$ para salir de $V$, da la implicación recíproca. Las dos topologías coinciden. □

**Lema 2.9.5.** (Lema de Gauss) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $p \in M$ y sean $v, w \in T_pM$ tales que $\exp_p$ esté definida en una vecindad de $v$. Entonces

$$\mathbf{g}_{\exp_p(v)}\big(d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)\big) = \mathbf{g}_p(v, w).$$

*Demostración.* Para $s$ pequeño y $0 \le t \le 1$, consideremos la variación

$$\alpha(s, t) := \exp_p\big(t(v + sw)\big).$$

Sobre la curva $t \mapsto \alpha(0, t)$, pongamos $\mathbf{T} = \partial_t \alpha$ y $\mathbf{J} = \partial_s \alpha|_{s=0}$. La conexión de Levi–Civita es libre de torsión, de modo que $D\mathbf{J}/dt = D\mathbf{T}/ds$, y cada curva $t \mapsto \alpha(s, t)$ es una geodésica. Como la misma conexión es compatible con $\mathbf{g}$, podemos derivar los productos internos a lo largo de la variación. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \mathbf{J}, \mathbf{T} \rangle &= \left\langle \frac{D\mathbf{J}}{dt}, \mathbf{T} \right\rangle + \left\langle \mathbf{J}, \frac{D\mathbf{T}}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{D\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{T} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} |\partial_t \alpha(s, t)|^2_{\mathbf{g}}. \end{aligned}$$

Para cada $s$, la compatibilidad métrica y la ecuación geodésica dan

$$\frac{d}{dt}|\partial_t\alpha(s,t)|_{\mathbf{g}}^2 = 2\left\langle \frac{D}{dt}\partial_t\alpha(s,t), \partial_t\alpha(s,t)\right\rangle_{\mathbf{g}} = 0.$$

La rapidez de $t \mapsto \alpha(s,t)$ es, por tanto, constante e igual a $|v+sw|_{\mathbf{g}}$. Así, el último miembro de la igualdad anterior es $\langle v, w\rangle_{\mathbf{g}}$. Como $\mathbf{J}(0) = 0$, la integración entre 0 y 1 da

$$\langle \mathbf{J}(1), \mathbf{T}(1)\rangle = \langle v, w\rangle_{\mathbf{g}}.$$

Finalmente, $\mathbf{J}(1) = d(\exp_p)_v(w)$ y $\mathbf{T}(1) = d(\exp_p)_v(v)$. □

**Proposición 2.9.6.** (Minimización radial en una vecindad normal) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $p \in M$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $v \in B_{T_pM}(0,\varepsilon)$, la geodésica radial

$$\gamma_v(t) = \exp_p(tv), \qquad 0 \le t \le 1,$$

realiza la distancia entre $p$ y $\exp_p(v)$. Salvo reparametrizaciones monótonas, es la única curva minimizante entre esos puntos que permanece en la vecindad normal.

*Demostración.* Elegimos $\varepsilon > 0$ de modo que $\exp_p$ sea un difeomorfismo en la bola tangente de radio $\varepsilon$. En la vecindad normal correspondiente definimos

$$\rho(\exp_p z) := |z|_{\mathbf{g}}.$$

El Lema de Gauss muestra que el vector radial unitario es el gradiente de $\rho$. En efecto, si $z \neq 0$, se descompone cualquier $w \in T_pM$ como $w = az + w^{\perp}$, y el lema da

$$d\rho_{\exp_p z}\big(d(\exp_p)_z w\big) = \left\langle d(\exp_p)_z w, \frac{d(\exp_p)_z z}{|z|_{\mathbf{g}}}\right\rangle = a|z|_{\mathbf{g}}.$$

En particular, $|\operatorname{grad}\rho|_{\mathbf{g}} = 1$. Para toda curva admisible $c$ contenida en la vecindad normal,

$$\left|\frac{d}{dt}(\rho\circ c)\right| \le |\dot c|_{\mathbf{g}}$$

en cada tramo suave. Si une $p$ con $\exp_p(v)$, la integración da $L_{\mathbf{g}}(c) \ge |v|_{\mathbf{g}}$. La curva radial tiene rapidez constante $|v|_{\mathbf{g}}$, y alcanza la igualdad.

Si una curva $c$ sale de la vecindad normal antes de llegar a $\exp_p(v)$, sea $t_*$ su primer tiempo de salida. Para $t < t_*$ podemos escribir $c(t) = \exp_p z(t)$, con $|z(t)|_{\mathbf{g}} = \rho(c(t)) < \varepsilon$. Al acercarse $t$ a $t_*$, necesariamente $|z(t)|_{\mathbf{g}} \to \varepsilon$: de lo contrario, una subsucesión de $z(t)$ convergería a un punto del interior de la bola tangente y $c(t_*)$ todavía pertenecería a la vecindad normal. En consecuencia, para cada $\varepsilon'$ con $|v|_{\mathbf{g}} < \varepsilon' < \varepsilon$, la continuidad proporciona un primer tiempo anterior a $t_*$ en que $\rho = \varepsilon'$. La desigualdad anterior, aplicada hasta ese tiempo, muestra que la longitud ya es al menos $\varepsilon' > |v|_{\mathbf{g}}$. Esto prueba la minimización entre todas las curvas.

Supongamos ahora que se alcanza la igualdad. En la cadena

$$L_{\mathbf{g}}(c) = \int |\dot{c}| \geq \int |(\rho \circ c)'| \geq \left| \int (\rho \circ c)' \right| = |v|_{\mathbf{g}}$$

ambas desigualdades son igualdades. Por ello, $|(\rho \circ c)'| = |\dot{c}|$ y $(\rho \circ c)' \geq 0$ casi en todas partes. La igualdad en Cauchy–Schwarz implica que $\dot{c}$ es un múltiplo no negativo del gradiente radial; carece de componente tangente a las esferas $\rho = \text{cte}$. Por lo tanto, salvo la elección monótona del parámetro, la imagen de $c$ es la geodésica radial. □

**Corolario 2.9.7.** Toda curva admisible minimizante, parametrizada con rapidez constante, es una geodésica.

*Demostración.* Cada subarco de una curva minimizante vuelve a ser minimizante; de lo contrario, al reemplazarlo por una curva más corta se reduciría la longitud total. Fijemos un parámetro interior $t_0$ y elijamos una vecindad normal centrada en $c(t_0)$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, los subarcos $c|_{[t_0, t_0+\delta]}$ y $c|_{[t_0-\delta, t_0]}$ permanecen en esa vecindad. La proposición anterior muestra que ambos son, salvo reparametrización monótona, segmentos radiales. Como $c$ tiene rapidez constante, esas reparametrizaciones son afines.
El subarco completo $c|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ también minimiza. Si los dos segmentos radiales formaran una esquina en $c(t_0)$, su concatenación no podría ser la única curva radial minimizante entre $c(t_0 - \delta)$ y $c(t_0 + \delta)$ en una vecindad normal suficientemente pequeña alrededor del primero de esos puntos. Por lo tanto, las velocidades laterales coinciden. La unicidad de la ecuación geodésica muestra que ambos segmentos son restricciones de una sola geodésica. Como $t_0$ era arbitrario, $c$ es una geodésica en todo su dominio. □

La distancia riemanniana y las geodésicas están estrechamente relacionadas: las curvas que realizan la distancia entre sus extremos deben satisfacer la ecuación geodésica. La noción siguiente permite formular esa propiedad global.

**Definición 2.9.8.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera. Una curva admisible $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ en $M$ se dice una **curva minimizante** si $L_{\mathbf{g}}(\gamma) \leq L_{\mathbf{g}}(\widetilde{\gamma})$ para cualquier curva admisible $\widetilde{\gamma}$ con los mismos puntos extremos ($\gamma(a) = \widetilde{\gamma}(a)$ y $\gamma(b) = \widetilde{\gamma}(b)$).

Recordemos que una variedad riemanniana es *geodésicamente completa* si toda geodésica maximal está definida en $\mathbb{R}$.

**Teorema 2.9.9.** (Hopf–Rinow) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa y sin frontera. Son equivalentes:

(a) $(M, d_{\mathbf{g}})$ es un espacio métrico completo;

(b) todo subconjunto cerrado y acotado de $(M, d_{\mathbf{g}})$ es compacto;

(c) $M$ es geodésicamente completa;

(d) para todo $p \in M$, $\exp_p$ está definida en todo $T_pM$;

(e) existe $p_0 \in M$ tal que $\exp_{p_0}$ está definida en todo $T_{p_0}M$.

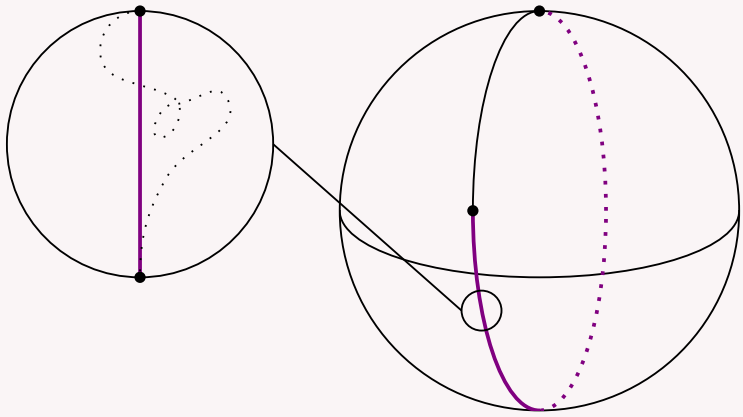


**Figura 2.6.** Aunque toda curva minimizante es una geodésica, una geodésica solo minimiza la distancia localmente entre puntos suficientemente cercanos.

Si se cumple cualquiera de estas condiciones, cualesquiera dos puntos de $M$ están unidos por un segmento geodésico que realiza su distancia.

La demostración sigue la estrategia de Lee [95].

*Demostración.* Las condiciones (c) y (d) son equivalentes por la definición de $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$ y por el cambio afín de parámetro de las geodésicas; además, (d) implica (e).
Supongamos (e), fijemos $q \in M$ y pongamos $r = d_{\mathbf{g}}(p_0, q)$. Si $r = 0$, no hay nada que probar. Si $r > 0$, consideremos

$$A := \big\{ s \in [0, r] \;\big|\; \text{existe } v_s \in T_{p_0}M, |v_s|_{\mathbf{g}} = 1, \text{ tal que } x_s := \exp_{p_0}(s v_s), \quad d_{\mathbf{g}}(p_0, x_s) = s, \quad d_{\mathbf{g}}(x_s, q) = r - s \big\}.$$

Se tiene $0 \in A$. El conjunto $A$ es cerrado: si $s_j \to s$ y $s_j \in A$, la esfera unitaria de $T_{p_0}M$ es compacta, así que una subsucesión de $v_{s_j}$ converge a un vector unitario $v$. La continuidad de $\exp_{p_0}$ y de la distancia conserva las tres igualdades que definen $A$.
Sea $s \in A$ con $s < r$, y escribamos $x = x_s$. Elegimos primero una vecindad normal $V$ de $x$ con clausura compacta. Esto es posible por la compacidad local y porque las vecindades normales forman una base en $x$. Como la distancia riemanniana induce la topología de la variedad, existe $\delta > 0$, menor que $r - s$, tal que $\overline{B}_{\mathbf{g}}(x, \delta) \subseteq V$. Esta bola es cerrada en $M$ y está contenida en el compacto $\overline{V}$; por lo tanto, es compacta. Por la definición de la distancia, existen curvas $c_j$ de $x$ a $q$, parametrizadas por longitud de arco, con

$$L_{\mathbf{g}}(c_j) \longrightarrow d_{\mathbf{g}}(x, q) = r - s.$$

Sea $y_j = c_j(\delta)$. Entonces

$$d_{\mathbf{g}}(x, y_j) \le \delta, \qquad d_{\mathbf{g}}(y_j, q) \le L_{\mathbf{g}}(c_j) - \delta.$$

La compacidad permite suponer que $y_j \to y$. La desigualdad triangular

$$r - s = d_{\mathbf{g}}(x,q) \le d_{\mathbf{g}}(x,y_j) + d_{\mathbf{g}}(y_j,q) \le d_{\mathbf{g}}(x,y_j) + L_{\mathbf{g}}(c_j) - \delta$$

muestra, al pasar al límite, que

$$d_{\mathbf{g}}(x,y) = \delta, \qquad d_{\mathbf{g}}(y,q) = r - s - \delta.$$

La Proposición 2.9.6 proporciona una geodésica minimizante de $x$ a $y$. Al concatenarla con el segmento radial minimizante de $p_0$ a $x$, se obtiene una curva de longitud $s+\delta$. Además,

$$r \le d_{\mathbf{g}}(p_0,y) + d_{\mathbf{g}}(y,q) \le s + \delta + r - s - \delta = r,$$

de modo que la concatenación es minimizante. Si $s = 0$, elegimos $v_0$ como la velocidad inicial unitaria del segmento de $p_0 = x$ a $y$; las igualdades anteriores dan directamente $\delta \in A$. Si $s > 0$, el Corolario 2.9.7 muestra que no tiene una esquina en $x$; por unicidad de la ecuación geodésica, es la prolongación de $t \mapsto \exp_{p_0}(tv_s)$. Por lo tanto, $s + \delta \in A$.

Como $A$ es cerrado, contiene su supremo. La propiedad de prolongación anterior impide que ese supremo sea menor que $r$, así que $r \in A$. Existe, por lo tanto, un vector $v \in T_{p_0}M$ con

$$\exp_{p_0}(v) = q, \qquad |v|_{\mathbf{g}} = r,$$

y la geodésica radial correspondiente es minimizante.

Sea ahora $(q_j)$ una sucesión de Cauchy. Es acotada, de modo que $d_{\mathbf{g}}(p_0,q_j) \le R$ para cierto $R$. Por lo anterior, podemos escribir $q_j = \exp_{p_0}(v_j)$ con $|v_j|_{\mathbf{g}} \le R$. La bola cerrada de radio $R$ en el espacio finito-dimensional $T_{p_0}M$ es compacta; una subsucesión $v_{j_\ell}$ converge a $v$, y entonces $q_{j_\ell} \to \exp_{p_0}(v)$. Como la sucesión original es de Cauchy, toda ella converge al mismo punto. Esto prueba $(e) \Rightarrow (a)$.

Ahora supongamos (a). Si una geodésica maximal $\gamma\colon [0,b) \to M$ tuviera $b < \infty$, su rapidez sería constante y

$$d_{\mathbf{g}}(\gamma(s),\gamma(t)) \le L_{\mathbf{g}}(\gamma\restriction_{[s,t]}) = |t-s|\,|\dot\gamma(0)|_{\mathbf{g}}.$$

Así, $\gamma(t)$ tendría un límite $p \in M$ cuando $t \to b^-$. Elegimos una carta alrededor de $p$ y una vecindad menor cuya clausura compacta esté contenida en esa carta. Una cola de $\gamma$ permanece en la vecindad menor. En su clausura, la métrica es uniformemente equivalente a la métrica euclidiana y los símbolos de Christoffel están acotados. Si $x^i(t)$ son las coordenadas de $\gamma(t)$ y $v^i(t) = \dot x^i(t)$, la rapidez riemanniana constante acota todas las componentes $v^i(t)$. La ecuación geodésica

$$\dot v^k(t) = -\Gamma^k_{ij}(x(t))v^i(t)v^j(t)$$

acota entonces sus derivadas. Por tanto, $v(t)$ es uniformemente Lipschitz en esa cola y tiene un límite $v_b$ cuando $t \to b^-$. Prolongamos $(x(t),v(t))$ continuamente hasta el dato $(x(p),v_b)$. La ecuación integral del sistema geodésico pasa al límite en $b$; la existencia local y la unicidad para ese sistema, con dicho dato inicial, prolongan la solución más allá de $b$, contradicción. El mismo argumento en el extremo izquierdo prueba (c). Ya se tiene entonces (d); aplicando el argumento radial del párrafo anterior con cualquier punto como centro, se obtiene un segmento geodésico minimizante entre dos puntos arbitrarios.

Bajo estas condiciones, para $p \in M$ y $R > 0$, la existencia de minimizantes da

$$\overline{B}_{\mathbf{g}}(p, R) = \exp_p\left(\overline{B}_{\mathbf{g}_p}(0, R)\right).$$

El miembro derecho es imagen continua de un compacto finito-dimensional, luego toda bola cerrada es compacta. Todo cerrado y acotado está contenido como cerrado en una de estas bolas, y se obtiene (b). Finalmente, (b) implica (a): una sucesión de Cauchy es acotada, posee una subsucesión convergente dentro de una bola cerrada compacta y, por ser de Cauchy, converge al mismo límite. Quedan probadas todas las equivalencias y consecuencias. □

Registramos por separado tres consecuencias que se usarán más adelante:

**Corolario 2.9.10.** Si $(M, \mathbf{g})$ es una variedad riemanniana conexa y sin frontera, y existe $p \in M$ tal que $\exp_p$ está definida en todo $T_pM$, entonces $M$ es completa.

*Demostración.* Es la implicación $(e) \Rightarrow (a)$ del Teorema 2.9.9, tomando $p_0 = p$. □

**Corolario 2.9.11.** Si $M$ es una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera, entonces cualesquiera dos puntos de $M$ se pueden unir por un segmento geodésico minimizante.

*Demostración.* La completitud métrica es la condición (a) de Hopf–Rinow; la última afirmación del teorema proporciona el segmento minimizante. □

**Corolario 2.9.12.** Si $M$ es una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera, entonces toda geodésica maximal en $M$ está definida en todo $\mathbb{R}$.

*Demostración.* Por Hopf–Rinow, la completitud métrica equivale a la completitud geodésica, que es precisamente la afirmación. □

## 2.10 Curvatura

La curvatura es la noción central en el estudio de la geometría riemanniana. Intuitivamente, mide la falta de conmutatividad al derivar covariantemente: transportar un vector en direcciones distintas y luego compararlos revela la presencia de curvatura.

**Definición 2.10.1.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. El $(1,3)$-***tensor de curvatura de Riemann*** de $M$ es el campo tensorial de tipo $(1,3)$, $\mathbf{R} \in \Gamma(T^{(1,3)}(TM))$ dado por

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\mathbf{Z}) := \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z}.$$

**Proposición 2.10.2.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. El $(1,3)$-tensor de curvatura de Riemann $\mathbf{R}$ define un campo tensorial de tipo $(1,3)$ en $M$.

*Demostración.* Por el Lema 1.10.18, basta comprobar que $\mathbf{R}$ es $C^\infty(M)$-multilineal en cada argumento. La aditividad en los tres argumentos se sigue de la linealidad de la conexión y del corchete; resta verificar la compatibilidad con el producto por una función. Tomemos $f \in C^\infty(M)$ y $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$.
Veamos que lo es en el primer argumento:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(f\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} &= \nabla_{f\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[f\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z}\\ &= f\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}(f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \nabla_{f[\mathbf{X},\mathbf{Y}]-(\mathbf{Y}f)\mathbf{X}}\mathbf{Z}\\ &= f\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - (\mathbf{Y}f)\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - f\nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - f\nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z} + (\mathbf{Y}f)\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\\ &= f\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

Para el segundo argumento:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\mathbf{X},f\mathbf{Y})\mathbf{Z} &= \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{f\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{f\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X},f\mathbf{Y}]}\mathbf{Z}\\ &= \nabla_{\mathbf{X}}(f\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) - f\nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{f[\mathbf{X},\mathbf{Y}]+(\mathbf{X}f)\mathbf{Y}}\mathbf{Z}\\ &= (\mathbf{X}f)\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} + f\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - f\nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - f\nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z} - (\mathbf{X}f)\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}\\ &= f\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

Finalmente, para el tercer y último argumento:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})(f\mathbf{Z}) &= \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}(f\mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Z}) - \nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}(f\mathbf{Z})\\ &= \nabla_{\mathbf{X}}\big((\mathbf{Y}f)\mathbf{Z} + f\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}\big) - \nabla_{\mathbf{Y}}\big((\mathbf{X}f)\mathbf{Z} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\big) - ([\mathbf{X},\mathbf{Y}]f)\mathbf{Z} - f\nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z}\\ &= (\mathbf{X}(\mathbf{Y}f))\mathbf{Z} + (\mathbf{Y}f)\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + (\mathbf{X}f)\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} + f\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}\\ &\quad - (\mathbf{Y}(\mathbf{X}f))\mathbf{Z} - (\mathbf{X}f)\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - (\mathbf{Y}f)\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - f\nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\\ &\quad - ([\mathbf{X},\mathbf{Y}]f)\mathbf{Z} - f\nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

Los términos que contienen derivadas primeras de $f$ se cancelan. Además,

$$\mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f) - [\mathbf{X},\mathbf{Y}]f = 0,$$

por la definición del corchete de Lie aplicado a funciones. En consecuencia,

$$\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})(f\mathbf{Z}) = f\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}.$$

Hemos verificado la multilinealidad en los tres argumentos. Por lo tanto, $\mathbf{R}$ es un campo tensorial de tipo $(1,3)$ en $M$. □

Como $\mathbf{R}$ es un campo tensorial de tipo $(1,3)$, podemos escribirlo en coordenadas locales $(x^i)$ como

$$\mathbf{R} = R_{ijk}{}^{l}\,\mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j \otimes \mathbf{d}x^k \otimes \partial_l.$$

El pequeño espacio antes del índice $l$ separa visualmente los tres índices covariantes del índice contravariante.

Los coeficientes cumplen la relación

$$\mathbf{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k = R_{ijk}{}^{l}\partial_l.$$

La siguiente proposición muestra como calcular las componentes de $R$ en coordenadas:

**Proposición 2.10.3.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Las componentes del $(1,3)$-tensor de curvatura están dadas en coordenadas $(x^i)$ por

$$R_{ijk}{}^{l} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}.$$

*Demostración.* Sean $(x^i)$ coordenadas locales en $M$ y sea $\{\partial_i\}$ el marco coordenado asociado. Por definición de los símbolos de Christoffel,

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^m_{ij}\partial_m.$$

Usando la linealidad y la regla de Leibniz de la conexión, se tiene

$$\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k = \nabla_{\partial_i}\left(\Gamma^l_{jk}\partial_l\right) = \partial_i\Gamma^l_{jk}\partial_l + \Gamma^l_{jk}\nabla_{\partial_i}\partial_l = \partial_i\Gamma^l_{jk}\partial_l + \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il}\partial_m.$$

Al intercambiar los índices $i$ y $j$ en el cálculo anterior,

$$\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k = \partial_j\Gamma^l_{ik}\partial_l + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{jl}\partial_m.$$

Como $[\partial_i, \partial_j] = 0$ en nuestro marco coordenado, el tercer término de la definición se anula:

$$\nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k = 0.$$

Por lo tanto, recordando que $\mathbf{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k$ e intercambiando $l$ y $m$ en $\Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il}\partial_m - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{jl}\partial_m$,

$$\mathbf{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k = \left(\partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right)\partial_l.$$

Identificando coeficientes en la base $\{\partial_l\}$, se concluye que

$$R_{ijk}{}^{l} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm},$$

que es la fórmula deseada. □

Para cualesquiera campos vectoriales $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, el mapeo $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\colon \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por $\mathbf{Z} \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}$ es un homomorfismo suave del haz tangente; en particular, $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ es $C^\infty(M)$-lineal. Se le llama el ***endomorfismo de curvatura determinado por*** $\mathbf{X}$ ***y*** $\mathbf{Y}$. Al bajar el índice contravariante mediante la métrica se obtiene el campo tensorial covariante que definimos a continuación.

**Definición 2.10.4.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Definimos el ***tensor de curvatura de Riemann*** como el campo tensorial de tipo $(0,4)$ dado por

$$\mathbf{Rm}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z},\mathbf{W}) = \langle \mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}, \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{g}}.$$

Como corolario de la Proposición 2.10.3 tenemos una expresión local para el tensor de curvatura de Riemann:

**Corolario 2.10.5.** Si $(M, \mathbf{g})$ es una variedad riemanniana con o sin frontera y

$$\mathbf{Rm} = R_{ijkl}\, \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j \otimes \mathbf{d}x^k \otimes \mathbf{d}x^l,$$

entonces

$$R_{ijkl} = g_{lm}\left(\partial_i \Gamma^m_{jk} - \partial_j \Gamma^m_{ik} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^m_{ip} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^m_{jp}\right).$$

*Demostración.* Por la definición de **Rm** y la fórmula de la Proposición 2.10.3,

$$R_{ijkl} = \mathbf{Rm}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = g_{lm} R^m{}_{ijk}.$$

Sustituir

$$R^m{}_{ijk} = \partial_i \Gamma^m_{jk} - \partial_j \Gamma^m_{ik} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^m_{ip} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^m_{jp}$$

proporciona la expresión enunciada. □

Las simetrías y antisimetrías del tensor de curvatura de Riemann relacionan sus componentes y simplifican los cálculos con este tensor.

**Proposición 2.10.6.** (Simetrías del tensor de curvatura) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. El tensor de curvatura de Riemann tiene las siguientes propiedades para cualesquiera $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}(M)$.

(a) $\mathbf{Rm}(\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = -\mathbf{Rm}(\mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$.

(b) $\mathbf{Rm}(\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = -\mathbf{Rm}(\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})$.

(c) $\mathbf{Rm}(\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Rm}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{X})$.

(d) $\mathbf{Rm}(\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{Rm}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}) + \mathbf{Rm}(\mathbf{Y}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}) = 0$. A esta identidad se le conoce con el nombre de ***identidad de Bianchi***.

*Demostración.* Escribamos

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) := \langle \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle.$$

La definición de **R** da inmediatamente $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\mathbf{R}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, que prueba (1).
La compatibilidad métrica de la conexión implica

$$\begin{aligned} &R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) + R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}) \\ &\quad = \mathbf{X}\mathbf{Y}\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle - \mathbf{Y}\mathbf{X}\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle = 0. \end{aligned}$$

En la primera igualdad se expanden las tres derivadas covariantes de cada curvatura y se agrupan mediante la regla de compatibilidad; la última igualdad es la definición del corchete actuando sobre funciones. Esto prueba (2).

Como la conexión no tiene torsión, al expandir la suma cíclica se obtiene

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}+\mathbf{R}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\mathbf{X}+\mathbf{R}(\mathbf{Z},\mathbf{X})\mathbf{Y}\\
&=\nabla_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}-\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y})+\nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}-\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z})+\nabla_{\mathbf{Z}}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}-\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X})\\
&\quad-\nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z}-\nabla_{[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]}\mathbf{X}-\nabla_{[\mathbf{Z},\mathbf{X}]}\mathbf{Y}\\
&=\nabla_{\mathbf{X}}[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]+\nabla_{\mathbf{Y}}[\mathbf{Z},\mathbf{X}]+\nabla_{\mathbf{Z}}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]\\
&\quad-\nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z}-\nabla_{[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]}\mathbf{X}-\nabla_{[\mathbf{Z},\mathbf{X}]}\mathbf{Y}=0.
\end{aligned}$$

En la última igualdad se agrupan, por ejemplo, $\nabla_{\mathbf{X}}[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]-\nabla_{[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]}\mathbf{X}=[\mathbf{X},[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]]$, y las tres expresiones resultantes se anulan por la identidad de Jacobi. Al emparejar con $\mathbf{W}$, se obtiene (4).
Resta probar (3). Fijemos cuatro campos y abreviemos sus nombres por $a,b,c,d$. Usando únicamente las antisimetrías ya probadas, las identidades de Bianchi correspondientes a las permutaciones pertinentes pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
R_{bcad}&=R_{acbd}-R_{abcd},\\
R_{bdac}&=R_{abcd}+R_{adbc},\\
R_{cdab}&=R_{acbd}-R_{adbc},\\
R_{bcad}&=R_{bdac}-R_{cdab},
\end{aligned}$$

donde $R_{abcd}:=R(a,b,c,d)$. Sustituyendo las tres primeras igualdades en la cuarta se obtiene

$$R_{abcd}=R_{acbd}-R_{adbc}=R_{cdab}.$$

Ésta es la simetría por intercambio de pares de (3). □

Podemos expresar las simetrías del tensor de curvatura en coordenadas como sigue:

**Corolario 2.10.7.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. En cualesquiera coordenadas locales, las componentes de $\mathbf{Rm}$ cumplen:

(a) $R_{ijkl}=-R_{jikl}$.

(b) $R_{ijkl}=-R_{ijlk}$.

(c) $R_{ijkl}=R_{klij}$.

(d) $R_{ijkl}+R_{jkil}+R_{kijl}=0$.

*Demostración.* Se aplican los cuatro incisos de la proposición anterior a los campos coordenados $\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_l$. □

**Definición 2.10.8.** (Tensor de Ricci y endomorfismo de Ricci) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera de dimensión $n$. Para $X,Y\in T_pM$, definimos

$$\mathbf{Ric}_p(X,Y):=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}_p\big(\mathbf{R}(\mathbf{e}_i,X)Y,\mathbf{e}_i\big),\tag{2.72}$$

donde $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ es una base ortonormal de $T_pM$. Esta expresión no depende de la base ortonormal elegida y define un campo tensorial simétrico de tipo $(0,2)$, llamado el *tensor de Ricci*.
El *endomorfismo de Ricci* es el campo $\mathbf{Ric}^\sharp \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ determinado por

$$\mathbf{g}(\mathbf{Ric}^\sharp X, Y) = \mathbf{Ric}(X,Y). \tag{2.73}$$

**Proposición 2.10.9.** (Contracción de la curvatura y endomorfismo de Ricci) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera de dimensión $n$. Para todo $p \in M$, toda base ortonormal $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ de $T_pM$ y todo $X \in T_pM$,

$$-\sum_{i=1}^n \mathbf{R}(\mathbf{e}_i, X)\mathbf{e}_i = \mathbf{Ric}^\sharp X. \tag{2.74}$$

En particular, $\mathbf{Ric}^\sharp$ es autoadjunto respecto de $\mathbf{g}$.

*Demostración.* La independencia de la base en (2.72) es la independencia de la traza de un endomorfismo. Comprobemos la simetría. Si $X, Y \in T_pM$, las simetrías por pares y las antisimetrías del tensor de curvatura dan

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ric}(Y,X) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{Rm}(\mathbf{e}_i, Y, X, \mathbf{e}_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{Rm}(X, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, Y) \\
&= -\sum_{i=1}^n \mathbf{Rm}(\mathbf{e}_i, X, \mathbf{e}_i, Y) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{Rm}(\mathbf{e}_i, X, Y, \mathbf{e}_i) = \mathbf{Ric}(X,Y).
\end{aligned}$$

Para probar (2.74), tomamos $Y \in T_pM$ y usamos la antisimetría de $\mathbf{Rm}$ en sus dos últimos argumentos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}\left(-\sum_{i=1}^n \mathbf{R}(\mathbf{e}_i, X)\mathbf{e}_i, Y\right) &= -\sum_{i=1}^n \mathbf{Rm}(\mathbf{e}_i, X, \mathbf{e}_i, Y) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{Rm}(\mathbf{e}_i, X, Y, \mathbf{e}_i) = \mathbf{Ric}(X,Y).
\end{aligned}$$

La no degeneración de $\mathbf{g}$ da la identidad. Finalmente, la simetría de $\mathbf{Ric}$ implica

$$\mathbf{g}(\mathbf{Ric}^\sharp X, Y) = \mathbf{Ric}(X,Y) = \mathbf{Ric}(Y,X) = \mathbf{g}(X, \mathbf{Ric}^\sharp Y),$$

de modo que $\mathbf{Ric}^\sharp$ es autoadjunto. □

**Definición 2.10.10.** (Curvatura escalar) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. La *curvatura escalar* es la función suave

$$R_{\mathbf{g}} := \mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}).$$

Si $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ es un marco ortonormal local, entonces

$$R_{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i),$$

y en coordenadas $R_{\mathbf{g}} = g^{ij}\,\mathrm{Ric}_{ij}$. En los capítulos analíticos mantendremos la notación $R_{\mathbf{g}}$ para no confundir el escalar con el tensor o el endomorfismo de curvatura.

**Definición 2.10.11.** (Curvatura seccional) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y $p \in M$. Dado un plano bidimensional $\Pi \subseteq T_pM$ generado por dos vectores linealmente independientes $u, v \in T_pM$, la *curvatura seccional* de $\Pi$ se define como

$$K(\Pi) = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{R}(u,v)v,u)}{\mathbf{g}(u,u)\mathbf{g}(v,v) - \mathbf{g}(u,v)^2},$$

donde $\mathbf{R}$ es el tensor de curvatura de Riemann. Este valor depende únicamente del plano $\Pi$ y es independiente de la base $\{u,v\}$ elegida para generarlo.

**Teorema 2.10.12.** (Tensor de curvatura para espacios de curvatura constante) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Si $(M,\mathbf{g})$ tiene curvatura seccional constante $K$, entonces, para todo $p \in M$ y cualesquiera $u,v,w \in T_pM$, se tiene

$$\mathbf{R}(u,v)w = K\big(\mathbf{g}(v,w)u - \mathbf{g}(u,w)v\big).$$

*Demostración.* Por hipótesis, la curvatura seccional es una constante $K$. A partir de la definición de curvatura seccional, reescribimos la ecuación para obtener

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}(u,v)v,u) = K\big(\mathbf{g}(u,u)\mathbf{g}(v,v) - \mathbf{g}(u,v)^2\big).$$

Esta igualdad es válida para cualquier par de vectores linealmente independientes $u,v$, y se extiende trivialmente al caso en que son linealmente dependientes (pues ambos lados se anulan).
Dadas $u,v,w$ arbitrarios, calcularemos la expresión $\mathbf{g}(\mathbf{R}(u+w,v)v,u+w)$ de dos maneras distintas.
Primero, aplicando la fórmula anterior directamente al par $(u+w,v)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{R}(u+w,v)v,u+w) &= K\big(\mathbf{g}(v,v)\mathbf{g}(u+w,u+w) - \mathbf{g}(u+w,v)^2\big)\\ &= K\big(\mathbf{g}(v,v)[\mathbf{g}(u,u)+\mathbf{g}(w,w)+2\mathbf{g}(u,w)]\\ &\qquad - [\mathbf{g}(u,v)^2+\mathbf{g}(w,v)^2+2\mathbf{g}(u,v)\mathbf{g}(w,v)]\big).\end{aligned}$$

Segundo, utilizando la multilinealidad del tensor de Riemann en el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{R}(u+w,v)v,u+w) &= \mathbf{g}(\mathbf{R}(u,v)v+\mathbf{R}(w,v)v,u+w)\\ &= \mathbf{g}(\mathbf{R}(u,v)v,u)+\mathbf{g}(\mathbf{R}(w,v)v,w)+\mathbf{g}(\mathbf{R}(u,v)v,w)+\mathbf{g}(\mathbf{R}(w,v)v,u).\end{aligned}$$

Por la Proposición 2.10.6 (incisos 1, 2 y 3), sabemos que $\mathbf{Rm}(u,v,v,w) = \mathbf{Rm}(w,v,v,u)$, lo cual equivale a $\mathbf{g}(\mathbf{R}(u,v)v,w) = \mathbf{g}(\mathbf{R}(w,v)v,u)$. Además, aplicando nuestra fórmula base a los dos primeros términos, la

expresión se simplifica a

$$K\big(\mathbf{g}(u,u)\mathbf{g}(v,v)-\mathbf{g}(u,v)^2\big)+K\big(\mathbf{g}(w,w)\mathbf{g}(v,v)-\mathbf{g}(w,v)^2\big)+2\mathbf{g}(\mathbf{R}(u,v)v,w).$$

Igualando ambos desarrollos de $\mathbf{g}(\mathbf{R}(u+w,v)v,u+w)$ y cancelando los términos comunes, resulta

$$2\mathbf{g}(\mathbf{R}(u,v)v,w)=2K\big(\mathbf{g}(v,v)\mathbf{g}(u,w)-\mathbf{g}(u,v)\mathbf{g}(w,v)\big).$$

Después de dividir entre 2, esta igualdad puede escribirse como

$$\mathbf{g}\big(\mathbf{R}(u,v)v-K(\mathbf{g}(v,v)u-\mathbf{g}(u,v)v),w\big)=0 \qquad \text{para todo } w\in T_pM.$$

La no degeneración de $\mathbf{g}_p$ obliga a que el primer argumento sea nulo. Por lo tanto,

$$\mathbf{R}(u,v)v=K\big(\mathbf{g}(v,v)u-\mathbf{g}(u,v)v\big). \tag{2.75}$$

Ahora polarizamos en el segundo y el tercer argumento. Tomemos $u,v,w$ arbitrarios y calculemos $\mathbf{R}(u,v+w)(v+w)$ de dos maneras. Primero, usando (2.75):

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(u,v+w)(v+w)&=K\big(\mathbf{g}(v+w,v+w)u-\mathbf{g}(u,v+w)(v+w)\big)\\&=K\big([\mathbf{g}(v,v)+\mathbf{g}(w,w)+2\mathbf{g}(v,w)]u\\&\qquad-\mathbf{g}(u,v)v-\mathbf{g}(u,w)v-\mathbf{g}(u,v)w-\mathbf{g}(u,w)w\big).\end{aligned}$$

Segundo, por multilinealidad de $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}(u,v+w)(v+w)=\mathbf{R}(u,v)v+\mathbf{R}(u,w)w+\mathbf{R}(u,v)w+\mathbf{R}(u,w)v.$$

Aplicando (2.75) a los dos primeros términos de esta suma:

$$K\big(\mathbf{g}(v,v)u-\mathbf{g}(u,v)v\big)+K\big(\mathbf{g}(w,w)u-\mathbf{g}(u,w)w\big)+\mathbf{R}(u,v)w+\mathbf{R}(u,w)v.$$

Igualando estos dos nuevos desarrollos y cancelando términos correspondientes, llegamos a:

$$\mathbf{R}(u,v)w+\mathbf{R}(u,w)v=K\big(2\mathbf{g}(v,w)u-\mathbf{g}(u,w)v-\mathbf{g}(u,v)w\big). \tag{2.76}$$

El último paso utiliza la identidad de Bianchi, que establece $\mathbf{R}(v,u)w+\mathbf{R}(u,w)v+\mathbf{R}(w,v)u=0$. Intercambiando los roles de $u$ y $v$ en la ecuación (2.76), obtenemos:

$$\mathbf{R}(v,u)w+\mathbf{R}(v,w)u=K\big(2\mathbf{g}(u,w)v-\mathbf{g}(v,w)u-\mathbf{g}(u,v)w\big).$$

De la identidad de Bianchi y la antisimetría en los dos primeros argumentos, $\mathbf{R}(v,w)u=-\mathbf{R}(w,v)u=\mathbf{R}(v,u)w+\mathbf{R}(u,w)v$. Sustituyendo,

$$\mathbf{R}(v,u)w+\big(\mathbf{R}(v,u)w+\mathbf{R}(u,w)v\big)=2\mathbf{R}(v,u)w+\mathbf{R}(u,w)v.$$

Usando $\mathbf{R}(v,u)w = -\mathbf{R}(u,v)w$, esto equivale a $-2\mathbf{R}(u,v)w + \mathbf{R}(u,w)v$. Por lo tanto,

$$-2\mathbf{R}(u,v)w + \mathbf{R}(u,w)v = K\big(2\mathbf{g}(u,w)v - \mathbf{g}(v,w)u - \mathbf{g}(u,v)w\big). \tag{2.77}$$

Finalmente, restamos la ecuación (2.77) de la ecuación (2.76):

$$\big(\mathbf{R}(u,v)w + \mathbf{R}(u,w)v\big) - \big(-2\mathbf{R}(u,v)w + \mathbf{R}(u,w)v\big) =$$
$$K\big(2\mathbf{g}(v,w)u - \mathbf{g}(u,w)v - \mathbf{g}(u,v)w\big) - K\big(2\mathbf{g}(u,w)v - \mathbf{g}(v,w)u - \mathbf{g}(u,v)w\big).$$

Simplificando ambos lados, los términos con $\mathbf{R}(u,w)v$ y $\mathbf{g}(u,v)w$ se cancelan, y queda

$$3\mathbf{R}(u,v)w = K\big(3\mathbf{g}(v,w)u - 3\mathbf{g}(u,w)v\big).$$

Dividiendo por 3, obtenemos la fórmula deseada:

$$\mathbf{R}(u,v)w = K\big(\mathbf{g}(v,w)u - \mathbf{g}(u,w)v\big).$$

□

## 2.11 Subvariedades riemannianas

Las condiciones de traza y numerosos problemas variacionales se formulan sobre una subvariedad. Para comparar las derivadas intrínsecas con las derivadas en $M$ debemos separar las componentes tangencial y normal de Levi–Civita.

Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera. La métrica inducida es $\mathbf{g}_N = \mathbf{g}\restriction_{TN}$ y

$$T_xM = T_xN \oplus T_x^{\perp}N, \qquad T_x^{\perp}N = \{v \in T_xM \mid \mathbf{g}(v,w) = 0 \text{ para todo } w \in T_xN\}.$$

Los espacios $T_x^{\perp}N$ forman el haz normal $T^{\perp}N$. Para una sección $\mathbf{V}$ de $TM|_N$, escribiremos $\mathbf{V}^{\top}$ y $\mathbf{V}^{\perp}$ para sus proyecciones ortogonales.

**Lema 2.11.1.** (Conexión ambiente a lo largo de una subvariedad) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera. Sea $\iota\colon N \hookrightarrow M$ la inclusión. Existe una única conexión $\overline{\nabla}$ en el haz restringido $\iota^*TM \to N$ tal que, si $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(N)$ y $\mathbf{V} \in \Gamma(\iota^*TM)$ admiten extensiones locales $\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{V}} \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{V} = (\nabla^M_{\widetilde{\mathbf{X}}}\widetilde{\mathbf{V}})\restriction_N .$$

La expresión no depende de las extensiones. Además,

$$\mathbf{X}\mathbf{g}(\mathbf{V},\mathbf{W}) = \mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{V},\mathbf{W}) + \mathbf{g}(\mathbf{V},\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{W})$$

para $\mathbf{V},\mathbf{W} \in \Gamma(\iota^*TM)$ y, si $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(N)$, entonces

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X},\mathbf{Y}].$$

*Demostración.* En coordenadas $(x^1,\dots,x^m)$ de $M$, si $\mathbf{V} = V^j\partial_j \restriction_N$ y $d\iota(\mathbf{X}) = X^i\partial_i \restriction_N$, necesariamente

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{V} = \left(\mathbf{X}(V^k) + X^i V^j \Gamma_{ij}^k \restriction_N\right)\partial_k \restriction_N .$$

El lado derecho sólo contiene los valores de $\mathbf{X}$, de $\mathbf{V}$ y de las derivadas tangenciales $\mathbf{X}(V^k)$ sobre $N$; por lo tanto no depende de ninguna extensión. La regla de transformación de los símbolos de Christoffel demuestra que las expresiones locales se pegan, y las reglas de conexión se verifican directamente en la fórmula. Las dos últimas identidades son las restricciones, respectivamente, de la compatibilidad métrica del Teorema 2.4.14 y de la ausencia de torsión de la conexión de Levi–Civita. □

**Definición 2.11.2.** (Segunda forma fundamental y conexión normal) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera. Para $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ y $\eta \in \Gamma(T^\perp N)$ se definen

$$\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = (\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^\perp, \qquad \nabla^\perp_{\mathbf{X}}\eta = (\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\eta)^\perp.$$

Para $\eta \in \Gamma(T^\perp N)$, el *mapeo de Weingarten* o *operador de forma* $\mathbf{A}_\eta \colon TN \longrightarrow TN$ es el único endomorfismo que satisface

$$\mathbf{g}_N(\mathbf{A}_\eta\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{g}(\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\eta)$$

para cualesquiera $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(N)$.

**Proposición 2.11.3.** (Fórmulas de Gauss y Weingarten) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera. La segunda forma fundamental $\mathbf{II}$ es un tensor simétrico, y $\nabla^\perp$ es una conexión métrica en el haz normal. Se cumplen

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla^N_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{2.78}$$

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\eta = -\mathbf{A}_\eta\mathbf{X} + \nabla^\perp_{\mathbf{X}}\eta. \tag{2.79}$$

El mapeo de Weingarten depende $C^\infty(N)$–linealmente de $\eta$ y es autoadjunto respecto de $\mathbf{g}_N$.

*Demostración.* El Lema 2.11.1 elimina toda dependencia de extensiones. La linealidad de una conexión en su primera entrada da $\mathbf{II}(f\mathbf{X},\mathbf{Y}) = f\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. En la segunda entrada,

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = \mathbf{X}(f)\mathbf{Y} + f\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y};$$

el primer sumando es tangente, de modo que $\mathbf{II}(\mathbf{X},f\mathbf{Y}) = f\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Así, $\mathbf{II}$ es tensorial. Como $\overline{\nabla}$ no tiene torsión sobre campos tangentes,

$$\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) - \mathbf{II}(\mathbf{Y},\mathbf{X}) = [\mathbf{X},\mathbf{Y}]^\perp = 0.$$

Definamos $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} := (\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^\top$. La compatibilidad métrica de $\overline{\nabla}$ y la ortogonalidad de la descomposición muestran que $\mathbf{D}$ es métrica; la identidad de torsión anterior muestra que no tiene torsión. Por la unicidad de la conexión de Levi–Civita, $\mathbf{D} = \nabla^N$, y la descomposición tangencial–normal proporciona la fórmula de Gauss (2.78).

Al derivar la identidad $\mathbf{g}(\eta, \mathbf{Y}) = 0$ obtenemos

$$\mathbf{g}((\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\eta)^{\top}, \mathbf{Y}) = -\mathbf{g}(\eta, \mathbf{II}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -\mathbf{g}_N(\mathbf{A}_\eta \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

La no degeneración de $\mathbf{g}_N$ da $(\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\eta)^{\top} = -\mathbf{A}_\eta \mathbf{X}$, que prueba (2.79). Las reglas de conexión y la compatibilidad métrica de $\nabla^{\perp}$ se obtienen proyectando las de $\overline{\nabla}$. Finalmente, la simetría de $\mathbf{II}$ implica

$$\mathbf{g}_N(\mathbf{A}_\eta \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{g}_N(\mathbf{X}, \mathbf{A}_\eta \mathbf{Y}),$$

y la linealidad en $\eta$ se sigue de la identidad que define a $\mathbf{A}_\eta$. □

**Corolario 2.11.4.** (Mapeo de Weingarten de una hipersuperficie euclidiana) Sea $N \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie suave, orientada y sin frontera, de dimensión $n$, y sea $\boldsymbol{\nu} \colon N \longrightarrow \mathbb{S}^n$ su campo normal unitario. Entonces

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{X} = -d\boldsymbol{\nu}(\mathbf{X}), \qquad \mathbf{X} \in \mathfrak{X}(N).$$

En particular, $d\boldsymbol{\nu}$ es autoadjunto con el signo opuesto; los autovalores de $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$ son las curvaturas principales y $H := \frac{1}{n}\operatorname{tr}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}})$ es la curvatura media escalar con esta convención.

*Demostración.* Identificamos $T_{\boldsymbol{\nu}(x)}\mathbb{S}^n$ con el subespacio $\boldsymbol{\nu}(x)^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Como $\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$, se tiene $\mathbf{g}(d\boldsymbol{\nu}(\mathbf{X}), \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2}\mathbf{X}\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = 0$, de modo que $d\boldsymbol{\nu}(\mathbf{X})$ es tangente. La conexión euclidiana a lo largo de $N$ satisface $\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\nu} = d\boldsymbol{\nu}(\mathbf{X})$. La fórmula de Weingarten (2.79) y el hecho de que la componente normal es nula dan $d\boldsymbol{\nu}(\mathbf{X}) = -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{X}$. Las afirmaciones restantes son las definiciones espectrales correspondientes; la realidad de los autovalores se sigue de la autoadjunción probada en la Proposición 2.11.3. □

**Definición 2.11.5.** (Derivadas covariantes de la segunda forma fundamental) Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera. Las conexiones $\nabla^N$ en $TN$ y $\nabla^{\perp}$ en $T^{\perp}N$ inducen una conexión, que denotaremos por $\nabla^{\mathbf{II}}$, en el haz

$$T^*N \otimes T^*N \otimes T^{\perp}N.$$

Explícitamente, si $\mathbf{B} \in \Gamma(T^*N \otimes T^*N \otimes T^{\perp}N)$ y $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(N)$, entonces

$$(\nabla^{\mathbf{II}}_{\mathbf{X}}\mathbf{B})(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla^{\perp}_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) - \mathbf{B}(\nabla^N_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - \mathbf{B}(\mathbf{Y}, \nabla^N_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}).$$

Definimos recursivamente

$$(\nabla^{\mathbf{II}})^0 \mathbf{II} := \mathbf{II}, \qquad (\nabla^{\mathbf{II}})^{m+1}\mathbf{II} := \nabla^{\mathbf{II}}\big((\nabla^{\mathbf{II}})^m \mathbf{II}\big), \qquad m \in \mathbb{N}_0,$$

donde en el segundo miembro se usa la conexión inducida en cada factor covariante adicional. En particular,

$$(\nabla^{\mathbf{II}})^m \mathbf{II} \in \Gamma\big((T^*N)^{\otimes(m+2)} \otimes T^{\perp}N\big).$$

La métrica dual de $\mathbf{g}_N$ en los factores $T^*N$ y la restricción de $\mathbf{g}$ al haz normal inducen la norma puntual

$|(\nabla^{\mathbf{II}})^m \mathbf{II}|_{\mathbf{g}}$. Diremos que esta derivada está uniformemente acotada si

$$\sup_{x\in N} \left|(\nabla^{\mathbf{II}})^m \mathbf{II}(x)\right|_{\mathbf{g}} < \infty.$$

**Definición 2.11.6.** (Curvatura normal) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera. La curvatura de la conexión normal es el campo $\mathbf{R}^\perp$ definido por

$$\mathbf{R}^\perp(\mathbf{X},\mathbf{Y})\eta := \nabla^\perp_{\mathbf{X}}\nabla^\perp_{\mathbf{Y}}\eta - \nabla^\perp_{\mathbf{Y}}\nabla^\perp_{\mathbf{X}}\eta - \nabla^\perp_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\eta.$$

**Teorema 2.11.7.** (Ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera. Para campos tangentes $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z},\mathbf{W}$ y campos normales $\eta,\zeta$ se tiene

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}^N(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z},\mathbf{W}) = \mathbf{g}(\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z},\mathbf{W}) + \mathbf{g}(\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{W}),\mathbf{II}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})) - \mathbf{g}(\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Z}),\mathbf{II}(\mathbf{Y},\mathbf{W})), \tag{2.80}$$

$$(\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z})^\perp = (\nabla^{\mathbf{II}}_{\mathbf{X}}\mathbf{II})(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) - (\nabla^{\mathbf{II}}_{\mathbf{Y}}\mathbf{II})(\mathbf{X},\mathbf{Z}), \tag{2.81}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}^\perp(\mathbf{X},\mathbf{Y})\eta,\zeta) = \mathbf{g}(\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\eta,\zeta) + \mathbf{g}_N([\mathbf{A}_\eta,\mathbf{A}_\zeta]\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{2.82}$$

Se usa la convención $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z}$ de la Definición 2.10.1.

*Demostración.* El Lema 2.11.1 permite calcular $\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ usando campos a lo largo de $N$. Sustituir las fórmulas de Gauss y Weingarten en cada uno de los tres términos de la definición de $\mathbf{R}^M$ da

$$(\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z})^\top = \mathbf{R}^N(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} - \mathbf{A}_{\mathbf{II}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})}\mathbf{X} + \mathbf{A}_{\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Z})}\mathbf{Y}.$$

Emparejar con $\mathbf{W}$ y usar $\mathbf{g}_N(\mathbf{A}_\eta\mathbf{X},\mathbf{W}) = \mathbf{g}(\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{W}),\eta)$ prueba Gauss. La componente normal es

$$(\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z})^\perp = (\nabla^{\mathbf{II}}_{\mathbf{X}}\mathbf{II})(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) - (\nabla^{\mathbf{II}}_{\mathbf{Y}}\mathbf{II})(\mathbf{X},\mathbf{Z}),$$

porque los términos que contienen $\nabla^N_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla^N_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ se anulan por la ausencia de torsión. Esto prueba Codazzi. Al expandir $\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\eta$ se obtiene

$$(\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\eta)^\perp = \mathbf{R}^\perp(\mathbf{X},\mathbf{Y})\eta - \mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{A}_\eta\mathbf{Y}) + \mathbf{II}(\mathbf{Y},\mathbf{A}_\eta\mathbf{X}),$$

y el emparejamiento con $\zeta$ prueba Ricci. □

## 2.12 Vecindades tubulares y coordenadas de Fermi

La exponencial aplicada al haz normal convierte la descomposición tangencial–normal anterior en coordenadas adaptadas a $N$.

Podemos adaptar el mapeo exponencial de modo que nos proporcione información sobre el haz normal de la siguiente manera, definiendo algo que se conoce como el *mapeo exponencial normal*.

**Definición 2.12.1.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera. Definimos el mapeo exponencial normal como $\exp^{\perp}\colon \mathcal{E}_N \longrightarrow M$, con $\mathcal{E}_N := \mathcal{E} \cap T^{\perp}N$, mediante $\exp^{\perp} = \exp|_{\mathcal{E}_N}$.

Estaremos interesados en "vecindades normales alrededor de $N$", las cuales llamaremos *vecindades tubulares*, como en la siguiente figura:

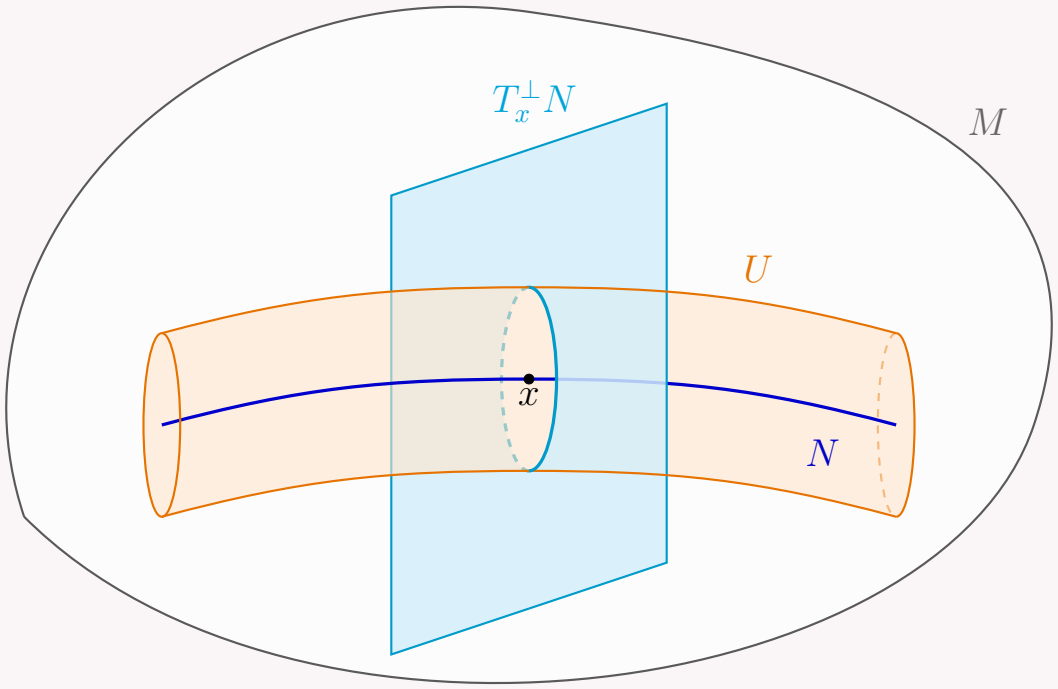



**Figura 2.7.** Vecindad tubular alrededor de la subvariedad encajada $N$.

**Definición 2.12.2.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera. Decimos que $U \subseteq M$ es una *vecindad normal* de $N$ en $M$ si existe un abierto $V \subseteq \mathcal{E}_N$ tal que:

(a) $V$ intersecta cada fibra $T_x^{\perp}N$ en un conjunto estrellado respecto a 0,

(b) la restricción

$$\exp^{\perp} \restriction_V \colon V \longrightarrow U$$

es un difeomorfismo.

Decimos que $U$ es una *vecindad tubular* si es una vecindad normal y además $V$ puede tomarse de la forma

$$V := \{(x, v) \in T^{\perp}N \mid |v|_{\mathbf{g}} < \delta(x)\},$$

para alguna función continua $\delta\colon N \longrightarrow (0,\infty)$.
Si $V$ puede tomarse con $\delta(x) \equiv \varepsilon$, decimos que $U$ es una *vecindad tubular uniforme* de radio $\varepsilon$, o una $\varepsilon$-vecindad tubular.

Toda subvariedad encajada admite una vecindad tubular y si la subvariedad es compacta, entonces podemos pedir que dicha vecindad tubular sea uniforme:

**Teorema 2.12.3.** (Existencia de vecindades tubulares) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera. Entonces $N$ tiene una vecindad tubular en $M$. Si $N$ es compacta, tiene una vecindad tubular uniforme.

*Demostración.* Sea $N_0 := \{(x,0) \mid x \in N\} \subseteq T^\perp N$. En un punto de la sección cero existe la descomposición canónica

$$T_{(x,0)}(T^\perp N) = T_{(x,0)}N_0 \oplus T_{(x,0)}(T^\perp_x N) \cong T_xN \oplus T^\perp_x N. \tag{2.83}$$

La restricción de $\exp^\perp$ a $N_0$ es la inclusión $N \hookrightarrow M$; su diferencial manda el primer sumando sobre $T_xN$. En la fibra $T^\perp_x N$, la exponencial normal coincide con $\exp_x$, y $d(\exp_x)_0 = I$ por la Proposición 2.8.7. Por lo tanto, $d(\exp^\perp)_{(x,0)}$ es el isomorfismo

$$T_xN \oplus T^\perp_x N \longrightarrow T_xM, \qquad (X,V) \longmapsto X+V.$$

El teorema de la función inversa, Teorema 1.5.6, muestra que $\exp^\perp$ es un difeomorfismo local cerca de cada punto de $N_0$.
Para obtener una sola vecindad de toda la sección cero debemos impedir que se intersecten geodésicas normales con puntos iniciales distintos. Denotemos por $d_{\mathbf{g}}$ la distancia ambiente, restringida a $N \times N$, y pongamos

$$V_\delta(x) := \{(y,v) \in T^\perp N \mid d_{\mathbf{g}}(x,y) < \delta,\ |v|_{\mathbf{g}} < \delta\}, \qquad 0 < \delta \leq 1.$$

Para cada $x$, el resultado local anterior permite escoger $\delta > 0$ de modo que $\exp^\perp$ sea un difeomorfismo de $V_\delta(x)$ sobre su imagen. Definimos

$$\rho(x) := \sup\{0 < \delta \leq 1 \mid \exp^\perp \restriction_{V_\delta(x)} \text{ es un difeomorfismo sobre su imagen}\}. \tag{2.84}$$

Entonces $\rho(x) > 0$. La propiedad que define el supremo es monótona respecto de $\delta$. Por ello, dados dos puntos de $V_{\rho(x)}(x)$, existe $\delta < \rho(x)$ que contiene a ambos y un $\delta'$, con $\delta < \delta' < \rho(x)$, para el que la restricción es un difeomorfismo. Así, $\exp^\perp$ es inyectiva y un difeomorfismo local en $V_{\rho(x)}(x)$, y por lo tanto es un difeomorfismo de este conjunto sobre su imagen.
La función $\rho$ es continua. Si $d_{\mathbf{g}}(x,x') < \rho(x)$, la desigualdad triangular da

$$V_{\rho(x)-d_{\mathbf{g}}(x,x')}(x') \subseteq V_{\rho(x)}(x),$$

y de aquí $\rho(x') \geq \rho(x) - d_{\mathbf{g}}(x,x')$. Si $d_{\mathbf{g}}(x,x') \geq \rho(x)$, esta misma desigualdad es trivial. Intercambiando $x$ y $x'$ obtenemos

$$|\rho(x) - \rho(x')| \leq d_{\mathbf{g}}(x,x'). \tag{2.85}$$

La distancia ambiente induce en la subvariedad encajada su topología, de modo que $\rho$ es continua.

Consideremos el abierto

$$V := \{(x,v) \in T^{\perp}N \mid |v|_{\mathbf{g}} < \tfrac{1}{2}\rho(x)\}. \tag{2.86}$$

Probemos que $\exp^{\perp}$ es inyectiva en $V$. Supongamos que $\exp_x(v) = \exp_{x'}(v')$ y, sin pérdida de generalidad, $\rho(x') \le \rho(x)$. Las dos geodésicas radiales, la segunda recorrida en sentido inverso, forman una curva admisible de $x$ a $x'$ de longitud $|v|_{\mathbf{g}} + |v'|_{\mathbf{g}}$. En consecuencia,

$$d_{\mathbf{g}}(x,x') \le |v|_{\mathbf{g}} + |v'|_{\mathbf{g}} < \tfrac{1}{2}\rho(x) + \tfrac{1}{2}\rho(x') \le \rho(x).$$

Tanto $(x,v)$ como $(x',v')$ pertenecen entonces a $V_{\rho(x)}(x)$, donde $\exp^{\perp}$ es inyectiva; los dos puntos son iguales. Cada punto de $V$ pertenece a un abierto en el que $\exp^{\perp}$ es un difeomorfismo local. Por consiguiente, $\exp^{\perp}\restriction_V$ es un difeomorfismo local inyectivo, luego un difeomorfismo sobre el abierto $U := \exp^{\perp}(V)$. Las fórmulas (2.86) y la continuidad de $\frac{\rho}{2}$ muestran que $U$ es una vecindad tubular. Si $N$ es compacta, $\frac{\rho}{2}$ alcanza un mínimo positivo $\varepsilon$, y la restricción a $\{|v|_{\mathbf{g}} < \varepsilon\}$ proporciona la vecindad tubular uniforme. □

### 2.12.1 Coordenadas de Fermi

La vecindad tubular identifica un entorno de $N$ con un entorno de la sección cero de su haz normal. Al trivializar localmente ese haz se obtienen coordenadas adaptadas simultáneamente a las direcciones tangenciales y normales.

**Definición 2.12.4.** (Coordenadas de Fermi) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de dimensión $n$, $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera de dimensión $k$ y $U = \exp^{\perp}(V)$ una vecindad normal de $N$. Sean $\theta = (y^1,\dots,y^k)\colon W \longrightarrow \theta(W) \subseteq \mathbb{R}^k$ una carta de $N$ y $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_c)$, $c = n-k$, un marco ortonormal local de $T^{\perp}N$ sobre $W$. En todo producto abierto $W' \times Z \subseteq \theta(W) \times \mathbb{R}^c$ en el que la expresión siguiente toma valores en $V$, definimos

$$\Phi(u,z) := \exp^{\perp}_{\theta^{-1}(u)}\left(\sum_{\alpha=1}^{c} z^{\alpha}\mathbf{E}_{\alpha}\big|_{\theta^{-1}(u)}\right). \tag{2.87}$$

La carta inversa de $\Phi$ se llama una *carta de Fermi*; sus coordenadas se denotan $(y^1,\dots,y^k,z^1,\dots,z^c)$.

La parametrización (2.87) es un difeomorfismo sobre su imagen: es la composición de la trivialización local del haz normal con $\exp^{\perp}\restriction_V$. Por lo tanto, la definición no presupone ninguna propiedad adicional de las coordenadas.

**Proposición 2.12.5.** (Propiedades locales de las coordenadas de Fermi) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de dimensión $n$, $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera de dimensión $k$ y $(y^1,\dots,y^k,z^1,\dots,z^c)$ una carta de Fermi asociada al marco normal local $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_c)$. Usando índices $1 \le a,b \le k$ y $1 \le \alpha,\beta,\gamma \le c$, se cumple:

(a) $N$ está descrita por $z^1 = \cdots = z^c = 0$.

(b) Sobre $N$,

$$g_{a,k+\alpha} = 0, \qquad g_{k+\alpha,k+\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{2.88}$$

(c) Para $q \in W$ y $v = z^{\alpha}\mathbf{E}_{\alpha}|_q$, la geodésica con dato inicial $(q,v)$ tiene expresión

$$t \longmapsto (y^1(q),\dots,y^k(q),tz^1,\dots,tz^c). \tag{2.89}$$

(d) Sobre $N$,
$$\Gamma^{i}_{k+\alpha,k+\beta} = 0 \quad (1 \le i \le n,\ 1 \le \alpha,\beta \le c). \tag{2.90}$$

(e) Sobre $N$,
$$\partial_{z^\alpha} g_{k+\beta,k+\gamma} = 0. \tag{2.91}$$

Las identidades locales coinciden con la Proposición 5.26 de [95].

*Demostración.* El inciso (a) se sigue de $\exp_q(0) = q$ y de la inyectividad de la exponencial normal en la vecindad elegida. En $(q,0)$, el diferencial de $\Phi$ manda $\partial_{y^a}$ a un vector de $T_qN$ y $\partial_{z^\alpha}$ a $\mathbf{E}_\alpha|_q \in T_q^{\perp}N$. La ortogonalidad y la ortonormalidad del marco prueban (2.88).
El lema de reescalamiento de geodésicas, Lema 2.8.5, da $\exp_q(tv) = \gamma_v(t)$ y prueba (2.89). Al sustituir esta curva en la ecuación geodésica y evaluar en $t = 0$, obtenemos, para cada $i$,

$$\Gamma^{i}_{k+\alpha,k+\beta}(q,0) z^\alpha z^\beta = 0 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}^c.$$

La conexión de Levi–Civita no tiene torsión, así que los dos índices inferiores de $\Gamma$ son simétricos. La polarización de la forma cuadrática anterior prueba (2.90). Finalmente, la compatibilidad métrica en coordenadas, Corolario 2.4.16, da

$$\partial_{z^\alpha} g_{k+\beta,k+\gamma} = \Gamma^{m}_{k+\alpha,k+\beta} g_{m,k+\gamma} + \Gamma^{m}_{k+\alpha,k+\gamma} g_{k+\beta,m},$$

y ambos términos se anulan por (2.90). Esto demuestra (2.91). □

**Proposición 2.12.6.** (Coordenadas normales de frontera) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave de dimensión $n$ con frontera no vacía y sea $p \in \partial M$. Existen una carta $\theta = (y^1,\dots,y^{n-1})\colon W \longrightarrow \theta(W)$ de $\partial M$ alrededor de $p$, un $\varepsilon > 0$ y una carta de $M$

$$\Phi(u,t) = \exp_{\theta^{-1}(u)}\big(t\boldsymbol{\nu}_{\theta^{-1}(u)}\big), \qquad 0 \le t < \varepsilon, \tag{2.92}$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es la normal unitaria interior. En toda la carta,

$$\mathbf{g} = dt^2 + \mathbf{g}_t, \qquad g_{tt} = 1, \qquad g_{at} = 0. \tag{2.93}$$

Si $\mathbf{II}^{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := \mathbf{g}(\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\boldsymbol{\nu})$ y se usa la convención $\nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{X}$, entonces

$$\partial_t g_{ab}|_{t=0} = -2\mathbf{II}^{\boldsymbol{\nu}}_{ab}. \tag{2.94}$$

Estas coordenadas semigeodésicas se describen también en [95, Ejemplo 6.44].

*Demostración.* Por el Corolario 1.6.13, una variedad suave con frontera se incluye como una de las mitades de su doble y la métrica $\mathbf{g}$ se prolonga como métrica riemanniana a una vecindad de esa mitad. Aplicamos allí el Teorema 2.12.3 a la hipersuperficie $\partial M$ y elegimos el signo de la coordenada normal hacia el interior. Esto produce (2.92).
Sea $\mathbf{T} = \partial_t$ y sea $\mathbf{J}_a = \partial_{y^a}$ el campo variacional obtenido al variar el punto inicial de las geodésicas normales. Cada curva $t \mapsto \Phi(y,t)$ es geodésica unitaria, de modo que $\mathbf{g}(\mathbf{T},\mathbf{T}) = 1$. Los campos coordenados conmutan

y la conexión no tiene torsión; por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{g}(\mathbf{J}_a,\mathbf{T}) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{J}_a,\mathbf{T}) + \mathbf{g}(\mathbf{J}_a,\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{J}_a}\mathbf{T},\mathbf{T}) = \frac{1}{2}\mathbf{J}_a\mathbf{g}(\mathbf{T},\mathbf{T}) = 0.$$

En $t=0$, $\mathbf{J}_a$ es tangente a $\partial M$ y $\mathbf{T}=\boldsymbol{\nu}$, luego $\mathbf{g}(\mathbf{J}_a,\mathbf{T})=0$. Esto prueba (2.93) en todo el collar. Usando otra vez $[\mathbf{T},\mathbf{J}_a]=0$ y la compatibilidad métrica,

$$\partial_t g_{ab} = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{J}_a,\mathbf{J}_b) + \mathbf{g}(\mathbf{J}_a,\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{J}_b) = 2\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{J}_a}\mathbf{T},\mathbf{J}_b).$$

En $t=0$, la identidad de Weingarten $\nabla_{\mathbf{J}_a}\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{J}_a$ da (2.94). □

## 2.13 Campos de Jacobi y teoría de comparación

Los campos de Jacobi describen la diferencial de la exponencial y, por lo tanto, la separación infinitesimal de geodésicas cercanas.

**Definición 2.13.1.** (Variación y campo variacional) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera. Una **variación suave** de una curva $\gamma\colon I\to M$ es un mapeo suave

$$\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times I \longrightarrow M, \qquad \alpha(0,t)=\gamma(t).$$

Escribimos

$$\mathbf{S} := d\alpha(\partial_s), \qquad \mathbf{T} := d\alpha(\partial_t),$$

y llamamos $\mathbf{J}(t) := \mathbf{S}(0,t)$ al campo variacional a lo largo de $\gamma$. La variación es **por geodésicas** si $t\mapsto\alpha(s,t)$ es geodésica para cada $s$.

**Proposición 2.13.2.** (Conmutación en una variación) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $\alpha$ una variación suave y sea $\mathbf{Z}$ un campo vectorial a lo largo de $\alpha$. Entonces

$$D_s\mathbf{T} = D_t\mathbf{S}, \qquad (D_sD_t - D_tD_s)\mathbf{Z} = \mathbf{R}(\mathbf{S},\mathbf{T})\mathbf{Z}.$$

*Demostración.* Los campos coordenados $\partial_s$ y $\partial_t$ conmutan. La primera identidad es la fórmula de torsión aplicada a $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$, pues la conexión de Levi–Civita no tiene torsión. La segunda es directamente la definición de $\mathbf{R}$, aplicada a los campos coordenados de la superficie parametrizada; el término correspondiente a $[\partial_s,\partial_t]$ es nulo. □

**Teorema 2.13.3.** (Ecuación de Jacobi) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera. El campo variacional $\mathbf{J}$ de una variación por geodésicas satisface

$$\frac{D^2\mathbf{J}}{dt^2} + \mathbf{R}(\mathbf{J},\dot\gamma)\dot\gamma = 0. \tag{2.95}$$

Un campo suave a lo largo de una geodésica que satisface (2.95) se llama **campo de Jacobi**.

*Demostración.* Para cada $s$, $D_t\mathbf{T} = 0$. Derivando respecto de $s$ y usando la proposición anterior,

$$0 = D_s D_t \mathbf{T} = D_t D_s \mathbf{T} + \mathbf{R}(\mathbf{S},\mathbf{T})\mathbf{T} = D_t^2 \mathbf{S} + \mathbf{R}(\mathbf{S},\mathbf{T})\mathbf{T}.$$

La restricción a $s = 0$ da la ecuación anunciada. El signo concuerda con la convención $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z}$ fijada en la Definición 2.10.1. □

**Proposición 2.13.4.** (Existencia y unicidad) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $\gamma\colon I \to M$ una geodésica, $t_0 \in I$ y $a, b \in T_{\gamma(t_0)}M$. Existe un único campo de Jacobi $\mathbf{J}$ a lo largo de $\gamma$ tal que

$$\mathbf{J}(t_0) = a, \qquad \frac{D\mathbf{J}}{dt}(t_0) = b.$$

En particular, el espacio de campos de Jacobi a lo largo de $\gamma$ tiene dimensión $2\dim M$.

*Demostración.* Elegimos un marco paralelo a lo largo de $\gamma$. En ese marco, (2.95) es un sistema lineal homogéneo de segundo orden cuyos coeficientes son las componentes suaves de la curvatura. El teorema de existencia y unicidad para sistemas lineales da una solución única con los datos prescritos en todo $I$. El mapeo $\mathbf{J} \mapsto (\mathbf{J}(t_0), D_t\mathbf{J}(t_0))$ es entonces un isomorfismo con $T_{\gamma(t_0)}M \oplus T_{\gamma(t_0)}M$. □

**Proposición 2.13.5.** (Representación por variaciones geodésicas) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $\gamma\colon I \to M$ una geodésica y sea $\mathbf{J}$ un campo de Jacobi a lo largo de $\gamma$. Localmente en el parámetro, $\mathbf{J}$ es el campo variacional de una variación por geodésicas. Más precisamente, esta representación puede realizarse simultáneamente sobre cualquier subintervalo compacto contenido en el dominio de $\gamma$.

*Demostración.* Fijemos $t_0$ y pongamos $a = \mathbf{J}(t_0)$ y $b = D_t\mathbf{J}(t_0)$. Elegimos una curva $\sigma(s)$ con $\sigma(0) = \gamma(t_0)$ y $\sigma'(0) = a$, y un campo $\mathbf{V}(s) \in T_{\sigma(s)}M$ tal que

$$\mathbf{V}(0) = \dot\gamma(t_0), \qquad D_s\mathbf{V}(0) = b.$$

La dependencia suave de las soluciones de la ecuación geodésica respecto de sus datos iniciales permite definir, para $s$ pequeño,

$$\alpha(s,t) = \exp_{\sigma(s)}\big((t - t_0)\mathbf{V}(s)\big).$$

Cada curva con $s$ fijo es geodésica. Su campo variacional tiene en $t_0$ los mismos datos iniciales $a, b$ que $\mathbf{J}$; la unicidad anterior muestra que coincide con $\mathbf{J}$. La dependencia suave del flujo geodésico permite elegir un único intervalo de valores de $s$ sobre cualquier subintervalo compacto de $I$. □

**Proposición 2.13.6.** (Diferencial de la exponencial) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $p \in M$, sea $v$ un vector del dominio de $\exp_p$ y sea $w \in T_pM$. A lo largo de $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, definamos

$$\mathbf{J}_w(t) := d(\exp_p)_{tv}(tw).$$

Entonces $\mathbf{J}_w$ es el único campo de Jacobi con

$$\mathbf{J}_w(0) = 0, \qquad \frac{D\mathbf{J}_w}{dt}(0) = w,$$

y, en particular,

$$d(\exp_p)_v(w) = \mathbf{J}_w(1).$$

*Demostración.* La familia $\alpha(s,t) = \exp_p(t(v+sw))$ es una variación por geodésicas y su campo variacional es precisamente $\mathbf{J}_w(t)$. En $t = 0$ todas las curvas parten de $p$, de modo que $\mathbf{J}_w(0) = 0$; la derivada inicial es $w$. La última igualdad se obtiene tomando $t = 1$. □

**Definición 2.13.7.** (Puntos conjugados) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $\gamma\colon I \to M$ una geodésica y sean $t_0, t_1 \in I$ distintos. Los puntos $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ son **conjugados a lo largo de** $\gamma$ si existe un campo de Jacobi no nulo $\mathbf{J}$ tal que $\mathbf{J}(t_0) = \mathbf{J}(t_1) = 0$. Su multiplicidad es la dimensión del espacio de tales campos.

**Proposición 2.13.8.** (Conjugación y valores críticos de la exponencial) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $p \in M$ y sea $v \neq 0$ un vector del dominio de $\exp_p$. Entonces $\exp_p(v)$ es conjugado a $p$ a lo largo de $t \mapsto \exp_p(tv)$ si y sólo si $v$ es un punto crítico de $\exp_p$. La multiplicidad del punto conjugado es $\dim \ker d(\exp_p)_v$.

*Demostración.* Por la proposición anterior, el mapeo $w \mapsto \mathbf{J}_w$ identifica $\ker d(\exp_p)_v$ con los campos de Jacobi que se anulan en $t = 0$ y $t = 1$. Como el dominio y el codominio de $d(\exp_p)_v$ tienen la misma dimensión, éste es singular exactamente cuando el núcleo no es trivial. □

Para formular los modelos de curvatura constante, definimos

$$s_c(t) := \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{c}\,t)}{\sqrt{c}}, & c > 0, \\ t, & c = 0, \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{-c}\,t)}{\sqrt{-c}}, & c < 0, \end{cases} \qquad c_c(t) := s_c'(t).$$

Estas funciones satisfacen $s_c'' + c s_c = 0$, $s_c(0) = 0$ y $s_c'(0) = 1$.

**Proposición 2.13.9.** (Campos de Jacobi en curvatura constante) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de curvatura seccional constante $c$, sea $\gamma$ una geodésica unitaria y sea $\mathbf{J}$ un campo de Jacobi a lo largo de $\gamma$. Sea $P_t$ el transporte paralelo desde $\gamma(0)$ hasta $\gamma(t)$. Si $a = \mathbf{J}(0)$ y $b = D_t\mathbf{J}(0)$, descomponemos $a = a^\top + a^\perp$ y $b = b^\top + b^\perp$ respecto de $\mathbb{R}\dot\gamma(0) \oplus \dot\gamma(0)^\perp$. Entonces

$$\mathbf{J}(t) = P_t\big(a^\top + t b^\top + c_c(t) a^\perp + s_c(t) b^\perp\big).$$

En particular, si $\mathbf{J}(0) = 0$ y $D_t\mathbf{J}(0) = w \perp \dot\gamma(0)$, entonces $\mathbf{J}(t) = s_c(t) P_t w$.

*Demostración.* En curvatura constante, $\mathbf{R}(\mathbf{X},\dot\gamma)\dot\gamma = c\mathbf{X}$ para $\mathbf{X}\perp\dot\gamma$, mientras que el término de curvatura es nulo en la dirección de $\dot\gamma$. En un marco paralelo, la ecuación de Jacobi se separa así en $u''=0$ para la componente tangencial y $u''+cu=0$ para cada componente normal. Las soluciones con los datos iniciales dados son exactamente las de la fórmula. □

Para formular el argumento variacional que sustenta la comparación, introducimos la forma índice. Una partición $a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$ es *admisible* para un campo $\mathbf{V}$ a lo largo de $\gamma$ si $\mathbf{V}$ es continuo en $[a,b]$ y su restricción a cada $[t_{r-1},t_r]$ es suave hasta los extremos. Denotamos por $\mathcal{V}_{\mathrm{ps}}(\gamma)$ el espacio de estos campos por partes suaves y por

$$\mathcal{V}_0(\gamma) := \{\mathbf{V}\in\mathcal{V}_{\mathrm{ps}}(\gamma)\mid \mathbf{V}(a)=\mathbf{V}(b)=0\}.$$

**Definición 2.13.10.** (Forma índice) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\gamma\colon[a,b]\longrightarrow M$ una geodésica. Para $\mathbf{V},\mathbf{W}\in\mathcal{V}_{\mathrm{ps}}(\gamma)$ definimos

$$I_\gamma(\mathbf{V},\mathbf{W}) := \int_a^b \left[\left\langle \frac{D\mathbf{V}}{dt},\frac{D\mathbf{W}}{dt}\right\rangle_{\mathbf{g}} - \langle \mathbf{R}(\mathbf{V},\dot\gamma)\dot\gamma,\mathbf{W}\rangle_{\mathbf{g}}\right] dt.$$

Las derivadas covariantes se toman en cada subintervalo de una partición admisible.

**Proposición 2.13.11.** (Propiedades e integración por partes de la forma índice) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\gamma\colon[a,b]\to M$ una geodésica. La forma $I_\gamma$ está bien definida, es bilineal y simétrica. Si $a=t_0<\cdots<t_N=b$ es una partición admisible común para $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, y

$$\left[\frac{D\mathbf{V}}{dt}\right]_{t_r} := \frac{D\mathbf{V}}{dt}(t_r^+) - \frac{D\mathbf{V}}{dt}(t_r^-), \qquad 1\le r\le N-1,$$

entonces

$$\begin{aligned} I_\gamma(\mathbf{V},\mathbf{W}) = {} & \left[\left\langle \frac{D\mathbf{V}}{dt},\mathbf{W}\right\rangle_{\mathbf{g}}\right]_a^b - \sum_{r=1}^{N-1}\left\langle \left[\frac{D\mathbf{V}}{dt}\right]_{t_r},\mathbf{W}(t_r)\right\rangle_{\mathbf{g}} \\ & - \int_a^b \left\langle \frac{D^2\mathbf{V}}{dt^2}+\mathbf{R}(\mathbf{V},\dot\gamma)\dot\gamma,\mathbf{W}\right\rangle_{\mathbf{g}} dt. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Los valores en $a$ y $b$ son los límites desde el interior. En particular, si $\mathbf{J}$ es un campo de Jacobi suave, entonces

$$I_\gamma(\mathbf{J},\mathbf{W}) = \left[\left\langle \frac{D\mathbf{J}}{dt},\mathbf{W}\right\rangle_{\mathbf{g}}\right]_a^b. \tag{2.97}$$

*Demostración.* En una partición admisible común, el integrando es continuo en el interior de cada subintervalo y posee límites laterales en sus extremos. Refinar la partición sólo divide integrales ya existentes y los puntos de partición tienen medida nula; por ello, el valor no depende de la partición. La bilinealidad es inmediata. Las simetrías del tensor de curvatura implican

$$\langle \mathbf{R}(\mathbf{V},\dot\gamma)\dot\gamma,\mathbf{W}\rangle_{\mathbf{g}} = \langle \mathbf{R}(\mathbf{W},\dot\gamma)\dot\gamma,\mathbf{V}\rangle_{\mathbf{g}},$$

de modo que $I_\gamma$ es simétrica.

En cada intervalo $[t_{r-1}, t_r]$ se cumple

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{D\mathbf{V}}{dt}, \mathbf{W} \right\rangle_{\mathbf{g}} = \left\langle \frac{D^2\mathbf{V}}{dt^2}, \mathbf{W} \right\rangle_{\mathbf{g}} + \left\langle \frac{D\mathbf{V}}{dt}, \frac{D\mathbf{W}}{dt} \right\rangle_{\mathbf{g}}.$$

Integramos esta igualdad y sumamos sobre $r$. En un punto interior $t_r$ los términos de borde aportan

$$\left\langle \frac{D\mathbf{V}}{dt}(t_r^-), \mathbf{W}(t_r) \right\rangle_{\mathbf{g}} - \left\langle \frac{D\mathbf{V}}{dt}(t_r^+), \mathbf{W}(t_r) \right\rangle_{\mathbf{g}} = -\left\langle \left[\frac{D\mathbf{V}}{dt}\right]_{t_r}, \mathbf{W}(t_r) \right\rangle_{\mathbf{g}},$$

porque $\mathbf{W}$ es continuo. Al incorporar el término de curvatura se obtiene (2.96). Si $\mathbf{J}$ es un campo de Jacobi, no tiene saltos y el integrando de la segunda línea se anula, lo que da (2.97). □

La forma índice es la segunda variación de la energía en una geodésica con extremos fijos.

**Proposición 2.13.12.** (Segunda variación de la energía) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ una variación suave de una geodésica $\gamma = \alpha(0, \cdot)$, con extremos fijos, y sea $\mathbf{V}$ su campo variacional. Si

$$E(\alpha_s) := \frac{1}{2}\int_a^b \left| d\alpha_{(s,t)}(\partial_t) \right|_{\mathbf{g}}^2 dt,$$

entonces

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} E(\alpha_s) = I_\gamma(\mathbf{V}, \mathbf{V}).$$

Sin la hipótesis de extremos fijos, la fórmula contiene además el término de borde

$$\left[\langle D_s\mathbf{S}, \mathbf{T}\rangle_{\mathbf{g}}\right]_a^b\Big|_{s=0}, \qquad \mathbf{S} = d\alpha(\partial_s), \quad \mathbf{T} = d\alpha(\partial_t).$$

*Demostración.* Escribamos $\mathbf{S} = d\alpha(\partial_s)$ y $\mathbf{T} = d\alpha(\partial_t)$. La compatibilidad métrica y la identidad $D_s\mathbf{T} = D_t\mathbf{S}$ dan

$$\frac{d}{ds}E(\alpha_s) = \int_a^b \langle D_t\mathbf{S}, \mathbf{T}\rangle_{\mathbf{g}}\, dt.$$

Derivando de nuevo y restringiendo a $s = 0$, usamos $D_sD_t\mathbf{S} = D_tD_s\mathbf{S} + \mathbf{R}(\mathbf{S}, \mathbf{T})\mathbf{S}$ y $D_s\mathbf{T} = D_t\mathbf{S}$ para obtener

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} E(\alpha_s) = \int_a^b \left[ \langle D_tD_s\mathbf{S}, \dot\gamma\rangle_{\mathbf{g}} + \langle \mathbf{R}(\mathbf{V}, \dot\gamma)\mathbf{V}, \dot\gamma\rangle_{\mathbf{g}} + \left|\frac{D\mathbf{V}}{dt}\right|_{\mathbf{g}}^2 \right] dt.$$

Al integrar por partes, la primera integral se reduce al término de borde indicado en el enunciado, pues la geodésica satisface $D_t\dot\gamma = 0$. Como los extremos de la variación son fijos, $D_s\mathbf{S} = 0$ allí y ese término se anula. Finalmente,

$$\langle \mathbf{R}(\mathbf{V}, \dot\gamma)\mathbf{V}, \dot\gamma\rangle_{\mathbf{g}} = -\langle \mathbf{R}(\mathbf{V}, \dot\gamma)\dot\gamma, \mathbf{V}\rangle_{\mathbf{g}},$$

y se obtiene la fórmula afirmada. □

**Lema 2.13.13.** (Lema del índice) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $\gamma\colon [a, b] \to M$ una geodésica y supongamos que $\gamma(a)$ no es conjugado a $\gamma(t)$ a lo largo de $\gamma$ para ningún $t \in (a, b]$. Sea $\mathbf{J}$ un

campo de Jacobi a lo largo de $\gamma$ con $\mathbf{J}(a) = 0$. Si $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_{\mathrm{ps}}(\gamma)$ satisface

$$\mathbf{V}(a) = 0, \qquad \mathbf{V}(b) = \mathbf{J}(b),$$

entonces

$$I_\gamma(\mathbf{J},\mathbf{J}) \le I_\gamma(\mathbf{V},\mathbf{V}).$$

La igualdad se cumple si y sólo si $\mathbf{V} = \mathbf{J}$.

*Demostración.* Elegimos una base ortonormal $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ de $T_{\gamma(a)}M$ y la prolongamos a un marco paralelo a lo largo de $\gamma$. Para cada $i$, sea $\mathbf{J}_i$ el único campo de Jacobi determinado por

$$\mathbf{J}_i(a) = 0, \qquad \frac{D\mathbf{J}_i}{dt}(a) = \mathbf{e}_i.$$

Para $t > a$, los vectores $\mathbf{J}_1(t),\dots,\mathbf{J}_n(t)$ forman una base de $T_{\gamma(t)}M$. En efecto, una combinación lineal que se anulara en $t$ produciría un campo de Jacobi que se anula en $a$ y en $t$; por la ausencia de puntos conjugados tendría que ser el campo cero, y sus datos iniciales obligarían a que todos los coeficientes fueran nulos.
Primero probaremos que

$$I_\gamma(\mathbf{W},\mathbf{W}) \ge 0 \qquad \text{para todo } \mathbf{W} \in \mathcal{V}_0(\gamma), \tag{2.98}$$

y determinaremos el caso de igualdad. Para $t > a$ escribimos de manera única

$$\mathbf{W}(t) = f^i(t)\mathbf{J}_i(t).$$

Las funciones $f^i$ son suaves por partes. También se prolongan suavemente por la derecha hasta $a$ en el primer subintervalo admisible. Para verlo, expresamos los campos en el marco paralelo y denotamos por $A(t)$ la matriz cuyas columnas son las componentes de los $\mathbf{J}_i(t)$. Como $A(a) = 0$ y $A'(a) = I$, la fórmula integral

$$A(t) = (t-a)B(t), \qquad B(t) := \int_0^1 A'\big(a + s(t-a)\big)\,ds,$$

define una matriz suave con $B(a) = I$. De igual manera, $\mathbf{W}(a) = 0$ permite escribir $\mathbf{W}(t) = (t-a)w(t)$ con $w$ suave en el primer subintervalo. Para $t$ cercano a $a$, $B(t)$ es invertible y

$$(f^1(t),\dots,f^n(t))^{\mathsf{T}} = B(t)^{-1}w(t),$$

lo que prueba la prolongación y controla el extremo donde todos los $\mathbf{J}_i$ se anulan.
Para cada par $i, j$, la función

$$\left\langle \frac{D\mathbf{J}_i}{dt}, \mathbf{J}_j \right\rangle_{\mathbf{g}} - \left\langle \mathbf{J}_i, \frac{D\mathbf{J}_j}{dt} \right\rangle_{\mathbf{g}}$$

es constante. Su derivada se anula por la ecuación de Jacobi y por la simetría del endomorfismo $\mathbf{Z} \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{Z},\dot\gamma)\dot\gamma$; su valor en $a$ es cero. Por lo tanto,

$$\left\langle \frac{D\mathbf{J}_i}{dt}, \mathbf{J}_j \right\rangle_{\mathbf{g}} = \left\langle \mathbf{J}_i, \frac{D\mathbf{J}_j}{dt} \right\rangle_{\mathbf{g}}. \tag{2.99}$$

En cada subintervalo donde $\mathbf{W}$ es suave ponemos

$$\mathbf{X} := f^i \frac{D\mathbf{J}_i}{dt}, \qquad \mathbf{Y} := \frac{df^i}{dt}\mathbf{J}_i.$$

Entonces $\frac{D\mathbf{W}}{dt} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. La ecuación de Jacobi y (2.99) dan

$$\frac{D\mathbf{X}}{dt} = \frac{df^i}{dt}\frac{D\mathbf{J}_i}{dt} - \mathbf{R}(\mathbf{W}, \dot\gamma)\dot\gamma, \qquad \left\langle \mathbf{W}, \frac{df^i}{dt}\frac{D\mathbf{J}_i}{dt} \right\rangle_{\mathbf{g}} = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}}.$$

En consecuencia,

$$\left|\frac{D\mathbf{W}}{dt}\right|^2_{\mathbf{g}} - \langle \mathbf{R}(\mathbf{W}, \dot\gamma)\dot\gamma, \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{g}} = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{W}, \mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}} + |\mathbf{Y}|^2_{\mathbf{g}}. \tag{2.100}$$

Los coeficientes $f^i$ son continuos en los puntos de la partición porque $\mathbf{W}$ es continuo y $(\mathbf{J}_i(t))$ es una base; por lo tanto, $\mathbf{X}$ también es continuo allí. Al integrar (2.100) sobre todos los subintervalos, los términos de borde interiores se cancelan. En $a$ se anulan porque $\mathbf{W}(a) = 0$ y $\mathbf{X}$ posee límite, y en $b$ se anulan porque $\mathbf{W}(b) = 0$. Así,

$$I_\gamma(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \int_a^b |\mathbf{Y}|^2_{\mathbf{g}} dt \geq 0.$$

Si hay igualdad, $\mathbf{Y} = 0$ en cada subintervalo. Como los $\mathbf{J}_i(t)$ son linealmente independientes para $t > a$, todas las funciones $f^i$ son constantes en cada subintervalo; su continuidad muestra que son constantes en todo $[a, b]$. Entonces $\mathbf{W}$ es un campo de Jacobi. Puesto que $\mathbf{W}(a) = \mathbf{W}(b) = 0$ y los extremos no son conjugados, se sigue que $\mathbf{W} = 0$. Recíprocamente, $\mathbf{W} = 0$ da la igualdad. Esto prueba (2.98) y su caso de igualdad.

Volvamos a los campos del enunciado y pongamos $\mathbf{W} := \mathbf{V} - \mathbf{J}$. Entonces $\mathbf{W} \in \mathcal{V}_0(\gamma)$. La fórmula de integración por partes y la ecuación de Jacobi implican

$$I_\gamma(\mathbf{J}, \mathbf{W}) = \left[\left\langle \frac{D\mathbf{J}}{dt}, \mathbf{W}\right\rangle_{\mathbf{g}}\right]_a^b = 0.$$

Por la simetría y la bilinealidad,

$$I_\gamma(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = I_\gamma(\mathbf{J}, \mathbf{J}) + 2I_\gamma(\mathbf{J}, \mathbf{W}) + I_\gamma(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = I_\gamma(\mathbf{J}, \mathbf{J}) + I_\gamma(\mathbf{W}, \mathbf{W}).$$

La desigualdad ya demostrada da la conclusión, y la igualdad ocurre exactamente cuando $\mathbf{W} = 0$, es decir, cuando $\mathbf{V} = \mathbf{J}$. □

**Teorema 2.13.14.** (Comparación de campos de Jacobi) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de dimensión al menos dos, sea $\gamma\colon [0, b] \to M$ una geodésica unitaria y sea $\mathbf{J}$ un campo de Jacobi normal, es decir, $\langle \mathbf{J}, \dot\gamma\rangle_{\mathbf{g}} = 0$, con $\mathbf{J}(0) = 0$. Definamos

$$\rho_c := \begin{cases} +\infty, & c \leq 0, \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{c}}, & c > 0, \end{cases}$$

y sea $\tau$ el primer tiempo conjugado a 0 a lo largo de $\gamma$, con la convención $\tau = +\infty$ si no existe.

(a) Si toda curvatura seccional de $M$ es menor o igual que $c$, entonces

$$|\mathbf{J}(t)|_{\mathbf{g}} \geq s_c(t) \left| \frac{D\mathbf{J}}{dt}(0) \right|_{\mathbf{g}}.$$

La desigualdad vale para $0 \leq t \leq \min\{b, \rho_c\}$. Además, $\gamma(0)$ no tiene puntos conjugados a lo largo de $\gamma$ mientras $0 < t < \min\{b, \rho_c\}$.

(b) Si toda curvatura seccional de $M$ es mayor o igual que $c$, entonces

$$|\mathbf{J}(t)|_{\mathbf{g}} \leq s_c(t) \left| \frac{D\mathbf{J}}{dt}(0) \right|_{\mathbf{g}}$$

para $0 \leq t \leq \min\{b, \tau, \rho_c\}$. Si $c > 0$ y $b \geq \rho_c$, entonces $\tau \leq \rho_c$.

Si $\mathbf{J}$ no es el campo cero y $0 < t_0 < \min\{b, \tau, \rho_c\}$ en el caso en que interviene $\tau$, o $0 < t_0 < \min\{b, \rho_c\}$ en el otro caso, la igualdad en la comparación correspondiente en $t_0$ se cumple si y sólo si

$$\mathbf{J}(t) = s_c(t) P_t \left( \frac{D\mathbf{J}}{dt}(0) \right) \quad \text{y} \quad \mathbf{R}(P_t w, \dot\gamma(t))\dot\gamma(t) = c P_t w$$

para $0 < t \leq t_0$, donde $w = \frac{D\mathbf{J}}{dt}(0)$ y $P_t$ es el transporte paralelo desde $\gamma(0)$ hasta $\gamma(t)$.

*Demostración.* Pongamos $w = \frac{D\mathbf{J}}{dt}(0)$. Si $w = 0$, la unicidad para la ecuación de Jacobi implica $\mathbf{J} = 0$ y ambas desigualdades son inmediatas. Supongamos, pues, que $w \neq 0$. Elegimos un marco ortonormal paralelo $(\mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n)$ del complemento ortogonal de $\dot\gamma$ y escribimos

$$\mathbf{J}(t) = u^\alpha(t)\mathbf{E}_\alpha(t), \qquad u(t) = (u^2(t), \ldots, u^n(t)) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

En particular, $|\mathbf{J}|_{\mathbf{g}} = |u|$, $\left|\frac{D\mathbf{J}}{dt}\right|_{\mathbf{g}} = |u'|$ y $u'(0)$ representa a $w$.
Para $t < \rho_c$ consideremos en $[0, t]$ la forma índice modelo

$$I_c(v, v) := \int_0^t \left( |v'(s)|^2 - c|v(s)|^2 \right) ds$$

sobre campos con valores en $\mathbb{R}^{n-1}$. La ecuación de Jacobi modelo es $v'' + cv = 0$. Como $s_c(s) > 0$ para $0 < s < \rho_c$, esta ecuación no tiene una solución no nula que se anule en 0 y en $t$. El campo

$$\overline{u}_t(s) := \frac{s_c(s)}{s_c(t)} u(t)$$

minimiza $I_c$ entre los campos que valen 0 en $s = 0$ y $u(t)$ en $s = t$. En efecto, para uno de esos campos escribimos $v(s) = s_c(s) f(s)$ en $(0, t]$. La factorización en el extremo inicial usada en la prueba del Lema 2.13.13 muestra que $f$ se prolonga de manera regular hasta 0. Como $s_c'' = -c s_c$,

$$|v'|^2 - c|v|^2 = \frac{d}{ds}\left( s_c c_c |f|^2 \right) + s_c^2 |f'|^2.$$

El término de borde en 0 se anula. El valor en $t$ está fijado y la integral restante es no negativa, con igualdad

exactamente cuando $f$ es constante. Esto prueba la propiedad minimizante y, para $v = \overline{u}_t$, da

$$I_c(\overline{u}_t, \overline{u}_t) = \frac{c_c(t)}{s_c(t)}|u(t)|^2. \tag{2.101}$$

Supongamos primero que $K \le c$. Dado que $\mathbf{J}$ es normal y $\gamma$ es unitaria,

$$\langle \mathbf{R}(\mathbf{J}, \dot\gamma)\dot\gamma, \mathbf{J}\rangle_{\mathbf{g}} \le c|\mathbf{J}|^2_{\mathbf{g}}.$$

El lema del índice para el modelo y esta desigualdad implican

$$\begin{aligned}\frac{c_c(t)}{s_c(t)}|\mathbf{J}(t)|^2_{\mathbf{g}} &= I_c(\overline{u}_t, \overline{u}_t)\\ &\le I_c(u,u)\\ &\le I_{\gamma|_{[0,t]}}(\mathbf{J},\mathbf{J})\\ &= \left\langle \frac{D\mathbf{J}}{dt}(t), \mathbf{J}(t)\right\rangle_{\mathbf{g}}.\end{aligned}$$

La última igualdad es (2.97), pues $\mathbf{J}(0) = 0$. En todo intervalo donde $\mathbf{J}(t) \neq 0$ se sigue que

$$\frac{d}{dt}\log\left(\frac{|\mathbf{J}(t)|_{\mathbf{g}}}{s_c(t)}\right) = \frac{\left\langle \frac{D\mathbf{J}}{dt}, \mathbf{J}\right\rangle_{\mathbf{g}}}{|\mathbf{J}|^2_{\mathbf{g}}} - \frac{c_c}{s_c} \ge 0.$$

En el marco paralelo, $u(0) = 0$ y $u'(0) = w$; por ello,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{|\mathbf{J}(t)|_{\mathbf{g}}}{s_c(t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\left|\frac{u(t)}{t}\right|}{\frac{s_c(t)}{t}} = |w|_{\mathbf{g}}.$$

El cociente es no decreciente y se obtiene

$$|\mathbf{J}(t)|_{\mathbf{g}} \ge s_c(t)|w|_{\mathbf{g}}$$

mientras $s_c(t) > 0$. En particular, $\mathbf{J}$ no puede anularse allí. Si un campo de Jacobi arbitrario se anula en 0 y en algún $t > 0$, su componente tangencial es de la forma $at\dot\gamma$ y debe ser nula; el campo es entonces normal. La desigualdad anterior excluye tal campo no nulo para $t < \rho_c$. La comparación se prolonga al extremo $t = \min\{b, \rho_c\}$ por continuidad. Esto prueba (a).

Supongamos ahora que $K \ge c$ y fijemos $0 < t < \min\{b, \tau, \rho_c\}$. Definimos a lo largo de $\gamma|_{[0,t]}$ el campo

$$\mathbf{V}_t(s) := \frac{s_c(s)}{s_c(t)}P_{t,s}\mathbf{J}(t),$$

donde $P_{t,s}$ es el transporte paralelo desde $\gamma(t)$ hasta $\gamma(s)$. Los campos $\mathbf{V}_t$ y $\mathbf{J}$ tienen los mismos valores en los extremos. Como no hay puntos conjugados antes de $t$, el Lema 2.13.13 y la cota inferior de la curvatura dan

$$\left\langle \frac{D\mathbf{J}}{dt}(t), \mathbf{J}(t)\right\rangle_{\mathbf{g}} = I_{\gamma|_{[0,t]}}(\mathbf{J},\mathbf{J})$$

$$\begin{aligned} &\leq I_{\gamma|_{[0,t]}}(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t) \\ &\leq I_c(\overline{u}_t, \overline{u}_t) \\ &= \frac{c_c(t)}{s_c(t)} |\mathbf{J}(t)|_{\mathbf{g}}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \log \left( \frac{|\mathbf{J}(t)|_{\mathbf{g}}}{s_c(t)} \right) \leq 0,$$

y el mismo límite en 0 muestra que

$$|\mathbf{J}(t)|_{\mathbf{g}} \leq s_c(t) |w|_{\mathbf{g}}.$$

La continuidad permite incluir el primer tiempo conjugado y el extremo del intervalo indicado. Si $c > 0$, $b \geq \rho_c$ y no hubiera un punto conjugado antes de $\rho_c$, la desigualdad, aplicada para $t < \rho_c$, daría $\mathbf{J}(\rho_c) = 0$ para todo campo de Jacobi normal con $\mathbf{J}(0) = 0$. Tomando $w \neq 0$ obtendríamos un punto conjugado en $\rho_c$. En consecuencia, $\tau \leq \rho_c$, lo que completa (b).
Resta estudiar la igualdad. En cualquiera de los dos casos, el cociente $\frac{|\mathbf{J}|_{\mathbf{g}}}{s_c}$ es monótono y su límite en cero es $|w|_{\mathbf{g}}$. Si hay igualdad en $t_0$, ese cociente es constante en $[0, t_0]$. En las cadenas de desigualdades anteriores deben ser iguales tanto la comparación de las formas índice como la estimación de curvatura. La condición de igualdad de la identidad del modelo en el primer caso y la del Lema 2.13.13 en el segundo dan

$$\mathbf{J}(t) = s_c(t) P_t w.$$

Además, el endomorfismo autoadjunto $\mathbf{Z} \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{Z}, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$ está acotado por $cI$ en el primer caso y acota a $cI$ en el segundo. La igualdad de sus formas cuadráticas a lo largo de $P_t w$ implica

$$\mathbf{R}(P_t w, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = c P_t w.$$

Recíprocamente, estas dos identidades convierten todos los pasos anteriores en igualdades y producen la igualdad en la comparación. □

**Proposición 2.13.15.** (Continuidad del radio de inyectividad) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa, conexa y sin frontera. Entonces

$$\mathrm{inj} \colon M \longrightarrow (0, \infty]$$

es continua, donde $(0, \infty]$ lleva la topología del orden extendido.

Usaremos la continuidad del tiempo de corte en el fibrado unitario, demostrada por Lee [95].

*Demostración.* Para $v \in SM$ sea

$$c(v) := \sup\{t > 0 \mid d_{\mathbf{g}}(\pi(v), \exp_{\pi(v)}(tv)) = t\}$$

el tiempo de corte de la geodésica unitaria determinada por $v$. En una variedad completa, el tiempo de corte

es una función continua $c\colon SM \to (0,\infty]$. Además,

$$\operatorname{inj}(p) = \inf_{v \in S_pM} c(v).$$

En una trivialización local de $SM$, las fibras $S_pM$ se identifican con la esfera compacta $\mathbb{S}^{n-1}$. La continuidad de $c$ y la compacidad de esa esfera implican que el ínfimo depende continuamente de $p$ (también cuando su valor es infinito). Se obtiene la afirmación. □

## 2.14 Integración en variedades riemannianas

Integrar sobre una variedad exige reemplazar el elemento euclidiano de volumen por un objeto que se transforme correctamente al cambiar de coordenadas. En una variedad orientada, las formas diferenciales de grado máximo proporcionan ese objeto; la métrica riemanniana seleccionará más adelante una forma de volumen canónica. Comenzaremos por la orientación y por la integración de formas en cartas.

**Definición 2.14.1.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita. Decimos que dos bases ordenadas $(E_1,\dots,E_n)$ y $(\widetilde{E}_1,\dots,\widetilde{E}_n)$ están **consistentemente orientadas** si la matriz de cambio de base $(B_i^j)$ que cumple $E_i = B_i^j \widetilde{E}_j$ tiene determinante positivo.

Se puede demostrar que la relación de estar consistentemente orientada es una relación de equivalencia en el conjunto de bases ordenadas de un espacio vectorial de dimensión finita. Además, dicha relación de equivalencia tiene exactamente dos clases. Lo cual nos permite dar la siguiente definición:

**Definición 2.14.2.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita. Definimos una **orientación para** $V$ como una clase de equivalencia de bases ordenadas. Dada una base ordenada $(E_1,\dots,E_n)$, denotamos la orientación que dicha base determina por $[E_1,\dots,E_n]$. Un **espacio vectorial orientado** es un espacio vectorial $V$ junto con una orientación determinada por alguna base ordenada $[E_1,\dots,E_n]$. Una vez que fijamos una orientación para $V$, toda base que tenga la misma orientación diremos que está **positivamente orientada**. En caso de que una base ordenada no esté positivamente orientada, diremos que está **negativamente orientada**.

**Definición 2.14.3.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Definimos una **orientación puntual** en $M$ como una elección de orientación en cada espacio tangente. Si $(\mathbf{E}_i)$ es un marco local de $TM$, diremos que $(\mathbf{E}_i)$ **está positivamente orientado** si $(\mathbf{E}_1|_p,\dots,\mathbf{E}_n|_p)$ es una base ordenada positivamente orientada de $T_pM$ para cada $p \in U$ donde $U$ es el dominio del marco local $(\mathbf{E}_i)$. En caso de que $(\mathbf{E}_1|_p,\dots,\mathbf{E}_n|_p)$ esté negativamente orientada para cada $p \in U$, diremos que el marco local está **negativamente orientado**.
Una **orientación continua de** $M$ es una orientación puntual tal que para cada $p \in M$, existe $U \subseteq M$ abierto tal que $U$ es el dominio de algún marco local positivamente orientado. Decimos que $M$ es **orientable** si tiene una orientación puntual continua. Denotaremos a dicha orientación por $\mathscr{O}$ y diremos que $(M,\mathscr{O})$ es una **variedad suave orientada**.
Finalmente, si $(U,\varphi)$ es una carta suave de una variedad orientada $M$, con $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$, diremos que dicha carta suave es una **carta positivamente orientada** (o simplemente **carta orientada**) si el marco coordenado $(\partial_i)$ está positivamente orientado. Si dicho marco coordenado está negativamente orientado, diremos que la carta es una **carta negativamente orientada**.

**Proposición 2.14.4.** (La forma de volumen riemanniana) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana orientada con o sin frontera de dimensión $n$. Existe una única $n$-forma $dV_{\mathbf{g}} \in \Omega^n(M)$, llamada la **forma de volumen riemanniana**, caracterizada por alguna de las siguientes propiedades:

(a) Si $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ es cualquier comarco local positivamente orientado y ortonormal de $T^*M$, entonces

$$dV_{\mathbf{g}} = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n.$$

(b) Si $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ es cualquier marco local positivamente orientado y ortonormal de $TM$, entonces

$$dV_{\mathbf{g}}(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n) = 1.$$

(c) Si $(U,\varphi)$, $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$ es una carta orientada de $M$, entonces

$$dV_{\mathbf{g}} = \sqrt{\det(\mathbf{g})}\,\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n.$$

*Demostración.* Sea $(U,x^1,\dots,x^n)$ una carta positivamente orientada. La matriz $G_x = (g_{ij})$ es simétrica y positiva definida, por lo que $\det G_x > 0$. En $U$ definimos

$$\omega_x := \sqrt{\det G_x}\,\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n. \tag{2.102}$$

Esta forma es suave. Veremos que las formas así obtenidas coinciden en los traslapes.
Sean $(x^1,\dots,x^n)$ y $(y^1,\dots,y^n)$ dos sistemas de coordenadas positivamente orientados y escribamos $G_y = (\widetilde{g}_{ab})$ para la matriz de la métrica en las coordenadas $y$. En el traslape,

$$\widetilde{g}_{ab} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\frac{\partial x^j}{\partial y^b},$$

es decir,

$$G_y = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^T G_x \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right).$$

Al tomar determinantes obtenemos

$$\det G_y = \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 \det G_x. \tag{2.103}$$

Los dos sistemas de coordenadas inducen la orientación fijada; por lo tanto,

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) > 0.$$

La ley de transformación del producto cuña da, a su vez,

$$\mathbf{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}y^n = \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n.$$

Combinando esta igualdad con (2.103), concluimos que

$$\sqrt{\det G_y}\,\mathbf{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}y^n = \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\sqrt{\det G_x}\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n$$
$$= \sqrt{\det G_x}\,\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n.$$

Así, las formas locales se pegan y definen una forma global suave $dV_{\mathbf{g}}$. La propiedad (c) vale por construcción.

Sea ahora $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ un marco local positivamente orientado y ortonormal. En una carta orientada escribimos

$$\mathbf{E}_a = B_a^i \partial_i$$

y denotamos por $B$ la matriz cuyas columnas son las componentes de los $\mathbf{E}_a$. La ortonormalidad equivale a

$$B^T G_x B = I.$$

Por lo tanto, $(\det B)^2 \det G_x = 1$. Como el marco y la carta tienen la misma orientación, $\det B > 0$, y entonces

$$\det B = \frac{1}{\sqrt{\det G_x}}.$$

De (2.102) se sigue que

$$dV_{\mathbf{g}}(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n) = \sqrt{\det G_x}\,\det B = 1.$$

Esto prueba (b). Si $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ es el comarco dual, entonces $(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n)(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n) = 1$. Como el espacio de $n$-covectores en cada punto es unidimensional, (b) implica

$$dV_{\mathbf{g}} = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n,$$

que es (a). Recíprocamente, (a) implica inmediatamente (b), y el cálculo con el marco coordenado muestra que (b) implica (c). Las tres caracterizaciones son, pues, equivalentes.

La construcción no depende del marco ortonormal. Dos marcos positivamente orientados y ortonormales se relacionan mediante una matriz con valores en $SO(n)$, cuyo determinante es uno; sus productos cuña duales coinciden. Si otra $n$-forma satisface cualquiera de las caracterizaciones, su valor en cada marco ortonormal positivamente orientado es uno, de modo que coincide punto a punto con $dV_{\mathbf{g}}$. Esto prueba la unicidad. □

**Observación 2.14.5.** La notación $dV_{\mathbf{g}}$ designa aquí una $n$-forma y requiere que se haya fijado una orientación. La densidad riemanniana $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}$, que se definirá más adelante, existe aun cuando $M$ no sea orientable y transforma con el valor absoluto del jacobiano. La medida de Riemann–Lebesgue $\lambda_{\mathbf{g}}$ se construirá integrando esa densidad; la escritura $d\lambda_{\mathbf{g}}$ sólo indica integración respecto de la medida $\lambda_{\mathbf{g}}$ y no representa una forma diferencial ni una derivada exterior.

La forma de volumen satisface la propiedad importante de que es compatible con la conexión de Levi–Civita. Para demostrarlo primero recordaremos este importante resultado de cálculo diferencial:

**Proposición 2.14.6.** (Fórmula de Jacobi) Si $A\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dt}\det\big(A(t)\big) = \det\big(A(t)\big)\,\mathrm{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right).$$

*Demostración.* Fijemos $t \in I$ y denotemos por $\mathbf{a}_1(t),\dots,\mathbf{a}_n(t)$ las columnas de $A(t)$. La multilinealidad del determinante da

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \sum_{j=1}^{n}\det\big(\mathbf{a}_1(t),\dots,\mathbf{a}_j'(t),\dots,\mathbf{a}_n(t)\big).$$

Pongamos $B(t) := A(t)^{-1}A'(t)$. Entonces $A' = AB$, y

$$\mathbf{a}_j' = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}\mathbf{a}_i.$$

Al sustituir esta suma en el determinante de índice $j$, todos los términos con $i \neq j$ se anulan porque contienen dos columnas iguales. El término restante es $B_{jj}\det A$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \det A(t)\sum_{j=1}^{n} B_{jj}(t) = \det A(t)\,\mathrm{tr}\big(A(t)^{-1}A'(t)\big).$$

□

**Observación 2.14.7.** La Proposición 2.14.6 permite calcular las derivadas parciales de $\sqrt{\det(\mathbf{g})}$ y relacionarlas con los símbolos de Christoffel. Consideremos una carta $(U,\varphi)$ con coordenadas inducidas

$$\varphi = (x^1,\dots,x^n)\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Denotemos por $G = (g_{ij})$ la matriz de componentes de la métrica, donde

$$g_{ij}(p) = \mathbf{g}_p\left(\partial_i\big|_p, \partial_j\big|_p\right), \qquad p \in U.$$

Fijemos un punto $p \in U$ y una coordenada $x^a$. Definimos una curva en $U$ dada por

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(x^1(p),\dots,x^a(p)+t,\dots,x^n(p)).$$

En coordenadas se tiene

$$(\varphi\circ\gamma)(t) = (x^1(p),\dots,x^a(p)+t,\dots,x^n(p)).$$

Sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave y escribamos $F = f\circ\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces

$$f(\gamma(t)) = F((\varphi\circ\gamma)(t)).$$

Aplicando la regla de la cadena,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) = dF_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\varphi\circ\gamma)(t)\right).$$

Como

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\varphi\circ\gamma)(t)=(0,\dots,1,\dots,0)=e_a\in\mathbb{R}^n,$$

se sigue que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f(\gamma(t))=dF_{\varphi(p)}(e_a)=\frac{\partial F}{\partial u^a}(\varphi(p)),$$

donde $(u^1,\dots,u^n)$ son las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$. Por definición, esto coincide con la acción de $\partial_a|_p$ sobre $f$. En consecuencia,

$$\gamma'(0)=\partial_a\big|_p.$$

Aplicando esto a cada componente de la métrica en coordenadas, que es una función suave $g_{ij}\colon U\longrightarrow\mathbb{R}$, se concluye que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g_{ij}(\gamma(t))=\partial_a g_{ij}(p).$$

Definiendo la curva de matrices

$$A(t)=(g_{ij}(\gamma(t))),$$

y aplicando la Proposición 2.14.6, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\det\big(A(t)\big)=\det\big(A(t)\big)\operatorname{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right).$$

Evaluando en $t=0$ y usando que $\gamma(0)=p$ junto con lo anterior, se concluye que

$$\partial_a(\det G)(p)=(\det G(p))g^{ij}(p)\partial_a g_{ij}(p).$$

Así, la fórmula de Jacobi en una variable real se traduce en coordenadas locales en la variedad a la identidad

$$\partial_a(\det G)=(\det G)g^{ij}\partial_a g_{ij}.$$

De aquí se sigue que

$$\partial_a\sqrt{\det G}=\frac{1}{2\sqrt{\det G}}\partial_a(\det G).$$

Sustituyendo la identidad anterior resulta

$$\partial_a\sqrt{\det G}=\frac{1}{2\sqrt{\det G}}\big((\det G)g^{ij}\partial_a g_{ij}\big),$$

y por lo tanto

$$\partial_a\sqrt{\det G}=\frac{1}{2}\sqrt{\det G}\,g^{ij}\partial_a g_{ij}.$$

En particular, usando el Corolario 2.4.11, de esta fórmula se concluye la identidad

$$\Gamma^i_{ik}=\frac{1}{\sqrt{\det G}}\partial_k\left(\sqrt{\det G}\right),$$

donde $\Gamma^i_{jk}$ denotan los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi–Civita.

**Proposición 2.14.8.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana orientada con o sin frontera con conexión de Levi–Civita $\nabla$. Entonces la forma de volumen riemanniana es paralela respecto a la conexión, es decir,

$$\nabla dV_{\mathbf{g}} = 0.$$

*Demostración.* En una carta orientada $(x^1, \dots, x^n)$ se tiene

$$dV_{\mathbf{g}} = \sqrt{\det G}\, \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n.$$

Usando la Proposición 2.4.22 y linealidad de la conexión, se obtiene

$$\nabla_a dV_{\mathbf{g}} = \nabla_a(\sqrt{\det G})\, \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n + \sqrt{\det G}\, \nabla_a(\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n).$$

Para el primer término, como $\sqrt{\det G}$ es una función, se tiene

$$\nabla_a(\sqrt{\det G}) = \partial_a(\sqrt{\det G}).$$

Para el segundo término, aplicando de nuevo la Proposición 2.4.22,

$$\nabla_a(\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n) = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \nabla_a \mathbf{d}x^s \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n.$$

En coordenadas,

$$\nabla_a \mathbf{d}x^s = -\Gamma^s_{ar}\mathbf{d}x^r.$$

Si $r \neq s$, el término

$$\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge (-\Gamma^s_{ar}\mathbf{d}x^r) \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n$$

contiene dos factores iguales ($\mathbf{d}x^r$ aparece dos veces), por lo que se anula. El único aporte no trivial ocurre cuando $r = s$, de modo que

$$\nabla_a(\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n) = -\left(\Gamma^1_{a1} + \cdots + \Gamma^n_{an}\right)\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n.$$

Combinando ambos resultados,

$$\nabla_a dV_{\mathbf{g}} = \left(\partial_a(\sqrt{\det G}) - \sqrt{\det G}(\Gamma^1_{a1} + \cdots + \Gamma^n_{an})\right)\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n.$$

Por la Observación 2.14.7,

$$\partial_a(\sqrt{\det G}) = \frac{1}{2}\sqrt{\det G}\, g^{ij}\partial_a g_{ij}.$$

Como la conexión de Levi–Civita es compatible con $\mathbf{g}$, se cumple

$$\Gamma^r_{ra} = \frac{1}{2} g^{ij}\partial_a g_{ij}.$$

Además, la simetría en los índices inferiores implica $\Gamma^r_{ar} = \Gamma^r_{ra}$, de modo que

$$\Gamma^1_{a1} + \cdots + \Gamma^n_{an} = \Gamma^r_{ra}.$$

Sustituyendo estas identidades,

$$\nabla_a dV_{\mathbf{g}} = \left(\Gamma^r_{ra}\sqrt{\det G} - \Gamma^r_{ra}\sqrt{\det G}\right)\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n = 0.$$

Así, $dV_{\mathbf{g}}$ es paralela respecto a la conexión de Levi–Civita. □

Tenemos los ingredientes para poder definir las integrales de $n$-formas en variedades suaves. Para ello, haremos uso del Teorema 1.3.5.

**Definición 2.14.9.** Sea $D \subseteq \mathbb{H}^n$ un conjunto Jordan-medible y $\omega$ una $n$-forma continua definida en $\overline{D}$. Tenemos que $\omega = f\,\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n$ para alguna función continua $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos la **integral de $\omega$ sobre** $D$ como

$$\int_D \omega = \int_D f\,dx^1 \cdots dx^n$$

donde la integral de la derecha es una integral de Riemann usual. De manera más general, si $U \subseteq \mathbb{H}^n$ es abierto y $\omega$ es una $n$-forma continua con soporte compacto contenido en $U$, definimos

$$\int_U \omega = \int_D \omega$$

donde $D$ es un conjunto Jordan-medible tal que $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq D \subseteq U$, pensando a $\omega$ extendida por cero fuera de su soporte. Se puede demostrar que dicho conjunto Jordan-medible siempre existe y que la definición no depende del conjunto $D$ elegido.

**Definición 2.14.10.** Sea $M$ una variedad suave orientada con o sin frontera y sea $\omega$ una $n$-forma continua en $M$ con soporte compacto contenido en el dominio de una carta suave $(U,\varphi)$ que esté positivamente orientada o negativamente orientada. Definimos la integral de $\omega$ sobre $M$ como

$$\int_M \omega = \pm \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega,$$

donde el signo es positivo si la carta está positivamente orientada y negativo si la carta está negativamente orientada.

**Definición 2.14.11.** Sea $M$ una variedad suave orientada con o sin frontera y $\omega$ una $n$-forma continua con soporte compacto. Sea $\{U_i\}_{i=1}^k$ una cubierta abierta de $\operatorname{supp}(\omega)$ formada por dominios de cartas suaves positivamente o negativamente orientadas. Sea $(\psi_i)_{i=1}^k$ una partición de la unidad subordinada a dicha cubierta abierta. Definimos la integral de $\omega$ sobre $M$ como

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_M \psi_i \omega.$$

En [94] se demuestra que dicha definición no depende de la elección de cartas orientadas ni de la partición de la unidad.

Extendemos esta definición a variedades riemannianas como sigue:

**Definición 2.14.12.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana orientada con o sin frontera y sea $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ continua de soporte compacto. Definimos la integral de $f$ sobre $M$ como

$$\int_M f = \int_M f\, dV_{\mathbf{g}}.$$

El caso no orientable se aborda mediante densidades, que incorporan el valor absoluto del jacobiano y no requieren elegir una orientación.

**Definición 2.14.13.** (Densidad de peso $w$ en un espacio vectorial) Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$ y sea $w \in \mathbb{R}$. Denotemos por

$$\mathrm{Fr}(V) := \{(v_1,\dots,v_n) \in V^n \mid (v_1,\dots,v_n) \text{ es una base ordenada de } V\}.$$

Una **densidad de peso** $w$ **en** $V$ es una función

$$\mu\colon \mathrm{Fr}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para cada operador lineal invertible $T\colon V \longrightarrow V$ y cada $(v_1,\dots,v_n) \in \mathrm{Fr}(V)$,

$$\mu(T(v_1),\dots,T(v_n)) = |\det(T)|^w \mu(v_1,\dots,v_n).$$

Una densidad $\mu$ se llama **positiva** si $\mu(v_1,\dots,v_n) > 0$ para toda base ordenada $(v_1,\dots,v_n)$ de $V$.
Denotamos por $\mathcal{D}_w(V)$ al conjunto de densidades de peso $w$ en $V$.

Con las operaciones puntuales, $\mathcal{D}_w(V)$ es un espacio vectorial de dimensión uno. En efecto, fijada una base ordenada $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$, toda base ordenada $\mathcal{V} = (v_1,\dots,v_n)$ se escribe de manera única como $\mathcal{V} = T\mathcal{E}$ con $T \in \mathrm{GL}(V)$. Por lo tanto,

$$\mu(\mathcal{V}) = |\det T|^w \mu(\mathcal{E}).$$

Así, el valor de $\mu$ en $\mathcal{E}$ determina todos sus valores. A la inversa, para cada $c \in \mathbb{R}$, la fórmula $\mu_c(T\mathcal{E}) := |\det T|^w c$ está bien definida y determina una densidad. El mapeo $\mu \mapsto \mu(\mathcal{E})$ es, en consecuencia, un isomorfismo lineal de $\mathcal{D}_w(V)$ sobre $\mathbb{R}$.

**Definición 2.14.14.** (Haz de densidades de peso $w$ en una variedad) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. El **haz de densidades de peso** $w$ **en** $M$, denotado $\boldsymbol{\mathcal{D}}_w(M)$, es el conjunto

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_w(M) := \coprod_{p\in M} \mathcal{D}_w(T_pM).$$

$\boldsymbol{\mathcal{D}}_w(M)$ es un haz vectorial suave de rango 1. Sobre cualquier carta coordenada $(U,x^i)$, una base local para este haz está dada por $|\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n|^w$.
Una **densidad de peso** $w$ **en** $M$ es una sección suave de $\boldsymbol{\mathcal{D}}_w(M)$.

Definiremos la integral de una densidad en una variedad suave. Para ello, consideraremos una construcción análoga a la que hicimos con las formas diferenciales.

**Definición 2.14.15.** Si $D \subseteq \mathbb{H}^n$ es un conjunto Jordan-medible y $\boldsymbol{\mu}$ es una densidad de peso uno continua en $\overline{D}$, podemos escribir $\boldsymbol{\mu} = f|\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n|$ para una única función continua $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos la integral de $\boldsymbol{\mu}$ sobre $D$ por

$$\int_D \boldsymbol{\mu} = \int_D f\, dx^1 \cdots dx^n.$$

Similarmente, si $U \subseteq \mathbb{H}^n$ es abierto y $\boldsymbol{\mu}$ es una densidad continua con soporte compacto contenido en $U$, definimos

$$\int_U \boldsymbol{\mu} = \int_D \boldsymbol{\mu}$$

donde $D$ es un conjunto Jordan-medible tal que

$$\operatorname{supp}(\boldsymbol{\mu}) \subseteq D \quad \text{y} \quad \overline{D} \subseteq U.$$

Tal conjunto existe: se cubre el soporte por un número finito de cajas rectangulares cerradas, suficientemente pequeñas y contenidas en $U$, y se toma su unión.

**Definición 2.14.16.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera (no necesariamente orientable). Si $\boldsymbol{\mu}$ es una densidad en $M$ con soporte compacto cuyo soporte está contenido en el dominio de una carta suave $(U, \varphi)$, definimos la integral de $\boldsymbol{\mu}$ sobre $M$ como

$$\int_M \boldsymbol{\mu} = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \boldsymbol{\mu}.$$

Podemos extender esta definición a densidades arbitrarias con soporte compacto definiendo la **integral de $\boldsymbol{\mu}$ sobre** $M$ por

$$\int_M \boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{k} \int_M \psi_i \boldsymbol{\mu},$$

donde los dominios de cartas $U_1, \ldots, U_k$ cubren $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\mu})$, cada $\operatorname{supp}(\psi_i)$ está contenido en $U_i$, y $\sum_{i=1}^{k} \psi_i = 1$ en una vecindad de $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\mu})$. Tales funciones se obtienen aplicando una partición de la unidad a la cubierta $U_1, \ldots, U_k, M \setminus \operatorname{supp}(\boldsymbol{\mu})$.

**Proposición 2.14.17.** (Buena definición de la integral de densidades) La integral anterior no depende del conjunto Jordan-medible, de la carta, de la cubierta finita ni de la partición de la unidad elegidos.

*Demostración.* Comencemos con un abierto $U \subseteq \mathbb{H}^n$ y una densidad $\boldsymbol{\mu} = f|\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n|$ continua cuyo soporte $K$ es compacto y está contenido en $U$. La extensión de $f$ por cero fuera de $U$ es continua en una vecindad de cualquier conjunto Jordan-medible $D$ tal que $K \subseteq D$ y $\overline{D} \subseteq U$. Si $D_1$ y $D_2$ son dos conjuntos de esta clase, la función extendida se anula tanto en $(D_1 \cup D_2) \setminus D_1$ como en $(D_1 \cup D_2) \setminus D_2$. Puesto que $D_1 \cup D_2$ es Jordan-medible, la aditividad de la integral de Riemann da

$$\int_{D_1} f\, d\lambda_n = \int_{D_1 \cup D_2} f\, d\lambda_n = \int_{D_2} f\, d\lambda_n.$$

Esto prueba la independencia de $D$.

Sean ahora $(U,\varphi)$ y $(V,\psi)$ dos cartas cuyos dominios contienen $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\mu})$, y pongamos $\Theta := \psi \circ \varphi^{-1}$ sobre $\varphi(U \cap V)$. Si

$$(\varphi^{-1})^*\boldsymbol{\mu} = f_\varphi\,|\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n|, \qquad (\psi^{-1})^*\boldsymbol{\mu} = f_\psi\,|\mathbf{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}y^n|,$$

la ley de transformación de las densidades da

$$f_\varphi(x) = f_\psi(\Theta(x))\,|\det D\Theta(x)|.$$

El Teorema de cambio de variable B.6.15, aplicado en $\varphi(U \cap V)$, implica entonces

$$\int_{\varphi(U)} f_\varphi\, d\lambda_n = \int_{\psi(V)} f_\psi\, d\lambda_n,$$

pues ambos integrandos se anulan fuera de la imagen del soporte. La integral local es, por lo tanto, independiente de la carta.

Finalmente, sean $(\psi_i)_{i=1}^k$ y $(\eta_j)_{j=1}^\ell$ dos particiones de la unidad subordinadas a sendas cubiertas finitas por dominios de cartas del soporte de $\boldsymbol{\mu}$. La aditividad de la integral local y la independencia de la carta ya probada permiten integrar cada $\psi_i\eta_j\boldsymbol{\mu}$ en cualquiera de las dos cartas que contienen su soporte. Como las sumas son finitas,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k \int_M \psi_i\boldsymbol{\mu} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^\ell \int_M \psi_i\eta_j\boldsymbol{\mu} \\ &= \sum_{j=1}^\ell \int_M \eta_j\boldsymbol{\mu}.\end{aligned}$$

Esto prueba simultáneamente la independencia de la partición y de la cubierta. □

**Proposición 2.14.18.** (La densidad riemanniana) Si $(M,\mathbf{g})$ es una variedad riemanniana con o sin frontera, entonces existe una única densidad positiva suave $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{g}$ definida en $M$, llamada la **densidad riemanniana**, con la propiedad de que $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{g}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n) = 1$ para cualquier marco local ortonormal $(\mathbf{E}_i)$.

*Demostración.* En una carta $(U,x^1,\ldots,x^n)$ ponemos

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{g} = \sqrt{\det(\mathbf{g})}\,|\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n|.$$

Se cumple la identidad

$$\det \widetilde{G} = \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 \det G,$$

donde $G = (g_{ij})$ y $\widetilde{G} = (\widetilde{g}_{ij})$ son las matrices de componentes en las coordenadas $x$ y $y$, respectivamente. Esta identidad, junto con la ley de transformación de una densidad, muestra que estas expresiones coinciden en los traslapes, sin importar el signo del jacobiano. Por lo tanto, definen una densidad global, positiva y suave. Si $(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n)$ es un marco ortonormal y $B$ es su matriz de componentes en el marco coordenado, entonces $B^T(g_{ij})B = I$ y $|\det B| = (\det(\mathbf{g}))^{-\frac{1}{2}}$; de aquí se obtiene $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{g}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n) = 1$. Toda densidad con esta propiedad coincide con $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{g}$ sobre cada marco y, por consiguiente, es igual a ella. □

Definimos la integral de una función con soporte compacto en una variedad riemanniana no necesariamente

orientable de la siguiente manera:

**Definición 2.14.19.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con soporte compacto, definimos la **integral de** $f$ **sobre** $M$ como

$$\int_M f = \int_M f \, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}.$$

A continuación enunciamos los teoremas más importantes de integración en variedades, cuya prueba se puede consultar en [94].

**Teorema 2.14.20.** (de Stokes) Sea $M$ una variedad suave orientada de dimensión $n$ con o sin frontera y $\omega$ una $(n-1)$-forma suave en $M$ con soporte compacto. Se equipa $\partial M$ con la orientación inducida por la convención de la normal exterior primero. Entonces

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Si $\partial M = \varnothing$, el miembro derecho se interpreta como cero.

**Teorema 2.14.21.** (Teorema de la divergencia) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, no necesariamente orientable, y sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial suave con soporte compacto. Si $\partial M \neq \varnothing$, denotemos por $\boldsymbol{\nu}$ el campo normal unitario exterior y por $\widetilde{\mathbf{g}}$ la métrica inducida sobre $\partial M$. Entonces

$$\int_M \operatorname{div}(\mathbf{X}) \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M} \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}}.$$

Si $\partial M = \varnothing$, el miembro derecho es cero.

*Demostración.* Supongamos primero que $M$ está orientada y sea $dV_{\mathbf{g}}$ la forma de volumen positiva. En una carta orientada escribimos $\mathbf{X} = X^i \partial_i$ y

$$dV_{\mathbf{g}} = \sqrt{\det(\mathbf{g})}\, \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n.$$

Entonces

$$\iota_{\mathbf{X}} dV_{\mathbf{g}} = \sqrt{\det(\mathbf{g})} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} X^i \, \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n.$$

Al derivar cada sumando, las componentes de $\mathbf{d}(\sqrt{\det(\mathbf{g})} X^i)$ distintas de $\mathbf{d}x^i$ se anulan al formar el producto exterior, porque la correspondiente diferencial ya aparece en la $(n-1)$-forma. La componente restante produce dos veces el signo $(-1)^{i-1}$, una por la contracción y otra al ordenar las diferenciales. Por ello

$$d\left(\iota_{\mathbf{X}} dV_{\mathbf{g}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})}\, X^i \right) \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n = \operatorname{div}(\mathbf{X}) \, dV_{\mathbf{g}}.$$

Aplicamos el Teorema de Stokes a la forma compactamente soportada $\iota_{\mathbf{X}} dV_{\mathbf{g}}$. Si $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1})$ es un marco

ortonormal positivo de $T(\partial M)$, la convención de orientación de la frontera hace positivo a $(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$, y

$$\begin{aligned}\big(\iota_{\mathbf{X}} dV_{\mathbf{g}}\big)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) &= dV_{\mathbf{g}}(\mathbf{X}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_M \operatorname{div}(\mathbf{X})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M} \mathbf{g}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\nu})\, d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}}$$

en el caso orientable.

Consideremos ahora una $M$ arbitraria. El compacto $K := \operatorname{supp}(\mathbf{X})$ admite una cubierta finita por dominios de cartas $U_1, \dots, U_N$, cada uno de los cuales es orientable. Añadimos $M \setminus K$ a la cubierta y elegimos una partición suave de la unidad subordinada. Denotemos por $\chi_i$ las funciones correspondientes a $U_i$. La función correspondiente a $M \setminus K$ multiplica a $\mathbf{X}$ en cero, y

$$\sum_{i=1}^{N} \chi_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{N} \mathbf{d}\chi_i = 0$$

en una vecindad de $K$. Cada campo $\chi_i \mathbf{X}$ tiene soporte compacto contenido en $U_i$. Como $U_i$ es abierto en una variedad con frontera, su frontera como variedad es $U_i \cap \partial M$; no aparece una frontera artificial dentro de $M$. El caso orientable, aplicado a $U_i$ con cualquiera de sus dos orientaciones, da

$$\int_{U_i} \operatorname{div}(\chi_i \mathbf{X})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M \cap U_i} \chi_i \mathbf{g}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\nu})\, d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}}.$$

La regla de Leibniz para la divergencia implica

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{div}(\chi_i \mathbf{X}) = \left(\sum_{i=1}^{N} \chi_i\right) \operatorname{div}(\mathbf{X}) + \left\langle \sum_{i=1}^{N} \operatorname{grad} \chi_i, \mathbf{X} \right\rangle_{\mathbf{g}} = \operatorname{div}(\mathbf{X}).$$

Al sumar las identidades locales y usar de nuevo $\sum_{i=1}^{N} \chi_i = 1$ sobre $K \cap \partial M$, obtenemos la fórmula global. La afirmación para frontera vacía es la misma igualdad con una integral sobre el conjunto vacío. □

## 2.15 La medida de Riemann–Lebesgue

La integración de formas suaves es suficiente para la geometría diferencial elemental, pero el análisis requiere integrar funciones medibles y trabajar con convergencia, espacios $L^p$ y derivadas débiles. La medida de Riemann–Lebesgue extiende la integral geométrica a ese marco y conserva, en cada carta, la densidad determinada por la métrica. Con ella podremos tratar funciones mucho menos regulares sin abandonar la estructura intrínseca de la variedad.

**Definición 2.15.1.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Un conjunto $A \subseteq M$ es **Lebesgue medible** si, para toda carta suave $(U, \varphi)$ de $M$, el conjunto $\varphi(A \cap U)$ es Lebesgue medible en $\mathbb{R}^n$. Denotamos por

$$\mathcal{L}_M := \{A \subseteq M \mid A \text{ es Lebesgue medible}\}.$$

**Proposición 2.15.2.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Entonces $\mathcal{L}_M$ es una $\sigma$-álgebra sobre $M$ que contiene a los borelianos.

*Demostración.* Sea $(U,\varphi)$ una carta de $M$. Si $A \in \mathcal{L}_M$, entonces $\varphi(A\cap U) \in \mathcal{L}(n)$. Como $\mathcal{L}(n)$ es una $\sigma$-álgebra, tenemos que $\varphi((M\setminus A)\cap U) = \varphi(U)\setminus\varphi(A\cap U) \in \mathcal{L}(n)$, por lo que concluimos que $M\setminus A \in \mathcal{L}_M$. Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_M$, entonces $\varphi(A_k \cap U) \in \mathcal{L}(n)$, por lo que

$$\varphi\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\cap U\right) = \varphi\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(A_k\cap U)\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \varphi(A_k\cap U) \in \mathcal{L}(n),$$

lo cual implica que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{L}_M$. Ahora, $\varphi(M\cap U) = \varphi(U) \in \mathcal{L}(n)$ por ser abierto, por lo que $M \in \mathcal{L}_M$, con lo que concluimos que $\mathcal{L}_M$ es una $\sigma$-álgebra sobre $M$.
Finalmente, si $O \subseteq M$ es abierto, $\varphi(O\cap U) \in \mathcal{L}(n)$ por ser abierto en $\mathbb{H}^n$. Por lo tanto $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{L}_M$. □

**Definición 2.15.3.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $(U,\varphi)$ una carta de $M$. Si $A \in \mathcal{L}_M$ y $A \subseteq U$, definimos $\lambda_{\mathbf{g},U}(A) := \displaystyle\int_{\varphi(A)} \varphi_*\left(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\right) d\lambda_n$, donde $\varphi_*\left(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\right) = \left(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\right)\circ\varphi^{-1}$.

**Proposición 2.15.4.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y $A \in \mathcal{L}_M$.

(a) La definición de $\lambda_{\mathbf{g},U}$ no depende de la carta $(U,\varphi)$ cuando $A \subseteq U$.

(b) $\lambda_{\mathbf{g},U}$ define una medida en el espacio medible $(U, (\mathcal{L}_M)\restriction_U)$.

*Demostración.* Sea $(U,\varphi)$ una carta y escribamos

$$G_\varphi = (g_{ij}), \qquad \rho_\varphi := \sqrt{\det G_\varphi}\circ\varphi^{-1}.$$

La función $\rho_\varphi$ es continua y estrictamente positiva en $\varphi(U)$.

(a) Sean $(U,\varphi)$ y $(V,\psi)$ dos cartas con $A \subseteq U\cap V$, y sea

$$f := \psi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U\cap V) \longrightarrow \psi(U\cap V)$$

el cambio de coordenadas. Si $G_\psi = (\widetilde{g}_{ab})$ es la matriz de componentes de $\mathbf{g}$ en la carta $\psi$, la ley de transformación de un tensor covariante de orden dos da

$$G_\psi(f(x)) = Df(x)^{-\mathsf{T}} G_\varphi(x) Df(x)^{-1}.$$

Al tomar determinantes y raíces cuadradas obtenemos

$$\rho_\varphi(x) = \rho_\psi(f(x))\,|\det Df(x)|. \tag{2.104}$$

La fórmula de cambio de variable, aplicada a la función no negativa $\rho_\psi \mathbf{1}_{\psi(A)}$, implica

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbf{g},V}(A) &= \int_{\psi(A)} \rho_\psi(y)\, d\lambda_n(y) \\ &= \int_{\varphi(A)} \rho_\psi(f(x))|\det Df(x)|\, d\lambda_n(x) \\ &= \int_{\varphi(A)} \rho_\varphi(x)\, d\lambda_n(x) = \lambda_{\mathbf{g},U}(A),\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos (2.104). Por lo tanto, la medida local no depende de la carta.

(b) Definamos, para todo conjunto Lebesgue medible $B \subseteq \varphi(U)$,

$$\nu_\varphi(B) := \int_B \rho_\varphi\, d\lambda_n.$$

Como $\rho_\varphi \geq 0$ es medible, $\nu_\varphi$ es una medida: la $\sigma$-aditividad se obtiene aplicando el teorema de convergencia monótona a las sumas de las funciones indicadoras de conjuntos ajenos dos a dos. Además,

$$\lambda_{\mathbf{g},U}(A) = \nu_\varphi(\varphi(A)), \qquad A \in (\mathcal{L}_M)\restriction_U .$$

Puesto que $\varphi$ es una biyección medible con inversa medible, esta identidad transporta la $\sigma$-aditividad de $\nu_\varphi$ a $\lambda_{\mathbf{g},U}$. Así, $\lambda_{\mathbf{g},U}$ es una medida en $(U, (\mathcal{L}_M)\restriction_U)$.

□

**Definición 2.15.5.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Para cada $A \in \mathcal{L}_M$, elijamos un atlas numerable $\mathcal{A} = \{(U_k, \varphi_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ de $M$ y definamos

$$A_0 := A \cap U_0, \qquad A_{k+1} := (A \cap U_{k+1}) \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_j.$$

Los conjuntos $A_k$ son medibles, ajenos dos a dos, satisfacen $A_k \subseteq U_k$ y cubren $A$. Definimos

$$\lambda_{\mathbf{g}}(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g},U_k}(A_k).$$

Esta función se llama la **medida de Riemann–Lebesgue** asociada a $\mathbf{g}$.

**Proposición 2.15.6.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. La definición de $\lambda_{\mathbf{g}}$ no depende de la elección del atlas numerable.

*Demostración.* Sea $\widetilde{\mathcal{A}}$ otro atlas numerable de $M$. Sea $\widetilde{A}_0 := A \cap \widetilde{U}_0$, para cada $i \in \mathbb{N}$ con $i \geq 0$, definimos $\widetilde{A}_{i+1} := (A \cap \widetilde{U}_{i+1}) \setminus \bigcup_{j=0}^{i} \widetilde{A}_j$. Por la Proposición 2.15.4, $\lambda_{\mathbf{g},U_k}$ y $\lambda_{\mathbf{g},\widetilde{U}_i}$ son medidas en $U_k$ y $\widetilde{U}_i$ respectivamente,

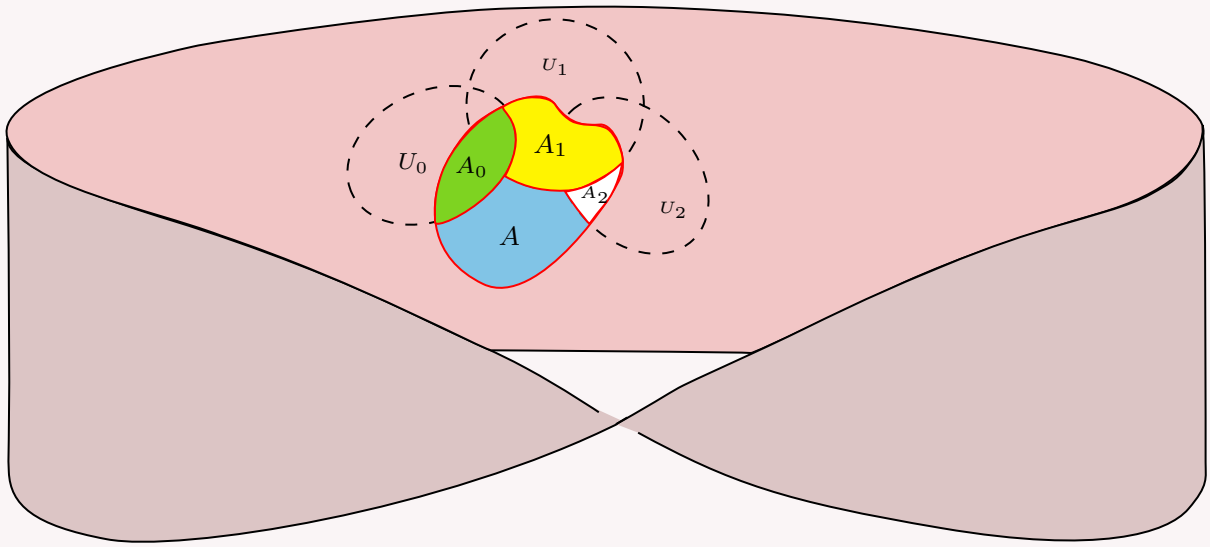



**Figura 2.8.** La definición no depende de que la variedad sea orientable.

por lo que son $\sigma$-aditivas, y usando que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_i = A$,

$$\lambda_{\mathbf{g},U_k}(A_k) = \lambda_{\mathbf{g},U_k}(A_k \cap A) = \lambda_{\mathbf{g},U_k}\left(A_k \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_i\right) = \lambda_{\mathbf{g},U_k}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_k \cap \widetilde{A}_i)\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{\mathbf{g},U_k}(A_k \cap \widetilde{A}_i).$$

La misma descomposición aplicada a $\lambda_{\mathbf{g},\widetilde{U}_i}(\widetilde{A}_i) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_{\mathbf{g},\widetilde{U}_i}(\widetilde{A}_i \cap A_k)$. Por la Proposición 2.15.4, sabemos que $\lambda_{\mathbf{g},U_k}(A_k \cap \widetilde{A}_i) = \lambda_{\mathbf{g},\widetilde{U}_i}(\widetilde{A}_i \cap A_k)$ pues $A_k \cap \widetilde{A}_i \subseteq U_k \cap \widetilde{U}_i$.
Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g},U_k}(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g},U_k}(A_k \cap \widetilde{A}_i)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g},\widetilde{U}_i}(\widetilde{A}_i \cap A_k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g},\widetilde{U}_i}(\widetilde{A}_i \cap A_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g},\widetilde{U}_i}(\widetilde{A}_i).$$

□

La medida $\lambda_{\mathbf{g}}$ coincide con $\lambda_{\mathbf{g},U}$ sobre los conjuntos medibles contenidos en $U$:

**Proposición 2.15.7.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y $(U,\varphi)$ una carta suave. Si $A \in \mathcal{L}_M$ y $A \subseteq U$, entonces $\lambda_{\mathbf{g}}(A) = \lambda_{\mathbf{g},U}(A)$.

*Demostración.* Sea $(U_k,\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un atlas numerable de $M$ tal que $U_0 = U$. Consideremos $A_0 = A\cap U_0 = A\cap U = A$ y $A_{k+1} = (A \cap U_{k+1}) \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_j$. Sabemos que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles ajenos dos a dos

cuya unión es $A$. Como $A_0 = A$, notemos que esto implica que $A_k = \varnothing$ para todo $k \geq 1$. Por lo tanto

$$\lambda_{\mathbf{g}}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g},U_k}(A_k) = \lambda_{\mathbf{g},U_0}(A_0) = \lambda_{\mathbf{g},U}(A).$$

□

**Teorema 2.15.8.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Entonces $\lambda_{\mathbf{g}}$ es una medida de Radon completa en $(M, \mathcal{L}_M)$.

*Demostración.* Fijemos un atlas numerable $\{(U_j, \varphi_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$. Para cada $B \in \mathcal{L}_M$ ponemos

$$B^{(0)} = B \cap U_0, \qquad B^{(j+1)} = (B \cap U_{j+1}) \setminus \bigcup_{l=0}^{j} B^{(l)}.$$

Estas piezas son medibles, ajenas dos a dos, cubren $B$ y satisfacen $B^{(j)} \subseteq U_j$. Si $(A_k)$ es una familia numerable de conjuntos medibles ajenos dos a dos y $A = \bigcup_k A_k$, entonces, para cada $j$,

$$A^{(j)} = \bigcup_k A_k^{(j)},$$

y la unión del miembro derecho también es disjunta. La aditividad numerable de las medidas locales y el intercambio de dos series de términos no negativos dan

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{g}}(A) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g},U_j}(A^{(j)}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g},U_j}(A_k^{(j)}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g},U_j}(A_k^{(j)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g}}(A_k). \end{aligned}$$

Además, $\lambda_{\mathbf{g}}(\varnothing) = 0$; por lo tanto, $\lambda_{\mathbf{g}}$ es una medida.
Establezcamos primero la regularidad local. En una carta $(U, \varphi)$ la medida local es el transporte por $\varphi$ de la medida

$$\nu(B) = \int_B w \, d\lambda_n, \qquad w = \varphi_* \sqrt{\det(\mathbf{g})},$$

sobre el abierto relativo $\varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$. La función $w$ es continua y estrictamente positiva. Tomemos una sucesión creciente de abiertos relativamente compactos $W_m$ cuya unión sea $\varphi(U)$. En cada $\overline{W}_m$ la función $w$ posee una cota superior finita y una cota inferior positiva. La regularidad de la medida de Lebesgue, aplicada en cada $W_m$, muestra entonces que para todo conjunto medible $B \subseteq \varphi(U)$,

$$\nu(B) = \sup\{\nu(K) \mid K \subseteq B, K \text{ compacto}\} = \inf\{\nu(O) \mid B \subseteq O, O \text{ abierto en } \varphi(U)\}.$$

En efecto, para la aproximación interior se elige primero $m$ de modo que $\nu(B \setminus W_m)$ sea pequeño y después un compacto $K \subseteq B \cap W_m$ cuyo complemento tenga medida de Lebesgue pequeña; la cota superior de $w$ transforma esta última estimación en una estimación para $\nu$. Si $\nu(B) = \infty$, el mismo argumento aplicado a $B \cap W_m$ produce compactos de medida arbitrariamente grande. Para la aproximación exterior se descompone

$B$ en los conjuntos medibles $B \cap (W_m \setminus W_{m-1})$ y, usando de nuevo la cota superior de $w$ en $\overline{W}_m$, se elige para la $m$-ésima pieza un abierto cuyo exceso tenga medida menor que $\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$. La unión de esos abiertos contiene a $B$ y su exceso total tiene medida menor que $\varepsilon$.

Podemos elegir el atlas numerable de modo que cada $U_j$ sea un dominio coordenado precompacto, con imagen acotada y con $\lambda_{\mathbf{g}}(U_j) < \infty$. Para $A \in \mathcal{L}_M$, sean $(A_j)$ las piezas disjuntas asociadas a este atlas. Si $\lambda_{\mathbf{g}}(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, elegimos $N$ de modo que

$$\sum_{j>N} \lambda_{\mathbf{g}}(A_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La regularidad local proporciona compactos $K_j \subseteq A_j$, para $0 \le j \le N$, tales que

$$\sum_{j=0}^{N} \lambda_{\mathbf{g}}(A_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La unión finita $K = \bigcup_{j=0}^{N} K_j$ es compacta, está contenida en $A$ y satisface $\lambda_{\mathbf{g}}(A \setminus K) < \varepsilon$. Si $\lambda_{\mathbf{g}}(A) = \infty$, se toma primero una suma parcial mayor que un número dado y se aproximan interiormente sus términos; así se obtienen compactos contenidos en $A$ de medida arbitrariamente grande. Esto prueba la regularidad interior.

Para la regularidad exterior sólo hay que considerar $\lambda_{\mathbf{g}}(A) < \infty$. Para cada $j$ elegimos, mediante la regularidad local, un abierto $O_j$ de $M$ tal que

$$A_j \subseteq O_j \subseteq U_j, \qquad \lambda_{\mathbf{g}}(O_j \setminus A_j) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Entonces $O = \bigcup_j O_j$ es abierto, contiene a $A$ y

$$\lambda_{\mathbf{g}}(O \setminus A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\mathbf{g}}(O_j \setminus A_j) < \varepsilon.$$

Si $\lambda_{\mathbf{g}}(A) = \infty$, todo abierto que contiene a $A$ tiene medida infinita. Queda probada la regularidad exterior.

Finalmente, cada punto posee un dominio coordenado $V$ con clausura compacta contenida en otro dominio coordenado. La función $w$ está acotada en la imagen de esa clausura y $\varphi(V)$ puede elegirse acotado; por lo tanto, $\lambda_{\mathbf{g}}(V) < \infty$. La medida es localmente finita. Además es completa: si $N \subseteq Z$ y $\lambda_{\mathbf{g}}(Z) = 0$, la positividad de $w$ y sus cotas inferiores sobre compactos implican que $\varphi(Z \cap U)$ es nulo para la medida de Lebesgue en toda carta. Cada subconjunto de ese conjunto es Lebesgue medible y tiene medida local nula, de modo que $N \in \mathcal{L}_M$ y $\lambda_{\mathbf{g}}(N) = 0$. Concluimos que $\lambda_{\mathbf{g}}$ es una medida de Radon en el espacio medible indicado. □

**Observación 2.15.9.** La expresión $\int_M f \, d\lambda_{\mathbf{g}}$ denota la integral de Lebesgue respecto de la medida $\lambda_{\mathbf{g}}$. Para toda función continua de soporte compacto,

$$\int_M f \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M f \, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}.$$

Si $M$ está orientada y $dV_{\mathbf{g}}$ corresponde a la orientación elegida, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}$ es la densidad asociada a $dV_{\mathbf{g}}$ y, por lo tanto,

$$\int_M f\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M f\, dV_{\mathbf{g}}.$$

Así, $dV_{\mathbf{g}}$, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}$ y $d\lambda_{\mathbf{g}}$ designan respectivamente una forma, una densidad y la notación diferencial de una medida.

Como consecuencia de que la medida de Riemann–Lebesgue sea localmente finita tenemos lo siguiente:

**Observación 2.15.10.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con o sin frontera. Entonces $\lambda_{\mathbf{g}}(M) < \infty$.

*Demostración.* Como $M$ es compacta y $\lambda_{\mathbf{g}}$ es localmente finita, podemos encontrar una cubierta abierta finita de $M$, digamos $M = \bigcup_{j=0}^{N} U_j$, tal que $\lambda_{\mathbf{g}}(U_j) < \infty$ para todo $j \in \{0, \dots, N\}$.

Entonces

$$\lambda_{\mathbf{g}}(M) \leq \sum_{j=0}^{N} \lambda_{\mathbf{g}}(U_j) < \infty.$$

□

Para las aplicaciones analíticas posteriores necesitaremos de manera explícita la completación boreliana y la $\sigma$-finitud de la medida de Riemann–Lebesgue.

**Lema 2.15.11.** (Completación boreliana y $\sigma$-finitud de la medida de Riemann–Lebesgue) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\lambda_{\mathbf{g}}$ la medida de Riemann–Lebesgue asociada. Entonces

$$\mathcal{L}_M = \overline{\mathcal{B}(M)}^{\lambda_{\mathbf{g}}},$$

donde el miembro derecho denota la completación de la $\sigma$-álgebra de Borel respecto de $\lambda_{\mathbf{g}}$. Además, $(M, \mathcal{L}_M, \lambda_{\mathbf{g}})$ es $\sigma$-finito.

*Demostración.* Por la Proposición 1.2.11 podemos elegir una cubierta numerable $(U_j, \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ por bolas coordenadas regulares y, en el caso de frontera, por las correspondientes medias bolas coordenadas regulares, de modo que $\overline{U_j}$ sea compacta para todo $j$.

Probemos primero la igualdad de $\sigma$-álgebras. La inclusión $\overline{\mathcal{B}(M)}^{\lambda_{\mathbf{g}}} \subseteq \mathcal{L}_M$ se sigue del Teorema 2.15.8: $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{L}_M$ y $\lambda_{\mathbf{g}}$ es completa en $\mathcal{L}_M$.

Para la inclusión recíproca, tomemos $A \in \mathcal{L}_M$ y formemos la descomposición disjunta

$$A_0 := A \cap U_0, \qquad A_j := (A \cap U_j) \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i, \qquad j \geq 1.$$

Entonces $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$, cada $A_j$ pertenece a $\mathcal{L}_M$ y $A_j \subseteq U_j$. Por definición de $\mathcal{L}_M$, $\varphi_j(A_j)$ es Lebesgue medible en $\varphi_j(U_j)$. Como la $\sigma$-álgebra de Lebesgue de un abierto euclidiano o de un abierto relativo del semiespacio

es la completación de su $\sigma$-álgebra de Borel, existen un conjunto boreliano $B_j \subseteq \varphi_j(U_j)$ y un conjunto de medida de Lebesgue nula $N_j \subseteq \varphi_j(U_j)$ tales que

$$\varphi_j(A_j) \triangle B_j \subseteq N_j.$$

Puesto que $\overline{U_j}$ es compacta, la densidad coordenada $\sqrt{\det(\mathbf{g})} \circ \varphi_j^{-1}$ está acotada superiormente y, sobre los compactos que agotan $\varphi_j(U_j)$, también está separada de cero. En particular, todo conjunto de medida de Lebesgue nula en $\varphi_j(U_j)$ tiene preimagen de medida $\lambda_{\mathbf{g}}$ nula. Por lo tanto,

$$Z_j := \varphi_j^{-1}(N_j)$$

es $\lambda_{\mathbf{g}}$-nulo. Además, $C_j := \varphi_j^{-1}(B_j)$ es boreliano en $U_j$ y, como $U_j$ es abierto, es boreliano en $M$. Definiendo

$$C := \bigcup_{j=0}^{\infty} C_j, \qquad Z := \bigcup_{j=0}^{\infty} Z_j,$$

obtenemos $C \in \mathcal{B}(M)$, $\lambda_{\mathbf{g}}(Z) = 0$ y

$$A \triangle C \subseteq Z.$$

Así, $A$ pertenece a la completación de $\mathcal{B}(M)$, lo que prueba

$$\mathcal{L}_M \subseteq \overline{\mathcal{B}(M)}^{\lambda_{\mathbf{g}}}.$$

Resta probar la $\sigma$-finitud. Para cada $j$, la compacidad de $\overline{U_j}$ y la finitud local de $\lambda_{\mathbf{g}}$ implican

$$\lambda_{\mathbf{g}}(U_j) \leq \lambda_{\mathbf{g}}(\overline{U_j}) < \infty.$$

Como $M = \bigcup_{j=0}^{\infty} U_j$, la medida $\lambda_{\mathbf{g}}$ es $\sigma$-finita. □

Las propiedades restantes de la medida de Riemann–Lebesgue se proponen como ejercicio:

**Ejercicio 2.15.12.** (Propiedades básicas de la medida de Riemann–Lebesgue) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\lambda_{\mathbf{g}}$ la medida de Riemann–Lebesgue asociada.

(a) Demuestre que $\lambda_{\mathbf{g}}$ es completa, es decir, si $A \subset M$ es medible y $\lambda_{\mathbf{g}}(A) = 0$, entonces todo subconjunto de $A$ es medible.

(b) Sea $(U, \varphi)$ una carta coordenada. Demuestre que si $A \subset U$ satisface $\lambda_{\mathbf{g}}(A) = 0$, entonces $\lambda_n\big(\varphi(A)\big) = 0$ en $\mathbb{R}^n$, donde $\lambda_n$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

(c) Demuestre que una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{L}_M$-medible si y solo si para toda carta $(U, \varphi)$ la función

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es $\lambda_n$-medible en $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

(d) Demuestre que si $U \subset M$ es abierto no vacío, entonces $\lambda_{\mathbf{g}}(U) > 0$.

(e) Sea $(M,\mathbf{g})$ orientable y $dV_{\mathbf{g}}$ la forma de volumen riemanniana asociada a una orientación. Demuestre que para toda función continua con soporte compacto se cumple

$$\int_M f\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M f\, dV_{\mathbf{g}}.$$

## 2.16 Gradiente, divergencia y laplaciano de Laplace–Beltrami

El gradiente, la divergencia y el operador de Laplace–Beltrami forman el vocabulario diferencial básico del análisis riemanniano. Generalizan operaciones euclidianas conocidas, pero su definición intrínseca muestra exactamente dónde intervienen la métrica, la conexión y la medida. En el Capítulo 8, una vez definida la noción general de operador diferencial sobre haces, comprobaremos que estas construcciones son ejemplos de ella. A partir de estas operaciones se formularán las ecuaciones elípticas, las identidades de energía y los flujos geométricos de los capítulos posteriores.

Primero definiremos el gradiente de una función escalar $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

La derivada covariante de $f$ coincide con el covector $df$. Para obtener un campo vectorial hay que elevar ese índice con la métrica. En el caso euclidiano, esta identificación se expresa mediante

$$\langle \operatorname{grad} f, \mathbf{X}\rangle_{\overline{\mathbf{g}}} = \mathbf{X}(f),$$

y conduce a la definición intrínseca siguiente.

**Definición 2.16.1.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana (con o sin frontera). Para una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^1$, el *gradiente* de $f$ es el único campo vectorial continuo $\operatorname{grad}(f) \in \Gamma^0(TM)$ tal que

$$\langle \operatorname{grad}(f), \mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}} = df(\mathbf{X}) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M).$$

Es decir, $\operatorname{grad}(f) = (df)^{\sharp}$, donde $^{\sharp} : T^*M \longrightarrow TM$ es el isomorfismo musical inducido por $\mathbf{g}$ dado en la Definición 2.1.10.

**Observación 2.16.2.** (Expresión local del gradiente) Sea $(U,\varphi)$ una carta con coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$. En esta carta, el diferencial de $f$ se escribe como

$$df = \partial_j f\, \mathbf{d}x^j, \qquad \partial_j f = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}.$$

Aplicando el isomorfismo musical $^{\sharp} : T^*M \longrightarrow TM$, se obtiene

$$(df)^{\sharp} = g^{ij}\partial_j f\, \partial_i.$$

El gradiente cumple la regla de Leibniz al igual que el diferencial de una función:

**Proposición 2.16.3.** (Regla de Leibniz para el gradiente) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Si $f, g \in C^1(M)$, entonces

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad}(g) + g \operatorname{grad}(f).$$

*Demostración.* Para todo campo vectorial suave $\mathbf{X}$,

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{grad}(fg), \mathbf{X}\rangle &= d(fg)(\mathbf{X}) = f\, dg(\mathbf{X}) + g\, df(\mathbf{X}) \\ &= \langle f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f, \mathbf{X}\rangle.\end{aligned}$$

La no degeneración de la métrica da la igualdad de los campos. □

La divergencia de un campo vectorial es una noción central en el cálculo vectorial. En el contexto de variedades riemannianas introducimos su análogo:

**Definición 2.16.4.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana (con o sin frontera) y $\mathbf{X}$ un campo vectorial de clase $C^1$. Definimos la *divergencia* de $\mathbf{X}$ como

$$\operatorname{div}(\mathbf{X}) = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{X}),$$

donde tr denota la contracción natural de un tensor de tipo $(1,1)$ en sus dos índices. En un marco local ortonormal $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ se recupera la expresión clásica

$$\operatorname{div}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{X}, \mathbf{e}_i).$$

En coordenadas locales tenemos lo siguiente:

**Proposición 2.16.5.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathbf{X} = X^i \partial_i$ un campo vectorial de clase $C^1$. En coordenadas locales $(x^1, \dots, x^n)$ se cumple

$$\operatorname{div}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_i \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} X^i \right).$$

*Demostración.* Por definición, la divergencia es la traza de $\nabla \mathbf{X}$:

$$\operatorname{div}(\mathbf{X}) = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{X}).$$

En coordenadas locales $(x^1, \dots, x^n)$ con marco coordenado $\partial_j = \partial_j$, se tiene

$$\nabla_{\partial_j} \mathbf{X} = (\partial_j X^i + \Gamma^i_{jk} X^k) \partial_i, \quad \text{es decir} \quad (\nabla_j \mathbf{X})^i = \partial_j X^i + \Gamma^i_{jk} X^k.$$

La traza de $\nabla \mathbf{X}$ consiste en contraer el índice covariante de derivación $j$ con el índice contravariante $i$, lo que en notación de índices se escribe como

$$\operatorname{div}(\mathbf{X}) = \nabla_i X^i.$$

Sustituyendo la expresión de $(\nabla_j \mathbf{X})^i$, resulta

$$\operatorname{div}(\mathbf{X}) = \partial_i X^i + \Gamma^i_{ik} X^k.$$

Ahora, usaremos la identidad

$$\Gamma_{ik}^{i} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_k\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\big),$$

obtenida en la Observación 2.14.7.
Sustituyendo en la expresión de $\operatorname{div}(\mathbf{X})$ se tiene

$$\operatorname{div}(\mathbf{X}) = \partial_i X^i + \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_k\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\big)X^k.$$

Aplicando la regla de Leibniz al producto $\sqrt{\det(\mathbf{g})}X^i$,

$$\partial_i\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}X^i\big) = \sqrt{\det(\mathbf{g})}\partial_i X^i + X^i\partial_i\sqrt{\det(\mathbf{g})},$$

y dividiendo por $\sqrt{\det(\mathbf{g})}$ se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_i\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}X^i\big) = \partial_i X^i + \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_i\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\big)X^i.$$

Comparando con la expresión anterior se concluye la fórmula compacta

$$\operatorname{div}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_i\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}X^i\big),$$

como se quería. □

La divergencia satisface la siguiente regla de Leibniz:

**Proposición 2.16.6.** (Regla de Leibniz para la divergencia) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Entonces para todo $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(M)$ y toda $f\in C^\infty(M)$,

$$\operatorname{div}(f\mathbf{X}) = f\operatorname{div}(\mathbf{X}) + \langle\operatorname{grad}(f),\mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}}.$$

*Demostración.* En un marco ortonormal $(\mathbf{e}_i)$,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{\mathbf{e}_i}(f\mathbf{X}),\mathbf{e}_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{e}_i(f)\langle\mathbf{X},\mathbf{e}_i\rangle + f\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{X},\mathbf{e}_i\rangle\\ &= \langle\operatorname{grad} f,\mathbf{X}\rangle + f\operatorname{div}\mathbf{X}.\end{aligned}$$

□

La definición se extiende naturalmente a campos tensoriales de tipo $(k,l)$:

**Definición 2.16.7.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana (con o sin frontera) y $\mathbf{F}\in\Gamma(T^{(k,l)}(TM))$ con $k\geq 1$. Definimos

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})\in\Gamma(T^{(k-1,l)}(TM))$$

como la contracción de $\nabla\mathbf{F}$ en el índice de derivación con el primer índice contravariante de $\mathbf{F}$. En notación de índices,

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})^{i_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \nabla_a F^{ai_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l}.$$

**Proposición 2.16.8.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. En coordenadas locales $(x^1,\dots,x^n)$, si

$$\mathbf{F} = F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_k}\otimes\mathbf{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{d}x^{j_l},$$

entonces su divergencia está dada por

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})^{i_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \partial_a F^{ai_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l} + \sum_{r=2}^{k}\Gamma^{i_r}_{am}F^{ai_2\dots m\dots i_k}_{j_1\dots j_l} - \sum_{s=1}^{l}\Gamma^{m}_{aj_s}F^{ai_2\dots i_k}_{j_1\dots m\dots j_l} + \Gamma^{a}_{am}F^{mi_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l}.$$

*Demostración.* La expresión se obtiene aplicando la definición

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})^{i_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \nabla_a F^{ai_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l}.$$

De acuerdo con el Corolario 2.4.20, en coordenadas locales

$$(\nabla_a\mathbf{F})^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \partial_a F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} + \sum_{r=1}^{k}\Gamma^{i_r}_{am}F^{i_1\dots m\dots i_k}_{j_1\dots j_l} - \sum_{s=1}^{l}\Gamma^{m}_{aj_s}F^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots m\dots j_l}.$$

Contrayendo ahora el índice de derivación $a$ con el primer índice contravariante $i_1$, se obtiene

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})^{i_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \nabla_a F^{ai_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l}.$$

Sustituyendo en la expresión anterior, resulta

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})^{i_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \partial_a F^{ai_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l} + \sum_{r=1}^{k}\Gamma^{i_r}_{am}F^{ai_2\dots m\dots i_k}_{j_1\dots j_l} - \sum_{s=1}^{l}\Gamma^{m}_{aj_s}F^{ai_2\dots i_k}_{j_1\dots m\dots j_l}.$$

En el sumando con $r=1$ aparece

$$\Gamma^{i_1}_{am}F^{mi_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \Gamma^{a}_{am}F^{mi_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l},$$

lo que da lugar al último término. Reordenando, se obtiene finalmente

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})^{i_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = \partial_a F^{ai_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l} + \sum_{r=2}^{k}\Gamma^{i_r}_{am}F^{ai_2\dots m\dots i_k}_{j_1\dots j_l} - \sum_{s=1}^{l}\Gamma^{m}_{aj_s}F^{ai_2\dots i_k}_{j_1\dots m\dots j_l} + \Gamma^{a}_{am}F^{mi_2\dots i_k}_{j_1\dots j_l}.$$

□

El laplaciano se define a partir de la propiedad que lo caracteriza en el espacio euclidiano: es la divergencia del gradiente de una función.

**Definición 2.16.9.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de

clase $C^2$. El *operador de Laplace–Beltrami* se define como

$$\Delta_{\mathbf{g}} f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

**Observación 2.16.10.** Recordemos primero que el gradiente de $f$ es el campo vectorial caracterizado por

$$\mathbf{g}(\operatorname{grad} f, \mathbf{X}) = df(\mathbf{X}), \qquad \mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M).$$

En coordenadas locales $(x^1, \dots, x^n)$, esto se traduce en

$$\operatorname{grad} f = g^{ij} \partial_j f \, \partial_i,$$

donde $(g^{ij})$ son las entradas de la inversa de la matriz métrica.
Aplicando ahora la definición de divergencia, se tiene en coordenadas

$$\operatorname{div}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_i \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} X^i \right).$$

Si sustituimos $\mathbf{X} = \operatorname{grad} f$ con componentes $X^i = g^{ij} \partial_j f$, obtenemos

$$\Delta_{\mathbf{g}} f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_i \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} g^{ij} \partial_j f \right).$$

De este modo, en coordenadas locales la expresión del Laplace–Beltrami queda como

$$\Delta_{\mathbf{g}} f = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_i \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} g^{ij} \partial_j f \right).$$

Juntando las reglas de Leibniz tanto para el gradiente como para la divergencia, obtenemos la siguiente regla para el laplaciano del producto de dos funciones:

**Proposición 2.16.11.** (Regla de Leibniz para el laplaciano) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Si $f, g \in C^\infty(M)$, entonces

$$\Delta_{\mathbf{g}}(fg) = f \Delta_{\mathbf{g}} g + 2\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g) \rangle_{\mathbf{g}} + g \Delta_{\mathbf{g}} f.$$

*Demostración.* Por las dos reglas de Leibniz anteriores,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{g}}(fg) &= \operatorname{div}\left( f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f \right) \\ &= f \Delta_{\mathbf{g}} g + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle + g \Delta_{\mathbf{g}} f + \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle. \end{aligned}$$

La simetría de $\mathbf{g}$ agrupa los dos términos cruzados. □

## 2.17 Geometría de Clifford y estructuras spinoriales

En este punto ya disponemos de grupos y álgebras de Lie, haces vectoriales, haces principales, haces asociados y conexiones principales. Esos son exactamente los ingredientes geométricos necesarios para construir los haces de

espinores y su conexión. Todavía no definiremos ningún operador asociado a estos datos: la contracción de una conexión de Clifford se estudiará después de desarrollar la teoría general de operadores diferenciales; su símbolo se calculará únicamente después de definir los símbolos, y su interpretación pseudodiferencial quedará reservada al capítulo correspondiente.

Usaremos en toda la sección la convención

$$vw + wv = -2\mathbf{g}(v,w)1.$$

Las construcciones y convenciones pueden compararse con [92, Capítulo I, §§1–6; Capítulo II, §§1 y 3–5] y [21, Capítulo 17].

**Clifford y los espinores**

William Kingdon Clifford introdujo en el siglo XIX un álgebra que reúne la métrica y la multiplicación exterior. Las representaciones de esa álgebra originan los espinores, objetos que registran de manera lineal la geometría del grupo spin. En una variedad riemanniana, una estructura spinorial permite globalizar esas representaciones y levantar la conexión de Levi–Civita al haz de espinores. Esta construcción geométrica será la base de los operadores que aparecerán en capítulos posteriores.

## 2.17.1 Álgebras de Clifford

**Definición 2.17.1.** (Álgebra de Clifford) Sea $(V,\mathbf{g})$ un espacio euclidiano real de dimensión $n$. Su *álgebra de Clifford real* es el cociente unital

$$\mathrm{Cl}(V,\mathbf{g}) := T(V)\big/\langle v\otimes v + \mathbf{g}(v,v)1 \mid v\in V\rangle.$$

Identificamos $V$ con su imagen en el cociente. La complejificación es

$$\mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(V,\mathbf{g}) := \mathrm{Cl}(V,\mathbf{g})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}.$$

Para el espacio euclidiano estándar escribiremos $\mathrm{Cl}_n$ y $\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}$.

La polarización de $v^2 = -|v|_{\mathbf{g}}^2 1$ da

$$vw + wv = -2\mathbf{g}(v,w)1, \qquad v^2 = -|v|_{\mathbf{g}}^2 1. \tag{2.105}$$

**Proposición 2.17.2.** (Propiedad universal) Sea $A$ un álgebra asociativa unital real y sea $q\colon V\to A$ un mapeo lineal tal que

$$q(v)^2 = -|v|_{\mathbf{g}}^2 1_A \qquad (v\in V).$$

Existe un único homomorfismo unital de álgebras $\widehat{q}\colon \mathrm{Cl}(V,\mathbf{g})\to A$ cuya restricción a $V$ es $q$.

*Demostración.* La propiedad universal del álgebra tensorial extiende $q$ de manera única a un homomorfismo unital $T(V)\to A$. Cada generador $v\otimes v + |v|^2 1$ del ideal definitorio pertenece a su núcleo. El homomorfismo factoriza, por tanto, a través del cociente. Como $\mathrm{Cl}(V,\mathbf{g})$ está generada por $V$ y la unidad, la factorización es única. □

**Proposición 2.17.3.** (Base, graduación y reversión) Si $(e_1,\dots,e_n)$ es una base ortonormal de $V$, entonces

$$1, \qquad e_{i_1}\cdots e_{i_k}, \qquad 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n,$$

forman una base de $\mathrm{Cl}(V,\mathbf{g})$. En particular, $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}(V,\mathbf{g}) = 2^n$. Además:

(a) el automorfismo $\alpha$ determinado por $\alpha(v) = -v$ induce la graduación intrínseca

$$\mathrm{Cl}(V,\mathbf{g}) = \mathrm{Cl}^0(V,\mathbf{g}) \oplus \mathrm{Cl}^1(V,\mathbf{g}),$$

formada por los espacios propios de $\alpha$ con valores 1 y $-1$;

(b) existe un único antiautomorfismo $\tau$, llamado *reversión*, tal que $\tau(v) = v$ para todo $v \in V$, y

$$\tau(v_1\cdots v_k) = v_k\cdots v_1.$$

*Demostración.* Las relaciones $e_i^2 = -1$ y $e_ie_j = -e_je_i$ para $i \neq j$ permiten ordenar cualquier palabra y muestran que los monomios indicados generan el álgebra. Para probar su independencia, sobre $\Lambda^\bullet V$ definimos

$$c_\Lambda(v) := \varepsilon(v) - \iota_v,$$

donde $\varepsilon(v)$ es multiplicación exterior y $\iota_v$ es contracción mediante $\mathbf{g}$. Las identidades entre contracción y producto exterior dan $c_\Lambda(v)^2 = -|v|^2 I$; por la propiedad universal obtenemos una representación de Clifford. Si $I = (i_1 < \cdots < i_k)$, entonces

$$c_\Lambda(e_{i_1})\cdots c_\Lambda(e_{i_k})1 = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}.$$

Las formas del miembro derecho constituyen una base de $\Lambda^\bullet V$, de modo que los monomios de Clifford son linealmente independientes.
El automorfismo de $T(V)$ que multiplica un tensor de grado $k$ por $(-1)^k$ preserva el ideal definitorio y desciende a $\alpha$. Sus dos espacios propios dan la suma directa anunciada. De forma análoga, invertir el orden de los factores en $T(V)$ preserva el ideal y desciende al antiautomorfismo $\tau$. La unicidad en ambos casos se sigue de que $V$ genera el álgebra. □

## 2.17.2 Los grupos $\mathrm{Pin}(n)$ y $\mathrm{Spin}(n)$

**Definición 2.17.4.** (Grupos pin y spin) Sea $S(V) = \{v \in V : |v|_{\mathbf{g}} = 1\}$. Definimos

$$\mathrm{Pin}(V,\mathbf{g}) := \{v_1\cdots v_k : k \ge 0,\ v_j \in S(V)\} \subseteq \mathrm{Cl}(V,\mathbf{g})^\times$$

y

$$\mathrm{Spin}(V,\mathbf{g}) := \mathrm{Pin}(V,\mathbf{g}) \cap \mathrm{Cl}^0(V,\mathbf{g}).$$

El producto vacío es 1. Para $V = \mathbb{R}^n$ escribimos $\mathrm{Pin}(n)$ y $\mathrm{Spin}(n)$.

Todo vector unitario satisface $v^{-1} = -v$. En particular, los conjuntos anteriores son grupos. La paridad de un producto de vectores unitarios está bien definida porque la graduación de Clifford es una suma directa.

**Teorema 2.17.5.** (Cartan–Dieudonné) Toda transformación $A \in \mathrm{O}(V, \mathbf{g})$ es composición de, a lo sumo, $n$ reflexiones en hiperplanos que pasan por el origen. La paridad del número de reflexiones coincide con el signo de $\det A$.

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre $n$. El resultado es inmediato si $n = 0$. Sea $x$ un vector unitario. Si $Ax = x$, entonces $A$ preserva $x^{\perp}$ y la hipótesis inductiva se aplica a $A|_{x^{\perp}}$. Si $Ax \neq x$, ponemos

$$u := \frac{Ax - x}{|Ax - x|}.$$

Para la reflexión $r_u(y) = y - 2\mathbf{g}(y,u)u$ se verifica directamente que $r_u(Ax) = x$. Por tanto, $r_u A$ preserva $x^{\perp}$ y es producto de, a lo sumo, $n-1$ reflexiones en ese subespacio. Como $r_u^2 = I$, se obtiene una factorización de $A$ con, a lo sumo, $n$ reflexiones. Finalmente, cada reflexión tiene determinante $-1$, lo cual determina la paridad. □

Para $a$ homogéneo en el álgebra de Clifford definimos su acción adjunta torcida sobre $V$ por

$$\widetilde{\rho}(a)w := \alpha(a) w a^{-1}.$$

Si $v$ es unitario, las relaciones de Clifford dan

$$\widetilde{\rho}(v)w = (-v)w(-v) = w - 2\mathbf{g}(v,w)v = r_v(w).$$

**Lema 2.17.6.** (Grupo de unidades de un álgebra finito–dimensional) Si $A$ es un álgebra asociativa unital real de dimensión finita, su grupo de unidades $A^{\times}$ es abierto en $A$ y, con esa estructura de variedad, es un grupo de Lie.

*Demostración.* Para $a \in A$, sea $L_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A)$ la multiplicación izquierda. El elemento $a$ es una unidad si y sólo si $L_a$ es invertible. En efecto, si $L_a$ es biyectivo existe $b$ con $ab = 1$; además, $L_a(ba - 1) = (ab)a - a = 0$, y la inyectividad da $ba = 1$. En una base de $A$, las entradas de $L_a$ dependen linealmente de $a$, de modo que

$$A^{\times} = \{ a \in A : \det L_a \neq 0 \}$$

es abierto. La multiplicación es bilineal y, como $a^{-1} = L_a^{-1}(1)$, la fórmula matricial para la inversa prueba que $a \mapsto a^{-1}$ es suave. □

**Proposición 2.17.7.** (El grupo pin) Para $n \geq 1$, la fórmula anterior define un homomorfismo sobreyectivo

$$\widetilde{\rho} \colon \mathrm{Pin}(n) \longrightarrow \mathrm{O}(n)$$

con núcleo $\{\pm 1\}$. El grupo $\mathrm{Pin}(n)$ es un subgrupo compacto de $\mathrm{Cl}_n^{\times}$ y, por tanto, un grupo de Lie. $\mathrm{Spin}(n)$ es un subgrupo de Lie compacto.

*Demostración.* La multiplicatividad de $\alpha$ muestra que $\widetilde{\rho}$ es un homomorfismo. Su sobreyectividad se sigue del Teorema 2.17.5 y del cálculo de las reflexiones.
Sea $a$ un elemento homogéneo del núcleo. Si $a$ es par, conmuta con cada vector; si es impar, anticonmuta

con cada vector. Escribamos $a$ en la base de la Proposición 2.17.3. Para un monomio $e_I$ de grado $k$, se tiene

$$e_I e_j = (-1)^k e_j e_I \quad (j \notin I), \qquad e_I e_j = (-1)^{k-1} e_j e_I \quad (j \in I).$$

Al comparar coeficientes se concluye que el único elemento par que conmuta con todos los $e_j$ es un escalar y que no existe un elemento impar no nulo que anticonmute con todos ellos. Así, $a = \lambda 1$. Como un elemento del núcleo es par, puede escribirse como producto de un número par de vectores unitarios; en consecuencia, $a^{-1} = \tau(a)$. La reversión fija los escalares, luego $\lambda^{-1} = \lambda$ y $\lambda = \pm 1$.
Si $a \in \mathrm{Pin}(n)$, Cartan–Dieudonné proporciona un producto $b = v_1 \cdots v_k$, con $k \le n$, que tiene la misma imagen ortogonal. El cálculo del núcleo da $a = \pm b$. Por consiguiente, $\mathrm{Pin}(n)$ es la unión finita de las imágenes de los compactos

$$\{\pm 1\} \times S(\mathbb{R}^n)^k, \qquad 0 \le k \le n,$$

bajo la multiplicación de Clifford. Es compacto y, en particular, cerrado en el grupo de Lie abierto $\mathrm{Cl}_n^\times$. El teorema del subgrupo cerrado le da una estructura de grupo de Lie. Finalmente, $\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{Pin}(n) \cap \mathrm{Cl}_n^0$ es un subgrupo cerrado de $\mathrm{Pin}(n)$ y también es un grupo de Lie compacto. □

En la parte par, $\alpha(a) = a$, por lo que la acción adjunta torcida es la conjugación ordinaria.

**Teorema 2.17.8.** (Mapeo cubriente spin) Para $n \ge 1$, la fórmula

$$\rho\colon \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n), \qquad \rho(a)v = ava^{-1},$$

define un homomorfismo sobreyectivo de grupos de Lie con núcleo $\{\pm 1\}$. Su álgebra de Lie es

$$\mathfrak{spin}(n) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} e_i e_j : 1 \le i < j \le n \right\},$$

y

$$d\rho \left( \frac{1}{2} e_i e_j \right) e_i = e_j, \qquad d\rho \left( \frac{1}{2} e_i e_j \right) e_j = -e_i,$$

mientras que la acción se anula sobre los demás vectores de la base. En particular, $d\rho\colon \mathfrak{spin}(n) \to \mathfrak{so}(n)$ es un isomorfismo y $\rho$ es un mapeo cubriente de dos hojas:

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{\rho} \mathrm{SO}(n) \longrightarrow 1.$$

*Demostración.* La Proposición 2.17.7 muestra que la restricción a la parte par toma valores en $\mathrm{SO}(n)$, es sobreyectiva y tiene núcleo $\{\pm 1\}$. Para $i < j$, la curva

$$\gamma_{ij}(t) = \exp\left( \frac{t}{2} e_i e_j \right) = \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} e_i e_j$$

pertenece a $\mathrm{Spin}(n)$; en efecto,

$$\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} e_i e_j = (-e_i) \left( \cos \frac{t}{2} e_i - \sin \frac{t}{2} e_j \right)$$

es un producto de dos vectores unitarios. Derivando $\rho(\gamma_{ij}(t))v = \gamma_{ij}(t)v\gamma_{ij}(t)^{-1}$ en $t=0$ se obtiene

$$d\rho\left(\frac{1}{2}e_ie_j\right)v = \left[\frac{1}{2}e_ie_j, v\right],$$

de donde siguen las fórmulas anunciadas. Sus imágenes forman la base usual de $\mathfrak{so}(n)$.
Por otro lado, $d\rho$ es inyectiva: si $X$ está en su núcleo, entonces $\rho(\exp(tX)) = \exp(t\,d\rho(X)) = I$ para todo $t$, y la discreción de $\{\pm 1\}$ obliga a que $X = 0$. Así, los bivectores anteriores forman toda $\mathfrak{spin}(n)$ y $d\rho$ es un isomorfismo.
El teorema de la función inversa da una vecindad $W$ de 1 en $\mathrm{Spin}(n)$ sobre la cual $\rho$ es un difeomorfismo hacia una vecindad $U$ de $I$. Reduciendo $W$ si es necesario, $W$ y $-W$ son disjuntas. Como cada fibra es un coset de $\{\pm 1\}$, $\rho^{-1}(U) = W \sqcup (-W)$, y ambas restricciones son difeomorfismos sobre $U$. Las traslaciones proporcionan la misma descripción alrededor de cualquier punto de $\mathrm{SO}(n)$. Ésta es precisamente la propiedad de ser un mapeo cubriente de dos hojas. □

### 2.17.3 Módulos complejos de espinores

La siguiente clasificación se incluye para fijar tanto las dimensiones como la graduación y las convenciones hermitianas.

**Proposición 2.17.9.** (Clasificación compleja de Clifford) Para $m \geq 0$ existen isomorfismos de álgebras complejas

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{2m} \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m}), \qquad \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{2m+1} \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m}) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m}).$$

*Demostración.* Las bases son $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_0 = \mathbb{C}$ y

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_1 \cong \mathbb{C}[t]/(t^2+1) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

Para el paso inductivo consideremos

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $A^2 = B^2 = -I$, $J^2 = I$ y cada par de matrices distintas anticommuta. Si $e_1, \dots, e_n$ son los generadores de $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_n$, las asignaciones

$$e_j \longmapsto e_j \otimes J, \qquad e_{n+1} \longmapsto 1 \otimes A, \qquad e_{n+2} \longmapsto 1 \otimes B$$

satisfacen las relaciones de Clifford y definen un homomorfismo

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{n+2} \longrightarrow \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_n \otimes M_2(\mathbb{C}).$$

Las matrices $I, A, B, J$ generan $M_2(\mathbb{C})$; además, una vez obtenido $1 \otimes J$, se recupera $e_j \otimes 1$. El homomorfismo es, pues, sobreyectivo. Ambos lados tienen dimensión compleja $2^{n+2}$ por la Proposición 2.17.3, así que es un isomorfismo. La inducción da las dos fórmulas. □

**Proposición 2.17.10.** (Módulos de espinores complejos) Si $n = 2m$, existe, salvo equivalencia, un único módulo irreducible $\Sigma_n$ de $\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ y $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma_n = 2^m$. Si $n = 2m+1$, existen dos módulos irreducibles de dimensión $2^m$; sus restricciones a $\mathrm{Spin}(n)$ son equivalentes, y fijamos una de las dos extensiones de Clifford como $\Sigma_n$. En dimensión par, para una base ortonormal orientada definimos

$$\omega_{\mathbb{C}} := i^m c(e_1)\cdots c(e_{2m}). \tag{2.106}$$

Este endomorfismo no depende de la base elegida, satisface $\omega_{\mathbb{C}}^2 = I$ y determina la descomposición quiral

$$\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-, \qquad \Sigma_n^{\pm} = \ker(\omega_{\mathbb{C}} \mp I).$$

La multiplicación por un vector intercambia ambos sumandos. En toda dimensión puede elegirse un producto hermitiano para el cual

$$c(v)^* = -c(v), \qquad v \in \mathbb{R}^n. \tag{2.107}$$

La representación spinorial es

$$\rho_\Sigma \colon \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{U}(\Sigma_n), \qquad \rho_\Sigma(a) = c(a).$$

*Demostración.* La Proposición 2.17.9 y la clasificación elemental de los módulos irreducibles de un álgebra de matrices prueban las afirmaciones de existencia, unicidad y dimensión. En dimensión impar, el álgebra par se identifica con el álgebra compleja de Clifford en dimensión $2m$; por eso las dos representaciones restringidas a $\mathrm{Spin}(2m+1)$ son equivalentes.

La relación de Clifford permite invertir el orden de los $2m$ factores en (2.106) y da $\omega_{\mathbb{C}}^2 = I$. Un cambio de base ortonormal orientada multiplica el producto alternante por su determinante, que es uno; por tanto, el elemento no depende de la base. Al mover un vector a través de los otros $2m-1$ factores aparece un signo negativo, así que $\omega_{\mathbb{C}}$ anticonmuta con $c(v)$ y éste intercambia los dos espacios propios.

Por la Proposición 2.17.7, podemos promediar cualquier producto hermitiano sobre $\mathrm{Pin}(n)$. Para el producto resultante, $c(v)$ es unitario si $v$ es unitario. Como $c(v)^{-1} = -c(v)$, se obtiene $c(v)^* = -c(v)$; la homogeneidad extiende la identidad a todo vector. La restricción a $\mathrm{Spin}(n)$ es unitaria y define $\rho_\Sigma$. □

La conjugación en el álgebra da la identidad de equivarianza fundamental

$$\rho_\Sigma(a)\, c(v)\, \rho_\Sigma(a)^{-1} = c(\rho(a)v), \qquad a \in \mathrm{Spin}(n),\ v \in \mathbb{R}^n. \tag{2.108}$$

### 2.17.4 El haz de marcos ortonormales y las estructuras spinoriales

Sea $(M^n, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave, orientada, con o sin frontera. Definimos

$$\mathbf{P}_{\mathrm{SO}}(M)_x := \{p \colon \mathbb{R}^n \to T_xM : p \text{ es una isometría lineal que preserva la orientación}\}.$$

La acción derecha es $p \cdot A = p \circ A$. Un marco ortonormal orientado local $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ identifica $p$ con la matriz $A \in \mathrm{SO}(n)$ determinada por $p(e_j^{\mathrm{est}}) = \sum_{i=1}^{n} A_i{}^j \mathbf{e}_i$. Estas cartas convierten $\mathbf{P}_{\mathrm{SO}}(M) \to M$ en un haz principal de grupo

$\mathrm{SO}(n)$, llamado *haz de marcos ortonormales orientados*. La evaluación induce un isomorfismo de haces

$$\mathbf{P}_{\mathrm{SO}}(M)\times_{\mathrm{SO}(n)}\mathbb{R}^n \longrightarrow TM, \qquad [p,v]\longmapsto p(v). \tag{2.109}$$

En efecto, la relación $[pA,v]=[p,Av]$ prueba que el mapeo está bien definido, y en cada fibra es una isometría lineal biyectiva.

**Definición 2.17.11.** (Estructura spinorial o estructura spin) Una *estructura spinorial*, también llamada *estructura spin*, en $(M,\mathbf{g})$ consta de un haz principal derecho $\mathbf{P}_{\mathrm{Spin}}(M)\to M$ de grupo $\mathrm{Spin}(n)$ y un mapeo suave

$$\Lambda\colon \mathbf{P}_{\mathrm{Spin}}(M)\longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{SO}}(M)$$

que cubre $\mathrm{id}_M$ y satisface

$$\Lambda(p\cdot a)=\Lambda(p)\cdot\rho(a). \tag{2.110}$$

Dos estructuras son equivalentes si existe un isomorfismo de haces principales que conmuta con sus mapeos $\Lambda$. Una variedad riemanniana orientada se llama *spin* cuando admite una estructura spinorial; al hablar de sus espinores se supone elegida una clase de equivalencia de tales estructuras.

En trivializaciones principales, la identidad (2.110) muestra que $\Lambda$ tiene la forma $(x,a)\mapsto(x,b(x)\rho(a))$. Por el Teorema 2.17.8, $\Lambda$ es un mapeo cubriente de dos hojas que restringe en cada fibra al mapeo spin. La existencia del dato no es automática. El Apéndice A, después de introducir las clases características necesarias, demuestra el criterio topológico de existencia y clasifica las estructuras spinoriales.

**Definición 2.17.12.** (Haz de espinores y multiplicación de Clifford) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad spin con estructura elegida. Su *haz de espinores complejos* es el haz asociado

$$\Sigma M := \mathbf{P}_{\mathrm{Spin}}(M)\times_{\rho_\Sigma}\Sigma_n.$$

Para $\xi\in T_x^*M$, $p\in\mathbf{P}_{\mathrm{Spin}}(M)_x$ y $\psi\in\Sigma_n$, sea $v=\Lambda(p)^{-1}(\xi^\sharp)\in\mathbb{R}^n$. La *multiplicación de Clifford* se define por

$$c(\xi)[p,\psi]:=[p,c(v)\psi]. \tag{2.111}$$

La definición es independiente del representante. En efecto, al sustituir $p$ por $pa$, las coordenadas de $\xi^\sharp$ y del espinor se convierten en $\rho(a)^{-1}v$ y $\rho_\Sigma(a)^{-1}\psi$; la identidad (2.108) devuelve la misma clase. Por tanto, (2.111) define un homomorfismo suave de haces

$$c\colon \mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(T^*M,\mathbf{g}^{-1})\longrightarrow \mathrm{End}(\Sigma M)$$

y, para covectores reales,

$$c(\xi)c(\eta)+c(\eta)c(\xi)=-2\mathbf{g}^{-1}(\xi,\eta)I, \qquad c(\xi)^*=-c(\xi). \tag{2.112}$$

Si $n=2m$, la quiralidad es invariante bajo $\mathrm{Spin}(n)$ y produce

$$\Sigma M=\Sigma^+M\oplus\Sigma^-M;$$

la multiplicación por un covector es impar respecto de esta graduación.

### 2.17.5 La conexión spinorial

Denotemos por $\omega^{\mathrm{SO}}$ la forma de conexión principal de Levi–Civita en $\mathbf{P}_{\mathrm{SO}}(M)$. Como $d\rho$ es un isomorfismo, podemos definir

$$\omega^{\mathrm{Spin}} := (d\rho)^{-1}\Lambda^{*}\omega^{\mathrm{SO}}. \tag{2.113}$$

**Proposición 2.17.13.** (Conexión spinorial) La forma (2.113) es la única conexión principal en $\mathbf{P}_{\mathrm{Spin}}(M)$ que se proyecta a la conexión de Levi–Civita. La conexión asociada $\nabla^{\Sigma}$ es hermitiana, preserva la graduación en dimensión par y satisface

$$\nabla^{\Sigma}_{\mathbf{X}}\big(c(\xi)\psi\big) = c(\nabla_{\mathbf{X}}\xi)\psi + c(\xi)\nabla^{\Sigma}_{\mathbf{X}}\psi. \tag{2.114}$$

Si $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ es un marco ortonormal orientado que admite un levantamiento spinorial local y

$$\omega_{ij}(\mathbf{X}) := \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j),$$

entonces, en esa trivialización,

$$\big(\nabla^{\Sigma}_{\mathbf{X}}\psi\big)^{\wedge} = \mathbf{X}(\widehat{\psi}) + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}(\mathbf{X})c(e_i)c(e_j)\widehat{\psi}. \tag{2.115}$$

*Demostración.* El pullback $\Lambda^{*}\omega^{\mathrm{SO}}$ reproduce los campos verticales después de aplicar $d\rho$ y es equivariante para la acción adjunta. Como $d\rho$ entrelaza las representaciones adjuntas, su composición con $(d\rho)^{-1}$ satisface los dos axiomas de una forma de conexión principal. Cualquier conexión que se proyecte a Levi–Civita debe tener esa forma, lo cual prueba la unicidad.

El cálculo del Teorema 2.17.8 identifica el elemento de $\mathfrak{spin}(n)$ que corresponde a la matriz antisimétrica $(\omega_{ij})$ con $\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}e_ie_j$. La fórmula local para conexiones asociadas da (2.115). Cada $c(e_i)c(e_j)$, con $i\neq j$, es antiautoadjunto, de modo que la conexión es hermitiana. El elemento de volumen complejo es invariante bajo $\mathrm{Spin}(n)$ y paralelo; por ello se preserva la graduación. Finalmente, derivar la identidad de equivarianza (2.108), o sustituir directamente la fórmula local, da (2.114). □

### 2.17.6 Módulos y conexiones de Clifford

La construcción analítica posterior sólo necesita la estructura que acabamos de obtener, no necesariamente una estructura spin global.

**Definición 2.17.14.** (Módulo hermitiano de Clifford) Un *módulo hermitiano de Clifford* sobre $(M,\mathbf{g})$ es un haz hermitiano complejo $\mathbf{S}\to M$ con un homomorfismo unital suave de haces de álgebras

$$c\colon \mathrm{Cl}_{\mathbb{C}}(T^{*}M,\mathbf{g}^{-1}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbf{S})$$

tal que $c(\xi)^{*} = -c(\xi)$ para todo covector real $\xi$. Equivalentemente, basta dar un mapeo lineal suave $c\colon T^{*}M\to\mathrm{End}(\mathbf{S})$ que satisfaga (2.112); la equivalencia es la propiedad universal de Clifford fibra a fibra. Una conexión hermitiana $\nabla^{\mathbf{S}}$ es una *conexión de Clifford* si

$$\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}(c(\xi)\mathbf{s}) = c(\nabla_{\mathbf{X}}\xi)\mathbf{s} + c(\xi)\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}\mathbf{s}. \tag{2.116}$$

Si $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$ está graduado, se exige además que la conexión preserve la graduación y que $c(\xi)$ sea impar.

El haz $\Sigma M$ con $\nabla^{\Sigma}$ es el ejemplo spinorial fundamental.

**Ejemplo 2.17.15.** (Formas diferenciales) Toda variedad riemanniana, sea o no spin, posee el módulo graduado

$$\mathbf{S} = \Lambda^{\bullet} T^*M \otimes \mathbb{C}, \qquad c(\xi) = \varepsilon(\xi) - \iota_{\xi^\sharp}.$$

Las identidades

$$\iota_{\xi^\sharp}\varepsilon(\eta) + \varepsilon(\eta)\iota_{\xi^\sharp} = \mathbf{g}^{-1}(\xi,\eta) I$$

prueban la relación de Clifford. Para el producto hermitiano inducido por $\mathbf{g}$, se tiene $\varepsilon(\xi)^* = \iota_{\xi^\sharp}$, luego $c(\xi)^* = -c(\xi)$. La conexión inducida por Levi–Civita conmuta con producto exterior y contracción en el sentido de la regla de Leibniz; por tanto, es una conexión de Clifford. La graduación es la paridad de las formas.

## 2.17.7 Estructuras Spin$^c$

**Definición 2.17.16.** (Grupo $\mathrm{Spin}^c(n)$) Definimos el grupo de Lie compacto

$$\mathrm{Spin}^c(n) := \big(\mathrm{Spin}(n) \times \mathrm{U}(1)\big)/\{(1,1),(-1,-1)\}.$$

Los homomorfismos

$$\rho_c[a,z] = \rho(a), \qquad \det_c[a,z] = z^2$$

toman valores en $\mathrm{SO}(n)$ y $\mathrm{U}(1)$, respectivamente. La representación spinorial compleja es

$$\rho^c_{\Sigma}[a,z] = z\rho_{\Sigma}(a). \tag{2.117}$$

Las tres fórmulas están bien definidas en el cociente: reemplazar $(a,z)$ por $(-a,-z)$ no cambia ninguna de ellas, pues $\rho(-a) = \rho(a)$ y $\rho_{\Sigma}(-1) = -I$. El cociente por el subgrupo central finito hereda la estructura de grupo de Lie. En efecto, la acción por traslaciones de $\{(1,1),(-1,-1)\}$ es libre y, por ser el grupo finito, propiamente discontinua. Una vecindad suficientemente pequeña de cada punto es disjunta de su trasladada no trivial; su proyección al cociente es una carta, y en estas cartas la multiplicación y la inversión descendidas son suaves.

**Definición 2.17.17.** (Estructura $\mathrm{Spin}^c$) Una *estructura* $\mathrm{Spin}^c$ en $(M,\mathbf{g})$ consta de un haz principal $\mathbf{P}_{\mathrm{Spin}^c}(M) \to M$ y un mapeo

$$\Lambda_c : \mathbf{P}_{\mathrm{Spin}^c}(M) \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{SO}}(M)$$

que cubre la identidad y satisface $\Lambda_c(pa) = \Lambda_c(p)\rho_c(a)$. Su *línea determinante* y su *haz de espinores* son, respectivamente,

$$\mathbf{L} := \mathbf{P}_{\mathrm{Spin}^c}(M) \times_{\det_c} \mathbb{C}, \qquad \Sigma^c M := \mathbf{P}_{\mathrm{Spin}^c}(M) \times_{\rho^c_{\Sigma}} \Sigma_n.$$

La identidad de equivarianza (2.108) prueba, exactamente como en el caso spin, que

$$c(\xi)[p,\psi] := [p, c(\Lambda_c(p)^{-1}\xi^\sharp)\psi]$$

define la multiplicación de Clifford en $\Sigma^c M$. En dimensión par produce la graduación $\Sigma^{c,+}M \oplus \Sigma^{c,-}M$.

Una conexión unitaria en $\mathbf{L}$, junto con la conexión de Levi–Civita, determina de manera única una conexión principal en $\mathbf{P}_{\mathrm{Spin}^c}(M)$. En efecto, el mapeo de álgebras de Lie

$$(d\rho_c, d\det_c)\colon \mathfrak{spin}^c(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R}$$

es un isomorfismo: sobre el primer factor es $d\rho$ y sobre el segundo la diferencial de $z \mapsto z^2$ es multiplicación por 2. Los pullbacks de las dos formas de conexión, seguidos por el inverso de este isomorfismo, dan la conexión principal buscada. La conexión asociada en $\Sigma^c M$ es hermitiana y de Clifford por el mismo argumento que en la Proposición 2.17.13.

El criterio topológico de existencia se formula y demuestra, una vez introducidas las clases características requeridas, en el Teorema A.8.3 del Apéndice A.

Hemos construido así los datos puramente geométricos: el grupo spin y su mapeo cubriente, las estructuras spinoriales, los haces de espinores, la multiplicación de Clifford y sus conexiones. En el Capítulo 8 se contraerá una conexión de Clifford para obtener un operador diferencial. Su símbolo se estudiará en el Capítulo 11 y su símbolo pseudodiferencial, con la convención de Fourier pertinente, sólo en el Capítulo 15.

Parte II

# Análisis no lineal en espacios euclidianos

# Preámbulo de la Parte II

Cuando una estimación sobre una variedad se demuestra dentro de una carta, en el fondo estamos utilizando un resultado definido sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. Por esta razón, antes de volver a la geometría conviene desarrollar con cuidado el modelo euclidiano y precisar qué herramientas dependen de la estructura lineal del espacio, cuáles sobreviven a un cambio de coordenadas y cuáles podrán localizarse después mediante funciones de corte.

Los espacios de Sobolev aparecen al permitir que las derivadas se entiendan en sentido débil. Las distribuciones amplían aún más esta idea y hacen posible tratar singularidades y datos que no son funciones ordinarias. La transformada de Fourier permite estudiar derivación y regularidad desde el punto de vista de las frecuencias. A partir de ahí, la teoría de interpolación ofrece un lenguaje común para comparar distintos niveles de regularidad y conduce naturalmente a las escalas de Bessel, Slobodeckij, Besov y Triebel–Lizorkin. Los órdenes de regularidad dejan así de estar restringidos a números enteros.

Esta parte proporciona buena parte de las herramientas que se utilizarán después casi sin cambiar su esencia matemática: desigualdades de Sobolev, compacidad de Rellich–Kondrashov, multiplicadores, cambios de variables, operadores de extensión, convoluciones y argumentos de localización. Lo que cambiará al regresar a una variedad será la manera de transportarlas y de controlar las constantes. El trabajo euclidiano de estos capítulos permite distinguir con claridad qué pertenece al análisis y qué deberá aportar la geometría.

**De las soluciones clásicas a las soluciones débiles**

Durante mucho tiempo, resolver una ecuación diferencial significó encontrar una función suficientemente derivable que la satisficiera punto a punto. El desarrollo del análisis del siglo XX amplió de manera decisiva esta idea. Sobolev incorporó las derivadas débiles a espacios normados; Schwartz construyó una teoría estable de distribuciones; Calderón y Zygmund desarrollaron herramientas fundamentales del análisis armónico; Gagliardo y Slobodeckij estudiaron regularidad no entera, y Lions, Peetre y Triebel organizaron amplias escalas de espacios funcionales. Estas teorías no sustituyeron a las soluciones clásicas: permitieron comenzar con menos regularidad y entender bajo qué condiciones puede recuperarse después.

# 3

# Espacios de Sobolev en abiertos de $\mathbb{R}^n$

Los espacios de Sobolev aparecen de manera natural en el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y consideremos

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Suponiendo por el momento que $u$ y $\varphi$ son suaves, que $u$ satisface la condición de frontera y que $\varphi$ es una función de prueba nula en la frontera, la integración por partes da

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx.$$

Esta identidad no requiere segundas derivadas clásicas de $u$: basta que $u$ y su gradiente tengan la integrabilidad adecuada. Así se llega a las derivadas débiles, a $W^{1,2}(\Omega)$ y al subespacio $W^{1,2}_0(\Omega)$ que codifica la condición de Dirichlet. La traza permite interpretar los valores de frontera, mientras que la desigualdad de Poincaré, los encajes y los teoremas de compacidad proporcionan las estimaciones necesarias para resolver el problema.

La misma ecuación se obtiene como condición de punto crítico del funcional

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega f u \, dx.$$

En efecto, su ecuación de Euler–Lagrange es precisamente la identidad débil anterior. Esta relación entre una EDP y una energía será el modelo de los métodos variacionales desarrollados al final del libro.

El problema no lineal

$$-\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = f$$

está asociado, formalmente, con

$$\mathcal{E}_p(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega f u \, dx.$$

Este ejemplo conduce a $W^{1,p}(\Omega)$ y muestra por qué la convexidad y la reflexividad son importantes al estudiar sucesiones minimizantes. La teoría del $p$-laplaciano no se desarrollará aquí; servirá como guía para las definiciones y estimaciones del capítulo.

**Sobolev y el giro hacia la regularidad débil**

En la década de 1930, Sergei Sobolev mostró que la regularidad útil para una ecuación no tiene que coincidir con la diferenciabilidad clásica punto a punto. Al incorporar las derivadas débiles a espacios normados, hizo posible combinar integración por partes, completitud y estimaciones de regularidad dentro de un mismo marco. Sus teoremas de encaje explican además un fenómeno central del análisis: cierta cantidad de integrabilidad de las derivadas obliga a la función a ganar integrabilidad, continuidad o incluso regularidad de Hölder. El capítulo desarrolla estas ideas en el modelo euclidiano antes de transportarlas a variedades y haces vectoriales [136].

## 3.1 Derivadas débiles

Comenzamos con la fórmula elemental que motiva la definición.

**Proposición 3.1.1.** (Integración por partes) Si $f \in C^1(\Omega)$ y $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

para toda $i \in \{1,\dots,n\}$.

*Demostración.* La extensión por cero de $\varphi$ pertenece a $C_c^1(\mathbb{R}^n)$, pues el soporte de $\varphi$ es un compacto contenido en $\Omega$. Podemos, por ello, trabajar en $\mathbb{R}^n$. Elijamos $M > 0$ de modo que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset (-M,M)^n$. Para $i = 1$ y cada $\widehat{x} = (x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, el Teorema B.6.5 da

$$\int_{-M}^{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1,\widehat{x})\,dx_1 = \varphi(M,\widehat{x}) - \varphi(-M,\widehat{x}) = 0.$$

El Teorema B.6.18 permite integrar respecto de las variables restantes y concluir que $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$. Los demás índices se tratan de la misma manera. Al aplicar esta identidad a $f\varphi \in C_c^1(\Omega)$ y usar la regla del producto, obtenemos

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial (f\varphi)}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

□

La identidad anterior sugiere la definición siguiente.

**Definición 3.1.2.** Sea $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Decimos que $u$ es **débilmente diferenciable en** $\Omega$ si existen $v_1,\dots,v_n \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i\varphi = 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y toda $i \in \{1,\dots,n\}$. Cada $v_i$ se denomina ***i*–ésima derivada débil de** $u$ **en** $\Omega$ y se denota por $D_i u$.

Los operadores diferenciales construidos a partir de derivadas parciales admiten entonces una versión débil.

En particular, pueden definirse el gradiente débil, el laplaciano débil y, de manera análoga, operadores de orden superior.

**Observación 3.1.3.** Si $v, w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfacen

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v\varphi \quad \text{y} \quad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega w\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

entonces $v = w$ c.t.p. (por la Proposición B.6.20).

La derivada débil coincide con la derivada clásica cuando ésta existe. Si $u \in C^1(\Omega)$, la Proposición 3.1.1 da

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

de modo que $u$ es débilmente diferenciable y

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Las derivadas débiles satisfacen las propiedades elementales siguientes.

**Proposición 3.1.4.** (a) Si $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ son débilmente diferenciables y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u + \mu v$ es débilmente diferenciable y

$$D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en $\Omega$ y $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces la extensión trivial de $\zeta u$ es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y

$$D_i(\zeta u) = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} u + \zeta D_i u$$

*Demostración.* (a) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[ (\lambda u + \mu v) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (\lambda D_i u + \mu D_i v)\varphi \right] = \lambda \int_\Omega \left[ u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (D_i u)\varphi \right] + \mu \int_\Omega \left[ v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (D_i v)\varphi \right] = 0$$

donde hemos usado que $u$ y $v$ son débilmente diferenciables en la segunda igualdad. Esto prueba que $\lambda u + \mu v$ es débilmente diferenciable y $D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v$.

(b) Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\zeta\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \zeta u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^n} \left( \zeta D_i u + u \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) \varphi = \int_\Omega u \frac{\partial (\zeta\varphi)}{\partial x_i} + \int_\Omega (D_i u)(\zeta\varphi) = 0.$$

□

Una función cuyas derivadas débiles se anulan conserva la propiedad de constancia de las funciones diferenciables con diferencial nulo.

**Lema 3.1.5.** (Funciones con derivadas débiles nulas) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ débilmente diferenciable. Si

$$D_j v = 0 \qquad \text{casi en todas partes en } \Omega, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \tag{3.1}$$

entonces $v$ es constante casi en todas partes en cada componente conexa de $\Omega$.

*Demostración.* Basta considerar el caso en que $\Omega$ es conexo y no vacío. Fijemos una bola $B = B_{\mathrm{euc}}(x_0, r)$ con $\overline{B} \subseteq \Omega$. Elegimos $R > r$ de modo que $\overline{B_{\mathrm{euc}}(x_0, R)} \subseteq \Omega$. Sea $\rho$ el molificador del Teorema B.9.1 y, para $0 < \varepsilon < R - r$, definamos

$$v_\varepsilon(x) := \int_\Omega v(y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy, \qquad x \in B.$$

Para cada $x \in B$, la función $y \mapsto \rho_\varepsilon(x-y)$ tiene soporte compacto en $B_{\mathrm{euc}}(x_0, R)$. La integrabilidad local de $v$ y el inciso (a) del teorema citado permiten derivar bajo la integral. Aplicando la definición de derivada débil a esta función de prueba, obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_j v_\varepsilon(x) &= \int_\Omega v(y)\partial_{x_j}\rho_\varepsilon(x-y)\,dy \\ &= -\int_\Omega v(y)\partial_{y_j}\rho_\varepsilon(x-y)\,dy \\ &= \int_\Omega D_j v(y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $v_\varepsilon$ es suave y tiene diferencial nulo en la bola conexa $B$, de modo que $v_\varepsilon = c_\varepsilon$ en $B$ para alguna constante $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$.

El inciso (b) del Teorema B.9.1, aplicado con $p = 1$ y el compacto $\overline{B}$, da $v_\varepsilon \to v$ en $L^1(B)$. Pongamos

$$c_B := \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B v\, d\lambda_n.$$

Como $v_\varepsilon = c_\varepsilon$ en $B$,

$$|c_\varepsilon - c_B| \le \frac{1}{\lambda_n(B)} \|v_\varepsilon - v\|_{L^1(B)} \longrightarrow 0.$$

En consecuencia,

$$\|v - c_B\|_{L^1(B)} \le \|v - v_\varepsilon\|_{L^1(B)} + \lambda_n(B)|c_\varepsilon - c_B| \longrightarrow 0,$$

y $v = c_B$ casi en todas partes en $B$.

Si dos bolas relativamente compactas en $\Omega$ se intersecan, su intersección es un abierto no vacío y tiene medida positiva. Las constantes correspondientes coinciden, pues ambas son iguales a $v$ casi en todas partes en esa intersección. Así, podemos definir $c(x) := c_B$ usando cualquier bola $B \Subset \Omega$ que contenga a $x$. Esta función está bien definida y es localmente constante. Por la conexidad de $\Omega$, tiene un único valor $c \in \mathbb{R}$.

Finalmente, la segunda numerabilidad de $\Omega$ permite escoger una cubierta numerable por tales bolas. En cada una, $v = c$ fuera de un conjunto de medida cero; la unión numerable de esos conjuntos también tiene medida cero. Por lo tanto, $v = c$ casi en todas partes en $\Omega$. □

## 3.2 Espacios de Sobolev

La noción de derivada débil permite definir los espacios de Sobolev sobre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

**Definición 3.2.1.** Sea $p \in [1,\infty]$. El **espacio de Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega \text{ y } D_i u \in L^p(\Omega) \text{ para toda } i \in \{1,\dots,n\}\}.$$

La estructura normada se introduce de la manera siguiente.

**Definición 3.2.2.** Sea $p \in [1,\infty]$. Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \begin{cases} (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in [1,\infty) \\ \max\{\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|D_1 u\|_{L^\infty(\Omega)}, \dots, \|D_n u\|_{L^\infty(\Omega)}\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

La expresión anterior define una norma en $W^{1,p}(\Omega)$.

**Proposición 3.2.3.** $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial real y $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ es una norma en $W^{1,p}(\Omega)$ para toda $p \in [1,\infty]$.

*Demostración.* Por la Proposición 3.1.4, tenemos que $W^{1,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L^p(\Omega)$, por lo que es un espacio vectorial. Ahora, dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, si $u = 0$, entonces $D_i u = 0$ para toda $i \in \{1,\dots,n\}$, por lo que $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$. Recíprocamente, si $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$, como $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, entonces $u = 0$ en $L^p(\Omega)$.
Se tiene $\|\lambda u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = |\lambda|\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para cualesquiera $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
Finalmente, si $p \in [1,\infty)$, aplicando primero la desigualdad de Minkowski en $L^p(\Omega)$, contenida en el Teorema B.7.3, y luego la desigualdad del triángulo para la norma $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, obtenemos que, para cualesquiera $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{W^{1,p}(\Omega)} &\leq \left( (\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)})^p + \sum_{i=1}^n (\|D_i u\|_{L^p(\Omega)} + \|D_i v\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \|v\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|D_i v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Si $p = \infty$, la desigualdad del triángulo se sigue de manera totalmente análoga de la desigualdad del triángulo para la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $L^\infty(\Omega)$ y la correspondiente a la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. □

Tenemos el siguiente lema que resultará sumamente útil para trabajar con espacios de Sobolev, ya sea en espacios euclidianos o posteriormente en variedades riemannianas.

**Lema 3.2.4.** Sean $p \in [1,\infty]$ y $(u_k)$ una sucesión en $W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_i u_k \to v_i$ en $L^p(\Omega)$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Entonces $u$ es débilmente diferenciable en $\Omega$, $v_i = D_i u$ para toda $i \in \{1,\dots,n\}$ y $u_k \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

*Demostración.* Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^q(\Omega)$ para toda $q \in [1,\infty]$. Sea $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ si $p \in (1,\infty)$, $q = 1$ si $p = \infty$ y $q = \infty$ si $p = 1$. Por la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9), tenemos que

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_\Omega u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq \|u - u_k\|_{L^p(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^q(\Omega)} \to 0 \text{ si } k \to \infty,$$

$$\left| \int_\Omega v_i \varphi - \int_\Omega (D_i u_k)\varphi \right| \leq \|v_i - D_i u_k\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \to 0 \text{ si } k \to \infty.$$

En consecuencia,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i \varphi = \lim_{k\to\infty} \left( \int_\Omega u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega (D_i u_k)\varphi \right) = 0$$

para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Esto prueba que $u$ es débilmente diferenciable en $\Omega$ y que $v_i = D_i u$. En consecuencia, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Además, si $p \in [1,\infty)$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \lim_{k\to\infty} \|D_i u_k - D_i u\|^p_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Si $p = \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} &= \lim_{k\to\infty} \max \left\{ \|u_k - u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|D_1 u_k - D_1 u\|_{L^\infty(\Omega)}, \dots, \|D_n u_k - D_n u\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por la continuidad de la función max y las convergencias supuestas en $L^\infty(\Omega)$. □

El lema anterior nos ayuda a demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.5.** El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es de Banach para toda $p \in [1,\infty]$.

*Demostración.* Sea $(u_k)$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces las sucesiones $(u_k)$ y $(D_i u_k)$ son de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ es completo, se tiene que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_i u_k \to v_i$ en $L^p(\Omega)$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Por el Lema 3.2.4, se sigue que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $u_k \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Esto prueba que $W^{1,p}(\Omega)$ es completo y como ya era un espacio normado por la Proposición 3.2.3, concluimos que es un espacio de Banach. □

Resulta que además de ser espacios de Banach, para $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, por lo que se usa la notación $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$. Esto lo dejaremos plasmado como una proposición.

**Proposición 3.2.6.** Si $p = 2$, $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (D_i u)(D_i v) = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

*Demostración.* Tenemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ es bilineal por la linealidad de la integral, la distributividad del producto de funciones real-valuadas y la bilinealidad del producto interno en $R^n$ y es simétrico pues el producto de funciones real-valuadas es conmutativo y el producto punto es simétrico en $\mathbb{R}^n$. Basta ver que si $\langle v, v \rangle = 0$, entonces $v = 0$. Supongamos que $\langle v, v \rangle = 0$, entonces

$$\int_\Omega v^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2 = 0.$$

Como ambos sumandos son no negativos, concluimos que ambos valen 0, de donde $\int_\Omega v^2 = 0$ y por lo tanto $v = 0$ casi en todas partes, es decir, $v = 0$ en $L^2(\Omega)$ y por lo tanto $v = 0$ en $W^{1,2}(\Omega)$. □

**Observación 3.2.7.** $C_c^\infty(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ para toda $p \in [1, \infty)$ pues toda función de clase $C_c^\infty(\Omega)$ es débilmente diferenciable y sus derivadas parciales son continuas y tienen soporte compacto, por lo que pertenecen a $L^p(\Omega)$.

El espacio $C_c^\infty(\Omega)$ conduce a una cuestión básica del análisis de Sobolev: ¿en qué condiciones una función de Sobolev puede aproximarse por funciones suaves con soporte compacto? Sabemos que, en general, una función de Sobolev no es necesariamente diferenciable de manera clásica; sin embargo, bajo hipótesis adecuadas sobre el dominio, es posible aproximar estas funciones por elementos de $C_c^\infty(\Omega)$. A este tipo de cuestiones se les denomina *problemas de aproximación*, y constituyen una herramienta esencial tanto en la teoría abstracta como en las aplicaciones a ecuaciones diferenciales parciales. Es por ello que damos la siguiente definición:

**Definición 3.2.8.** Sea $p \in [1, \infty)$. Definimos el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Denotamos por

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega).$$

**Observación 3.2.9.** La notación anterior tiene sentido pues $W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,2}(\Omega)}$ es un subespacio vectorial cerrado de $W^{1,2}(\Omega)$ el cual es un espacio de Hilbert, por lo que $H_0^1(\Omega)$ también resulta ser un espacio de Hilbert.

En el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ no aparecen obstrucciones de frontera. El argumento combina cortes que se alejan hacia el infinito con la regularización por molificadores, y será el modelo de la demostración en variedades riemannianas completas.

**Proposición 3.2.10.** $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para toda $p \in [1, \infty)$.

*Demostración.* Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Por la Proposición 1.3.6 existe $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ en $B_{\text{euc}}(0,1)$ y $\operatorname{supp} \chi \subseteq B_{\text{euc}}(0,2)$. Para $R \geq 1$ ponemos

$$\chi_R(x) := \chi\left(\frac{x}{R}\right), \qquad u_R := \chi_R u.$$

La regla de Leibniz débil da

$$D_i u_R = \chi_R D_i u + u D_i \chi_R.$$

En efecto, si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, aplicamos la definición de derivada débil de $u$ a $\chi_R\varphi$ y desarrollamos $D_i(\chi_R\varphi)$. Así, no se presupone una regla del producto no demostrada.
Como $\chi_R(x) \to 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $|1-\chi_R| \leq 1$, el Teorema de convergencia dominada B.6.14 aplicado a $|u|^p$ y $|D_i u|^p$ muestra que

$$\|(1-\chi_R)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|(1-\chi_R)D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

Además,

$$\|uD_i\chi_R\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\|D_i\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{R}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $u_R \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Fijemos ahora $R$. Sea $\rho$ el molificador del Teorema B.9.1 y definamos $u_{R,\varepsilon} := \rho_\varepsilon * u_R$. Entonces $u_{R,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y, por Fubini B.6.18 y la definición de derivada débil,

$$D_i u_{R,\varepsilon} = \rho_\varepsilon * D_i u_R.$$

La continuidad de las traslaciones de la Proposición B.8.17, la desigualdad integral de Minkowski del Teorema B.8.2 y el Teorema de convergencia dominada B.6.14 implican, para todo $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\|v(\cdot - \varepsilon z) - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dz \longrightarrow 0.$$

Aplicamos esta estimación a $v = u_R$ y a $v = D_i u_R$ para concluir que $u_{R,\varepsilon} \to u_R$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Elegir primero $R \to \infty$ y después $\varepsilon \to 0^+$, o tomar una sucesión diagonal, concluye la prueba. □

## 3.3 Encajes de Sobolev

Por definición los espacios de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ están contenidos en $L^p(\Omega)$. Una pregunta interesante es: ¿para qué otros valores $q$ se cumple que $W_0^{1,p}(\Omega)$ está contenido de manera continua en $L^q(\Omega)$?

Para responder esta pregunta, la herramienta fundamental son ciertas desigualdades que permiten estimar la norma en $L^q(\mathbb{R}^n)$ de una función $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ en términos de la norma en $(L^p(\mathbb{R}^n))^n$ de su gradiente. A este tipo de desigualdades se les suele llamar *desigualdades de Sobolev*.

Comenzaremos dando una norma para el espacio producto

$$(L^p(\mathbb{R}^n))^n := L^p(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^p(\mathbb{R}^n)$$

con $p \in [1,\infty)$. Dicha norma está dada por

$$\|(f_1,\ldots,f_n)\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} := \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora consideremos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) \in (L^p(\mathbb{R}^n))^n$$

para toda $p \in [1,\infty)$.

Nos preguntamos para qué números $p, q \in [1, \infty)$ es posible acotar uniformemente a $\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ en términos de $\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}$. Veamos primero que $p$ y $q$ no pueden ser arbitrarios.

**Proposición 3.3.1.** Sean $p, q \in [1, \infty)$. Si existe una constante $C > 0$ que depende únicamente de $n$, $p$ y $q$ tal que

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $p < n$ y $q = \dfrac{np}{n-p}$.

*Demostración.* Para cada $\lambda > 0$, $\psi(x) = \lambda x$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo de clase $C^\infty$ tal que $|\det(D\psi)| = |\lambda^n| = \lambda^n$. Por el Teorema B.6.15,

$$\|\varphi_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \frac{1}{\lambda^n}\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q,$$

y

$$\left\|\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \frac{\lambda^p}{\lambda^n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Aplicando la hipótesis a $\varphi_\lambda$ obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}}\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}}\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n},$$

es decir,

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}.$$

Podemos tomar el límite cuando $\lambda \to 0^+$ si $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} > 0$ o $\lambda \to \infty$ si $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} < 0$ y notar que si $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} \neq 0$, la desigualdad anterior no se satisface para ninguna $\varphi \neq 0$ pues tendríamos que $\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0$.
Entonces debemos tener que $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} = 0$ lo cual implica $\dfrac{n}{p} > 1$ y $q = \dfrac{np}{n-p}$. □

Dicho valor de $q$ resulta relevante para la teoría de espacios de Sobolev, por lo que recibe un nombre especial.

**Definición 3.3.2.** Si $p \in [1, n)$ se define el exponente crítico de Sobolev como

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Además, $p^* > p$.

De hecho, la desigualdad con la norma del gradiente se cumple para $p \in [1, n)$ y $q = p^*$ lo cual demostraremos a continuación. Para ello necesitamos un lema primero.

**Lema 3.3.3.** Sean $n \geq 2$ y $f_1, \ldots, f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotamos por $\hat{x}_i := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ y definimos

$$f(x) := \prod_{i=1}^n f_i(\hat{x}_i)$$

Entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

*Demostración.* Haremos la demostración por inducción sobre $n$. Si $n = 2$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1,x_2)|dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_2)f_2(x_1)|dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_2)||f_2(x_1)|dx_1dx_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2)|dx_2 \int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1)|dx_1.$$

Supongamos que la afirmación se cumple para cierto $n \geq 2$ y veamos que se cumple para $n+1$.
Sean $f_1,\ldots,f_{n+1} \in L^n(\mathbb{R}^n)$. Fijemos el valor de $x_{n+1}$ y definamos

$$g_i(z_1,\ldots,z_{n-1}) := |f_i(z_1,\ldots,z_{n-1},x_{n+1})|^{\frac{n}{n-1}}, i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Por el Teorema B.6.18, tenemos que $g_i \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ para casi toda $x_{n+1}$ (por el teorema de Fubini con $m = n-1$) de modo que por la hipótesis de inducción concluimos que la función

$$g(y) := \prod_{i=1}^{n} g_i(\hat{y}_i) = \prod_{i=1}^{n} |f_i(\hat{y}_i,x_{n+1})|^{\frac{n}{n-1}} = \left(\prod_{i=1}^{n} |f_i(\hat{y}_i,x_{n+1})|\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$y \in \mathbb{R}^n$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|g_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(z,x_{n+1})|^n dz\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Se tiene

$$|f(y,x_{n+1})| = \left(\prod_{i=1}^{n} |f_i(\hat{y}_i,x_{n+1})|\right) |f_{n+1}(y)| = |g(y)|^{\frac{n-1}{n}} |f_{n+1}(y)|.$$

Usando la Proposición B.7.9 (desigualdad de Hölder) y la desigualdad anterior para $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, obtenemos lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y,x_{n+1})|dy \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n-1}{n}} \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(z,x_{n+1})|^n dz\right)^{\frac{1}{n}} \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}.$$

Lo anterior es válido para casi todo $x_{n+1}$, por lo que las funciones

$$h_i(x_{n+1}) := \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(z,x_{n+1})|^n \, dz\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad i \in \{1,\ldots,n\},$$

pertenecen a $L^n(\mathbb{R})$. En efecto, por Tonelli,

$$\|h_i\|_{L^n(\mathbb{R})}^n = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(z,x_{n+1})|^n \, dz \, dx_{n+1}$$
$$= \|f_i\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^n.$$

Como cada $h_i \in L^n(\mathbb{R})$, podemos aplicar la Proposición B.7.9 con $n$ factores y todos los exponentes iguales a $n$. Así,

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} |h_i(x_{n+1})|\, dx_{n+1} \leq \prod_{i=1}^{n} \|h_i\|_{L^n(\mathbb{R})}.$$

Anteriormente vimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y, x_{n+1})| dy \leq \prod_{i=1}^{n} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(z, x_{n+1})|^n dz \right)^{\frac{1}{n}} \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}.$$

Integrando esta desigualdad respecto a $x_{n+1}$ y usando la desigualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(x)|\, dx &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} |h_i(x_{n+1})|\, dx_{n+1} \right) \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left( \prod_{i=1}^{n} \|h_i\|_{L^n(\mathbb{R})} \right) \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. □

**Teorema 3.3.4.** Existen constantes $C > 0$, que dependen únicamente de $n$ y $p$, con las siguientes propiedades:

(a) Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev: Si $p \in [1, n)$, entonces

$$\|\varphi\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla \varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Si $p \in (n, \infty)$ entonces

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(\lambda_n(\operatorname{supp}(\varphi)))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla \varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ donde $\lambda_n(\operatorname{supp}(\varphi))$ denota la medida de Lebesgue del soporte de $\varphi$.

*Demostración.* Comenzamos suponiendo $n \geq 2$; el caso $n = 1$ del inciso (b) se trata por separado al final de la prueba. Sea $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Como $\varphi$ tiene soporte compacto, por el Teorema B.6.5,

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) dt$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y en consecuencia

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \right| dt$$

Como $n \geq 2$, podemos definir

$$f_i(z_1,\dots,z_{n-1}) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(z_1,\dots,z_{i-1},t,z_i,\dots,z_{n-1})\right| dt\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

La función $f_i$ está bien definida porque $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.
Entonces $f_1,\dots,f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ pues

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(z)|^{n-1} dz = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(z_1,\dots,z_{i-1},t,z_i,\dots,z_{n-1})\right| dt\right)^{\frac{1}{n-1}}\right|^{n-1} dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\right| dx < \infty$$

pues $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in C_c^0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$.
Además, lo anterior nos dice que

$$\|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Elevando las desigualdades

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_n)\right| dt$$

a la $\dfrac{1}{n-1}$ y tomando el producto de todas ellas obtenemos:

$$|\varphi(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} f_i(\hat{x}_i)$$

donde $\hat{x}_i$ omite la $i$-ésima entrada de $x$. Aplicando el Lema 3.3.3, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{n}{n-1}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(\hat{x}_i)\right) \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \prod_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}$$

Por lo tanto

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}$$

Ahora, por la desigualdad media aritmética-media geométrica obtenemos

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{n}\|\nabla\varphi\|_{(L^1(\mathbb{R}^n))^n}.$$

La desigualdad anterior también es válida para funciones $\varphi$ definidas en $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto de clase $C^1$ en un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$.
Por otra parte, para cada $\gamma > 1$, consideremos la función $\widetilde{\varphi}(x) = |\varphi(x)|^{\gamma-1}\varphi(x)$, dicha función tiene soporte compacto, es continua (al menos) y de clase $C^1$ en $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}$ el cual resulta ser abierto pues $\varphi$ es

continua, y acotado pues $\operatorname{supp}(\varphi)$ es compacto.
Sus derivadas parciales en dicho abierto son

$$\frac{\partial(|\varphi|^{\gamma-1}\varphi)}{\partial x_i} = \frac{\partial(|\varphi|^{\gamma-1})}{\partial x_i}\varphi + |\varphi|^{\gamma-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = (\gamma-1)|\varphi|^{\gamma-2}\frac{\varphi}{|\varphi|}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\varphi + |\varphi|^{\gamma-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|\varphi|^{\gamma-1}$$

que resulta ser continua en $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \varphi(x)\neq 0\}$ por lo que $\widetilde{\varphi}$ es de clase $C^1$ al menos en $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \varphi(x)\neq 0\}$.
En el exterior de $\operatorname{supp}(\varphi)$, $\widetilde{\varphi}\equiv 0$ por lo que ahi también es de clase $C^1$. Basta ver qué sucede en los puntos frontera.
De hecho, la función $\psi\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = x|x|^{\gamma-1}$ es de clase $C^1$ pues para $x<0$, $\psi'(x) = \gamma(-x)^{\gamma-1}$ y para $x>0$, $\psi'(x) = \gamma x^{\gamma-1}$. Por la Proposición B.1.1 tenemos que $\psi$ es derivable en 0 y $\psi'(0)=0$. Además como las derivadas de $\psi$ son continuas salvo quizás en el 0, por cómo está dada la derivada en 0, $\psi\in C^1(\mathbb{R})$.
Por lo tanto $\widetilde{\varphi}$ resulta ser de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$ por ser composición de funciones de clase $C^1$, con lo que tenemos que $\widetilde{\varphi}\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.
Por otro lado, el valor absoluto de esta derivada parcial es (donde es distinta de 0):

$$\left|\frac{\partial(|\varphi|^{\gamma-1}\varphi)}{\partial x_i}\right| = \left|(\gamma-1)|\varphi|^{\gamma-2}\frac{\varphi}{|\varphi|}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\varphi + |\varphi|^{\gamma-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| =$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|\left|(\gamma-1)|\varphi|^{\gamma-1} + |\varphi|^{\gamma-1}\right| = \gamma|\varphi|^{\gamma-1}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|$$

Reemplazando a $\varphi$ por $|\varphi|^{\gamma-1}\varphi$ en la desigualdad

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}$$

y, para $1<p<\infty$, aplicando la desigualdad de Hölder de la Proposición B.7.9 obtenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi|^{\frac{n\gamma}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi|^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\prod_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}.$$

La desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, seguida de la equivalencia de las normas finito-dimensionales de la Proposición B.1.2, da

$$\prod_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = \|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}.$$

Usaremos las desigualdades anteriores para probar las afirmaciones del teorema.

(a) Supongamos que $p\in[1,n)$. Si $p=1$, entonces $p^* = \dfrac{n}{n-1}$ y la desigualdad

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{n}\|\nabla\varphi\|_{(L^1(\mathbb{R}^n))^n}$$

que ya demostramos es la deseada.

Si $p\neq 1$, tomamos $\gamma := \dfrac{n-1}{n}p^* = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{np}{n-p} = \dfrac{np-p}{n-p} > 1$ pues $1<p<n$ implica $n<np<n^2$ de donde

$n < np$, por lo que $np - p > n - p$ y se sigue lo buscado.

Entonces podemos aplicar la desigualdad anterior que dedujimos para $\gamma > 1$, para ello, calcularemos primero $\frac{p(\gamma-1)}{p-1} = \frac{p(\frac{np-p}{n-p} - \frac{n-p}{n-p})}{p-1} = \frac{p(\frac{n(p-1)}{n-p})}{p-1} = \frac{pn}{n-p} =: p^*$, $\frac{n\gamma}{n-1} = p^*$ y $\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{pn-p-np+n}{np} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*}$ por lo que la desigualdad para $\gamma > 1$ nos dice lo siguiente:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \gamma \|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}$$

que es lo mismo que

$$\|\varphi\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma \|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}$$

que es lo que se quería demostrar.

(b) Supongamos que $p \in (n, \infty)$. Si $n = 1$, la desigualdad

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(t)|\, dt$$

junto con la Proposición B.7.12, con $X = \operatorname{supp}(\varphi)$, implican que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\varphi'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \lambda_1(\operatorname{supp}(\varphi))^{\frac{p-1}{p}} \|\varphi'\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

la cual es la desigualdad buscada si notamos que $\frac{1}{n} - \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$.

Si $n \geq 2$, consideremos primero el caso en el que $\lambda_n(\operatorname{supp}(\varphi)) = 1$ y $\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} = 1$. De la desigualdad para $\gamma > 1$ y Hölder sobre el soporte de medida uno, con exponentes $\frac{\gamma}{\gamma-1}$ y $\gamma$, se sigue que:

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n\gamma}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p\gamma}} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}} (\|\varphi\|_{L^{\frac{p\gamma}{p-1}}(\mathbb{R}^n)})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

para toda $\gamma > 1$.

Tomemos $\gamma := \frac{n}{n-1}\frac{p-1}{p}$. Como $p > n$ y $n \geq 2$, se cumple $p > p-1 > n-1 \geq 1$ pues $p > n$ y $n \geq 2$. Por otro lado, $p > n$ implica $-n > -p$ por lo que sumando $np$ a esta desigualdad obtenemos $np - n > np - p$ lo cual es equivalente a $n(p-1) > p(n-1)$. Como $n - 1 > 0$ y $p > 0$ podemos dividir entre $p(n-1)$ sin alterar la desigualdad para obtener $\frac{n(p-1)}{p(n-1)} > 1$, es decir, $\gamma > 1$.

Ahora, para $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $\gamma^k = (\frac{n}{n-1}\frac{p-1}{p})^k = (\frac{n}{n-1})^k(\frac{p-1}{p})^k$ y además $\gamma^{k-1} = (\frac{n}{n-1}\frac{p-1}{p})^{k-1} = (\frac{n}{n-1})^{k-1}(\frac{p-1}{p})^{k-1}$ de donde $\frac{p}{p-1}\gamma^k = \frac{n}{n-1}\gamma^{k-1}$.

Luego, sustituyendo $\gamma$ por $\gamma^k$ en la desigualdad anterior, obtenemos lo siguiente:

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma^k}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma^{\frac{k}{\gamma^k}} (\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma^{k-1}}(\mathbb{R}^n)})^{\frac{\gamma^k-1}{\gamma^k}}.$$

Por la Proposición B.7.13 y la desigualdad

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{n}\|\nabla\varphi\|_{(L^1(\mathbb{R}^n))^n}$$

obtenemos

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{n}\|\nabla\varphi\|_{(L^1(\mathbb{R}^n))^n} \leq \frac{1}{n}(n\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)))^{\frac{p-1}{p}}\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}$$

donde lo último es igual a lo siguiente usando que $\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)) = 1$ y $\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} = 1$:

$$\frac{1}{n}(n\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)))^{\frac{p-1}{p}}\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} = \frac{n^{\frac{p-1}{p}}}{n} = n^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} < 1.$$

Por lo tanto

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{n}\|\nabla\varphi\|_{(L^1(\mathbb{R}^n))^n}$$

obtenemos

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{n}\|\nabla\varphi\|_{(L^1(\mathbb{R}^n))^n} \leq \frac{1}{n}(n\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)))^{\frac{p-1}{p}}\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} < 1.$$

Si $\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma^k}(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ para una infinidad de $k \in \mathbb{N}$, la Proposición B.7.14 nos dice que $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1$. Si por el contrario existe $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma^{k_0}}(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ y $\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma^k}(\mathbb{R}^n)} > 1$ para toda $k > k_0$, entonces, para toda $k > k_0 + 1$ tenemos que $\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma^{k-1}}(\mathbb{R}^n)} > 1$ y usando el hecho de que $0 < \dfrac{\gamma^k - 1}{\gamma^k} < 1$ tenemos que

$$(\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma^{k-1}}(\mathbb{R}^n)})^{\frac{\gamma^k-1}{\gamma^k}} \leq \|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma^{k-1}}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $k > k_0 + 1$.

Iterando la desigualdad que habíamos obtenido anteriormente y combinándolo con la desigualdad anterior obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma^k}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma^{\left(\frac{k}{\gamma^k}+\cdots+\frac{k_0+1}{\gamma^{k_0+1}}\right)}(\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma^{k_0}}(\mathbb{R}^n)})^{\frac{\gamma^{k_0+1}-1}{\gamma^{k_0+1}}} \leq \gamma^\alpha$$

donde $\alpha := \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{\gamma^i} < \infty$ pues para cada $i \geq 1$, $\dfrac{\left|\frac{i+1}{\gamma^{i+1}}\right|}{\left|\frac{i}{\gamma^i}\right|} = \frac{i+1}{i\gamma} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{i\gamma} \to \frac{1}{\gamma}$ si $i \to \infty$ y $\dfrac{1}{\gamma} < 1$ pues $\gamma > 1$ por lo que por el criterio del cociente, la serie es convergente.

Por la Proposición B.7.14, obtenemos que $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma^\alpha$. Así, en cualquier caso,

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma^\alpha = \gamma^\alpha(\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)))^{\frac{p-n}{np}}\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}$$

suponiendo que $\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)) = 1$ y $\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} = 1$ donde hemos usado que $\gamma^\alpha > 1$.

Ahora obtendremos la desigualdad deseada en el caso general:

Si $\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)) = 0$ o $\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} = 0$, entonces $\varphi = 0$ casi en todas partes y la desigualdad se satisface de manera inmediata.

Si $\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)) \neq 0$ y $\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} \neq 0$, podemos considerar la función $\theta := \dfrac{\psi}{\|\nabla\psi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}}$ donde $\psi(x) := \varphi(\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi))^{\frac{1}{n}}x)$. Se tiene $\mathrm{supp}(\theta) = \mathrm{supp}(\psi)$ y $\mathrm{supp}(\psi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) \neq 0\}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi((\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)))^{\frac{1}{n}}x) \neq 0\} = \mathrm{supp}(\varphi \circ g)$ donde $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está dado por $g(x) = (\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)))^{\frac{1}{n}}x$ es un difeomorfismo de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $g$ es un homeomorfismo, $\mathrm{supp}(\varphi \circ g) = g^{-1}(\mathrm{supp}(\varphi))$; por el Teorema B.6.15, teniendo en cuenta que $|\det Dg^{-1}| = \dfrac{1}{\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi))}$ obtenemos que

$$\lambda_n(g^{-1}(\mathrm{supp}(\varphi))) = \int_{g^{-1}(\mathrm{supp}(\varphi))} 1 = \frac{1}{\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi))}\int_{\mathrm{supp}(\varphi)} 1 = 1$$

por lo tanto, $\lambda_n(\mathrm{supp}(\theta)) = \lambda_n(\mathrm{supp}(\psi)) = 1$.

Además,

$$\nabla\psi(x) = \lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi))^{\frac{1}{n}}\nabla\varphi(g(x)).$$

El Teorema B.6.15 da

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \circ g\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi))^{-1}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Por consiguiente,

$$\|\nabla\varphi \circ g\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} = \lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi))^{-\frac{1}{p}}\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n},$$

y por lo tanto

$$\|\nabla\psi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} = \lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} = \lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi))^{\frac{p-n}{np}}\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}.$$

Por otro lado, $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, así, podemos aplicar lo anterior a $\theta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ para obtener:

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma^\alpha\|\nabla\psi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} = \gamma^\alpha(\lambda_n(\mathrm{supp}(\varphi)))^{\frac{p-n}{np}}\|\nabla\varphi\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}$$

que es lo que se quería demostrar.

□

Para $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ escribiremos $\nabla u = (D_1u, \ldots, D_nu)$ y

$$\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n} := \left(\sum_{i=1}^n \|D_iu\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La extensión de la desigualdad anterior al espacio completado queda recogida en el siguiente corolario.

**Corolario 3.3.5.** Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y $p \in [1, n)$, entonces $W^{1,p}_0(\Omega) \subseteq L^{p^*}(\Omega)$ y existe una constante $C > 0$, que depende únicamente de $n$ y $p$, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$$

para todo $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

*Demostración.* La desigualdad de Gagliardo–Nirenberg–Sobolev muestra que el operador inclusión

$$I_0 \colon C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$

es lineal y satisface $\|I_0\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$ y $L^{p^*}(\Omega)$ es de Banach, el Teorema B.2.36 proporciona una única extensión continua $I \colon W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.
Resta identificar $Iu$ con el representante usual de $u$ y conservar la estimación en términos del gradiente. Sea $(\varphi_k) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ una sucesión que converge a $u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $\varphi_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\varphi_k \to Iu$ en $L^{p^*}(\Omega)$. El Teorema B.7.15, aplicado a subsucesiones, muestra que ambos límites coinciden casi en todas partes. Además,

$$\|Iu\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \lim_{k\to\infty} \|\nabla\varphi_k\|_{(L^p(\Omega))^n} = C\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}.$$

Por consiguiente, $u \in L^{p^*}(\Omega)$, la extensión coincide con la inclusión canónica y se obtiene la desigualdad anunciada. □

El corolario anterior, combinado con la interpolación entre $L^p$ y $L^{p^*}$, produce el primer encaje continuo de Sobolev del capítulo:

**Teorema 3.3.6.** (de encaje de Sobolev) Si $\Omega$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $p \in [1, n)$, entonces

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$$

para toda $q \in [p, p^*]$ y esta inclusión es continua.

*Demostración.* El Corolario 3.3.5 afirma que $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^{p^*}(\Omega)$ y que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Como además $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ y $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, el Teorema B.7.16 asegura que $u \in L^q(\Omega)$ para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $q \in [p, p^*]$ y que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\alpha} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{\alpha} \leq C^\alpha \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{1-\alpha} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\alpha} = C^\alpha \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

donde $\alpha \in [0,1]$ cumple que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\alpha}{p} + \dfrac{\alpha}{p^*}$. Esto prueba que $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ y que esta inclusión es continua. □

Cuando $\Omega$ está acotado, es posible acotar a $\|u\|_{L^q(\Omega)}$ en términos de $\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$ y de la medida de $\Omega$ para un rango mayor de valores de $p$ y $q$. La siguiente desigualdad se conoce como la desigualdad de Poincaré.

**Teorema 3.3.7.** (Desigualdad de Poincaré) Sea $\Omega$ un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Existe una constante $C > 0$ que depende sólo de $n$, $p$ y $q$, tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, si alguna de las tres condiciones se satisface:

(a) $p \in [1,n)$ y $q \in [1,p^*]$.

(b) $p = n$ y $q \in [1,\infty)$.

(c) $p \in (n,\infty)$ y $q \in [1,\infty]$.

En consecuencia:

- Si $p \in [1,n)$ entonces $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ para cada $q \in [1,p^*]$ y la inclusión es continua.
- $W_0^{1,n}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ para cada $q \in [1,\infty)$ y la inclusión es continua.
- Más aún, si $p \in (n,\infty)$, entonces, módulo la elección de un representante, $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq C^0(\overline{\Omega})$ y la inclusión es continua.

*Demostración.* (a) Si $p \in [1,n)$ y $q \in [1,p^*]$, aplicando la desigualdad del Corolario 3.3.5 y la Proposición B.7.17 obtenemos que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq (\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(b) Si $n = 1$, para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ la extensión por cero y el teorema fundamental del cálculo dan $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\varphi'\|_{L^1(\Omega)}$. Por Hölder,

$$\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq \lambda_1(\Omega)^{\frac{1}{q}} \|\varphi'\|_{L^1(\Omega)}.$$

La aproximación por funciones de prueba extiende esta estimación a $W_0^{1,1}(\Omega)$ y prueba el inciso en dimensión uno. Supongamos ahora $n \geq 2$. Sean $p = n$ y $q \in [1,\infty)$. Si $n = 1$, por la desigualdad

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(t)|\, dt$$

tenemos que

$$\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq \lambda_1(\Omega)^{\frac{1}{q}} \|\varphi'\|_{L^1(\Omega)}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Argumentando como en el Corolario 3.3.5, concluimos que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq (\lambda_1(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|Du\|_{L^1(\Omega)}$$

para toda $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$.

Si $n \geq 2$ definimos $r := \max\{\frac{nq}{n+q}, 1\}$. El número $r$ pertenece a $[1,n)$ pues $n^2 > 0$ implica $n^2 + nq > nq$ por lo que $\frac{nq}{n+q} < n$. Además, $r^* = q$ si $r = \frac{nq}{n+q}$ y que $q \leq \frac{n}{n-1}$ si $r = 1$. Entonces, por $(a)$, la Proposición B.7.17 y la Proposición B.7.13, se sigue que para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^r(\Omega))^n} \leq Cn^{\frac{1}{q}} (\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|\nabla u\|_{(L^n(\Omega))^n}$$

si $r = \dfrac{nq}{n+q}$ y

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq (\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{q}-\frac{n-1}{n}} \|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq C(\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{q}-\frac{n-1}{n}} \|\nabla u\|_{(L^1(\Omega))^n} \leq C n^{\frac{n-1}{n}} (\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|\nabla u\|_{(L^n(\Omega))^n}$$

si $r = 1$.

(c) Sean $p \in (n, \infty)$ y $q \in [1, \infty]$. De la segunda desigualdad del Teorema 3.3.4, aplicada a la extensión por cero, se sigue que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla \varphi\|_{(L^p(\Omega))^n}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Ahora, recordemos que $(C^0(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0(\overline{\Omega})})$ es un espacio de Banach (pues $\Omega$ está acotado y por lo tanto $\overline{\Omega}$ es compacto), por lo que argumentando como en el Corolario 3.3.5, se prueba que cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ coincide casi en todas partes con una función que pertenece a $C^0(\overline{\Omega})$ y que la desigualdad anterior es válida para toda $u$. Combinando esa desigualdad con la Proposición B.7.17, obtenemos

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq (\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C(\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$$

que es la desigualdad deseada.

□

De forma análoga a como definimos los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, podemos definir los «espacios de Sobolev de orden superior» $W^{m,p}(\Omega)$:

**Definición 3.3.8.** Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ y $p \in [1, \infty]$. Se definen recursivamente

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ y } D_i u \in W^{m-1,p}(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Es decir, $u \in W^{m,p}(\Omega)$ si sus derivadas débiles de orden menor o igual a $m$,

$$D^\alpha u := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} u$$

con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m$, existen y pertenecen a $L^p(\Omega)$, donde $D_i^0 u := u$ y $D_i^{\alpha_i} u := \underbrace{D_i \cdots D_i}_{\alpha_i - \text{veces}} u$ si $\alpha_i \geq 1$. Note que todas las derivadas débiles de orden menor o igual a $m$ son de ésta forma.

Usando esta notación, definimos

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } p < \infty,$$

y

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Finalmente, definimos $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$.

Tenemos que $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ es un espacio vectorial real normado, la prueba de este hecho es análoga a la prueba de la Proposición 3.2.3. Daremos resultados análogos a los que dimos para los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ y nos apoyaremos en ellos para dar las pruebas correspondientes.

**Lema 3.3.9.** Sean $p \in [1,\infty]$, $m \geq 1$ y $(u_k)$ una sucesión en $W^{m,p}(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D^\alpha u_k \to v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$ para cada multiíndice $\alpha$ tal que $|\alpha| \leq m$. Entonces $u \in W^{m,p}(\Omega)$, $v_\alpha = D^\alpha u$ para todo multiíndice $\alpha$ tal que $|\alpha| \leq m$ y $u_k \to u$ en $W^{m,p}(\Omega)$.

*Demostración.* La afirmación se prueba por inducción sobre $m$. El caso $m = 1$ es el Lema 3.2.4. Supongamos $m \geq 2$ y fijemos un multiíndice $\beta$ con $|\beta| \leq m-1$. Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$,

$$D^\beta u_k \longrightarrow v_\beta, \qquad D_i(D^\beta u_k) = D^{\beta+e_i} u_k \longrightarrow v_{\beta+e_i} \quad \text{en } L^p(\Omega).$$

El Lema 3.2.4, aplicado a la sucesión $(D^\beta u_k)$, muestra que $v_\beta \in W^{1,p}(\Omega)$ y que $D_i v_\beta = v_{\beta+e_i}$. Para $\beta = 0$, la unicidad del límite en $L^p(\Omega)$ da $v_0 = u$. Iterando las identidades anteriores según la longitud de $\beta$, obtenemos $v_\alpha = D^\alpha u$ para todo $|\alpha| \leq m$; en particular, $u \in W^{m,p}(\Omega)$.
Si $p < \infty$, entonces

$$\|u_k - u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u_k - D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Si $p = \infty$, la familia de multiíndices con $|\alpha| \leq m$ es finita y, por lo tanto,

$$\|u_k - u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u_k - D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Esto concluye la prueba. □

**Teorema 3.3.10.** $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para toda $p \in [1,\infty]$.

*Demostración.* Sea $(u_k)$ una sucesión de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$. Entonces las sucesiones $(u_k)$ y $(D^\alpha u_k)$ son de Cauchy en $L^p(\Omega)$ para todo multiíndice $\alpha$ tal que $|\alpha| \leq m$. Como $L^p(\Omega)$ es de Banach por el Teorema B.7.3, se tiene que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D^\alpha u_k \to v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$ para cada multiíndice $\alpha$ tal que $|\alpha| \leq m$. Por el Lema 3.3.9, tenemos que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y $u_k \to u$ en $W^{m,p}(\Omega)$. Por lo que $W^{m,p}(\Omega)$ es completo. □

### 3.3.1 Densidad y extensión por cero

Las aproximaciones por cortes y molificadores también controlan todas las derivadas de orden entero. La construcción local que sigue corresponde al teorema de Meyers–Serrin; véase [97, Sección 11.2].

**Lema 3.3.11.** (Restricción y extensión por cero con soporte interior) Sean $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p < \infty$. La restricción de $w \in W^{m,p}(V)$ pertenece a $W^{m,p}(U)$ y satisface

$$D^\alpha(w \restriction_U) = (D^\alpha w) \restriction_U, \quad |\alpha| \leq m, \qquad \|w \restriction_U\|_{W^{m,p}(U)} \leq \|w\|_{W^{m,p}(V)}.$$

Si $u \in W^{m,p}(U)$ se anula casi en todas partes fuera de un compacto $K \subset U$, su extensión por cero $\widetilde{u}$ a $V$

pertenece a $W^{m,p}(V)$ y

$$D^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}, \qquad |\alpha| \le m, \qquad \|\widetilde{u}\|_{W^{m,p}(V)} = \|u\|_{W^{m,p}(U)}.$$

Además, $u \in W_0^{m,p}(U)$.

*Demostración.* Si $\varphi \in C_c^\infty(U)$, su extensión por cero a $V$ es una función de prueba suave. La identidad que define $D^\alpha w$ en $V$ se reduce, para esta prueba, a la identidad en $U$. Esto identifica las derivadas de la restricción. La desigualdad de normas resulta al restringir cada integral a $U$; no se requiere regularidad de su frontera.

Para la extensión por cero, el caso $K = \varnothing$ es inmediato. Tomemos $\eta \in C_c^\infty(U)$ igual a uno en una vecindad de $K$. La localidad de las derivadas débiles da $D^\alpha u = 0$ casi en todas partes en $U \setminus K$: basta probar la identidad débil contra funciones de $C_c^\infty(U \setminus K)$ y usar la unicidad de la función que representa la distribución nula. Si $\varphi \in C_c^\infty(V)$, entonces $\eta\varphi \restriction_U$ es una prueba admisible y

$$\begin{aligned}\int_V \widetilde{u}\, D^\alpha \varphi \, dx &= \int_U u\, D^\alpha(\eta\varphi)\, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u\, \eta\varphi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_V \widetilde{D^\alpha u}\, \varphi \, dx.\end{aligned}$$

La primera igualdad usa que $\eta = 1$ cerca de $K$ y que $u = 0$ fuera de $K$; la última usa la misma propiedad para $D^\alpha u$. Cada extensión conserva la norma $L^p$, por lo que también conserva la norma de Sobolev.

Para probar la última afirmación aplicamos lo anterior con $V = \mathbb{R}^n$. Si $\rho_\varepsilon$ es un molificador de soporte contenido en $\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon)$, Fubini y la identidad débil dan

$$D^\alpha(\rho_\varepsilon * \widetilde{u}) = \rho_\varepsilon * \widetilde{D^\alpha u}.$$

La aproximación por molificadores en $L^p$ implica convergencia de cada derivada en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Para $\varepsilon$ suficientemente pequeño, el soporte de la convolución está contenido en $K + \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon) \Subset U$. Sus restricciones pertenecen a $C_c^\infty(U)$ y convergen a $u$ en $W^{m,p}(U)$, lo que prueba la pertenencia a $W_0^{m,p}(U)$. □

**Proposición 3.3.12.** (Densidad de funciones suaves) Sean $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \le p < \infty$. Para todo abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, el espacio $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$. Además,

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Aquí $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$ y $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, por la Proposición B.7.18.

*Demostración.* La regla de Leibniz débil de la Proposición 3.1.4, aplicada sucesivamente, da para $|\alpha| \le m$

$$D^\alpha(\chi u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta \chi) D^{\alpha-\beta} u,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ y $\beta \le \alpha$ significa $\beta_i \le \alpha_i$ para toda $i \in \{1,\dots,n\}$. La inducción que produce esta fórmula usa la regla de primer orden en cada sumando y la identidad de Pascal para reunir los coeficientes.

En $\mathbb{R}^n$ tomamos los cortes $\chi_R$ de la Proposición 3.2.10. El sumando con $\beta = 0$ converge a $D^\alpha u$ en $L^p$ por convergencia dominada. Si $\beta \neq 0$, entonces

$$\|(D^\beta \chi_R) D^{\alpha-\beta} u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq R^{-|\beta|} \|D^\beta \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|D^{\alpha-\beta} u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

Por tanto, $\chi_R u \to u$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Para $R$ fijo, Fubini y la definición de derivada débil dan

$$D^\alpha(\rho_\varepsilon * (\chi_R u)) = \rho_\varepsilon * D^\alpha(\chi_R u).$$

La continuidad de las traslaciones y la estimación de molificación usada en la Proposición 3.2.10 prueban la convergencia en $L^p$ para cada uno de los finitos multiíndices. Estas molificaciones son suaves y tienen soporte compacto, lo que prueba la igualdad anunciada.

Para un abierto general elegimos una exhaustión $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$, con unión $\Omega$, y una partición suave de la unidad $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ cuyos soportes son compactos y están contenidos en los abiertos $V_j := \Omega_{j+1} \setminus \overline{\Omega_{j-1}}$; podemos tomar $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \varnothing$ y ajustar los dos primeros miembros. La existencia de esta partición se sigue del Teorema 1.3.5, agrupando las funciones subordinadas a cada $V_j$. La familia $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es localmente finita. La fórmula de Leibniz muestra que $\eta_j u \in W^{m,p}(V_j)$ y su soporte está contenido en el compacto $\operatorname{supp}\eta_j \Subset V_j$. El Lema 3.3.11 permite extenderlo por cero a $\mathbb{R}^n$ sin cambiar su norma ni sus derivadas débiles.

Dado $\delta > 0$, para cada $j$ elegimos $\varepsilon_j > 0$ tan pequeño que

$$v_j := \rho_{\varepsilon_j} * (\eta_j u) \in C_c^\infty(V_j), \qquad \|v_j - \eta_j u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta 2^{-j}.$$

La suma $v := \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} v_j$ es localmente finita y, por tanto, suave en $\Omega$. La serie de errores $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (v_j - \eta_j u)$ es absolutamente convergente en el espacio de Banach $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Su límite, restringido a $\Omega$, coincide con $v - u$: en cada $\Omega_N$ sólo intervienen finitos términos, por la finitud local de los soportes. En particular, $v - u \in W^{m,p}(\Omega)$ antes de tomar su norma, y la desigualdad triangular da

$$\|v - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j - \eta_j u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta.$$

Esto prueba que $v \in W^{m,p}(\Omega)$ y concluye la densidad. □

**Proposición 3.3.13.** (Extensión por cero y derivadas de $W_0^{m,p}$) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p < \infty$. La extensión por cero $Z_\Omega$ es una isometría

$$Z_\Omega \colon W_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

y, para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq m$,

$$D^\alpha(Z_\Omega u) = Z_\Omega(D^\alpha u), \qquad D^\alpha u \in W_0^{m-|\alpha|,p}(\Omega).$$

Si $v \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte contenido en un compacto $K \subseteq \Omega$, entonces $v \restriction_\Omega \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

*Demostración.* Elegimos $u_j \in C_c^\infty(\Omega)$ con $u_j \to u$ en $W^{m,p}(\Omega)$. Para estas funciones, $D^\alpha(Z_\Omega u_j) = Z_\Omega(D^\alpha u_j)$ y

$$\|Z_\Omega u_j - Z_\Omega u_\ell\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u_j - u_\ell\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

La completitud y el Lema 3.3.9 identifican el límite con $Z_\Omega u$ y todas sus derivadas con las extensiones por cero correspondientes. La igualdad de normas pasa al límite. Además, $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ en $W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$; como cada $D^\alpha u_j \in C_c^\infty(\Omega)$, se obtiene la pertenencia al subespacio cerrado indicado.
Para la última afirmación, las molificaciones de $v$ tienen soporte en $K + \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon) \Subset \Omega$ si $\varepsilon$ es suficientemente pequeño y convergen en $W^{m,p}$ por la prueba de la Proposición 3.3.12. Su restricción aproxima a $v\restriction_\Omega$ por funciones de $C_c^\infty(\Omega)$. □

La definición por cerradura no requiere regularidad de $\partial\Omega$. En particular, la proposición anterior no identifica $W_0^{m,p}(\Omega)$ con un núcleo de traza en un abierto arbitrario. Para $W^{m,p}(\Omega)$ se necesita distinguir la aproximación suave interior de la extensión a través de la frontera.

**Definición 3.3.14.** (Dominio de extensión de Sobolev) Decimos que un abierto $\Omega$ es un dominio de extensión para $W^{m,p}$ si existe un operador lineal continuo $\mathcal{E}\colon W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $(\mathcal{E}u)\restriction_\Omega = u$ casi en todas partes.

Si $p < \infty$ y existe tal operador, la aproximación de $\mathcal{E}u$ por funciones de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ muestra que sus restricciones son densas en $W^{m,p}(\Omega)$. Estas restricciones pueden ser no nulas en la frontera; su densidad no afirma que $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$. La restricción a exponentes finitos en la igualdad sobre $\mathbb{R}^n$ es necesaria: la función constante uno pertenece a $W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y no puede aproximarse uniformemente por funciones de soporte compacto.

**Definición 3.3.15.** Si $m < n$ y $p \in [1, \frac{n}{m})$ se define el $m$-ésimo exponente crítico de Sobolev como

$$p_m^* := \frac{np}{n - mp}.$$

Note que $p_1^* = p^*$.

La formulación siguiente reúne los encajes de orden superior para exponentes finitos.

**Teorema 3.3.16.** (Encaje de Sobolev con órdenes y exponentes finitos) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Sean $m > k \geq 0$ enteros y $1 \leq p, q < \infty$ tales que

$$m - \frac{n}{p} \geq k - \frac{n}{q}.$$

Entonces $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k,q}(\Omega)$ continuamente. Si $\Omega$ es un dominio de extensión para $W^{m,p}$, también $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$ continuamente.

*Demostración.* Para $q \leq p$, Hölder da, para $|\alpha| \leq k$,

$$\|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega)} \leq \lambda_n(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Al sumar sobre los finitos multiíndices se obtiene $\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$. Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, esta desigualdad, aplicada a las aproximaciones de $C_c^\infty(\Omega)$, muestra también que $u \in W_0^{k,q}(\Omega)$. Supongamos $q > p$ y

pongamos $d := m-k$ y

$$\frac{1}{r_i} := \frac{1}{p} - \frac{i}{d}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), \qquad i \in \{0,\dots,d\}.$$

Los exponentes son finitos, $r_0 = p$, $r_d = q$ y

$$\frac{1}{r_{i+1}} \geq \frac{1}{r_i} - \frac{1}{n} \qquad (0 \leq i < d).$$

Si $r_i < n$, esto significa $r_{i+1} \leq r_i^*$; si $r_i = n$ o $r_i > n$, el siguiente exponente sigue siendo finito. En los tres casos, el inciso correspondiente del Teorema 3.3.7 da $W_0^{1,r_i}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_{i+1}}(\Omega)$. Aplicándolo a $D^\alpha\varphi$, con $|\alpha| \leq m-i-1$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, obtenemos

$$\|D^\alpha\varphi\|_{L^{r_{i+1}}(\Omega)} \leq C_i \|D^\alpha\varphi\|_{W^{1,r_i}(\Omega)}.$$

Al sumar sobre los multiíndices y usar la equivalencia de las normas en dimensión finita, Proposición B.1.2, resulta

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{W^{m-i-1,r_{i+1}}(\Omega)} &\leq C_i \left(\sum_{|\alpha|\leq m-i-1} \|D^\alpha\varphi\|^{r_{i+1}}_{W^{1,r_i}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{r_{i+1}}} \\ &\leq C_i' \|\varphi\|_{W^{m-i,r_i}(\Omega)}.\end{aligned}$$

En la última desigualdad, cada derivada de orden a lo sumo $m-i$ aparece un número finito de veces, dependiente sólo de $n, m, i$.

Si $u \in W_0^{m-i,r_i}(\Omega)$, elegimos $\varphi_\nu \in C_c^\infty(\Omega)$ que converjan a $u$ en $W^{m-i,r_i}(\Omega)$. La estimación anterior, aplicada a $\varphi_\nu - \varphi_\mu$, muestra que esta sucesión es de Cauchy en $W^{m-i-1,r_{i+1}}(\Omega)$. Por completitud converge a un elemento $v$ de este espacio, y $v \in W_0^{m-i-1,r_{i+1}}(\Omega)$ por la definición de cerradura. Como $\Omega$ tiene medida finita, las convergencias en $L^{r_i}$ y en $L^{r_{i+1}}$ implican convergencia en $L^1$; su unicidad da $v = u$ casi en todas partes. Pasando al límite en la estimación, obtenemos un encaje continuo

$$W_0^{m-i,r_i}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m-i-1,r_{i+1}}(\Omega).$$

La composición de estos $d$ encajes empieza en $W_0^{m,p}(\Omega)$ y termina en $W_0^{m-d,r_d}(\Omega) = W_0^{k,q}(\Omega)$, como se quería.

Si existe un operador de extensión $\mathcal{E}$, elegimos una bola $B$ que contenga a $\overline{\Omega}$ y $\chi \in C_c^\infty(B)$ igual a uno en una vecindad de $\overline{\Omega}$. Pongamos $Tu := (\chi\mathcal{E}u)\restriction_B$. Por Leibniz y la Proposición 3.3.13, se tiene $Tu \in W_0^{m,p}(B)$, $Tu\restriction_\Omega = u$ y

$$\begin{aligned}\|Tu\|_{W^{m,p}(B)} &\leq \|\chi\mathcal{E}u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_\chi \|\mathcal{E}u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_\chi \|\mathcal{E}\| \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

La afirmación ya demostrada sobre $B$ y la continuidad de la restricción del Lema 3.3.11 dan

$$\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} \leq \|Tu\|_{W^{k,q}(B)} \leq C_B C_\chi \|\mathcal{E}\| \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Esto prueba el segundo encaje. No se ha impuesto que $u$ se anule sobre $\partial\Omega$: el corte se anula cerca de la frontera de la bola mayor $B$. □

Cuando $(m-k)p < n$, el índice de Sobolev se expresa mediante el exponente crítico $p^*_{m-k}$. La formulación usual es una consecuencia directa del teorema anterior.

**Corolario 3.3.17.** (Encaje de Sobolev y exponente crítico) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sean $j \geq 0$ y $d \geq 1$ enteros y sea $1 \leq p < n/d$. Entonces

$$W_0^{j+d,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega) \qquad \text{para todo } 1 \leq q \leq p_d^* := \frac{np}{n-dp},$$

y estas inclusiones son continuas. En particular, $W_0^{d,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para los mismos exponentes. Si $\Omega$ es un dominio de extensión para $W^{j+d,p}$, también $W^{j+d,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$ continuamente.

*Demostración.* La condición $q \leq p_d^*$ equivale a

$$j + d - \frac{n}{p} \geq j - \frac{n}{q}.$$

Aplicamos el Teorema 3.3.16 con órdenes totales $m = j + d$ y $k = j$. Para $j = 0$, usamos $W_0^{0,q}(\Omega) = L^q(\Omega)$. □

## 3.4 El Teorema de Rellich-Kondrashov en espacios euclidianos

La desigualdad de Poincaré proporciona encajes continuos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ hasta el exponente crítico. La continuidad, sin embargo, no garantiza que una sucesión acotada posea una subsucesión convergente en el espacio de llegada. El teorema de Rellich–Kondrashov determina los exponentes para los cuales aparece esta ganancia de compacidad, decisiva en numerosos argumentos de existencia. La prueba comienza con una estimación para traslaciones.

**Lema 3.4.1.** (Estimación de traslaciones en $L^p$) Sean $1 \leq p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$. Si $T_\xi u(x) := u(x-\xi)$, entonces

$$\|T_\xi u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\xi\| \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq n^{1-\frac{1}{p}} \|\xi\| \|\nabla u\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n}.$$

*Demostración.* Para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, el teorema fundamental del cálculo sobre el segmento $t \mapsto x - t\xi$ da

$$\varphi(x-\xi) - \varphi(x) = -\int_0^1 \nabla\varphi(x - t\xi) \cdot \xi \, dt.$$

La desigualdad integral de Minkowski del Teorema B.8.2 y la invariancia de la medida bajo traslaciones implican

$$\begin{aligned} \|T_\xi \varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\xi\| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \|D_i \varphi(\cdot - t\xi)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, dt \\ &= \|\xi\| \sum_{i=1}^n \|D_i \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Para $p = 1$, ésta es también una aplicación directa de Tonelli a la estimación puntual. Para $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, elegimos $\varphi_j \to u$ en $W^{1,p}$ por la Proposición 3.2.10. Como las traslaciones son isometrías,

$$\|T_\xi u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|u - \varphi_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|T_\xi \varphi_j - \varphi_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Hacemos $j \to \infty$. La segunda desigualdad del enunciado es Hölder para la suma finita, con igualdad de los factores cuando $p = 1$. □

**Teorema 3.4.2.** (Rellich–Kondrashov con órdenes y exponentes finitos) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sean $m > k \geq 0$ enteros y $1 \leq p, q < \infty$ tales que

$$m - \frac{n}{p} > k - \frac{n}{q}. \tag{3.2}$$

Entonces el encaje

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k,q}(\Omega)$$

es compacto. Si, además, $\Omega$ es un dominio de extensión para $W^{m,p}$, el encaje

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$$

también es compacto. Las constantes de continuidad dependen de $n, m, k, p, q, \Omega$ y, en la segunda afirmación, de la norma del operador de extensión elegido.

*Demostración.* Sea $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $W_0^{m,p}(\Omega)$. Comenzamos probando la convergencia de una subsucesión en $W^{m-1,p}$. Extendemos por cero y escribimos $v_j := Z_\Omega u_j$. Por la Proposición 3.3.13, $(v_j)$ está acotada en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ y, para cada $|\alpha| \leq m-1$,

$$D^\alpha v_j \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \qquad \operatorname{supp}(D^\alpha v_j) \subseteq \overline{\Omega}.$$

Si $M_0 := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty$, el Lema 3.4.1 da

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|T_\xi D^\alpha v_j - D^\alpha v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} M_0 \|\xi\|, \qquad |\alpha| \leq m-1.$$

Aplicamos la Proposición B.7.19 en el abierto $\mathbb{R}^n$. La condición de traslaciones se cumple sobre cada abierto relativamente compacto por la estimación global; la condición sobre las colas se cumple con error cero al elegir una bola que contenga a $\overline{\Omega}$. La acotación en $L^p$ ya se conoce. Por tanto, $(D^\alpha v_j)_j$ posee una subsucesión convergente en $L^p$.

Enumeramos los finitos multiíndices de orden a lo sumo $m-1$, extraemos una subsucesión para el primero, de ésta otra para el segundo, y así sucesivamente. La última conserva todas las convergencias. Al restringir a $\Omega$ y aplicar el Lema 3.3.9 obtenemos convergencia en $W^{m-1,p}(\Omega)$; cuando $m = 1$ basta la completitud de $L^p$. Cada término pertenece a $W_0^{m-1,p}(\Omega)$ por su aproximación en $W^{m,p}$ mediante funciones de prueba. Este subespacio es cerrado, así que el límite pertenece a él. El argumento emplea compacidad fuerte en $L^p$ y funciona también para $p = 1$.

Si $q \leq p$, la inclusión continua $W^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$, obtenida por la medida finita de $\Omega$ y $k \leq m-1$, prueba la convergencia buscada. Si $q > p$, la desigualdad estricta (3.2) permite elegir un exponente finito $r > q$ tal que

$$m - \frac{n}{p} \geq k - \frac{n}{r}.$$

El Teorema 3.3.16 muestra que $(u_j)$ está acotada en $W^{k,r}(\Omega)$. Para cada $|\alpha| \leq k$, la desigualdad de interpola-

ción del Teorema B.7.16 da

$$\|D^\alpha(u_j-u_\ell)\|_{L^q(\Omega)} \le \|D^\alpha(u_j-u_\ell)\|_{L^p(\Omega)}^{\theta}\|D^\alpha(u_j-u_\ell)\|_{L^r(\Omega)}^{1-\theta}, \quad \frac{1}{q}=\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{r},$$

con $0<\theta<1$. En la subsucesión anterior el primer factor tiende a cero y el segundo permanece acotado. Sumando sobre los multiíndices, obtenemos una sucesión de Cauchy en $W^{k,q}(\Omega)$, que converge por completitud. En ambos casos el Teorema 3.3.16 sitúa cada término en $W_0^{k,q}(\Omega)$; su cerradura asegura que el límite también pertenece a este espacio.
Para $W^{m,p}(\Omega)$ usamos el operador $Tu=(\chi\mathcal{E}u)\restriction_B \in W_0^{m,p}(B)$ construido en la prueba del Teorema 3.3.16. Para una sucesión acotada $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, con el mismo operador y el mismo corte, se tiene

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\|Tu_j\|_{W^{m,p}(B)} \le C_\chi\|\mathcal{E}\|\sup_{j\in\mathbb{N}}\|u_j\|_{W^{m,p}(\Omega)}<\infty.$$

La primera parte proporciona una subsucesión $Tu_{j_\nu}\to z$ en $W_0^{k,q}(B)$. Como $Tu_{j_\nu}\restriction_\Omega = u_{j_\nu}$,

$$\|u_{j_\nu}-z\restriction_\Omega\|_{W^{k,q}(\Omega)} \le \|Tu_{j_\nu}-z\|_{W^{k,q}(B)}\longrightarrow 0.$$

La compacidad se aplica sobre la bola fija $B$, no sobre todo $\mathbb{R}^n$. □

**Corolario 3.4.3.** (Descenso de un orden con el mismo exponente) Para todo abierto acotado $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, todo entero $m\ge 1$ y todo $1\le p<\infty$, el encaje

$$W_0^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow W_0^{m-1,p}(\Omega)$$

es compacto. Si $\Omega$ es un dominio de extensión para $W^{m,p}$, también es compacto $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{m-1,p}(\Omega)$.

*Demostración.* Tomamos $k=m-1$ y $q=p$ en el teorema anterior. La diferencia entre los índices de Sobolev es exactamente uno, en cualquier dimensión. □

Los encajes subcríticos se obtienen tomando los exponentes correspondientes en el teorema general.

**Corolario 3.4.4.** (Rellich–Kondrashov de primer orden) Si $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, $p\in[1,n)$ y $q\in[1,p^*)$, entonces la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega)\subseteq L^q(\Omega)$ es compacta.

*Demostración.* Tomamos $m=1$ y $k=0$ en el Teorema 3.4.2. Como $p<n$, la condición $1-\frac{n}{p}>-\frac{n}{q}$ equivale a $q<p^*$. □

En órdenes superiores, el exponente crítico finito aparece cuando el producto del incremento de orden por $p$ es menor que $n$.

**Corolario 3.4.5.** (Rellich–Kondrashov y exponente crítico) Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto acotado, sean $j\in\mathbb{N}_0$ y $m\in\{1,\dots,n-1\}$, y sea $1\le p<\frac{n}{m}$. Entonces, para todo $1\le q<p^*_m$, la inclusión

$$W_0^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega)$$

es compacta. En el extremo $q = p_m^*$, el encaje es continuo por el Teorema 3.3.16.

*Demostración.* Como $mp < n$, se tiene

$$q < p_m^* \iff j + m - \frac{n}{p} > j - \frac{n}{q}.$$

Aplicamos el Teorema 3.4.2 con órdenes totales $j+m$ y $j$. La continuidad en el extremo es el Corolario 3.3.17. □

**Observación 3.4.6.** (El extremo crítico y las hipótesis sobre el dominio) La desigualdad estricta no puede sustituirse en general por igualdad. Sean $m > k \geq 0$, $(m-k)p < n$, $q = \frac{np}{n-(m-k)p}$ y $B_{\text{euc}}(x_0, r) \Subset \Omega$. Elegimos $\varphi \in C_c^\infty(B_{\text{euc}}(0,1))$ no nula y ponemos, para $0 < \varepsilon < r$,

$$u_\varepsilon(x) := \varepsilon^{m-\frac{n}{p}} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right).$$

Para cada $|\alpha| \leq m$,

$$\|D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} = \varepsilon^{m-|\alpha|} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(B_{\text{euc}}(0,1))}.$$

Por tanto, la familia está acotada en $W_0^{m,p}(\Omega)$. Para algún $|\beta| = k$, la función $D^\beta \varphi$ no es nula y

$$\|D^\beta u_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} = \|D^\beta \varphi\|_{L^q(B_{\text{euc}}(0,1))} > 0.$$

Sin embargo, $D^\beta u_\varepsilon \to 0$ casi en todas partes cuando $\varepsilon \to 0^+$. Ninguna subsucesión puede converger en $L^q$. Esto impide la compacidad en el exponente crítico, aunque la continuidad sí se cumple.
Tampoco basta que un abierto sea acotado para obtener compacidad sobre $W^{m,p}$ sin subíndice cero. Sea $\Omega$ la unión de bolas abiertas ajenas $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ contenidas en una bola fija y acumuladas únicamente en un punto exterior a $\Omega$. Las funciones

$$u_j := \lambda_n(B_j)^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{B_j}$$

son constantes en cada componente de $\Omega$, de modo que todas sus derivadas débiles de orden positivo son cero y $\|u_j\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 1$. Para $j \neq \ell$ se cumple $\|u_j - u_\ell\|_{L^p(\Omega)} = 2^{1/p}$. Así, ni siquiera el descenso de un orden al mismo exponente es compacto sobre este $W^{m,p}(\Omega)$.
La condición $m > k$ también es esencial: en una bola de medida finita, la desigualdad de índices se cumple con $m = k = 0$ y $q < p$, pero la inclusión $L^p \hookrightarrow L^q$ no es compacta. En un cubo, las funciones que alternan entre 1 y $-1$ en intervalos diádicos de la primera coordenada están acotadas en $L^p$ y dos de ellas difieren en un conjunto de medida igual a la mitad de la del cubo. Por tanto, sus distancias en $L^q$ están separadas de cero.

### 3.4.1 Encajes globales y localización en $\mathbb{R}^n$

**Proposición 3.4.7.** (Encajes continuos globales con exponentes finitos) Sean $m > k \geq 0$ enteros y $1 \leq p \leq q < \infty$ tales que $m - \frac{n}{p} \geq k - \frac{n}{q}$. Entonces

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$$

continuamente. La misma conclusión vale en un dominio de extensión para $W^{m,p}$, mediante restricción de su operador de extensión.

*Demostración.* Sean $Q_a := a+(0,1)^n$, con $a \in \mathbb{Z}^n$, y $\chi_a(x) := \chi(x-a)$, donde $\chi \in C_c^\infty((-1,2)^n)$ vale uno en $[0,1]^n$. La Proposición 3.3.13 y la regla de Leibniz dan $\chi_a u \in W_0^{m,p}(a+(-1,2)^n)$. Aplicando el Teorema 3.3.16 en estos cubos trasladados obtenemos

$$\|u\|_{W^{k,q}(Q_a)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(a+(-1,2)^n)},$$

con la misma constante para todo $a$. Los cubos $Q_a$ cubren $\mathbb{R}^n$ salvo un conjunto nulo y los cubos ampliados tienen multiplicidad a lo sumo $3^n$. Como $p \leq q$, para toda familia no negativa $(b_a)$ se tiene $(\sum_{a\in\mathbb{Z}^n} b_a^q)^{1/q} \leq (\sum_{a\in\mathbb{Z}^n} b_a^p)^{1/p}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{k,q}(\mathbb{R}^n)} &\leq C\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \|u\|^p_{W^{m,p}(a+(-1,2)^n)}\right)^{1/p} \\ &\leq C3^{n/p}\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Componer con un operador de extensión y restringir prueba la última afirmación. □

**Corolario 3.4.8.** (Compacidad con soporte común y compacidad local) Sean $m > k \geq 0$, $1 \leq p,q < \infty$ y $m - \frac{n}{p} > k - \frac{n}{q}$. Para cada compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, la inclusión en $W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$ del subespacio

$$W_K^{m,p}(\mathbb{R}^n) := \{u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} u \subseteq K\}$$

es compacta. Para cualquier abierto $\Omega$, cada sucesión acotada en $W^{m,p}(\Omega)$ tiene una subsucesión convergente en $W^{k,q}(U)$ para cada abierto $U \Subset \Omega$.

*Demostración.* Si $K \Subset B$ para una bola $B$, la Proposición 3.3.13 sitúa las funciones en $W_0^{m,p}(B)$. El Teorema 3.4.2 proporciona una subsucesión convergente en $W_0^{k,q}(B)$ y la extensión por cero conserva esta convergencia en $\mathbb{R}^n$.

Para la afirmación local tomamos una exhaustión de $\Omega$ y cortes $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ iguales a uno en sus sucesivos miembros. La regla de Leibniz y la primera parte se aplican a cada sucesión localizada. Extraemos subsucesiones sucesivas y después la diagonal. Los límites coinciden en las intersecciones por la unicidad del límite local en medida. Todo $U \Subset \Omega$ está contenido en un miembro de la exhaustión, lo que prueba la convergencia indicada. □

**Observación 3.4.9.** (Traslaciones hacia el infinito) La igualdad $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ para $p < \infty$ no convierte los encajes continuos globales en compactos. Si $0 \neq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y elegimos puntos $x_j$ de modo que los

soportes de $u_j(x) := \varphi(x - x_j)$ sean ajenos, las normas $W^{m,p}$ permanecen constantes y

$$\|u_j - u_\ell\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 2^{1/q}\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \qquad (j \neq \ell, 1 \leq q < \infty).$$

Para $q = \infty$ la distancia es $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} > 0$. No hay compacidad global aun cuando exista una ganancia estricta de índices. La localización o un soporte compacto común impiden este escape.
La condición $q \geq p$ de los encajes continuos globales tampoco debe omitirse. Si $1 \leq q < p < \infty$, elegimos $a$ con $n/p < a \leq n/q$. La función $u(x) = (1 + |x|^2)^{-a/2}$ y todas sus derivadas de cualquier orden pertenecen a $L^p(\mathbb{R}^n)$, mientras que $u \notin L^q$. Las inclusiones por medida finita se aplican a los dominios acotados o a los soportes fijos, no al espacio euclidiano completo.

## 3.5 Encajes de Sobolev en espacios de Hölder

Los encajes de Sobolev estudiados hasta ahora permiten mejorar la integrabilidad de una función débilmente derivable. En el régimen supercrítico, la ganancia es más fuerte: cuando el número de derivadas y el exponente de integrabilidad satisfacen $mp > n$, las funciones de $W^{m,p}$ admiten representantes con derivadas clásicas Hölder continuas. Esta propiedad es fundamental en teoría de regularidad. El encaje no crea por sí mismo nuevas derivadas: primero deben obtenerse estimaciones a priori que sitúen la solución débil en un espacio $W^{m,p}$ suficientemente alto; después, el encaje de Morrey convierte esa regularidad de Sobolev en regularidad clásica cuantitativa. El desarrollo de esta sección sigue la estrategia de Morrey expuesta en [97, Sección 12.3].

**Definición 3.5.1.** (Funciones de clase $C^k$ y $C^{k,\alpha}$ en la cerradura de un abierto) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Comenzamos con la convención usual

$$C^0(\overline{\Omega}) := \left\{ v : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, v \text{ es continua} \right\}.$$

Para $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, escribimos

$$C^k(\overline{\Omega}) := \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{existen un abierto } V \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ con } \overline{\Omega} \subseteq V, \text{ y una función} \\ \widetilde{v} \in C^k(V) \text{ tal que } \widetilde{v}\restriction_{\overline{\Omega}} = v \end{array} \right\}.$$

La continuidad muestra que una extensión definida inicialmente en $\Omega$ determina, cuando existe, una única función sobre $\overline{\Omega}$. Por ello, en las aplicaciones identificaremos una función sobre $\Omega$ con su representante continuo hasta la cerradura. Además, para $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definimos

$$C_c^k(\overline{\Omega}) := \left\{ v \in C^k(\overline{\Omega}) \,\middle|\, \operatorname{supp}_{\overline{\Omega}}(v) \text{ es compacto} \right\},$$

donde el soporte se toma respecto del espacio topológico $\overline{\Omega}$. Así, para $k \geq 1$ la notación $C^k(\overline{\Omega})$ no significa únicamente que las derivadas posean límites en la frontera. Exige que la función sea la restricción de una función de clase $C^k$ definida en una vecindad abierta de $\overline{\Omega}$. Ésta es la convención que se empleará también en la teoría de trazas.

Sea ahora $K \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y sea $w\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Para $0 < \alpha < 1$, ponemos

$$[w]_{C^{0,\alpha}(K)} := \sup_{\substack{x,y\in K\\ x\neq y}} \frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|^{\alpha}}, \qquad \|w\|_{C^{0,\alpha}(K)} := \|w\|_{C^0(K)} + [w]_{C^{0,\alpha}(K)}, \qquad \|w\|_{C^0(K)} := \sup_{x\in K} |w(x)|,$$

con la convención de que el supremo es cero cuando $K$ consta de un solo punto. Para los órdenes $k \geq 1$ supondremos además que $K = \overline{\mathrm{Int}(K)}$. Esta condición asegura que las derivadas sobre $K$ están determinadas por la restricción de la función: dos extensiones iguales en $K$ tienen las mismas derivadas en su interior y, por continuidad, en $K$. Si $k \in \mathbb{N}$ y $w$ es de clase $C^k$ en una vecindad de $K$, definimos la norma intrínseca

$$\|w\|_{C^{k,\alpha}_{\mathrm{int}}(K)} := \sum_{|\beta|\leq k} \|D^{\beta} w\|_{C^0(K)} + \sum_{|\beta|=k} [D^{\beta} w]_{C^{0,\alpha}(K)}. \tag{3.3}$$

Para $k = 0$, escribimos $\|w\|_{C^{0,\alpha}_{\mathrm{int}}(K)} := \|w\|_{C^{0,\alpha}(K)}$. Denotamos por $C^{k,\alpha}_{\mathrm{int}}(K)$ el espacio de las restricciones a $K$ de funciones de clase $C^k$ en una vecindad de $K$ para las cuales esta norma es finita. El subíndice int recuerda que la norma sólo compara los valores de la función y de sus derivadas sobre $K$; no exige una extensión con control global.

Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$. Para $v \in C^k(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$[v]_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\beta|=k} [D^{\beta} v]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)}$$

y

$$\|v\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\beta|\leq k} \|D^{\beta} v\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} + [v]_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

Denotamos por $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones para las cuales esta norma es finita.

Supongamos finalmente que $\Omega$ es acotado. Para $v \in C^k(\overline{\Omega})$, sea

$$\mathcal{E}^{k,\alpha}_{\Omega}(v) := \left\{ \widetilde{v} \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \widetilde{v} \restriction_{\overline{\Omega}} = v \right\}.$$

Definimos

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ v \in C^k(\overline{\Omega}) \,\middle|\, \mathcal{E}^{k,\alpha}_{\Omega}(v) \neq \varnothing \right\}$$

y equipamos este espacio con la norma de extensión

$$\|v\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \inf_{\widetilde{v}\in\mathcal{E}^{k,\alpha}_{\Omega}(v)} \|\widetilde{v}\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.4}$$

En particular, $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \subseteq C^k(\overline{\Omega})$.

**Observación 3.5.2.** (Formulaciones local y global por extensiones) La definición anterior puede formularse localmente. En efecto, una función $v$ pertenece a $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ si y sólo si existen abiertos

$$\overline{\Omega} \subseteq V_0 \Subset V_1 \Subset V$$

y una extensión $\widehat{v} \in C^k(V)$ de $v$, es decir, $\widehat{v}\restriction_{\overline{\Omega}} = v$, tal que

$$\|\widehat{v}\|_{C^{k,\alpha}_{\mathrm{int}}(\overline{V_1})} < \infty.$$

Una extensión global satisface inmediatamente esta condición. Para la recíproca, elegimos una función de corte $\chi \in C_c^\infty(V_1)$ que sea igual a uno en una vecindad de $\overline{V_0}$. La extensión por cero de $\chi\widehat{v}$ fuera de $V_1$, que denotamos por $\widetilde{\chi\widehat{v}}$, pertenece a $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ y coincide con $v$ en $\overline{\Omega}$. La presencia del abierto intermedio $V_1$ asegura que todas las derivadas que intervienen en la regla de Leibniz se controlen en un compacto contenido en el dominio de $\widehat{v}$. Para $k = \infty$, la parte de esta formulación relativa a la existencia de una extensión suave recupera exactamente la convención usada para $C^\infty(\overline{\Omega})$ en la teoría de trazas.
Cuando $k = 0$, la clase así definida coincide con la clase usual de funciones Hölder continuas sobre el compacto $\overline{\Omega}$. En efecto, si $H = [v]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$, la fórmula de McShane

$$\widehat{v}(x) := \inf_{y\in\overline{\Omega}} \big(v(y) + H|x-y|^\alpha\big)$$

extiende $v$ a una función Hölder continua de exponente $\alpha$ en $\mathbb{R}^n$, porque $(x,y) \mapsto |x-y|^\alpha$ es una métrica para $0 < \alpha \le 1$. Después de multiplicar por una función de corte que sea igual a uno cerca de $\overline{\Omega}$, obtenemos una extensión acotada. Por lo tanto, la norma de extensión de (3.4) es equivalente, cuando $k = 0$, a la norma intrínseca usual sobre $\overline{\Omega}$.
Para $k \ge 1$, la condición de extensión forma parte de la convención. En las aplicaciones de esta sección las funciones proceden de $W_0^{m,p}(\Omega)$ y sus extensiones por cero proporcionan las extensiones requeridas. En las aplicaciones geométricas, los dominios coordenados son bolas y las funciones localizadas se anulan cerca de la frontera coordenada.

**Observación 3.5.3.** (Cambio del exponente de Hölder) Si $0 < \alpha \le \beta < 1$ y $\Omega$ es acotado, entonces

$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$$

continuamente. Para verlo, fijamos una función de corte $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ igual a uno en una vecindad de $\overline{\Omega}$. Si $\widetilde{v}$ es una extensión de $v$, entonces $\chi\widetilde{v}$ sigue siendo una extensión y la regla de Leibniz da

$$\|\chi\widetilde{v}\|_{C^{k,\beta}(\mathbb{R}^n)} \le C_\chi \|\widetilde{v}\|_{C^{k,\beta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $\chi\widetilde{v}$ tiene soporte contenido en un compacto fijo, para cada una de sus derivadas de orden $k$ se tiene

$$[w]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le C_{\chi,\alpha,\beta}\big(\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + [w]_{C^{0,\beta}(\mathbb{R}^n)}\big).$$

Tomando el ínfimo sobre las extensiones $\widetilde{v}$ se obtiene la continuidad del encaje. También usaremos que una función de clase $C^1$ con derivada acotada es Lipschitz y, por consiguiente, Hölder continua de cualquier exponente $0 < \alpha < 1$ sobre conjuntos de diámetro acotado.

La cantidad definida en (3.4) es una norma. La homogeneidad y la desigualdad triangular se obtienen tomando extensiones y sumándolas. Además,

$$\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le \|v\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

pues la misma desigualdad vale para toda extensión. Por lo tanto, la norma se anula únicamente cuando $v = 0$.

**Proposición 3.5.4.** (Completitud de los espacios de Hölder) Para $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$, el espacio $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, entonces $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, con la norma (3.4), también es un espacio de Banach.

*Demostración.* Sea $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Para cada multiíndice $\beta$ con $|\beta| \le k$, la sucesión $(D^\beta v_j)$ converge uniformemente a una función acotada y continua $v_\beta$. Si $|\beta| < k$, el teorema fundamental del cálculo sobre segmentos permite pasar al límite en

$$D^\beta v_j(x + te_i) - D^\beta v_j(x) = \int_0^t D^{\beta+e_i} v_j(x + se_i)\, ds.$$

Se deduce que $v_0 \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $D^\beta v_0 = v_\beta$ para $|\beta| \le k$. Si $|\beta| = k$, al pasar al límite en las desigualdades de Hölder se obtiene $v_\beta \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, haciendo tender a infinito uno de los índices en la condición de Cauchy, se concluye que $v_j \to v_0$ en $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.
Sea ahora $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Extraemos una subsucesión $(u_{j_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|u_{j_{\nu+1}} - u_{j_\nu}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} < 2^{-\nu-1}.$$

Elegimos $U_1 \in \mathcal{E}^{k,\alpha}_\Omega(u_{j_1})$. Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, por la definición del ínfimo existe $G_\nu \in \mathcal{E}^{k,\alpha}_\Omega(u_{j_{\nu+1}} - u_{j_\nu})$ tal que

$$\|G_\nu\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)} < 2^{-\nu}.$$

La serie

$$U_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$$

converge en $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ a una función $U$. Al restringir a $\overline{\Omega}$, la suma parcial de orden $N$ es $u_{j_{N+1}}$. Por lo tanto, $u := U\restriction_{\overline{\Omega}}$ pertenece a $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ y $u_{j_\nu} \to u$ en la norma de extensión. Como la sucesión original es de Cauchy, toda ella converge a $u$. □

El punto analítico central es la siguiente estimación local. Su ventaja es que la potencia de $r$ queda determinada por la escala del problema.

**Lema 3.5.5.** (Estimación de Morrey en cubos) Sea $n < p < \infty$ y sea $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un cubo de lados paralelos a los ejes y longitud lateral $r > 0$. Existe una constante $C = C(n,p) > 0$ tal que

$$|v(x) - v(y)| \le C r^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(Q)} \tag{3.5}$$

para toda $v \in C^1(\overline{Q})$ y todos $x, y \in Q$.

*Demostración.* Denotemos por

$$v_Q := \frac{1}{\lambda_n(Q)} \int_Q v(z)\, dz$$

el promedio de $v$ en $Q$. Fijemos $x \in Q$. Como $Q$ es convexo, para todo $y \in Q$ el segmento que une $x$ con $y$

está contenido en $Q$ y

$$v(y)-v(x)=\int_0^1 \langle \nabla v(x+t(y-x)), y-x\rangle\, dt.$$

Promediando respecto de $y$ y haciendo, para cada $t\in(0,1)$, el cambio de variables $z=x+t(y-x)$, obtenemos

$$|v(x)-v_Q|\le \frac{1}{r^n}\int_0^1\int_{x+t(Q-x)} |x-z|\,t^{-n-1}|\nabla v(z)|\,dz\,dt.$$

Si $z\in x+t(Q-x)$, entonces $|z-x|\le \sqrt{n}\,rt$ y, por lo tanto, $t\ge \frac{|z-x|}{\sqrt{n}\,r}$. El Teorema de Tonelli permite cambiar el orden de integración y da

$$|v(x)-v_Q|\le C_n\int_Q \frac{|\nabla v(z)|}{|x-z|^{n-1}}\,dz.$$

Sea $p'=\frac{p}{p-1}$. La desigualdad de Hölder y la inclusión $Q\subseteq B_{\mathrm{euc}}(x,\sqrt{n}\,r)$ implican

$$|v(x)-v_Q|\le C_n\left(\int_{B_{\mathrm{euc}}(x,\sqrt{n}\,r)} |x-z|^{(1-n)p'}\,dz\right)^{\frac{1}{p'}}\|\nabla v\|_{L^p(Q)}.$$

La integral radial es finita precisamente porque $p>n$, y su potencia en $r$ es $1-\frac{n}{p}$. En consecuencia,

$$|v(x)-v_Q|\le C r^{1-\frac{n}{p}}\|\nabla v\|_{L^p(Q)}.$$

Aplicando la misma desigualdad a $y$ y usando $|v(x)-v(y)|\le |v(x)-v_Q|+|v(y)-v_Q|$, se obtiene (3.5). □

**Teorema 3.5.6.** (Encaje de Morrey de primer orden) Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $n<p<\infty$. Si

$$\mu:=1-\frac{n}{p},$$

entonces cada elemento de $W_0^{1,p}(\Omega)$ posee un único representante en $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ y existe una constante $C=C(n,p,\Omega)>0$ tal que

$$\|u\|_{C^{0,\mu}(\overline{\Omega})}\le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.6}$$

*Demostración.* Sea primero $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ y denotemos por $\widetilde{\varphi}$ su extensión por cero a $\mathbb{R}^n$. Dados $x,y\in\mathbb{R}^n$, elegimos un cubo de longitud lateral $2|x-y|$ que contenga a ambos puntos. El Lema 3.5.5 aplicado a $\widetilde{\varphi}$ da

$$|\widetilde{\varphi}(x)-\widetilde{\varphi}(y)|\le C|x-y|^{\mu}\|\nabla\widetilde{\varphi}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Por lo tanto,

$$[\widetilde{\varphi}]_{C^{0,\mu}(\mathbb{R}^n)}\le C\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Tomemos un cubo fijo $Q_0$ que contenga a $\overline{\Omega}$ en su interior y un punto $y_0\in Q_0\setminus\overline{\Omega}$. Como $\widetilde{\varphi}(y_0)=0$, la estimación anterior también proporciona

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le C_\Omega\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Así, (3.6) vale para toda $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$.

Sea ahora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y elijamos $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_j \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. La desigualdad global ya probada muestra que la sucesión de extensiones por cero $(\widetilde{\varphi}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $C^{0,\mu}(\mathbb{R}^n)$. Por la Proposición 3.5.4, converge a una función $\widetilde{u} \in C^{0,\mu}(\mathbb{R}^n)$. Al mismo tiempo, $\widetilde{\varphi}_j$ converge en $L^p(\mathbb{R}^n)$ a la extensión por cero de $u$, por lo que $\widetilde{u} = u$ casi en todas partes en $\Omega$. La restricción de $\widetilde{u}$ a $\overline{\Omega}$ es el representante buscado y, por la definición de la norma de extensión, satisface (3.6).
Si dos representantes continuos de la misma clase de $L^p(\Omega)$ coinciden casi en todas partes, entonces coinciden en todo $\Omega$, pues el conjunto donde difieren sería abierto y tendría medida positiva. La continuidad hasta la frontera concluye la unicidad en $\overline{\Omega}$. □

El resultado de orden superior puede formularse de manera uniforme mediante el número de regularidad de Sobolev

$$\sigma := m - \frac{n}{p}.$$

La restricción $0 < \alpha < 1$ evita el extremo Lipschitz, que en el caso en que $\sigma$ es entero requiere un tratamiento separado y no se obtiene en general por el mismo argumento.

**Teorema 3.5.7.** (Encaje de Sobolev–Morrey de orden superior) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \le p < \infty$, y supongamos que

$$\sigma := m - \frac{n}{p} > 0.$$

Si $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$ satisfacen

$$k + \alpha \le \sigma, \tag{3.7}$$

entonces cada elemento de $W_0^{m,p}(\Omega)$ posee un único representante en $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ y existe una constante $C = C(n, m, p, k, \alpha, \Omega) > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Más precisamente, se cumplen las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\sigma \notin \mathbb{N}$, $\ell := \lfloor \sigma \rfloor$ y $\theta := \sigma - \ell$, entonces

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\ell,\theta}(\overline{\Omega})$$

continuamente.

(b) Si $\sigma = s \in \mathbb{N}$, entonces, para todo $0 < \theta < 1$,

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{s-1,\theta}(\overline{\Omega})$$

continuamente.

*Demostración.* Comenzamos con funciones de $C_c^\infty(\Omega)$ y las identificamos con sus extensiones por cero a $\mathbb{R}^n$. Supongamos primero que $\sigma \notin \mathbb{N}$. Pongamos

$$\ell := \lfloor \sigma \rfloor, \qquad \theta := \sigma - \ell \in (0,1), \qquad d := m - \ell.$$

Entonces

$$(d-1)p < n < dp.$$

Si $d = 1$, se tiene $p > n$. Para todo multiíndice $\beta$ con $|\beta| \le \ell$, la función $D^\beta u$ pertenece a $W_0^{1,p}(\Omega)$, de modo que el Teorema 3.5.6 proporciona

$$\|D^\beta u\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \le C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}, \qquad \theta = 1 - \frac{n}{p}.$$

Supongamos ahora que $d \ge 2$ y definamos

$$q := p^*_{d-1} = \frac{np}{n-(d-1)p}.$$

El Corolario 3.3.17, aplicado con $j = \ell + 1$ y una ganancia de $d-1$ derivadas, da el encaje continuo

$$W_0^{m,p}(\Omega) = W_0^{\ell+1+(d-1),p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{\ell+1,q}(\Omega).$$

La desigualdad $dp > n$ implica $q > n$, y un cálculo directo muestra que

$$1 - \frac{n}{q} = d - \frac{n}{p} = m - \ell - \frac{n}{p} = \theta.$$

Para cada $|\beta| \le \ell$, se tiene $D^\beta u \in W_0^{1,q}(\Omega)$. El Teorema 3.5.6 concluye que

$$\|D^\beta u\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \le C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Sumando sobre la familia finita de multiíndices se obtiene el inciso (a) para funciones suaves. La densidad de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W_0^{m,p}(\Omega)$ y la completitud de $C^{\ell,\theta}(\overline{\Omega})$ extienden el mapeo a todo el espacio. La convergencia simultánea en $W^{m,p}$ y en $C^{\ell,\theta}$ identifica las derivadas clásicas del representante con las derivadas débiles de la clase original.

Supongamos ahora que $\sigma = s \in \mathbb{N}$. Entonces

$$d := m - s = \frac{n}{p} \in \mathbb{N}.$$

Si $d = 1$, ya se tiene $W_0^{m,p}(\Omega) = W_0^{s+1,n}(\Omega)$. Si $d \ge 2$, el Corolario 3.3.17, aplicado con $j = s+1$ y una ganancia de $d-1$ derivadas, proporciona

$$W_0^{m,p}(\Omega) = W_0^{s+1+(d-1),p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{s+1,n}(\Omega),$$

pues $p^*_{d-1} = n$. Sea $0 < \theta < 1$ y elijamos $q > n$ tan grande que

$$1 - \frac{n}{q} > \theta.$$

Para toda $|\gamma| \le s$, la derivada $D^\gamma u$ pertenece a $W_0^{1,n}(\Omega)$. El inciso correspondiente al caso crítico $p = n$ del Teorema 3.3.7 muestra que $D^\gamma u \in L^q(\Omega)$ y que

$$\|D^\gamma u\|_{L^q(\Omega)} \le C_q\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

En particular, para $|\beta| \le s-1$ se tiene $D^\beta u \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Para conservar el subíndice cero, aplicamos las mismas estimaciones a las diferencias de aproximantes de $u$ en $C_c^\infty(\Omega)$; todas sus derivadas de orden a lo sumo $s$ convergen en $L^q$, de modo que las derivadas de orden a lo sumo $s-1$ convergen en $W^{1,q}$ a elementos de su subespacio cerrado $W_0^{1,q}(\Omega)$. El Teorema 3.5.6 da un representante de $D^\beta u$ que es Hölder continuo con exponente $1-\frac{n}{q}$. Como $\Omega$ es acotado y $1-\frac{n}{q} > \theta$, resulta

$$\|D^\beta u\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \le C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Esto prueba el inciso (b), primero para funciones suaves y después para todo $W_0^{m,p}(\Omega)$ por densidad. Finalmente, sea $(k,\alpha)$ un par que satisfaga (3.7). Si $\sigma$ no es entero, el inciso (a) y las inclusiones elementales entre espacios de Hölder dan (3.8). Si $\sigma = s$ es entero, elegimos $\theta \in (\alpha, 1)$ y usamos el inciso (b). Cuando $k < s-1$, las derivadas de orden $k$ de las extensiones por cero en $\mathbb{R}^n$ tienen derivadas primeras acotadas y, por lo tanto, son Lipschitz; cuando $k = s-1$, basta usar la inclusión $C^{s-1,\theta} \hookrightarrow C^{s-1,\alpha}$. La unicidad de los representantes se demuestra como en el Teorema 3.5.6: dos funciones de clase $C^k$ que coinciden casi en todas partes en $\Omega$ coinciden en $\Omega$ y, por continuidad, en su cerradura. □

Para demostrar la compacidad necesitaremos una desigualdad elemental entre seminormas de Hölder.

**Lema 3.5.8.** (Interpolación de seminormas de Hölder) Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < \beta < 1$ y $v \in C^{0,\beta}(K)$. Entonces

$$[v]_{C^{0,\alpha}(K)} \le 2^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \|v\|_{C^0(K)}^{1-\frac{\alpha}{\beta}} [v]_{C^{0,\beta}(K)}^{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{3.9}$$

*Demostración.* Pongamos $M := \|v\|_{C^0(K)}$ y $H := [v]_{C^{0,\beta}(K)}$. Para $x \neq y$ se tienen simultáneamente

$$|v(x)-v(y)| \le 2M, \qquad |v(x)-v(y)| \le H|x-y|^\beta.$$

Si $H = 0$, la afirmación es inmediata. Si $H > 0$, separamos los casos $|x-y| \le \left(\frac{2M}{H}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ y $|x-y| > \left(\frac{2M}{H}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. En ambos se obtiene

$$\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha} \le (2M)^{1-\frac{\alpha}{\beta}} H^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Tomar el supremo concluye la prueba. □

**Lema 3.5.9.** (Arzelà–Ascoli en compactos euclidianos) Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y sea $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en $K$. Supongamos que existe $C > 0$ tal que

$$\|v_j\|_{C^0(K)} \le C \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N},$$

y que la familia es equicontinua. Entonces existe una subsucesión que converge uniformemente en $K$.

*Demostración.* Para cada $m \in \mathbb{N}$, la compacidad de $K$ proporciona un conjunto finito $D_m \subseteq K$ tal que las bolas de radio $\frac{1}{m}$ centradas en $D_m$ cubren $K$. El conjunto $D := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m$ es numerable y denso. Enumerémoslo como $D = \{x_1, x_2, \dots\}$. La sucesión numérica $(v_j(x_1))_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada. Por Bolzano–Weierstrass posee una subsucesión convergente. De ésta extraemos una subsucesión que converge en $x_2$ y continuamos inductivamente. La subsucesión diagonal, que denotamos otra vez por $(v_j)$, converge en cada punto de $D$.

Veamos que es de Cauchy uniformemente. Sea $\varepsilon > 0$. Por equicontinuidad existe $\delta > 0$ tal que

$$|v_j(x) - v_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $j$ y cualesquiera $x, y \in K$ con $|x-y| < \delta$. La compacidad de $K$ permite elegir $x_{i_1}, \dots, x_{i_N} \in D$ de modo que las bolas de radio $\delta$ centradas en estos puntos cubran $K$. Como la subsucesión converge en cada uno de esos puntos, existe $j_0$ tal que

$$|v_j(x_{i_\nu}) - v_\ell(x_{i_\nu})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para $j, \ell \geq j_0$ y $\nu \in \{1, \dots, N\}$. Dado $x \in K$, elegimos $\nu$ con $|x - x_{i_\nu}| < \delta$. Entonces

$$|v_j(x) - v_\ell(x)| \leq |v_j(x) - v_j(x_{i_\nu})| + |v_j(x_{i_\nu}) - v_\ell(x_{i_\nu})| + |v_\ell(x_{i_\nu}) - v_\ell(x)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la subsucesión es de Cauchy en $C^0(K)$ y converge uniformemente, pues este espacio es de Banach. □

**Teorema 3.5.10.** (Rellich–Kondrashov hacia espacios de Hölder) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$, y supongamos que

$$\sigma := m - \frac{n}{p} > 0.$$

Si $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$ satisfacen

$$k + \alpha < \sigma, \tag{3.10}$$

entonces el encaje

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$$

es compacto.

*Demostración.* Elijamos $\beta$ de modo que

$$\alpha < \beta < 1, \qquad k + \beta \leq \sigma.$$

La elección es posible por (3.10). El Teorema 3.5.7 muestra que toda sucesión acotada $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $W_0^{m,p}(\Omega)$, después de tomar los representantes obtenidos por extensión por cero, está acotada en $C^{k,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Estas extensiones se anulan fuera de $\overline{\Omega}$. Fijemos un cubo compacto $Q$ que contenga a $\overline{\Omega}$ en su interior.
Para cada $|\gamma| = k$, la familia $(D^\gamma u_j)$ es uniformemente acotada y equi-Hölder en $Q$. Si $|\gamma| < k$, la familia es equilipschitz, pues sus derivadas de primer orden están uniformemente acotadas. El Lema 3.5.9 y un argumento diagonal sobre la familia finita de multiíndices permiten extraer una subsucesión, que no renombramos, tal que

$$D^\gamma u_j \longrightarrow v_\gamma \qquad \text{uniformemente en } Q$$

para todo $|\gamma| \leq k$. Las identidades obtenidas mediante el teorema fundamental del cálculo pasan al límite, de modo que existe $v \in C^k(Q)$ con $D^\gamma v = v_\gamma$.
Para $|\gamma| = k$, aplicamos el Lema 3.5.8 a $D^\gamma(u_j - u_\ell)$. Las seminormas de orden $\beta$ están acotadas uniformemente, mientras que las normas uniformes convergen a cero. Por consiguiente,

$$[D^\gamma(u_j - u_\ell)]_{C^{0,\alpha}(Q)} \longrightarrow 0 \qquad \text{si } j, \ell \to \infty.$$

Así, la subsucesión es de Cauchy respecto de la norma $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}_{\mathrm{int}}(Q)}$ y converge a $v$ en dicha norma. Todas las extensiones están soportadas en el compacto fijo $\overline{\Omega} \Subset \mathrm{Int}(Q)$. Por ello, la convergencia respecto de la norma $C^{k,\alpha}_{\mathrm{int}}(Q)$ implica la convergencia de las mismas extensiones en $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$: fuera de $Q$ las funciones son nulas, y los pares con un punto fuera de $Q$ se controlan usando la distancia positiva entre $\overline{\Omega}$ y $\partial Q$. Al restringir a $\overline{\Omega}$ y usar la norma de extensión, obtenemos una subsucesión convergente en $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. □

**Observación 3.5.11.** (Forma óptima de los exponentes) Sea $\sigma = m - \frac{n}{p} > 0$.

(a) Si $\sigma = \ell + \theta$ con $\ell \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \theta < 1$, el encaje

$$W^{m,p}_0(\Omega) \hookrightarrow C^{\ell,\theta}(\overline{\Omega})$$

es continuo, y es compacto al sustituir $\theta$ por cualquier $0 < \alpha < \theta$.

(b) Si $\sigma = s \in \mathbb{N}$, entonces para todo $0 < \alpha < 1$ el encaje

$$W^{m,p}_0(\Omega) \hookrightarrow C^{s-1,\alpha}(\overline{\Omega})$$

es compacto y, en particular, continuo.

**Corolario 3.5.12.** (Los exponentes infinitos) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $m > k \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$. Si $m - \frac{n}{p} > k$, el encaje

$$W^{m,p}_0(\Omega) \hookrightarrow W^{k,\infty}(\Omega)$$

es compacto. La misma conclusión vale para $W^{m,p}(\Omega)$ si $\Omega$ es un dominio de extensión para $W^{m,p}$. En el extremo $p = 1$ y $m - k = n$, ambos encajes hacia $W^{k,\infty}$ siguen siendo continuos, aunque no son compactos si $\Omega$ es no vacío.
Si $p = \infty$, $m > k \geq 0$ y $\Omega$ es un dominio de extensión para $W^{m,\infty}$, son compactos los encajes $W^{m,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$ para $1 \leq q \leq \infty$. También lo son sobre $W^{m,\infty}_0(\Omega) := \overline{C^\infty_c(\Omega)}^{W^{m,\infty}(\Omega)}$ en cualquier abierto acotado.
En $\mathbb{R}^n$, para $1 \leq p < \infty$ y $m - \frac{n}{p} > k$, y también para $p = 1$ y $m - k = n$, el encaje $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ es continuo. Su restricción mediante un operador de extensión da la misma continuidad en el semiespacio.

*Demostración.* Para $p < \infty$ elegimos $0 < \alpha < 1$ con $k + \alpha < m - \frac{n}{p}$. El Teorema 3.5.10 da compacidad en $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, cuya norma controla todas las derivadas de orden a lo sumo $k$ en $L^\infty$. En un dominio de extensión aplicamos el mismo argumento a $Tu = \chi \mathcal{E} u$ sobre una bola, como en el Teorema 3.4.2.
En el extremo $p = 1$, para $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ el teorema fundamental del cálculo aplicado sucesivamente en las $n$ coordenadas da

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} D_1 \cdots D_n \varphi(t_1, \ldots, t_n)\, dt_n \cdots dt_1, \qquad \|\varphi\|_\infty \leq \|D_1 \cdots D_n \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Aplicamos esta cota a cada $D^\alpha \varphi$, $|\alpha| \leq k$. Todas las derivadas del miembro derecho tienen orden a lo sumo $k + n = m$. La densidad muestra que las extensiones por cero de los aproximantes convergen uniformemente junto con sus derivadas de orden a lo sumo $k$. El teorema fundamental del cálculo sobre segmentos identifica el límite como una función de clase $C^k$ y da la continuidad hacia $W^{k,\infty}$. El corte de una extensión trata $W^{m,1}(\Omega)$. Para ver que no hay compacidad, tomamos $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^k \varphi((x - x_0)/\varepsilon)$ con soporte en una bola

interior: sus normas $W^{m,1}$ están acotadas y alguna derivada de orden $k$ tiene norma uniforme constante no nula, aunque converge a cero casi en todas partes.
Para $p=\infty$ elegimos $1\le r<\infty$ tan grande que $m-\frac{n}{r}>k$. Las funciones $Tu$ tienen soporte en un compacto fijo y están acotadas en $W^{m,r}$ por Hölder en dicho compacto. La primera parte da compacidad en $W^{k,\infty}$, que implica compacidad en $W^{k,q}(\Omega)$ por la medida finita. Para $W_0^{m,\infty}$, el argumento de cerradura de la Proposición 3.3.13 sigue siendo válido en la norma $W^{m,\infty}$ y proporciona la extensión por cero. Sus aproximantes de prueba también convergen en $W^{m,r}$ sobre una bola fija. La primera parte vuelve a aplicarse.
Para la continuidad global repetimos la localización en los cubos $Q_a$ de la Proposición 3.4.7. El encaje de Sobolev–Morrey aplicado a $\chi_a u$ controla $\|u\|_{W^{k,\infty}(Q_a)}$ por $C\|u\|_{W^{m,p}(a+(-1,2)^n)}$, con $C$ independiente de $a$. Tomar el supremo sobre $a\in\mathbb{Z}^n$ da la estimación global. □

La igualdad de índices con exponente infinito necesita un análisis propio. Por ejemplo, en dimensión uno $W_0^{1,1}(a,b)\hookrightarrow C^0([a,b])$ continuamente: la estimación $\|\varphi\|_\infty\le\|\varphi'\|_{L^1((a,b))}$ y la densidad dan el representante continuo. Este encaje no es compacto. Si $c\in(a,b)$ y $0\le\varphi\in C_c^\infty((-1,1))$ cumple $\varphi(0)=1$, las funciones $u_j(x)=\varphi(j(x-c))$, para $j$ suficientemente grande, están acotadas en $W_0^{1,1}(a,b)$, tienen norma uniforme uno y convergen a cero en todo punto distinto de $c$. No poseen una subsucesión uniformemente convergente. Las afirmaciones anteriores no deducen compacidad en ningún extremo de igualdad por la sola comparación de índices.

## 3.6 Encajes localizados en el semiespacio

El semiespacio superior es el modelo euclidiano de las cartas de frontera. Como no es acotado, la compacidad no puede formularse globalmente sin una condición que impida que las funciones se desplacen hacia el infinito. En las aplicaciones a variedades compactas, cada función localizada por una partición de la unidad tiene soporte contenido en un compacto fijo. Ésta es exactamente la situación que registramos a continuación.

**Definición 3.6.1.** (Frontera uniformemente Lipschitz continua) Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto. Decimos que su frontera $\partial\Omega$ es **uniformemente Lipschitz continua** si existen $\varepsilon,L>0$, $M\in\mathbb{N}$ y una cubierta abierta numerable y localmente finita $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\partial\Omega$ tales que:

(a) para cada $x\in\partial\Omega$ existe $j\in\mathbb{N}$ tal que $B_{\mathrm{euc}}(x,\varepsilon)\subseteq\Omega_j$;

(b) ningún punto de $\mathbb{R}^n$ pertenece a más de $M$ conjuntos de la familia $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$;

(c) para cada $j\in\mathbb{N}$ existen un sistema de coordenadas $y=(y',y_n)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ y una función Lipschitz $f_j\colon\mathbb{R}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}$, ambos dependientes de $j$, tales que $\mathrm{Lip}(f_j)\le L$ y

$$\Omega_j\cap\Omega=\Omega_j\cap V_j,\qquad V_j:=\{(y',y_n)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\mid y_n>f_j(y')\}.$$

Los números $\varepsilon$, $L$ y $M$ se denominan **parámetros de uniformidad** de la frontera.

**Teorema 3.6.2.** (Extensión en abiertos con frontera uniformemente Lipschitz) Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto cuya frontera es uniformemente Lipschitz continua con parámetros $\varepsilon,L>0$ y $M\in\mathbb{N}$. Sean $1\le p\le\infty$ y $m\in\mathbb{N}$. Entonces existe un operador lineal continuo

$$\mathcal{E}\colon W^{m,p}(\Omega)\longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que, para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$, se tiene $\mathcal{E}(u)(x) = u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$. Además, existe una constante $c = c(n,m,p) > 0$ para la cual

$$\|\mathcal{E}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c(1+M)\|u\|_{L^p(\Omega)} \tag{3.11}$$

y, para cada $k \in \{1,\dots,m\}$,

$$\|\nabla^k \mathcal{E}(u)\|_{L^p(T^{(0,k)}(\mathbb{R}^n))} \leq c\big(1+M(1+L^k)\big)\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{k-i}\|\nabla^i u\|_{L^p(T^{(0,i)}(\Omega))}, \tag{3.12}$$

donde $\nabla^0 u := u$ y las derivadas covariantes son las inducidas por la métrica euclidiana. En particular, existe una constante $C = C(n,m,p,\varepsilon,M,L) > 0$ tal que

$$\|\mathcal{E}(u)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

La construcción del operador y las estimaciones (3.11) y (3.12) se encuentran en [97, Teorema 13.17].

**Corolario 3.6.3.** (Encajes en una bola sin condiciones de frontera) Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ una bola abierta acotada. Sean $\ell > k \geq 0$ enteros y $1 \leq p, q < \infty$. Si

$$\ell - \frac{n}{p} \geq k - \frac{n}{q},$$

entonces $W^{\ell,p}(B) \hookrightarrow W^{k,q}(B)$ continuamente; si la desigualdad es estricta, el encaje es compacto.

*Demostración.* La frontera de una bola es suave. Cerca de cada punto se representa, después de una traslación y una rotación, como la gráfica de una función suave sobre una bola de $\mathbb{R}^{n-1}$. Al reducir esta bola, la derivada de la función queda acotada y, por el teorema del valor medio, la gráfica es Lipschitz. Multiplicando su función por un corte que valga uno en una bola menor obtenemos una función Lipschitz definida en todo $\mathbb{R}^{n-1}$, sin alterar esa representación local. La compacidad de $\partial B$ permite elegir finitas representaciones sobre abiertos $V_i$ y abiertos menores $U_i$ que aún cubran $\partial B$, con $\overline{U_i} \Subset V_i$. El mínimo de las distancias positivas $\operatorname{dist}(\overline{U_i}, \mathbb{R}^n \setminus V_i)$, el máximo de las constantes Lipschitz y el número de cartas dan los parámetros de la Definición 3.6.1. Para $n = 1$, la frontera consta de los dos extremos de un intervalo y la misma descripción se reduce a semirrectas.

Por el Teorema 3.6.2, $B$ es un dominio de extensión para $W^{\ell,p}$. Aplicamos la segunda parte del Teorema 3.3.16 y, bajo la desigualdad estricta, del Teorema 3.4.2. Ambos resultados se aplican al espacio completo $W^{\ell,p}(B)$, sin exigir soporte interior ni pertenencia a $W_0^{\ell,p}(B)$. □

**Corolario 3.6.4.** (Operador de extensión del semiespacio) Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p \leq \infty$. Existe un operador lineal continuo

$$\mathcal{E}_k \colon W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que $(\mathcal{E}_k u)\restriction_{\mathbb{R}^n_+} = u$ casi en todo punto de $\mathbb{R}^n_+$. En particular, existe $C_{k,p,n} > 0$ tal que

$$\|\mathcal{E}_k u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{k,p,n}\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

para todo $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

*Demostración.* Si $k = 0$, basta tomar la extensión por cero. Si $k \geq 1$, el semiespacio $\mathbb{R}^n_+ := \{(x', t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}$ tiene frontera uniformemente Lipschitz y el Teorema 3.6.2 da el operador para todo $1 \leq p \leq \infty$.
Para los exponentes finitos puede verse explícitamente cómo se preservan las derivadas de orden superior. Elijamos $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ que resuelvan

$$\sum_{j=1}^{k} a_j (-j)^r = 1, \qquad r \in \{0, \dots, k-1\}.$$

La matriz es de Vandermonde en los puntos distintos $-1, \dots, -k$, por lo que es invertible. Para una función suave hasta la frontera definimos

$$(\mathcal{E}_k u)(x', t) := \begin{cases} u(x', t), & t > 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j u(x', -jt), & t < 0. \end{cases}$$

Las derivadas tangenciales y normales de orden total a lo sumo $k-1$ coinciden a ambos lados de $t = 0$, gracias a las ecuaciones anteriores. Al integrar por partes en ambos semiespacios, los términos de frontera se cancelan. Aplicando este argumento sucesivamente a cada derivada de orden a lo sumo $k-1$, las derivadas débiles de orden a lo sumo $k$ son las derivadas ordinarias en cada lado. Para $\alpha = (\alpha', r)$, $|\alpha| \leq k$, el cambio de variable $s = -jt$ y Minkowski dan

$$\|D^\alpha \mathcal{E}_k u\|_{L^p(\{t<0\})} \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j| j^{r-1/p} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}.$$

El operador de extensión ya obtenido y la Proposición 3.3.12 muestran que las restricciones de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$ para $p < \infty$. La estimación permite extender esta fórmula por continuidad y verifica todas sus derivadas. Para $k = 1$ se obtiene la reflexión par; para $k \geq 2$ la combinación finita asegura también la coincidencia de las derivadas normales necesarias. □

**Observación 3.6.5.** (Densidad y condiciones de frontera en el semiespacio) Las restricciones de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ para $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Estas funciones pueden ser no nulas en la frontera. En cambio, $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ se define usando aproximaciones de soporte compacto en el semiespacio abierto. El Teorema 3.7.1 caracterizará este último espacio mediante la anulación de las trazas de orden menor que $m$.

Para un compacto $K \subseteq \overline{\mathbb{R}^n_+}$, escribiremos

$$W^{k,p}_K(\mathbb{R}^n_+) := \left\{ u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \,\middle|\, \operatorname{supp} u \subseteq K \right\},$$

donde el soporte se entiende en el sentido esencial dentro de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

**Teorema 3.6.6.** (Sobolev y Rellich–Kondrashov localizados en el semiespacio) Sean $K \subseteq \overline{\mathbb{R}^n_+}$ compacto, $m > k \geq 0$ enteros y $1 \leq p, q < \infty$. Si

$$m - \frac{n}{p} \geq k - \frac{n}{q},$$

la inclusión $W_K^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{k,q}(\mathbb{R}^n_+)$ es continua. Si la desigualdad es estricta, esta inclusión es compacta. En particular, $W_K^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ es compacta para todo $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$.
Si $q = \infty$ y $p < \infty$, la inclusión es compacta cuando $m - \frac{n}{p} > k$; para $p = 1$ y $m - k = n$ es continua. Si $p = \infty$, lo es para todo $1 \leq q \leq \infty$ y $m > k$. Las afirmaciones valen también para el subespacio $W_K^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$; para exponentes finitos su límite pertenece a $W_0^{k,q}(\mathbb{R}^n_+)$.

*Demostración.* Tomemos $R > 0$ tal que $K \subseteq B_{\text{euc}}(0,R) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+}$ y $\chi \in C_c^\infty(B_{\text{euc}}(0,2R))$ igual a uno en una vecindad de $K$. Definimos

$$Tu := \chi \mathcal{E}_m u.$$

La regla de Leibniz y el Corolario 3.6.4 dan

$$\|Tu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Además, $Tu$ tiene soporte compacto contenido en $B := B_{\text{euc}}(0,2R)$ y $(Tu)\restriction_{\mathbb{R}^n_+} = u$, pues $u$ se anula fuera de $K$. Para $p < \infty$, la Proposición 3.3.13 da $Tu \in W_0^{m,p}(B)$. La continuidad para exponentes finitos resulta del Teorema 3.3.16 sobre $B$ y la compacidad del Teorema 3.4.2. En la parte compacta, la sucesión obtenida converge a un elemento de $W_0^{k,q}(B)$, porque ése es el espacio de llegada del Teorema 3.4.2. La extensión por cero es continua por la Proposición 3.3.13. Por tanto, esta convergencia se conserva en $W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$ y, al restringir, en $W^{k,q}(\mathbb{R}^n_+)$. Aquí se utilizan el mismo corte y la misma bola para toda la sucesión.
Para $p < \infty$ y $q = \infty$, usamos el Corolario 3.5.12 sobre $B$. Para $p = \infty$, las funciones $Tu$ están acotadas en $W^{m,r}(\mathbb{R}^n)$ para cada $r < \infty$, por su soporte fijo. Elegimos $r > n/(m-k)$ y aplicamos de nuevo ese corolario; los exponentes finitos se obtienen por la medida finita del soporte.
Si cada $u_j$ pertenece también a $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ y los exponentes son finitos, podemos usar $Z_{\mathbb{R}^n_+} u_j$ en lugar de $\mathcal{E}_m u_j$. Para justificar la condición cero en el espacio de llegada, aproximamos cada $u_j$ en $W^{m,p}$ por funciones de prueba y las multiplicamos por $\chi$. La multiplicación conserva la aproximación y sitúa todos los soportes en $B$. El encaje continuo sobre $B$ muestra que las restricciones convergen en $W^{k,q}$ a $u_j$, por lo que $u_j \in W_0^{k,q}(\mathbb{R}^n_+)$. La cerradura de este subespacio conserva la condición en el límite compacto. □

**Observación 3.6.7.** (Soporte hasta la frontera y compacidad local) El compacto $K$ del teorema puede tocar $\{t = 0\}$. En tal caso, una función de $W_K^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ puede tener traza no nula y su extensión por cero puede no pertenecer a $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$; por eso se usa $\mathcal{E}_m$. Si $K \Subset \mathbb{R}^n_+$ está contenido en el interior, elegimos un corte de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ igual a uno cerca de $K$. La regla de Leibniz débil y la molificación interior muestran entonces que $W_K^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \subseteq W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ para $p < \infty$.
Para una sucesión acotada en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, los cortes en bolas y una extracción diagonal dan compacidad local hasta la frontera: la convergencia se cumple en $W^{k,q}(B_{\text{euc}}(0,R) \cap \mathbb{R}^n_+)$ para cada $R > 0$ en el rango estricto finito. Sin una condición sobre las colas, el semiespacio completo carece de compacidad global. En dimensión $n \geq 2$, las traslaciones tangenciales de una función de prueba no nula tienen normas constantes y pueden tener soportes ajenos. En dimensión $n = 1$, trasladamos esa función hacia $+\infty$. Ambos ejemplos reproducen la separación de normas de la Observación 3.4.9, incluso dentro de $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Para aplicar los encajes del semiespacio a funciones definidas en una media bola, primero necesitamos extenderlas a través de su parte esférica. La separación del soporte respecto de esa parte evita saltos; no se exige anulación en la frontera plana.

**Lema 3.6.8.** (Extensión por cero desde una media bola) Sean $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p < \infty$ y $R > 0$. Sea $B^+ = B_{\text{euc}}(0,R) \cap \mathbb{R}^n_+$ y sea $B' = B_{\text{euc}}(0,R) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Supongamos que $v \in W^{m,p}(B^+)$ y que existe un compacto $K \subset B_{\text{euc}}(0,R) \cap \{x_n \ge 0\}$, contenido a distancia positiva de la parte esférica $\partial B_{\text{euc}}(0,R) \cap \{x_n \ge 0\}$, tal que $v = 0$ casi en todas partes en $B^+ \setminus K$.

Definimos $\widetilde{v}\colon \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in B^+, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus B^+. \end{cases}$$

Entonces $\widetilde{v} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, y para todo multiíndice $\beta$ con $|\beta| \le m$ se tiene $D^\beta \widetilde{v} = \widetilde{D^\beta v}$ en sentido débil, donde $\widetilde{D^\beta v}$ denota la extensión por cero de $D^\beta v$ a $\mathbb{R}^n_+$. En particular,

$$\|\widetilde{v}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} = \|v\|_{W^{m,p}(B^+)}.$$

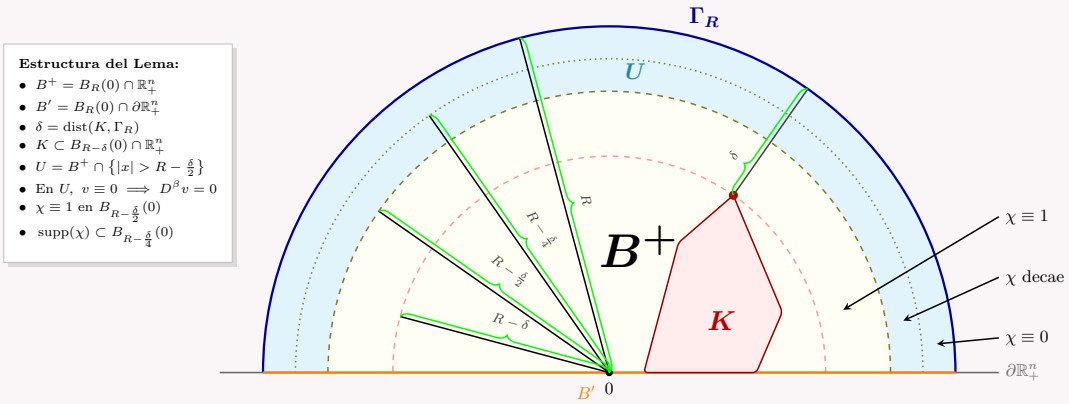



**Figura 3.1.** Esquema de la prueba de la extensión por cero. El soporte esencial de $v$ está contenido en un compacto $K$ separado de la parte esférica $\Gamma_R$ por una distancia positiva $\delta$. Esta separación permite construir una vecindad $U$ de $\Gamma_R$ donde $v$ y sus derivadas débiles se anulan, así como una función de corte $\chi$ que vale 1 cerca de $K$ y se anula antes de alcanzar $\Gamma_R$. Con ello se evita la aparición de términos de frontera en la parte esférica y se obtiene $D^\beta \widetilde{v} = \widetilde{D^\beta v}$.

*Demostración.* Si $m = 0$, la definición de la extensión por cero da $\|\widetilde{v}\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} = \|v\|_{L^p(B^+)}$, y la identidad correspondiente a $\beta = 0$ es inmediata. Como $W^{0,p} = L^p$, esto prueba el resultado en ese caso. Supongamos, pues, que $m \ge 1$.

Denotemos por $\Gamma_R := \partial B_{\text{euc}}(0,R) \cap \{x_n \ge 0\}$ la parte esférica de la media bola. Si $K = \varnothing$, entonces $v = 0$ casi en todas partes en $B^+$, y el resultado es inmediato. Supongamos entonces que $K \neq \varnothing$.

Como $K$ está a distancia positiva de $\Gamma_R$, podemos tomar $\delta := \operatorname{dist}(K, \Gamma_R) > 0$. Veamos primero qué implica esto. Para cada $x \in K$, se tiene $\operatorname{dist}(x, \Gamma_R) = R - \|x\|$. Si $x \neq 0$, el punto $\dfrac{R}{\|x\|}x$ pertenece a $\Gamma_R$, y entonces $\operatorname{dist}(x,\Gamma_R) \le \left\| x - \dfrac{R}{\|x\|}x \right\| = R - \|x\|$. La desigualdad opuesta se obtiene de $\|x - \mathbf{y}\| \ge \big|\|\mathbf{y}\| - \|x\|\big| = R - \|x\|$ para todo $\mathbf{y} \in \Gamma_R$. Si $x = 0$, la igualdad también es clara. Por lo tanto, $R - \|x\| \ge \delta$ para todo $x \in K$, es decir, $\|x\| \le R - \delta$ para todo $x \in K$. En particular, $K \subset B_{\text{euc}}(0, R - \dfrac{\delta}{2}) \cap \{x_n \ge 0\}$.

Definamos $U := B^+ \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > R - \frac{\delta}{2}\right\}$. Entonces $U$ es una franja interior adyacente a $\Gamma_R$, y además $U \cap K = \varnothing$. Como $v = 0$ casi en todas partes en $B^+ \setminus K$, se sigue que $v = 0$ casi en todas partes en $U$.
Por la localidad de las derivadas débiles, obtenemos que $D^\beta v = 0$ casi en todas partes en $U$, para todo $|\beta| \le m$. Si $w \in W^{k,p}(B^+)$ se anula casi en todas partes en un abierto relativo $V \subset B^+$, entonces, para toda $\psi \in C_c^\infty(V)$, vista como función de prueba en $B^+$, se tiene

$$\int_V D^\beta w\, \psi\, dx = \int_{B^+} D^\beta w\, \psi\, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{B^+} w\, D^\beta \psi\, dx = (-1)^{|\beta|} \int_V w\, D^\beta \psi\, dx = 0.$$

Para cada $|\beta| \le k$, como $D^\beta w \in L^p(V)$, se sigue que $D^\beta w = 0$ casi en todas partes en $V$.
Probemos ahora que $D^\beta \widetilde{v} = \widetilde{D^\beta v}$ en sentido débil para todo $|\beta| \le m$. Fijemos tal $\beta$ y tomemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Elegimos una función $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi \equiv 1$ en $B_{\text{euc}}(0, R - \frac{\delta}{2})$ y $\operatorname{supp}\chi \subset B_{\text{euc}}(0, R - \frac{\delta}{4})$. Esta elección es posible porque $R - \frac{\delta}{2} < R - \frac{\delta}{4} < R$. En particular, $\chi \equiv 1$ en una vecindad de $K$, y $(\chi|_{\mathbb{R}^n_+})\varphi \restriction_{B^+} \in C_c^\infty(B^+)$, ya que $\chi$ se anula cerca de la parte esférica y $\varphi$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^n_+$.
Como $\widetilde{v} = 0$ en $\mathbb{R}^n_+ \setminus B^+$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \widetilde{v}\, D^\beta \varphi\, dx = \int_{B^+} v\, D^\beta \varphi\, dx.$$

Además, como $v = 0$ casi en todas partes en $B^+ \setminus K$, basta comparar los integrandos en una vecindad de $K$. En esa vecindad se tiene $\chi \equiv 1$, y por lo tanto $D^\beta(\chi\varphi) = D^\beta\varphi$, donde $\chi\varphi$ denota $(\chi|_{\mathbb{R}^n_+})\varphi$. De aquí se sigue que $vD^\beta\varphi = vD^\beta(\chi\varphi)$ casi en todas partes en $B^+$. Así,

$$\int_{B^+} v\, D^\beta \varphi\, dx = \int_{B^+} v\, D^\beta(\chi\varphi)\, dx.$$

Como $(\chi|_{\mathbb{R}^n_+})\varphi \restriction_{B^+} \in C_c^\infty(B^+)$, la definición de derivada débil nos da

$$\int_{B^+} v\, D^\beta(\chi\varphi)\, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{B^+} D^\beta v\, \chi\varphi\, dx.$$

Ahora observemos que, dentro de $B^+$, el conjunto donde $\chi \neq 1$ queda contenido en $U$, salvo quizá en la esfera $\left\{\|x\| = R - \frac{\delta}{2}\right\}$, que tiene medida cero. Como ya vimos que $D^\beta v = 0$ casi en todas partes en $U$, obtenemos

$$\int_{B^+} D^\beta v\, \chi\varphi\, dx = \int_{B^+} D^\beta v\, \varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} \widetilde{D^\beta v}\, \varphi\, dx.$$

Juntando las igualdades anteriores, resulta

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \widetilde{v}\, D^\beta \varphi\, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n_+} \widetilde{D^\beta v}\, \varphi\, dx.$$

Esto prueba que $D^\beta \widetilde{v} = \widetilde{D^\beta v}$ en sentido débil para todo $|\beta| \le m$.
Como $\widetilde{D^\beta v} \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$ para todo $|\beta| \le m$, concluimos que $\widetilde{v} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Además,

$$\|\widetilde{v}\|^p_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} = \sum_{|\beta|\le m} \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\beta \widetilde{v}|^p\, dx = \sum_{|\beta|\le m} \int_{\mathbb{R}^n_+} |\widetilde{D^\beta v}|^p\, dx = \sum_{|\beta|\le m} \int_{B^+} |D^\beta v|^p\, dx = \|v\|^p_{W^{m,p}(B^+)}.$$

Por lo tanto, $\|\widetilde{v}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} = \|v\|_{W^{m,p}(B^+)}$. □

**Corolario 3.6.9.** (Aproximación y encajes localizados en una media bola) Sean $B^+ = B_{\text{euc}}(0,R) \cap \mathbb{R}^n_+$, $B' = B_{\text{euc}}(0,R) \cap \{x_n = 0\}$ y $K \subset B_{\text{euc}}(0,R) \cap \{x_n \geq 0\}$ compacto.

(a) Si $s \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p < \infty$ y $v \in W^{s,p}(B^+)$ se anula casi en todas partes en $B^+ \setminus K$, existen $f_\nu \in C_c^\infty(B_{\text{euc}}(0,R))$ cuyas restricciones convergen a $v$ en $W^{s,p}(B^+)$. Sus soportes están contenidos en un mismo compacto de $B_{\text{euc}}(0,R)$.

(b) Si $\ell > k \geq 0$ son enteros, $1 \leq p,q < \infty$ y $\ell - n/p \geq k - n/q$, existe $C > 0$ tal que toda $v \in W^{\ell,p}(B^+)$ con ese soporte satisface

$$\|v\|_{W^{k,q}(B^+)} \leq C\|v\|_{W^{\ell,p}(B^+)}.$$

Si la desigualdad de índices es estricta, toda sucesión acotada de estas funciones, con el mismo $K$, tiene una subsucesión convergente en $W^{k,q}(B^+)$.

Las restricciones del primer inciso son suaves hasta $B'$, pero no tienen por qué anularse allí.

*Demostración.* Extendemos $v$ por cero dentro del semiespacio mediante el Lema 3.6.8. La función $\widetilde{v}$ tiene la misma norma de Sobolev que $v$ y se anula fuera de $K$. Para el primer inciso, las restricciones de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas en $W^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)$: para $s \geq 1$ se aplica el operador del Corolario 3.6.4 y la Proposición 3.3.12; para $s = 0$ se aproxima en $L^p(\mathbb{R}^n)$ la extensión por cero. Así, existen $h_\nu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $h_\nu \restriction_{\mathbb{R}^n_+} \to \widetilde{v}$ en $W^{s,p}$.
Elegimos un corte fijo $\eta \in C_c^\infty(B_{\text{euc}}(0,R))$ igual a uno cerca de $K$, y ponemos $f_\nu := \eta h_\nu$. Como $\eta\widetilde{v} = \widetilde{v}$, Leibniz y la restricción dan

$$\begin{aligned}\|f_\nu \restriction_{B^+} - v\|_{W^{s,p}(B^+)} &\leq \|\eta(h_\nu \restriction_{\mathbb{R}^n_+} - \widetilde{v})\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)} \\ &\leq C_{s,p,\eta}\|h_\nu \restriction_{\mathbb{R}^n_+} - \widetilde{v}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

El soporte de cada $f_\nu$ está contenido en $\operatorname{supp}\eta \Subset B_{\text{euc}}(0,R)$.
Para el segundo inciso, sea $B := B_{\text{euc}}(0,2R)$ y definamos

$$z := (\mathcal{E}_\ell \widetilde{v}) \restriction_B .$$

La extensión del semiespacio y el Lema 3.3.11 implican $z \restriction_{B^+} = v$ y

$$\|z\|_{W^{\ell,p}(B)} \leq \|\mathcal{E}_\ell \widetilde{v}\|_{W^{\ell,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\mathcal{E}}\|v\|_{W^{\ell,p}(B^+)}.$$

Por el Corolario 3.6.3,

$$\|v\|_{W^{k,q}(B^+)} \leq \|z\|_{W^{k,q}(B)} \leq C_B C_{\mathcal{E}}\|v\|_{W^{\ell,p}(B^+)}.$$

En esta aplicación no necesitamos cortar $\mathcal{E}_\ell\widetilde{v}$: el encaje se aplica a su restricción al espacio completo de la bola. El corte del primer inciso tiene otra función, pues conserva los soportes de los aproximantes dentro de la carta.
Si $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ está acotada y la desigualdad es estricta, usamos el mismo operador y la misma bola para definir $z_\nu$. Entonces

$$\sup_{\nu\in\mathbb{N}}\|z_\nu\|_{W^{\ell,p}(B)} \leq C_{\mathcal{E}} \sup_{\nu\in\mathbb{N}}\|v_\nu\|_{W^{\ell,p}(B^+)} < \infty.$$

El mismo corolario proporciona una subsucesión $z_{\nu_h} \to z_\infty$ en $W^{k,q}(B)$. Finalmente,

$$\|v_{\nu_h} - z_\infty \restriction_{B^+}\|_{W^{k,q}(B^+)} \le \|z_{\nu_h} - z_\infty\|_{W^{k,q}(B)} \longrightarrow 0.$$

Esto prueba la compacidad, sin imponer una condición de frontera nula. □

### 3.6.1 Resumen de los dominios y los encajes

En la tabla, $m > k \ge 0$ son enteros, $p, q$ son finitos salvo indicación contraria y $\delta := (m - \frac{n}{p}) - (k - \frac{n}{q})$. La condición de extensión se refiere al espacio de partida. En todos los abiertos, $W_0^{m,p}$ se define por cerradura; la densidad suave interior y la igualdad $W_0 = W$ en $\mathbb{R}^n$ se encuentran en la Proposición 3.3.12.

| Dominio y espacio | Hipótesis y rango | Conclusión | Referencia |
|---|---|---|---|
| $\Omega$ acotado, $W_0^{m,p}$ | $1 \le p, q < \infty$ | Continua si $\delta \ge 0$; compacta si $\delta > 0$, hacia $W_0^{k,q}$ | 3.3.16, 3.4.2 |
| $\Omega$ acotado, $W^{m,p}$ | Dominio de extensión; $1 \le p, q < \infty$ | Continua si $\delta \ge 0$; compacta si $\delta > 0$ | 3.3.16, 3.4.2 |
| $\mathbb{R}^n$, $W^{m,p} = W_0^{m,p}$ | $1 \le p \le q < \infty$ | Continua global si $\delta \ge 0$ | 3.4.7 |
| $\mathbb{R}^n$, soporte en $K$ compacto | $1 \le p, q < \infty$; $\delta > 0$ | Compacta con soporte común; compacta localmente | 3.4.8 |
| $\mathbb{R}^n_+$, $W_K^{m,p}$; también $W_K^{m,p} \cap W_0^{m,p}$ | $K \subseteq \overline{\mathbb{R}^n_+}$ compacto; $1 \le p, q < \infty$ | Continua si $\delta \ge 0$; compacta si $\delta > 0$ | 3.6.6 |
| $\Omega$ acotado; $W_0^{m,p}$ o $W^{m,p}$ con extensión | $p < \infty$, $q = \infty$, $m - n/p > k$; o $p = \infty$ | Compacta hacia $W^{k,q}$ en los rangos indicados | 3.5.12 |

## 3.7 El teorema de traza en el semiespacio

La traza asigna valores de frontera a una función de Sobolev mediante aproximación suave. En el semiespacio, una estimación en la dirección normal permite construirla para todo $1 \le p < \infty$; al aplicarla a las derivadas, obtendremos también la caracterización de $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Usaremos la convención de la Definición 3.5.1: una función pertenece a $C^\infty(\overline{\Omega})$ si es la restricción a $\overline{\Omega}$ de una función suave definida en una vecindad abierta de $\overline{\Omega}$. Además,

$$C_c^\infty(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C^\infty(\overline{\Omega}) \,\middle|\, \operatorname{supp}_{\overline{\Omega}}(f) \text{ es compacto} \right\}.$$

En particular, en el semiespacio trabajaremos con $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y $1 \le p < \infty$, este espacio es denso en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, y la restricción usual a la frontera plana define inicialmente un operador sobre dichas funciones. El teorema de traza afirma que este operador se extiende de manera única y continua a todo $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

**Teorema 3.7.1.** (Teorema de traza en el semiespacio) Sea $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$, sea $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$, y sean $m \ge 1$ y $1 \le p < \infty$. Entonces, para cada multiíndice $\beta$ con $|\beta| \le m - 1$, el operador

$$f \longmapsto (D^\beta f) \restriction_{\partial\mathbb{R}^n_+}, \qquad f \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}),$$

admite una única extensión lineal continua

$$\gamma_0 D^\beta \colon W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow W^{m-1-|\beta|,p}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Además,

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) = \left\{ f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \,\middle|\, \gamma_0 D^\beta f = 0 \text{ para todo } |\beta| \le m-1 \right\},$$

donde $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ denota la cerradura de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

*Demostración.* Escribamos $x = (x', t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$. Cuando $n = 1$, interpretamos $\mathbb{R}^0$ como un solo punto, provisto de la medida de conteo; las derivadas tangenciales que aparecen a continuación se reducen entonces a la de orden cero. Por el Corolario 3.6.4 y la densidad de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, la restricción de aproximaciones suaves de una extensión de $f$ prueba la densidad de $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.
Empezamos con $m = 1$. Si $f \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, el teorema fundamental del cálculo da, para $p = 1$,

$$|f(x', 0)| \le \int_0^\infty |\partial_n f(x', t)|\, dt.$$

Al integrar respecto de $x'$, obtenemos

$$\| f \restriction_{\partial \mathbb{R}^n_+} \|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \le \|\partial_n f\|_{L^1(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Para $1 < p < \infty$, aplicamos el mismo argumento a $|f|^p$ e integramos. Hölder y la desigualdad de Young proporcionan

$$\begin{aligned} \| f \restriction_{\partial \mathbb{R}^n_+} \|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} &\le p \int_{\mathbb{R}^n_+} |f|^{p-1} |\partial_n f|\, dx \\ &\le p \|f\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \|\partial_n f\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \\ &\le (p-1)\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|\partial_n f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}. \end{aligned}$$

Por densidad y completitud de $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, la restricción tiene una única extensión lineal continua $\gamma_0 \colon W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \to L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $1 \le p < \infty$.
Sean ahora $m \ge 1$, $|\beta| \le m-1$ y $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Cada $D^\beta f$ pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, por lo que su traza está definida. Tomamos $f_\nu \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ con $f_\nu \to f$ en $W^{m,p}$. Para todo multiíndice tangencial $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}$ con $|\alpha| \le m-1-|\beta|$, la estimación de primer orden implica

$$\gamma_0 D^{\beta+(\alpha,0)} f_\nu \longrightarrow \gamma_0 D^{\beta+(\alpha,0)} f \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^{n-1}).$$

En las funciones suaves se cumple

$$D^\alpha_{x'}(\gamma_0 D^\beta f_\nu) = \gamma_0 D^{\beta+(\alpha,0)} f_\nu.$$

Integramos esta identidad contra una función de prueba $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ y pasamos al límite en ambos miembros. Hölder justifica el paso también para $p = 1$, usando $\varphi, D^\alpha \varphi \in L^\infty$. Así,

$$D^\alpha_{x'}(\gamma_0 D^\beta f) = \gamma_0 D^{\beta+(\alpha,0)} f$$

en sentido débil. Sumando las estimaciones de primer orden para estos finitos multiíndices, obtenemos

$$\|\gamma_0 D^\beta f\|_{W^{m-1-|\beta|,p}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C(n,m,p)\|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

La densidad ya establecida prueba además la unicidad de esta extensión.
Para caracterizar el núcleo, si $f \in W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n_+)$, aproximamos por funciones de $C^\infty_c(\mathbb{R}^n_+)$. Todas sus derivadas tienen restricción nula a la frontera; la continuidad de las trazas implica $\gamma_0 D^\beta f = 0$ para todo $|\beta| \le m-1$.
Recíprocamente, supongamos que esas trazas se anulan. Primero justificamos la identidad de integración por partes que permite extender por cero. Si $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ y $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, la aproximación suave hasta la frontera y la continuidad de $\gamma_0$ dan

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} v\,\partial_i\varphi\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} (D_i v)\varphi\,dx - \delta_{in}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\gamma_0 v)(x')\varphi(x',0)\,dx'.$$

Para las funciones suaves la fórmula se sigue del teorema fundamental del cálculo y de la integración por partes tangencial; todas las integrales pasan al límite por Hölder sobre el soporte fijo de $\varphi$. Si $\gamma_0 v = 0$ y $E_0 v$ denota la extensión nula a $\mathbb{R}^n$, la identidad anterior es precisamente

$$D_i(E_0 v) = E_0(D_i v) \quad \text{en el sentido de distribuciones en } \mathbb{R}^n.$$

Aplicamos esta identidad sucesivamente a $v = D^\alpha f$. En orden cero $E_0 f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Si ya sabemos $D^\alpha(E_0 f) = E_0(D^\alpha f)$ para cierto $|\alpha| \le m-1$, entonces $D^\alpha f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ y $\gamma_0 D^\alpha f = 0$. Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, el paso de primer orden da

$$D^{\alpha+e_i}(E_0 f) = D_i E_0(D^\alpha f) = E_0(D^{\alpha+e_i} f).$$

La inducción prueba, para todos los multiíndices de orden a lo más $m$,

$$D^\alpha(E_0 f) = E_0(D^\alpha f), \qquad \|E_0 f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Pongamos $F := E_0 f$. Para $t > 0$, la función $F_t(x) := F(x - te_n)$ pertenece a $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, se anula cuando $x_n < t$ y converge a $F$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ cuando $t \to 0^+$. En efecto, $D^\alpha F_t = (D^\alpha F)(\cdot - te_n)$, y la continuidad de las traslaciones en $L^p$ se aplica a cada una de las finitas derivadas $|\alpha| \le m$.
Fijado $t$, elegimos $\chi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ con $\chi = 1$ en una vecindad de $\overline{B_{\mathrm{euc}}(0,1)}$ y ponemos $\chi_R(x) = \chi(x/R)$. La regla de Leibniz y $\|D^\alpha \chi_R\|_\infty = R^{-|\alpha|}\|D^\alpha \chi\|_\infty$ muestran que $\chi_R F_t \to F_t$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ cuando $R \to \infty$: los términos sin derivadas sobre $\chi_R$ convergen por dominación y los restantes contienen el factor $R^{-|\alpha|}$, $|\alpha| \ge 1$. El producto sigue anulado en $\{x_n < t\}$. Si $\rho_\varepsilon$ es un molificador de soporte en $\overline{B_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon)}$ y $0 < \varepsilon < t/2$, entonces

$$\rho_\varepsilon * (\chi_R F_t) \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n_+),$$

pues su soporte está contenido en $\{x_n \ge t - \varepsilon\}$. Para $t, R$ fijos, estas convoluciones convergen a $\chi_R F_t$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \to 0^+$. Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, elegimos sucesivamente $t_\nu > 0$, $R_\nu$ y $0 < \varepsilon_\nu < t_\nu/2$ para que cada uno de los tres errores sea menor que $1/(3\nu)$. La restricción de $\rho_{\varepsilon_\nu} * (\chi_{R_\nu} F_{t_\nu})$ converge a $f$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Por definición, $f \in W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n_+)$, lo que completa la caracterización del núcleo. □

En lo que sigue usaremos la siguiente convención. Si $v \in W^{m,p}(B^+)$ satisface la hipótesis de soporte del Lema 3.6.8 y $\widetilde{v}$ denota su extensión por cero a $\mathbb{R}^n_+$, entonces, para $|\beta| \le m-1$, escribiremos $\gamma_0 D^\beta v = 0$ sobre $B'$ para

decir que

$$(\gamma_0 D^\beta \widetilde{v}) \restriction_{B'} = 0 \qquad \text{en } W^{m-1-|\beta|,p}(B').$$

Esta notación no introduce una traza independiente sobre la media bola; solamente abrevia la traza del semiespacio después de extender por cero.

**Lema 3.7.2.** (Localidad de la traza en el semiespacio) Sean $1 \le p < \infty$, $O \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ un abierto relativo y $F \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Supongamos que existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$, con $O \subset V \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, tal que $F = 0$ casi en todas partes en $V \cap \mathbb{R}^n_+$. Entonces $\gamma_0 F = 0$ en $O$.

*Demostración.* Fijemos $x_0 \in O$. Como $O$ es abierto relativo en $\partial\mathbb{R}^n_+$ y $V$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, podemos escoger $r > 0$ tal que $B_{\text{euc}}(x_0, 2r) \subset V$ y $B_{\text{euc}}(x_0, 2r) \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \subset O$. Tomemos una función $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}\chi \subset B_{\text{euc}}(x_0, 2r)$ y $\chi \equiv 1$ en $B_{\text{euc}}(x_0, r)$. Al restringir $\chi$ a $\mathbb{R}^n_+$, la multiplicación $\chi F$ está bien definida como elemento de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Como $\operatorname{supp}\chi \cap \mathbb{R}^n_+ \subset V \cap \mathbb{R}^n_+$ y $F = 0$ casi en todas partes en $V \cap \mathbb{R}^n_+$, se tiene $\chi F = 0$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Por lo tanto, $\gamma_0(\chi F) = 0$.
Probemos ahora que $\gamma_0(\chi G) = \chi \restriction_{\partial\mathbb{R}^n_+} \gamma_0 G$ para todo $G \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Si $G \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, la identidad es inmediata, pues ambos lados son la restricción de $\chi G$ a $\partial\mathbb{R}^n_+$. Para $G \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, tomamos una sucesión $G_j \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ tal que $G_j \to G$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Como la multiplicación por la función fija $\chi|_{\mathbb{R}^n_+}$ es continua en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, se tiene $\chi G_j \to \chi G$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Además, por la continuidad de la traza,

$$\gamma_0(\chi G_j) \longrightarrow \gamma_0(\chi G) \qquad \text{en } L^p(\partial\mathbb{R}^n_+),$$

y, como la multiplicación por $\chi \restriction_{\partial\mathbb{R}^n_+}$ es continua en $L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)$,

$$\chi \restriction_{\partial\mathbb{R}^n_+} \gamma_0 G_j \longrightarrow \chi \restriction_{\partial\mathbb{R}^n_+} \gamma_0 G \qquad \text{en } L^p(\partial\mathbb{R}^n_+).$$

Pasando al límite en la identidad suave, obtenemos

$$\gamma_0(\chi G) = \chi \restriction_{\partial\mathbb{R}^n_+} \gamma_0 G.$$

Aplicando esto a $G = F$, resulta

$$0 = \gamma_0(\chi F) = \chi \restriction_{\partial\mathbb{R}^n_+} \gamma_0 F.$$

Como $\chi \equiv 1$ en $B_{\text{euc}}(x_0, r)$, se sigue que $\gamma_0 F = 0$ en $B_{\text{euc}}(x_0, r) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. La segunda numerabilidad de $O$ permite cubrirlo por una familia numerable de estas vecindades. La unión de sus conjuntos excepcionales tiene medida cero, por lo que $\gamma_0 F = 0$ casi en todas partes en $O$. □

**Corolario 3.7.3.** (Caracterización local en una media bola) Sea $B^+ = B_{\text{euc}}(0, R) \cap \mathbb{R}^n_+$, sea $B' = B_{\text{euc}}(0, R) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, y sea $v \in W^{m,p}(B^+)$. Supongamos que existe un compacto $K \subset B_{\text{euc}}(0, R) \cap \{x_n \ge 0\}$, contenido a distancia positiva de la parte esférica $\partial B_{\text{euc}}(0, R) \cap \{x_n \ge 0\}$, tal que $v = 0$ casi en todas partes en $B^+ \setminus K$.
Si $\gamma_0 D^\beta v = 0$ sobre $B'$, en el sentido de la convención anterior, para todo $|\beta| \le m - 1$, entonces $v$ pertenece a la cerradura de $C_c^\infty(B^+)$ en $W^{m,p}(B^+)$.

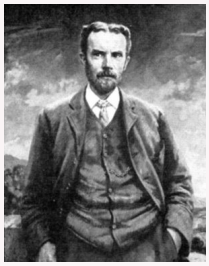
*Demostración.* Si $K = \varnothing$, entonces $v = 0$ casi en todas partes en $B^+$, y el resultado es inmediato. Supongamos entonces que $K \neq \varnothing$.
Sea $\widetilde{v}$ la extensión por cero de $v$ a $\mathbb{R}^n_+$. Por el Lema 3.6.8, se tiene $\widetilde{v} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ y $D^\beta \widetilde{v} = \widetilde{D^\beta v}$ para todo

$|\beta| \le m$. Por hipótesis, $(\gamma_0 D^\beta \widetilde{v}) \restriction_{B'} = 0$ para todo $|\beta| \le m-1$. Veamos que, de hecho, $\gamma_0 D^\beta \widetilde{v} = 0$ en toda $\partial\mathbb{R}^n_+$.
Fijemos $|\beta| \le m-1$. Ya sabemos que la traza se anula al restringirse a $B'$. Falta revisar qué ocurre sobre $\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B'$. Denotemos nuevamente por $\Gamma_R := \partial B_{\text{euc}}(0,R) \cap \{x_n \ge 0\}$ la parte esférica de la media bola, tomemos $\delta := \operatorname{dist}(K, \Gamma_R) > 0$, y pongamos $U := B^+ \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > R - \frac{\delta}{2}\}$. Como en la prueba del lema, $D^\alpha v = 0$ casi en todas partes en $U$, para todo $|\alpha| \le m$.

Sea $x_0 = (x_0', 0) \in \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B'$. Entonces $\|x_0'\| \ge R$. Si $\|x_0'\| > R$, tomamos $\rho := \frac{\|x_0'\| - R}{2} > 0$. Entonces $B_{\text{euc}}(x_0, \rho) \cap \mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n_+ \setminus B^+$, y por la definición de extensión por cero se tiene $D^\beta \widetilde{v} = 0$ casi en todas partes en $B_{\text{euc}}(x_0, \rho) \cap \mathbb{R}^n_+$.
Si $\|x_0'\| = R$, tomamos $\rho := \frac{\delta}{4}$. Si $x \in B_{\text{euc}}(x_0, \rho) \cap \mathbb{R}^n_+$, entonces o bien $x \notin B^+$, y ahí $D^\beta \widetilde{v} = 0$, o bien $x \in B^+$. En este último caso, $\|x\| \ge R - \rho = R - \frac{\delta}{4} > R - \frac{\delta}{2}$, de modo que $x \in U$, y ahí $D^\beta v = 0$ casi en todas partes. Por lo tanto, también en este caso $D^\beta \widetilde{v} = 0$ casi en todas partes en $B_{\text{euc}}(x_0, \rho) \cap \mathbb{R}^n_+$.
Así, $D^\beta \widetilde{v}$ se anula casi en todas partes en una vecindad relativa de cada punto de $\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B'$. Como $|\beta| \le m-1$, se tiene $D^\beta \widetilde{v} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, y por el Lema 3.7.2, aplicado a $F = D^\beta \widetilde{v}$, se concluye que $\gamma_0 D^\beta \widetilde{v} = 0$ en $\partial\mathbb{R}^n_+$. Como esto vale para todo $|\beta| \le m-1$, el Teorema 3.7.1 implica que $\widetilde{v} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Entonces existe una sucesión $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ tal que $\eta_k \to \widetilde{v}$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.
Tomemos una función $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}\chi \subset B_{\text{euc}}(0,R)$ y $\chi \equiv 1$ en una vecindad de $K$. Como la multiplicación por $\chi|_{\mathbb{R}^n_+}$ es continua en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, se tiene $\chi\eta_k \to \chi\widetilde{v} = \widetilde{v}$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Además, $(\chi\eta_k) \restriction_{B^+} \in C_c^\infty(B^+)$, porque $\eta_k$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^n_+$ y $\operatorname{supp}\chi \subset B_{\text{euc}}(0,R)$. Al restringir a $B^+$, obtenemos una sucesión en $C_c^\infty(B^+)$ que converge a $v$ en $W^{m,p}(B^+)$. Por lo tanto, $v$ pertenece a la cerradura de $C_c^\infty(B^+)$ en $W^{m,p}(B^+)$. □

# 4

# Distribuciones y análisis de Fourier



Oliver Heaviside (1850–1925)

**Figura 4.1.** Oliver Heaviside empleó sistemáticamente la función escalón y métodos de cálculo operacional en el estudio de problemas eléctricos, anticipando ideas que más tarde encontraron una formulación rigurosa en la teoría de distribuciones.

La teoría de distribuciones amplía la noción de función y permite diferenciar objetos que no admiten una derivada clásica ni una derivada débil representable por una función localmente integrable. Su formulación moderna, debida a Laurent Schwartz, organiza de manera rigurosa ideas que ya aparecían en el cálculo operacional y en el estudio de señales discontinuas.

Los espacios de Sobolev mostraron que la integración por partes permite asignar derivadas a funciones con regularidad limitada. El marco distribucional lleva esta idea un paso más allá: una distribución se define por su acción sobre funciones de prueba, y sus derivadas se obtienen trasladando formalmente la derivación a dichas funciones. Así pueden tratarse de forma unificada la función de Heaviside, la delta de Dirac y muchas otras singularidades que surgen en ecuaciones diferenciales, física matemática y análisis de Fourier.

Una solución débil puede, por lo tanto, poseer derivadas sólo en sentido distribucional. Para los operadores diferenciales con coeficientes constantes, la transformada de Fourier convierte esas derivadas en multiplicaciones: con la normalización unitaria que se fijará más adelante,

$$\widehat{D^{\alpha} u}(\xi) = (i\xi)^{\alpha}\, \widehat{u}(\xi).$$

Esta identidad reduce ecuaciones lineales a relaciones algebraicas en la variable de frecuencia. También permite construir soluciones fundamentales y regularizaciones, y distinguir el comportamiento de las frecuencias bajas del de las altas. Las distribuciones temperadas proporcionarán el dominio común en el que estas operaciones se mantienen bien definidas.

La función escalón introducida por Oliver Heaviside ofrece una motivación inmediata. Modela, entre otros fenómenos, el encendido instantáneo de una señal y posee un salto en el origen; su derivada no puede representarse por una función localmente integrable, pero sí por una distribución.

**Ejemplo 4.0.1.** (La función de Heaviside) Definimos la función de Heaviside $H\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Aunque $H$ es localmente integrable, no es débilmente diferenciable en el sentido de que su derivada esté representada por una función de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Esta dificultad motiva la extensión distribucional de la derivada. Supongamos, en busca de contradicción, que existe $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ que cumple

$$\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Como $H = 0$ en $(-\infty, 0)$ y $H = 1$ en $[0, \infty)$, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = \int_0^\infty \varphi'(x)dx.$$

Dado que $\varphi$ tiene soporte compacto, existe $R > 0$ tal que $\varphi(x) = 0$ para $x \geq R$, por lo que

$$\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \int_0^R \varphi'(x)dx.$$

Esta integral está definida en un intervalo finito, y como $\varphi$ es suave, la integral de Lebesgue coincide con la integral de Riemann. El Teorema B.6.5 proporciona

$$\int_0^R \varphi'(x)dx = \varphi(R) - \varphi(0) = -\varphi(0).$$

En consecuencia, la igualdad anterior implicaría

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Ahora bien, si tomamos una familia de funciones $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$, $\varphi_\varepsilon(0) = 1$ y $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Pero como $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi_\varepsilon(x)dx \right| \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v(x)|dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

donde el límite se justifica aplicando el *teorema de convergencia dominada de Lebesgue* (Teorema B.6.14), pues $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ asegura la integrabilidad en los intervalos $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Esto contradice que la integral valga siempre 1. Por lo tanto, no existe tal función $v$, y concluimos que $H$ no posee derivada débil.

Este cálculo deja en evidencia la necesidad de extender la noción de derivada débil: debemos admitir nuevos objetos que, aunque no sean funciones ordinarias, actúen de manera coherente sobre funciones de prueba. Ese nuevo objeto es precisamente la *delta de Dirac*.

Antes de formalizar la definición, conviene recordar la motivación física: Paul Dirac (1902–1984), en su estudio de la mecánica cuántica, introdujo de manera formal el símbolo $\delta_0$ para modelar *fuentes puntuales de energía*. En ese contexto, la delta era una herramienta indispensable para describir sistemas donde toda la masa o carga se concentra en un único punto, y fue empleada por los ingenieros y físicos mucho antes de que existiera una base matemática rigurosa gracias a la teoría de distribuciones desarrollada por Laurent Schwartz. A continuación formalizamos lo que será la delta de Dirac.

**Ejemplo 4.0.2.** (La delta de Dirac) Definimos la ***delta de Dirac*** como el funcional lineal $\delta_0 \colon C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\delta_0(\varphi) = \varphi(0).$$

La identidad anterior sugiere que $\delta_0$ debe interpretarse como la derivada de la función de Heaviside. No es una función ordinaria, pero sí puede actuar linealmente sobre funciones de prueba. Para que esta acción tenga estabilidad analítica no basta la linealidad: se necesita continuidad. Antes de definir una distribución debemos, por lo tanto, precisar la topología del espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

## 4.1 El espacio $\mathcal{D}(\Omega)$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. El espacio $C_c^\infty(\Omega)$ de funciones suaves con soporte compacto será el espacio básico de funciones de prueba. Para usarlo en análisis funcional necesitamos dotarlo de una topología que registre simultáneamente el comportamiento de una función y el de todas sus derivadas, sin reducir esta información a una sola norma.

La construcción se hará primero fijando un compacto $K \subseteq \Omega$ y considerando las funciones cuyo soporte está contenido en $K$. Usaremos los resultados generales sobre topologías inducidas por familias de seminormas, espacios localmente convexos, metrizabilidad y espacios de Fréchet reunidos en el Apéndice B.10.

En particular, emplearemos la Definición B.10.18, el Teorema B.10.19, las Proposiciones B.10.21, B.10.23 y B.10.24, así como el Teorema B.10.38.

Primero consideraremos el espacio de todas las funciones suaves con soporte contenido en un subconjunto compacto fijo $K \subseteq \Omega$, el cual denotaremos por $\mathcal{D}_K(\Omega)$:

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K\}.$$

La topología en este subespacio debe ser consistente con la noción natural de convergencia uniforme de las funciones y de sus derivadas parciales de cualquier orden sobre el compacto $K$. Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$\|\varphi\|_{C^j(K)} := \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Como el caso $\alpha = 0$ está incluido y $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$, cada $\|\cdot\|_{C^j(K)}$ es una norma en $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Si $\|\varphi\|_{C^j(K)} = 0$, entonces en particular $\|\varphi\|_{C^0(K)} = 0$, de modo que $\varphi = 0$ en $K$. Por otra parte, como $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$, si $x \in \Omega \setminus K$, entonces $\varphi(x) = 0$. Por lo tanto, $\varphi = 0$ en todo $\Omega$.

Por el Teorema B.10.19, la familia de normas $\{\|\cdot\|_{C^j(K)}\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ induce una topología $\tau_K$ en $\mathcal{D}_K(\Omega)$ bajo la cual este espacio es un espacio vectorial topológico localmente convexo. Una base de vecindades del origen para esta topología está dada por las intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$\bigcap_{q=1}^{k} \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \;\middle|\; \|\varphi\|_{C^{j_q}(K)} < r_q \right\},$$

donde $j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}_0$, $r_1, \ldots, r_k > 0$ y $k \in \mathbb{N}$. Las vecindades de un elemento arbitrario $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ son de la forma $\varphi + U$, donde $U$ es una vecindad del origen.

**Lema 4.1.1.** La familia

$$V_{K,j,\ell} := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \;\middle|\; \|\varphi\|_{C^j(K)} < \frac{1}{\ell} \right\}, \qquad j \in \mathbb{N}_0, \quad \ell \in \mathbb{N},$$

es una base local numerable de vecindades del origen para $\tau_K$. En particular, $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$ tiene una base local numerable en cada punto.

*Demostración.* Primero observemos que cada $V_{K,j,\ell}$ es una vecindad del origen, pues es una de las vecindades determinadas por la norma $\|\cdot\|_{C^j(K)}$.
Sea ahora $U$ una vecindad del origen en $\tau_K$. Por la descripción de la base local, existe una vecindad básica

$$W := \bigcap_{q=1}^{k} \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \;\middle|\; \|\varphi\|_{C^{j_q}(K)} < r_q \right\}$$

tal que $W \subseteq U$. Definimos $j := \max\{j_1, \ldots, j_k\}$ y elegimos $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\ell} < \min\{r_1, \ldots, r_k\}$.
Como las normas $\|\cdot\|_{C^j(K)}$ son crecientes respecto de $j$, si $\psi \in V_{K,j,\ell}$, entonces, para cada $q \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\|\psi\|_{C^{j_q}(K)} \leq \|\psi\|_{C^j(K)} < \frac{1}{\ell} < r_q.$$

Por lo tanto, $\psi \in W$. Así, $V_{K,j,\ell} \subseteq W \subseteq U$.
Esto prueba que $\{V_{K,j,\ell} \mid j \in \mathbb{N}_0,\ \ell \in \mathbb{N}\}$ es una base local del origen. Además, esta familia es numerable, pues $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ es numerable.
Finalmente, como las traslaciones son homeomorfismos en la topología inducida por seminormas, para cada $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ la familia

$$\{\varphi + V_{K,j,\ell} \mid j \in \mathbb{N}_0,\ \ell \in \mathbb{N}\}$$

es una base local numerable de vecindades de $\varphi$. □

Como la familia $\{\|\cdot\|_{C^j(K)}\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ separa puntos, por la Proposición B.10.21 el espacio $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$ es Hausdorff. Si $\varphi \neq 0$, como $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$, no puede ocurrir que $\varphi$ se anule en todo $K$; por lo tanto, $\|\varphi\|_{C^0(K)} > 0$.

En particular, los conjuntos unitarios de $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$ son cerrados. Además, por el Lema 4.1.1, este espacio tiene una base local numerable en el origen. Por el Teorema B.10.9, concluimos que $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$ es metrizable.

Más aún, en este caso podemos escribir explícitamente una métrica compatible. Por la Proposición B.10.24, la topología $\tau_K$ está inducida por la métrica invariante bajo traslaciones

$$d_K(\varphi,\psi) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|\varphi-\psi\|_{C^j(K)}}{1+\|\varphi-\psi\|_{C^j(K)}}, \qquad \varphi,\psi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Por la Proposición B.10.23, una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi$ en $\mathcal{D}_K(\Omega)$ si y sólo si

$$\|\varphi_n-\varphi\|_{C^j(K)} \to 0 \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N}_0.$$

Esto significa que $\varphi_n \to \varphi$ si y sólo si, para cada multiíndice $\alpha$, la sucesión $(D^\alpha\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre $K$ hacia $D^\alpha\varphi$. Si $\|\varphi_n-\varphi\|_{C^j(K)} \to 0$ para todo $j$, entonces, dado un multiíndice $\alpha$, basta tomar $j \geq |\alpha|$ para obtener

$$\|D^\alpha\varphi_n - D^\alpha\varphi\|_{C^0(K)} \leq \|\varphi_n-\varphi\|_{C^j(K)} \to 0.$$

Recíprocamente, si para cada multiíndice $\alpha$ la sucesión $(D^\alpha\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre $K$ hacia $D^\alpha\varphi$, entonces, para cada $j \in \mathbb{N}_0$, el conjunto de multiíndices $\alpha$ con $|\alpha| \leq j$ es finito. Por lo tanto,

$$\|\varphi_n-\varphi\|_{C^j(K)} = \max_{|\alpha|\leq j} \|D^\alpha\varphi_n - D^\alpha\varphi\|_{C^0(K)} \to 0.$$

Del mismo modo, una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{D}_K(\Omega)$ si y sólo si

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|_{C^j(K)} \to 0 \qquad \text{cuando } n,m \to \infty,$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Equivalentemente, para cada multiíndice $\alpha$, la sucesión $(D^\alpha\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy uniformemente sobre $K$.

## 4.2 Límites proyectivos

Una pregunta natural es si el espacio $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es completo bajo la topología $\tau_K$ que acabamos de construir. Resulta que sí lo es. Más aún, $\mathcal{D}_K(\Omega)$ no solamente es un espacio localmente convexo generado por una familia numerable de normas, sino que además puede describirse como un *límite proyectivo de espacios de Banach*.

La misma descripción por límites proyectivos se reutilizará para los espacios de secciones de prueba sobre haces vectoriales suaves y para el espacio de funciones de rápido decaimiento, usualmente llamado *clase de Schwartz*. Este último será el espacio de prueba de las distribuciones temperadas.

Desde el punto de vista topológico, la topología proyectiva que usaremos no es una construcción nueva: es precisamente una topología inicial en el sentido de la Definición B.10.39. La llamaremos *proyectiva* porque está asociada a una familia de mapeos lineales hacia espacios topológicos ya conocidos.

**Definición 4.2.1.** (Topología proyectiva) Sea $X$ un espacio vectorial, sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos y, para cada $i \in I$, sea $T_i\colon X \longrightarrow X_i$ un mapeo lineal. La *topología proyectiva* sobre $X$ asociada a la familia $(T_i)_{i\in I}$ es la topología inicial determinada por dichos mapeos.
Equivalentemente, es la topología menos fina sobre $X$ para la cual todos los mapeos $T_i\colon X \longrightarrow X_i$ son conti-

nuos. Una base de vecindades del origen para esta topología está dada por los conjuntos

$$\bigcap_{q=1}^{r} T_{i_q}^{-1}(U_{i_q}),$$

donde $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r \in I$, y cada $U_{i_q}$ es una vecindad del origen en $X_{i_q}$.

**Proposición 4.2.2.** Sea $X$ un espacio vectorial, sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos y, para cada $i \in I$, sea $T_i \colon X \longrightarrow X_i$ un mapeo lineal. Entonces la topología proyectiva asociada a $(T_i)_{i\in I}$ vuelve a $X$ un espacio vectorial topológico.
Además:

(a) si cada $X_i$ es localmente convexo, entonces $X$ es localmente convexo;

(b) si cada $X_i$ es Hausdorff y la familia $(T_i)_{i\in I}$ separa puntos de $X$, entonces $X$ es Hausdorff.

*Demostración.* Denotemos por $\tau_{\text{proj}}$ la topología proyectiva sobre $X$.
Probemos primero que la suma es continua. Como basta verificar la continuidad sobre vecindades básicas, sean $x, y \in X$ y sea $W$ una vecindad básica de $x+y$ en $\tau_{\text{proj}}$. Podemos escribir

$$W = \bigcap_{q=1}^{r} T_{i_q}^{-1}(U_q),$$

donde, para cada $q \in \{1, \ldots, r\}$, el conjunto $U_q$ es una vecindad de $T_{i_q}(x+y)$ en $X_{i_q}$.
Como la suma es continua en $X_{i_q}$, existen vecindades $V_q$ de $T_{i_q}(x)$ y $W_q$ de $T_{i_q}(y)$ tales que $V_q + W_q \subseteq U_q$. Definimos

$$V := \bigcap_{q=1}^{r} T_{i_q}^{-1}(V_q), \qquad W' := \bigcap_{q=1}^{r} T_{i_q}^{-1}(W_q).$$

Entonces $V$ es una vecindad de $x$ y $W'$ es una vecindad de $y$. Si $u \in V$ y $v \in W'$, para cada $q \in \{1, \ldots, r\}$ se tiene $T_{i_q}(u) \in V_q$ y $T_{i_q}(v) \in W_q$. Como $T_{i_q}$ es lineal,

$$T_{i_q}(u+v) = T_{i_q}(u) + T_{i_q}(v) \in V_q + W_q \subseteq U_q.$$

Por lo tanto, $u + v \in W$. Así, $V + W' \subseteq W$, y la suma es continua.
Veamos ahora que la multiplicación por escalares es continua. Como basta verificar la continuidad sobre vecindades básicas, sean $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$, y sea $W$ una vecindad básica de $\lambda x$. Escribimos

$$W = \bigcap_{q=1}^{r} T_{i_q}^{-1}(U_q),$$

donde $U_q$ es una vecindad de $\lambda T_{i_q}(x)$ en $X_{i_q}$. Como la multiplicación por escalares es continua en $X_{i_q}$, existen una vecindad $A_q$ de $\lambda$ en $\mathbb{K}$ y una vecindad $V_q$ de $T_{i_q}(x)$ en $X_{i_q}$ tales que $A_q V_q \subseteq U_q$. Definimos

$$A := \bigcap_{q=1}^{r} A_q, \qquad V := \bigcap_{q=1}^{r} T_{i_q}^{-1}(V_q).$$

Entonces $A$ es una vecindad de $\lambda$ en $\mathbb{K}$ y $V$ es una vecindad de $x$ en $X$. Si $\mu \in A$ y $u \in V$, para cada $q \in \{1,\dots,r\}$ se tiene $\mu \in A_q$ y $T_{i_q}(u) \in V_q$. Por lo tanto,

$$T_{i_q}(\mu u) = \mu T_{i_q}(u) \in A_q V_q \subseteq U_q.$$

Así, $\mu u \in W$. Concluimos que la multiplicación por escalares es continua.
Esto prueba que $(X, \tau_{\text{proj}})$ es un espacio vectorial topológico.
Probemos (a). Supongamos que cada $X_i$ es localmente convexo. Para cada $i \in I$, tomemos una base de vecindades del origen en $X_i$ formada por conjuntos convexos y balanceados. Entonces las vecindades básicas del origen en $X$ pueden tomarse de la forma

$$\bigcap_{q=1}^{r} T_{i_q}^{-1}(U_{i_q}),$$

donde cada $U_{i_q}$ es convexo y balanceado. Como la preimagen de un conjunto convexo y balanceado mediante un mapeo lineal conserva ambas propiedades, y como las intersecciones finitas de conjuntos convexos y balanceados también son convexas y balanceadas, concluimos que $X$ es localmente convexo.
Probemos (b). Supongamos que cada $X_i$ es Hausdorff y que la familia $(T_i)_{i\in I}$ separa puntos de $X$. Entonces

$$\bigcap_{i\in I} \ker(T_i) = \{0\}.$$

Como $X_i$ es Hausdorff, el conjunto $\{0\}$ es cerrado en $X_i$. Puesto que $T_i$ es continuo, $\ker(T_i) = T_i^{-1}(\{0\})$ es cerrado en $X$. Por lo tanto, $\{0\}$ es cerrado en $X$, al ser una intersección de conjuntos cerrados. Por la Proposición B.10.20, concluimos que $X$ es Hausdorff. □

La formulación general de los límites proyectivos utiliza sistemas de espacios y mapeos de transición. En las aplicaciones de este libro aparecerá sobre todo el caso concreto en el que un espacio se realiza como intersección de espacios de Banach contenidos en un mismo espacio vectorial topológico.

**Definición 4.2.3.** (Límite proyectivo realizado como intersección) Sea $Y$ un espacio vectorial topológico Hausdorff y sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios de Banach tales que cada $X_n$ es un subespacio vectorial de $Y$ y la inclusión $X_n \hookrightarrow Y$ es continua. Definimos

$$X := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $\iota_n \colon X \longrightarrow X_n$ la inclusión natural y dotemos a $X$ de la topología proyectiva asociada a la familia $(\iota_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En esta situación escribimos

$$X = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

y decimos que $X$ es el *límite proyectivo* de la familia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En algunos textos también se emplea la expresión *límite inverso*.

**Proposición 4.2.4.** (Completitud secuencial de una intersección proyectiva) Sea $Y$ un espacio vectorial topológico Hausdorff y sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios de Banach tales que cada $X_n$ es un subespacio vectorial de $Y$ y la inclusión $X_n \hookrightarrow Y$ es continua. Consideremos

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

dotado de la topología proyectiva asociada a las inclusiones $\iota_n \colon X \longrightarrow X_n$. Entonces $X$ es secuencialmente completo: toda sucesión de Cauchy en $X$ converge en $X$.

*Demostración.* Sea $(x^{(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $X$ respecto de la topología proyectiva. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $(x^{(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $X_n$.
Sea $U_n$ una vecindad del origen en $X_n$. Como $\iota_n \colon X \longrightarrow X_n$ es continua por definición de la topología proyectiva, el conjunto $\iota_n^{-1}(U_n)$ es una vecindad del origen en $X$. Puesto que $(x^{(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $X$, existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x^{(q)} - x^{(p)} \in \iota_n^{-1}(U_n) \qquad \forall q, p \geq q_0.$$

Por lo tanto,

$$x^{(q)} - x^{(p)} \in U_n \qquad \forall q, p \geq q_0.$$

Esto prueba que $(x^{(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $X_n$.
Como $X_n$ es Banach, existe $x_n \in X_n$ tal que $x^{(q)} \to x_n$ en $X_n$ cuando $q \to \infty$.
Veamos que los límites $x_n$ no dependen de $n$ cuando se consideran como elementos de $Y$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Como las inclusiones $X_n \hookrightarrow Y$ y $X_m \hookrightarrow Y$ son continuas, de $x^{(q)} \to x_n$ en $X_n$ se deduce $x^{(q)} \to x_n$ en $Y$, y de $x^{(q)} \to x_m$ en $X_m$ se deduce $x^{(q)} \to x_m$ en $Y$. Puesto que $Y$ es Hausdorff, el límite de una sucesión convergente es único. Por consiguiente, $x_n = x_m$ en $Y$.
Existe entonces un único elemento $x \in Y$ tal que $x = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n \in X_n$ para cada $n$, se concluye que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$.
Resta probar que $x^{(q)} \to x$ en la topología proyectiva de $X$. Sea $V$ una vecindad del origen en $X$. Por la definición de esta topología, existe una vecindad básica

$$V_0 = \bigcap_{s=1}^{r} \iota_{n_s}^{-1}(U_{n_s})$$

tal que $V_0 \subseteq V$, donde $r \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, y cada $U_{n_s}$ es una vecindad del origen en $X_{n_s}$.
Para cada $s \in \{1, \ldots, r\}$, sabemos que $x^{(q)} \to x$ en $X_{n_s}$. Por lo tanto, existe $q_s \in \mathbb{N}$ tal que $x^{(q)} - x \in U_{n_s}$ para todo $q \geq q_s$. Tomando $q_* := \max\{q_1, \ldots, q_r\}$, se obtiene que, para todo $q \geq q_*$,

$$x^{(q)} - x \in \bigcap_{s=1}^{r} \iota_{n_s}^{-1}(U_{n_s}) = V_0 \subseteq V.$$

En consecuencia, $x^{(q)} \to x$ en $X$. Concluimos que $X$ es secuencialmente completo. □

**Observación 4.2.5.** Si la completitud de un espacio vectorial topológico se formula mediante redes o filtros de Cauchy, el mismo argumento demuestra que $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es completo en ese sentido. En las aplicaciones inmediatas bastará la formulación secuencial, pues los espacios que estudiaremos serán metrizables.

Regresemos ahora al espacio $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$C_K^j(\Omega) := \left\{ \varphi \in C^j(\Omega) \;\middle|\; \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K \right\},$$

y lo dotamos de la norma

$$\|\varphi\|_{C^j(K)} := \max_{|\alpha|\le j} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

**Lema 4.2.6.** Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, el espacio $\left(C_K^j(\Omega), \|\cdot\|_{C^j(K)}\right)$ es un espacio de Banach.

*Demostración.* Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C_K^j(\Omega)$. Fijemos un multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| \le j$.
Si $x \in \Omega \setminus K$, como $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq K$, se tiene $x \notin \operatorname{supp}(\varphi_n)$. Por lo tanto, existe una vecindad abierta de $x$ en la cual $\varphi_n$ se anula. En consecuencia, $D^\alpha \varphi_n(x) = 0$. Así, $D^\alpha \varphi_n$ se anula en $\Omega \setminus K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Además, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi_m\|_{L^\infty(\Omega)} = \|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi_m\|_{C^0(K)} \le \|\varphi_n - \varphi_m\|_{C^j(K)}.$$

Como $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $C_K^j(\Omega)$, se sigue que $(D^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en $\Omega$.
Definamos ahora el límite correspondiente. Para cada $x \in \Omega$, la sucesión real $(D^\alpha \varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por lo tanto converge en $\mathbb{R}$. Definimos

$$g_\alpha(x) := \lim_{n\to\infty} D^\alpha \varphi_n(x), \qquad x \in \Omega.$$

Veamos que la convergencia es uniforme. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(D^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \ge N$, entonces

$$\|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi_m\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon.$$

Fijemos $n \ge N$ y hagamos $m \to \infty$. Para cada $x \in \Omega$,

$$|D^\alpha \varphi_n(x) - g_\alpha(x)| \le \varepsilon.$$

Tomando supremo sobre $x \in \Omega$, obtenemos

$$\|D^\alpha \varphi_n - g_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \le \varepsilon.$$

Por lo tanto, $D^\alpha \varphi_n \to g_\alpha$ uniformemente en $\Omega$.
Como cada $D^\alpha \varphi_n$ es continua y la convergencia es uniforme, $g_\alpha$ es continua en $\Omega$. Además, dado que $D^\alpha \varphi_n = 0$ en $\Omega \setminus K$ para todo $n$, al pasar al límite se obtiene

$$g_\alpha = 0 \qquad \text{en } \Omega \setminus K.$$

Definimos $\varphi := g_0$. Probaremos que $\varphi \in C_K^j(\Omega)$ y que $D^\alpha \varphi = g_\alpha$ para todo multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| \le j$.
Comenzaremos mostrando la compatibilidad entre los límites. Afirmamos que, si $\beta$ es un multiíndice con $|\beta| \le j-1$ y $i \in \{1,\dots,n\}$, entonces

$$\partial_i g_\beta = g_{\beta+e_i} \qquad \text{en } \Omega.$$

Fijemos $x \in \Omega$. Como $\Omega$ es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $x + te_i \in \Omega$ para todo $t \in [-\delta, \delta]$. Si $h \in (-\delta, \delta)$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, el Teorema B.6.5, aplicado a la función $t \mapsto D^\beta \varphi_n(x + te_i)$ da

$$D^\beta \varphi_n(x + he_i) - D^\beta \varphi_n(x) = \int_0^h D^{\beta+e_i} \varphi_n(x + te_i)\, dt.$$

Hagamos $n \to \infty$. Por la convergencia uniforme $D^\beta \varphi_n \to g_\beta$, el lado izquierdo converge a

$$g_\beta(x + he_i) - g_\beta(x).$$

Por otra parte,

$$\left| \int_0^h \left( D^{\beta+e_i} \varphi_n(x + te_i) - g_{\beta+e_i}(x + te_i) \right) dt \right| \le |h| \| D^{\beta+e_i} \varphi_n - g_{\beta+e_i} \|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Como $D^{\beta+e_i} \varphi_n \to g_{\beta+e_i}$ uniformemente en $\Omega$, el lado derecho converge a 0. Por lo tanto,

$$g_\beta(x + he_i) - g_\beta(x) = \int_0^h g_{\beta+e_i}(x + te_i)\, dt.$$

Si $h \neq 0$, dividimos entre $h$:

$$\frac{g_\beta(x + he_i) - g_\beta(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h g_{\beta+e_i}(x + te_i)\, dt.$$

Como $g_{\beta+e_i}$ es continua en $x$, se tiene

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h g_{\beta+e_i}(x + te_i)\, dt - g_{\beta+e_i}(x) \right| \le \sup_{t \in [-|h|, |h|]} |g_{\beta+e_i}(x + te_i) - g_{\beta+e_i}(x)| \longrightarrow 0$$

cuando $h \to 0$. Por consiguiente,

$$\partial_i g_\beta(x) = g_{\beta+e_i}(x).$$

Como $x \in \Omega$ era arbitrario, concluimos que $\partial_i g_\beta = g_{\beta+e_i}$ en $\Omega$.
A partir de esta relación, probaremos por inducción sobre $r \in \{0,\dots,j\}$ que:

$$\varphi \in C^r(\Omega) \qquad \text{y} \qquad D^\alpha \varphi = g_\alpha \quad \text{para todo } |\alpha| \le r.$$

Para $r = 0$, esto es inmediato, pues $\varphi = g_0$ y $g_0$ es continua.
Supongamos ahora que la afirmación vale para cierto $r \in \{0,\dots,j-1\}$. Probaremos que vale para $r+1$. Sea $\alpha$ un multiíndice con $|\alpha| = r+1$. Elegimos $i \in \{1,\dots,n\}$ tal que $\alpha_i \ge 1$ y escribimos $\alpha = \beta + e_i$, donde $|\beta| = r$.
Por la hipótesis inductiva, $D^\beta \varphi = g_\beta$. Como $|\beta| = r \le j-1$, la identidad demostrada antes da

$$\partial_i g_\beta = g_{\beta+e_i} = g_\alpha.$$

Por lo tanto,

$$D^\alpha \varphi = \partial_i (D^\beta \varphi) = \partial_i g_\beta = g_\alpha.$$

Además, $g_\alpha$ es continua. Como esto ocurre para todo multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| = r+1$, se concluye que $\varphi \in C^{r+1}(\Omega)$ y que $D^\alpha \varphi = g_\alpha$ para todo $|\alpha| \leq r+1$.
Por inducción, $\varphi \in C^j(\Omega)$ y $D^\alpha \varphi = g_\alpha$ para todo multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| \leq j$.
Como $g_0 = 0$ en $\Omega \setminus K$, se tiene $\varphi = 0$ en $\Omega \setminus K$. Puesto que $K$ es cerrado en $\Omega$, concluimos que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$.
Por lo tanto, $\varphi \in C_K^j(\Omega)$.
Finalmente, para cada multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| \leq j$, ya sabemos que $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente en $\Omega$, y en particular uniformemente en $K$. Como el conjunto de multiíndices $\alpha$ con $|\alpha| \leq j$ es finito,

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{C^j(K)} = \max_{|\alpha| \leq j} \|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi\|_{C^0(K)} \longrightarrow 0.$$

Así, toda sucesión de Cauchy en $C_K^j(\Omega)$ converge en $C_K^j(\Omega)$. Concluimos que $\left(C_K^j(\Omega), \|\cdot\|_{C^j(K)}\right)$ es un espacio de Banach. □

Observemos ahora que

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}_0} C_K^j(\Omega).$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, entonces $\varphi \in C_K^j(\Omega)$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Recíprocamente, si $\varphi \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}_0} C_K^j(\Omega)$, entonces $\varphi$ es de clase $C^j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, de modo que $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Además, $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$. Por lo tanto, $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.

Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, consideremos la inclusión natural $\iota_j \colon \mathcal{D}_K(\Omega) \longrightarrow C_K^j(\Omega)$. Dotemos a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ de la topología proyectiva asociada a la familia $(\iota_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$, y denotémosla por $\tau_K^{\text{proj}}$.

Una base de vecindades del origen para $\tau_K^{\text{proj}}$ está dada por las intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$\iota_j^{-1}\left(\left\{\varphi \in C_K^j(\Omega) \;\middle|\; \|\varphi\|_{C^j(K)} < r\right\}\right), \qquad j \in \mathbb{N}_0, \quad r > 0.$$

Como $\iota_j$ es la inclusión natural, estos conjuntos coinciden con

$$\left\{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \;\middle|\; \|\varphi\|_{C^j(K)} < r\right\}.$$

Por lo tanto, una base de vecindades del origen para $\tau_K^{\text{proj}}$ está dada por los conjuntos

$$\bigcap_{q=1}^{k} \left\{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \;\middle|\; \|\varphi\|_{C^{j_q}(K)} < r_q\right\},$$

donde $k \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}_0$ y $r_1, \ldots, r_k > 0$.

Esta familia es la base de vecindades del origen que define la topología $\tau_K$ construida anteriormente a partir de la familia de normas $\{\|\cdot\|_{C^j(K)}\}_{j \in \mathbb{N}_0}$. Por consiguiente, $\tau_K^{\text{proj}} = \tau_K$.

En otras palabras,

$$\left(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K\right) = \varprojlim_{j \in \mathbb{N}_0} C_K^j(\Omega).$$

Como cada $C_K^j(\Omega)$ es un espacio de Banach y la familia está indexada por $\mathbb{N}_0$, podemos reindexarla mediante

$n \mapsto n-1$ para escribirla como una familia indexada por $\mathbb{N}$. La Proposición 4.2.4 implica entonces que $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es secuencialmente completo respecto de $\tau_K$.

Resta traducir esta completitud secuencial en la completitud de la métrica $d_K$ ya construida. Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy respecto de $d_K$. Fijemos $j \in \mathbb{N}_0$ y $\varepsilon > 0$. Como $\dfrac{1}{2^j}\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq N$, entonces

$$d_K(\varphi_n, \varphi_m) < \frac{1}{2^j}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Por la definición de $d_K$,

$$\frac{1}{2^j}\frac{\|\varphi_n - \varphi_m\|_{C^j(K)}}{1+\|\varphi_n - \varphi_m\|_{C^j(K)}} \leq d_K(\varphi_n, \varphi_m).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\|\varphi_n - \varphi_m\|_{C^j(K)}}{1+\|\varphi_n - \varphi_m\|_{C^j(K)}} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Como la función $t \mapsto \dfrac{t}{1+t}$ es estrictamente creciente en $[0,\infty)$, se concluye que $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{C^j(K)} < \varepsilon$ para cualesquiera $n, m \geq N$.

Hemos probado que, para cada $j \in \mathbb{N}_0$, $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{C^j(K)} \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Por la Proposición B.10.23, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy respecto de $\tau_K$. Como $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es secuencialmente completo para esta topología, existe $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ en $\tau_K$.

Finalmente, como la métrica $d_K$ induce la topología $\tau_K$, se sigue que $d_K(\varphi_n, \varphi) \to 0$. Así, toda sucesión de Cauchy respecto de $d_K$ converge en $\mathcal{D}_K(\Omega)$, y por lo tanto $d_K$ es completa.

Concluimos que $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$ es un espacio localmente convexo, Hausdorff, metrizable y completo. Por el Teorema B.10.38, $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es un espacio de Fréchet.

## 4.3 La topología de $\mathcal{D}(\Omega)$

La construcción de esta sección sigue el tratamiento de [97, Sección 10.1]. Para construir una topología en $C_c^\infty(\Omega)$, sea $\mathcal{B}_0$ la colección de subconjuntos $U \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tales que:

(a) $0 \in U$,

(b) $U$ es balanceado[1] y convexo,

(c) para todo $K \subseteq \Omega$ compacto, el conjunto $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ es una vecindad del origen en $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$.

La colección $\mathcal{B}_0$ está diseñada para servir como base de vecindades del origen en $C_c^\infty(\Omega)$. A partir de ella, definimos

$$\mathcal{B} := \{\varphi + V \mid \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ V \in \mathcal{B}_0\}.$$

Estas condiciones determinan la topología mediante sus vecindades.

**Teorema 4.3.1.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Existe una única topología $\tau_{LF}$ en $C_c^\infty(\Omega)$ para la cual $\mathcal{B}_0$ es una base de vecindades del origen y las operaciones vectoriales son continuas. Esta topología es de Hausdorff y localmente convexa. Para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, la familia $\varphi + \mathcal{B}_0$ es una base de vecindades de $\varphi$; un conjunto $O$ es abierto si y sólo si para cada $\varphi \in O$ existe $V \in \mathcal{B}_0$ con $\varphi + V \subseteq O$. Al espacio vectorial topológico $(C_c^\infty(\Omega), \tau_{LF})$ lo denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ y a sus elementos los llamamos *funciones de prueba*.

[1] Un subconjunto $U$ de un espacio vectorial se dice balanceado si para todo escalar $\lambda$ con $|\lambda| \leq 1$ se cumple $\lambda U \subseteq U$.

*Demostración.* La familia $\mathcal{B}_0$ es no vacía, pues contiene al espacio completo. Cada $U \in \mathcal{B}_0$ es absorbente: si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, tomamos un compacto $K$ que contenga su soporte. La vecindad $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ absorbe a $\varphi$ en ese espacio y, por tanto, también lo hace $U$ en $C_c^\infty(\Omega)$. Además, $\mathcal{B}_0$ es estable bajo intersecciones finitas y bajo multiplicación por escalares positivos. En efecto, estas operaciones conservan la convexidad y el carácter balanceado, y sus intersecciones con cada $\mathcal{D}_K(\Omega)$ siguen siendo vecindades del origen. La Proposición B.10.26 proporciona entonces una única topología localmente convexa con base de vecindades $\mathcal{B}_0$.
Para comprobar que es de Hausdorff, consideremos

$$V_\varepsilon := \left\{ \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \;\middle|\; \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon \right\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Este conjunto pertenece a $\mathcal{B}_0$, porque su intersección con $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es la bola abierta de radio $\varepsilon$ para la norma uniforme. Si $\varphi \neq \psi$, elegimos $3\varepsilon < \|\varphi - \psi\|_{L^\infty(\Omega)}$. Las vecindades $\varphi + V_\varepsilon$ y $\psi + V_\varepsilon$ son disjuntas: de lo contrario, la desigualdad triangular daría una distancia uniforme menor que $2\varepsilon$ entre $\varphi$ y $\psi$. Sus interiores son vecindades abiertas disjuntas. La descripción de los abiertos y la unicidad se siguen de la Proposición B.10.2. □

Las normas introducidas anteriormente dependen del compacto $K$ que contiene el soporte de las funciones. Una pregunta natural es si es posible evitar esta dependencia y definir una topología directamente sobre $C_c^\infty(\Omega)$ utilizando normas globales.

En esta dirección, podríamos considerar, para cada $j \in \mathbb{N}_0$, la función

$$\|\varphi\|_j := \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |\alpha| \leq j}} |D^\alpha \varphi(x)|. \tag{4.1}$$

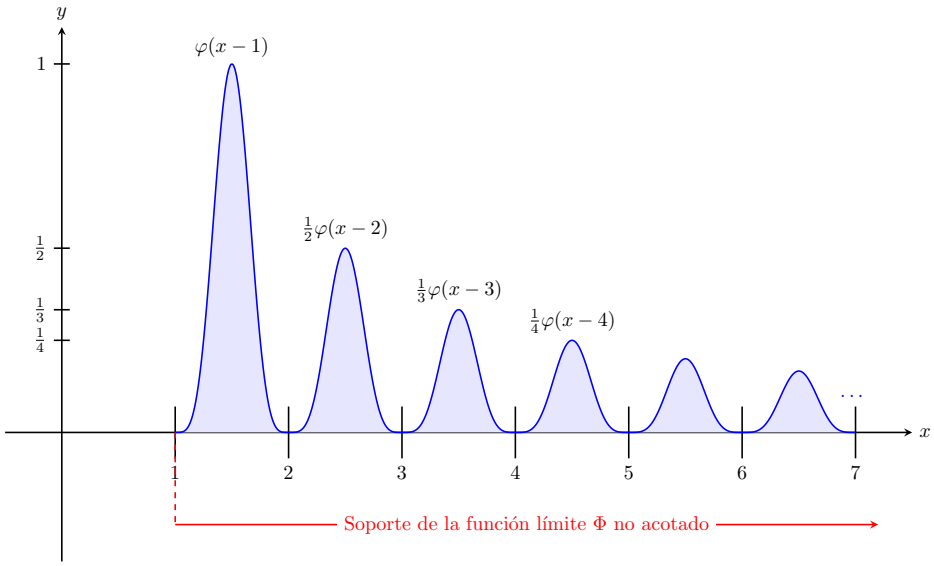
Obsérvese que este supremo es finito, ya que toda función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tiene soporte compacto. Además, cada $\|\cdot\|_j$ define una norma en $C_c^\infty(\Omega)$.

Podríamos entonces intentar definir una topología en $C_c^\infty(\Omega)$ como la topología inducida por la familia de normas $\{\|\cdot\|_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$. Sin embargo, esta construcción no es adecuada. Intuitivamente, estas normas no controlan de manera uniforme el comportamiento del soporte de las funciones, lo cual conduce a una topología demasiado débil.

En particular, el espacio resultante no es completo, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.3.2.** Consideremos $\Omega = \mathbb{R}$, y sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ una función tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [0,1]$ y $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in (0,1)$. Definimos la sucesión de funciones $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ como

$$\varphi_k(x) := \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \varphi(x - m) = \varphi(x-1) + \frac{1}{2}\varphi(x-2) + \cdots + \frac{1}{k}\varphi(x-k).$$




Mostraremos que esta es una sucesión de Cauchy respecto a la topología generada por la familia de seminormas

$$\|\cdot\|_j = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ i\le j}} |D^i(\cdot)(x)|,$$

pero su límite no tiene soporte compacto, concluyendo que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ no es completo bajo esta topología.
Sean $l,k\in\mathbb{N}$ con $k>l$. La diferencia entre los términos de la sucesión es

$$\varphi_k(x)-\varphi_l(x)=\sum_{m=l+1}^{k}\frac{1}{m}\varphi(x-m).$$

Dado que $\operatorname{supp}(\varphi)\subseteq[0,1]$, el soporte de cada término trasladado $\varphi(x-m)$ está contenido en el intervalo $[m,m+1]$. Los interiores de estos intervalos son disjuntos y todas las derivadas de $\varphi$ se anulan en sus extremos. Por lo tanto, en cada punto hay a lo más un término no nulo, también después de derivar.
Evaluemos la seminorma $j$-ésima de la diferencia. Para cualquier derivada de orden $i\le j$, se tiene

$$|D^i(\varphi_k-\varphi_l)(x)|=\left|\sum_{m=l+1}^{k}\frac{1}{m}D^i\varphi(x-m)\right|.$$

Como en cada punto hay a lo más un sumando distinto de cero, el supremo sobre $\mathbb{R}$ se obtiene maximizando sobre cada intervalo $[m,m+1]$, de donde

$$\|D^i(\varphi_k-\varphi_l)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=\max_{l+1\le m\le k}\left(\frac{1}{m}\|D^i\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right).$$

Como $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, sus derivadas están acotadas, por lo que

$$C_j:=\max_{i\le j}\|D^i\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}<\infty.$$

Entonces

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_j \leq \frac{1}{l+1} C_j.$$

Cuando $l, k \to \infty$, la cantidad $\frac{1}{l+1} C_j$ tiende a cero, lo que demuestra que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy respecto a cada seminorma de la familia.
En particular, para $j = 0$ se obtiene

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C_0}{l+1} \to 0, \qquad \text{si } l, k \to \infty,$$

por lo que $(\varphi_k)$ es uniformemente de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, en consecuencia, existe una función acotada $\Phi$ tal que

$$\|\varphi_k - \Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \qquad k \to \infty,$$

es decir, $\varphi_k \to \Phi$ uniformemente en $\mathbb{R}$.
El mismo argumento aplicado a cada derivada muestra que para todo $i \in \mathbb{N}_0$ la sucesión $(D^i \varphi_k)$ es uniformemente de Cauchy en $\mathbb{R}$, y por lo tanto existe una función continua y acotada $\psi_i$ tal que

$$\|D^i \varphi_k - \psi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \qquad k \to \infty.$$

Como además $\varphi_k(0) = 0$ para todo $k$, la sucesión converge puntualmente en 0. Por el teorema de convergencia uniforme de derivadas se concluye que $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que

$$D^i \Phi(x) = \psi_i(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}_0.$$

Además, como $\varphi_k$ son las sumas parciales de la serie, se tiene

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \varphi(x - m).$$

Para probar la convergencia en cada seminorma, fijemos $j \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{N}$. Para todo $l > k$, por la desigualdad del triángulo,

$$\|\varphi_k - \Phi\|_j \leq \|\varphi_k - \varphi_l\|_j + \|\varphi_l - \Phi\|_j.$$

Por la estimación ya obtenida, para todo $l > k$ se cumple

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_j \leq \frac{C_j}{k+1}.$$

Por otro lado, como $D^i \varphi_l \to D^i \Phi$ uniformemente en $\mathbb{R}$ para todo $i \leq j$, se tiene

$$\|\varphi_l - \Phi\|_j = \max_{i \leq j} \|D^i \varphi_l - D^i \Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \qquad l \to \infty.$$

Haciendo $l \to \infty$ en la desigualdad del triángulo anterior obtenemos

$$\|\varphi_k - \Phi\|_j \leq \frac{C_j}{k+1} \to 0, \qquad \text{si } k \to \infty.$$

Como $j$ fue arbitrario, concluimos que para cada $j \in \mathbb{N}_0$ se cumple $\|\varphi_k - \Phi\|_j \to 0$ cuando $k \to \infty$. Esto muestra que $\varphi_k$ converge a $\Phi$ respecto a cada seminorma de la familia, y por lo tanto $\varphi_k$ converge a $\Phi$ respecto a la topología generada por dicha familia de seminormas.
Para analizar el soporte de $\Phi$, notemos que por hipótesis $\varphi > 0$ en $(0,1)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, elijamos el punto $x_m = m + \frac{1}{2}$. Evaluando la función límite en este punto obtenemos

$$\Phi\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{m}\varphi\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

Esto implica que $\Phi$ toma valores estrictamente positivos en puntos arbitrariamente grandes, por lo que su soporte no está acotado. En consecuencia, $\operatorname{supp}(\Phi)$ no es compacto y $\Phi \notin C_c^\infty(\mathbb{R})$.

A pesar de que la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ no genera la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$ —ya que dichas seminormas no controlan el soporte de las funciones— es posible describir la topología $\tau_{LF}$ mediante familias adecuadas de seminormas que incorporan simultáneamente el comportamiento de las derivadas y del soporte. El siguiente ejercicio presenta una de estas construcciones.

**Ejercicio 4.3.3.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Consideremos una sucesión $\{K_l\}_{l\in\mathbb{N}_0}$ de compactos en $\Omega$, con $K_0 := \varnothing$, tal que para $l \geq 1$ la sucesión es creciente y anidada, $K_l \subseteq \operatorname{int}(K_{l+1})$, y $\Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$.
Sean $\mathbf{m} := \{m_l\}_{l\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión en $\mathbb{N}_0$ tal que $m_l \to \infty$, y sea $\mathbf{a} := \{a_l\}_{l\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión en $(0,\infty)$ tal que $a_l \to 0$. Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definimos

$$p_{\mathbf{m},\mathbf{a}}(\varphi) := \sup_{l\in\mathbb{N}_0} \sup_{x\in\Omega\setminus K_l} \frac{1}{a_l} \sum_{|\alpha|\leq m_l} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

(a) Pruebe que $p_{\mathbf{m},\mathbf{a}}$ es una seminorma en $\mathcal{D}(\Omega)$.

(b) Pruebe que la familia de seminormas $\{p_{\mathbf{m},\mathbf{a}}\}_{\mathbf{m},\mathbf{a}}$ genera la topología $\tau_{LF}$ del Teorema 4.3.1.

Obsérvese que la familia anterior de seminormas es, en general, no numerable. Esto refleja el hecho de que $\mathcal{D}(\Omega)$ no resultará ser metrizable (como el lector justificará más adelante) y, en particular, no es un espacio de Fréchet.

Al fijar el soporte se recupera exactamente la topología que ya definimos en $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

**Teorema 4.3.4.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Para cualquier conjunto compacto $K \subseteq \Omega$, la topología $\tau_K$ coincide con la topología de subespacio de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ inducida por $\tau_{LF}$ como subconjunto de $\mathcal{D}(\Omega)$.

*Demostración.* La inclusión $\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ es continua: la preimagen de cada $U \in \mathcal{B}_0$ es, por definición, una vecindad del origen en $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Así, la topología inducida no es más fina que $\tau_K$.
Recíprocamente, para $j \in \mathbb{N}_0$ y $\varepsilon > 0$, la bola

$$V_{j,\varepsilon} := \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \mid \|\varphi\|_j < \varepsilon\}$$

pertenece a $\mathcal{B}_0$: sobre cualquier soporte compacto, la norma global de (4.1) coincide con la norma corres-

pondiente a ese compacto. Por tanto,

$$V_{j,\varepsilon} \cap \mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \mid \|\varphi\|_{C^j(K)} < \varepsilon\}$$

es una vecindad para la topología inducida. Estas bolas forman una base de vecindades de $\tau_K$, lo que prueba la inclusión opuesta. □

A continuación estudiaremos los conjuntos topológicamente acotados[2] en $\mathcal{D}(\Omega)$, para lo cual requeriremos del siguiente resultado:

**Lema 4.3.5.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $K \subseteq \Omega$ compacto y $x_0 \in \Omega$. Entonces, para todo $r > 0$, el conjunto $U := \{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \mid |\varphi(x_0)| < r\}$ es abierto en $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$.

*Demostración.* Observemos primero que si $x_0 \notin K$, entonces toda función $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ satisface $\varphi(x_0) = 0$, por lo que $U = \mathcal{D}_K(\Omega)$, que es abierto.
Supongamos ahora que $x_0 \in K$. Sea $\varphi \in U$, es decir, $|\varphi(x_0)| < r$. Definimos $\varepsilon := r - |\varphi(x_0)| > 0$. Consideremos la vecindad de $\varphi$ dada por $V := \{\psi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \mid \|\psi - \varphi\|_{K,0} < \varepsilon\}$. Recordemos que $\|\psi - \varphi\|_{C^0(K)} = \|\psi - \varphi\|_{C^0(K)}$. Entonces, para toda $\psi \in V$, se tiene en particular $|\psi(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \|\psi - \varphi\|_{C^0(K)} < \varepsilon$.
Por lo tanto, $|\psi(x_0)| \leq |\varphi(x_0)| + |\psi(x_0) - \varphi(x_0)| < |\varphi(x_0)| + \varepsilon = r$. Esto muestra que $\psi \in U$, y por consiguiente $V \subseteq U$.
Hemos probado que todo $\varphi \in U$ admite una vecindad contenida en $U$, por lo que $U$ es abierto en $\tau_K$. □

**Teorema 4.3.6.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $W \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ un conjunto topológicamente acotado. Entonces existe un compacto $K \subseteq \Omega$ tal que $W \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$. Más aún, para cada $j \in \mathbb{N}_0$, existe $M_j > 0$ tal que $\|\varphi\|_j \leq M_j$ para toda $\varphi \in W$, donde $\|\cdot\|_j$ está dada por (4.1).

*Demostración.* Procederemos por contradicción. Supongamos que $W \nsubseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$ para todo $K \subseteq \Omega$ compacto. Sea $\{K_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de compactos tales que $K_l \subseteq \operatorname{int}(K_{l+1})$ y $\Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$.
Entonces, para cada $l \in \mathbb{N}$, existe $\varphi_l \in W$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi_l) \nsubseteq K_l$. Por lo tanto, podemos escoger un punto $y_l \in \operatorname{supp}(\varphi_l) \setminus K_l$.
Como $K_l$ es cerrado en $\Omega$, el conjunto $\Omega \setminus K_l$ es una vecindad abierta de $y_l$. Además, por la definición de soporte, $y_l \in \operatorname{supp}(\varphi_l)$ implica que toda vecindad de $y_l$ intersecta al conjunto $\{x \in \Omega \mid \varphi_l(x) \neq 0\}$. En particular, existe un punto $x_l \in \Omega \setminus K_l$ tal que $\varphi_l(x_l) \neq 0$.
Definimos

$$U := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \;\middle|\; |\varphi(x_l)| < \frac{|\varphi_l(x_l)|}{l},\ \forall l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Afirmamos que $U \in \mathcal{B}_0$. En primer lugar, $0 \in U$, pues $|0(x_l)| = 0 < \dfrac{|\varphi_l(x_l)|}{l}$ para todo $l \in \mathbb{N}$.
Además, $U$ es balanceado. Si $\varphi \in U$ y $|\lambda| \leq 1$, entonces

$$|(\lambda\varphi)(x_l)| = |\lambda||\varphi(x_l)| \leq |\varphi(x_l)| < \frac{|\varphi_l(x_l)|}{l}$$

[2] Sea $X$ un espacio vectorial topológico. Un subconjunto $B \subseteq X$ se dice topológicamente acotado si para toda vecindad $U$ del origen existe $\lambda > 0$ tal que $B \subseteq \lambda U$.

para todo $l \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\lambda\varphi \in U$.
También $U$ es convexo. Si $\varphi, \psi \in U$ y $s \in [0,1]$, entonces, para todo $l \in \mathbb{N}$,

$$|(s\varphi + (1-s)\psi)(x_l)| \leq s|\varphi(x_l)| + (1-s)|\psi(x_l)| < s\frac{|\varphi_l(x_l)|}{l} + (1-s)\frac{|\varphi_l(x_l)|}{l} = \frac{|\varphi_l(x_l)|}{l}.$$

Así, $s\varphi + (1-s)\psi \in U$.
Resta verificar que, para todo compacto $K \subseteq \Omega$, el conjunto $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ es una vecindad del origen en $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$. Sea entonces $K \subseteq \Omega$ compacto. Como $\Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$ y la sucesión $(K_l)$ es creciente, existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_L$. Entonces, si $l \geq L$, se tiene $K \subseteq K_l$ y, como $x_l \notin K_l$, se concluye que $x_l \notin K$.
Definimos

$$I_K := \{l \in \mathbb{N} \mid x_l \in K\}.$$

Por lo anterior, $I_K \subseteq \{1, \ldots, L-1\}$, de modo que $I_K$ es finito.
Si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ y $l \notin I_K$, entonces $x_l \notin K$ y, como $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$, se tiene $\varphi(x_l) = 0$. En consecuencia, las condiciones correspondientes a tales índices se satisfacen automáticamente. Por lo tanto,

$$U \cap \mathcal{D}_K(\Omega) = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \;\middle|\; |\varphi(x_l)| < \frac{|\varphi_l(x_l)|}{l},\ \forall l \in I_K \right\}.$$

Como $I_K$ es finito, este conjunto es una intersección finita de conjuntos de la forma

$$\{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \mid |\varphi(x_l)| < c_l\},$$

los cuales son abiertos en $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$ por el Lema 4.3.5. Además, contienen al origen. Por consiguiente, $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ es una vecindad del origen en $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$.
Como esto vale para todo compacto $K \subseteq \Omega$, se concluye que $U \in \mathcal{B}_0$. En particular, $U = 0 + U \in \mathcal{B}$, de modo que $U$ es una vecindad del origen en $(\mathcal{D}(\Omega), \tau_{LF})$.
Como $W$ es topológicamente acotado, existe $t > 0$ tal que $W \subseteq tU$. Sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \geq t$. Entonces

$$\frac{|\varphi_l(x_l)|}{t} \geq \frac{|\varphi_l(x_l)|}{l},$$

y por lo tanto

$$\left|t^{-1}\varphi_l(x_l)\right| = \frac{|\varphi_l(x_l)|}{t} \geq \frac{|\varphi_l(x_l)|}{l}.$$

Así, $t^{-1}\varphi_l \notin U$, lo cual equivale a $\varphi_l \notin tU$. Esto contradice que $\varphi_l \in W \subseteq tU$.
Por lo tanto, existe un compacto $K \subseteq \Omega$ tal que $W \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$.
Finalmente, por el Teorema 4.3.4, el conjunto $W = W \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ es acotado respecto a la topología $\tau_K$. Por el Corolario B.10.22, para cada $j \in \mathbb{N}_0$ existe $M_j > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{C^j(K)} \leq M_j \qquad \text{para toda } \varphi \in W.$$

Como $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$ para toda $\varphi \in W$, se tiene $\|\varphi\|_j = \|\varphi\|_{C^j(K)}$ en $W$. Por lo tanto,

$$\|\varphi\|_j \leq M_j \qquad \text{para toda } \varphi \in W.$$

Esto concluye la prueba. □

El espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ con la topología $\tau_{LF}$ del Teorema 4.3.1 resultará ser un espacio vectorial topológico (secuencialmente) completo, y podremos caracterizar la convergencia de sucesiones de una manera bastante conveniente:

**Teorema 4.3.7.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Entonces el espacio $(\mathcal{D}(\Omega), \tau_{LF})$ es secuencialmente completo. Además, una sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con respecto a $\tau_{LF}$ si y sólo si:

(a) existe un compacto $K \subseteq \Omega$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq K$ para toda $k \in \mathbb{N}$,

(b) $\lim_{k\to\infty} D^\alpha \varphi_k = D^\alpha \varphi$ uniformemente en $\Omega$ para cada multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

*Demostración.* Sea $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}(\Omega)$. Por la Proposición B.10.13, el conjunto $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es topológicamente acotado en $\mathcal{D}(\Omega)$. Por el Teorema 4.3.6, existe un compacto $K \subseteq \Omega$ tal que

$$\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Por el Teorema 4.3.4, la sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{D}_K(\Omega)$ respecto de $\tau_K$. Como $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es completo, existe $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ tal que

$$\varphi_k \longrightarrow \varphi$$

en $\mathcal{D}_K(\Omega)$ respecto de $\tau_K$.
Aplicando nuevamente el Teorema 4.3.4, concluimos que $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ respecto de $\tau_{LF}$. Por lo tanto, $\mathcal{D}(\Omega)$ es secuencialmente completo.
Ahora veamos que se da la equivalencia. Sea $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ y sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\varphi_k \to \varphi$ respecto a $\tau_{LF}$. Entonces la sucesión es de Cauchy y por la Proposición B.10.13, $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es topológicamente acotado en $\mathcal{D}(\Omega)$. Por el Teorema 4.3.6, existe un compacto $K \subseteq \Omega$ tal que

$$\varphi_k \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. Es decir, $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq K$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como además $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, también $\varphi \in \mathcal{D}_{K'}(\Omega)$ para algún compacto $K' \subseteq \Omega$. Sustituyendo $K$ por $K \cup K'$, podemos suponer que $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.
Por el Teorema 4.3.4, la topología inducida por $\tau_{LF}$ sobre $\mathcal{D}_K(\Omega)$ coincide con $\tau_K$. En particular, $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathcal{D}_K(\Omega)$ respecto a $\tau_K$. Por definición de $\tau_K$, esto equivale a que, para todo $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{C^j(K)} \to 0.$$

En consecuencia, para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene

$$D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi$$

uniformemente en $K$. Como $\varphi_k, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, sus derivadas se anulan en $\Omega \setminus K$. Por consiguiente,

$$\|D^\alpha \varphi_k - D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = \|D^\alpha \varphi_k - D^\alpha \varphi\|_{C^0(K)} \longrightarrow 0.$$

La convergencia es, por tanto, uniforme en $\Omega$. Esto prueba las dos condiciones.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que existe un compacto $K \subseteq \Omega$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq K$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y que

$$D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi$$

uniformemente en $\Omega$ para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. El caso $\alpha = 0$ implica convergencia puntual en todo $\Omega$. Si $x \in \Omega \setminus K$, entonces $\varphi_k(x) = 0$ para toda $k$, de modo que $\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$. Como $K$ es cerrado en $\Omega$, se sigue que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$. Entonces $\varphi_k, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ y, para todo $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{C^j(K)} = \max_{|\alpha|\leq j} \|D^\alpha \varphi_k - D^\alpha \varphi\|_{C^0(K)} \to 0.$$

Por lo tanto, $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathcal{D}_K(\Omega)$ respecto a $\tau_K$. Como $\tau_K$ coincide con la topología de subespacio inducida por $\tau_{LF}$ en $\mathcal{D}_K(\Omega)$, se concluye que $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ respecto a $\tau_{LF}$. □

Cuando $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y no vacío, con $n \geq 1$, el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ no es metrizable:

**Ejercicio 4.3.8.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y no vacío, con $n \geq 1$.

(a) Pruebe que para todo $K \subseteq \Omega$ compacto, $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es cerrado y tiene interior vacío en $\mathcal{D}(\Omega)$.

(b) Pruebe que $\mathcal{D}(\Omega)$ no es metrizable.

*Sugerencia:* Para probar que $\mathcal{D}_K(\Omega)$ tiene interior vacío en el primer inciso, construya una sucesión de funciones en $\mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}_K(\Omega)$ que converja a la constante 0 en la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$. Para el segundo inciso, considere una sucesión exhaustiva de compactos $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Utilice el inciso anterior y el Teorema de la categoría de Baire (Teorema B.1.14), recordando la relación entre espacios métricos completos y espacios de Baire.

## 4.4 Espacios LF

Los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ se pueden obtener como un caso particular de una construcción general en análisis funcional conocida como *límite inductivo estricto de espacios de Fréchet*. A los espacios que se obtienen de esta manera se les denomina *espacios LF*.

Para formalizar esta noción, recordemos que, dada una familia de mapeos $g_i \colon X_i \longrightarrow X$, existe una topología final sobre $X$, caracterizada por ser la topología más fina que hace continuos a todos los $g_i$. En el contexto de espacios vectoriales topológicos, sin embargo, esta topología final puramente topológica no tiene por qué ser compatible con la estructura lineal de $X$, ni tampoco localmente convexa.

Por ello, cuando los espacios $X_i$ son localmente convexos y los mapeos $g_i$ son lineales, interesa considerar la topología más fina entre aquellas topologías localmente convexas sobre $X$ que hacen continuos a todos los $g_i$. En el caso de inclusiones de subespacios, esta construcción toma la siguiente forma.

**Teorema 4.4.1.** (Topología final localmente convexa) Sea $X$ un espacio vectorial y sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de subespacios de $X$ tal que

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i.$$

Supongamos que cada $X_i$ está dotado de una topología localmente convexa $\tau_i$. Entonces existe una única

topología localmente convexa $\tau_{LC}$ en $X$ que es la más fina entre todas las topologías localmente convexas que hacen continuas a las inclusiones canónicas

$$\iota_i : X_i \hookrightarrow X, \qquad i \in I.$$

La topología $\tau_{LC}$ se denomina *topología final localmente convexa* asociada a la familia $\big((X_i, \tau_i), \iota_i\big)_{i\in I}$.

*Demostración.* Sea $\mathcal{U}$ la colección de todos los subconjuntos absolutamente convexos[3] $U \subseteq X$ tales que, para cada $i \in I$, $U \cap X_i$ es una vecindad del origen en $(X_i, \tau_i)$.
Observemos primero que todo elemento de $\mathcal{U}$ es absorbente. Sea $U \in \mathcal{U}$ y sea $x \in X$. Como

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i,$$

existe $i \in I$ tal que $x \in X_i$. Por hipótesis, $U \cap X_i$ es una vecindad del origen en el espacio vectorial topológico $X_i$, y por lo tanto es absorbente en $X_i$. En consecuencia, existe $\lambda > 0$ tal que

$$x \in t(U \cap X_i) \qquad \text{para todo } t \geq \lambda.$$

Como $t(U \cap X_i) \subseteq tU$ para todo $t > 0$, se sigue que

$$x \in tU \qquad \text{para todo } t \geq \lambda.$$

Puesto que $x \in X$ era arbitrario, concluimos que $U$ es absorbente.
Veamos ahora que $\mathcal{U}$ satisface las hipótesis de la Proposición B.10.26.

(a) Por definición, cada $U \in \mathcal{U}$ es absolutamente convexo, y acabamos de probar que además es absorbente.

(b) Sean $U, V \in \mathcal{U}$. Entonces $U \cap V$ es absolutamente convexo. Además, para cada $i \in I$,

$$(U \cap V) \cap X_i = (U \cap X_i) \cap (V \cap X_i).$$

Como $U \cap X_i$ y $V \cap X_i$ son vecindades del origen en $(X_i, \tau_i)$, su intersección también lo es. Por lo tanto, $U \cap V \in \mathcal{U}$.

(c) Sea $U \in \mathcal{U}$ y sea $\lambda > 0$. Definamos $W := \dfrac{\lambda}{2}U$. Como $U$ es absolutamente convexo, también lo es $W$. Además, para cada $i \in I$, al ser $X_i$ un subespacio de $X$, se tiene

$$W \cap X_i = \left(\frac{\lambda}{2}U\right) \cap X_i = \frac{\lambda}{2}(U \cap X_i).$$

Puesto que la multiplicación por el escalar no nulo $\dfrac{\lambda}{2}$ es un homeomorfismo de $(X_i, \tau_i)$ sobre sí mismo, el conjunto $\dfrac{\lambda}{2}(U \cap X_i)$ es una vecindad del origen en $X_i$. Así, $W$ es absolutamente convexo y $W \cap X_i$ es una vecindad del origen en $X_i$ para todo $i \in I$. Por la definición de $\mathcal{U}$, concluimos que $W \in \mathcal{U}$.

Finalmente, como $U$ es balanceado y $\frac{\lambda}{2} \leq \lambda$, se tiene

$$W = \frac{\lambda}{2} U \subseteq \lambda U.$$

Por la Proposición B.10.26, la familia $\mathcal{U}$ es una base local del origen para una única topología localmente convexa $\tau_{LC}$ en $X$.
Mostremos que cada inclusión canónica

$$\iota_i \colon X_i \hookrightarrow X$$

es continua respecto de $\tau_{LC}$. Como $\iota_i$ es lineal, basta verificar la continuidad en el origen. Sea $A$ una vecindad del origen en $(X, \tau_{LC})$. Como $\mathcal{U}$ es una base local del origen, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq A$. Entonces $\iota_i^{-1}(U) = U \cap X_i$ es una vecindad del origen en $(X_i, \tau_i)$, y $\iota_i^{-1}(U) \subseteq \iota_i^{-1}(A)$. Por lo tanto, $\iota_i^{-1}(A)$ es una vecindad del origen en $X_i$, lo cual prueba que $\iota_i$ es continua.
Veamos finalmente que $\tau_{LC}$ es la más fina entre todas las topologías localmente convexas con esta propiedad. Sea $\tau'$ otra topología localmente convexa en $X$ tal que todas las inclusiones $\iota_i$ sean continuas. Sea $V$ una vecindad absolutamente convexa del origen en $(X, \tau')$. Entonces, para cada $i \in I$,

$$V \cap X_i = \iota_i^{-1}(V)$$

es una vecindad del origen en $(X_i, \tau_i)$, por la continuidad de $\iota_i$. Por lo tanto, $V \in \mathcal{U}$.
Ahora bien, por la Proposición B.10.15, las vecindades absolutamente convexas del origen forman una base local en $(X, \tau')$. Así, si $A$ es una vecindad del origen en $(X, \tau')$, existe una vecindad absolutamente convexa $V$ del origen tal que $V \subseteq A$. Por lo anterior, $V \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es una base local del origen para $\tau_{LC}$, el conjunto $V$ es una vecindad del origen respecto de $\tau_{LC}$; al estar contenido en $A$, concluimos que $A$ también es una vecindad del origen respecto de $\tau_{LC}$.Hemos probado que toda vecindad del origen para $\tau'$ es también una vecindad del origen para $\tau_{LC}$. En consecuencia, $\tau' \subseteq \tau_{LC}$.
Así, $\tau_{LC}$ es la más fina entre todas las topologías localmente convexas que hacen continuas a las inclusiones $\iota_i$.
La unicidad se sigue inmediatamente de esta propiedad de maximalidad. □

Con esta construcción, podemos definir formalmente a los espacios LF.

**Definición 4.4.2.** Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Supongamos que existe una sucesión de subespacios $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(a) $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

(b) Para cada $n$, el espacio $X_n$, dotado de una topología $\tau_n$, es un espacio de Fréchet.

(c) Para cada $n$, la topología $\tau_n$ coincide con la topología de subespacio inducida en $X_n$ por $(X_{n+1}, \tau_{n+1})$.

Sea $\tau_{LF}$ la topología final localmente convexa en $X$ asociada a las inclusiones $\iota_n \colon (X_n, \tau_n) \hookrightarrow X$, garantizada por el Teorema 4.4.1. Entonces $(X, \tau_{LF})$ se denomina *límite inductivo estricto* de la sucesión $(X_n, \tau_n)$ y se

[3] Un subconjunto $U$ de un espacio vectorial se dice *absolutamente convexo* (o *disco*) si es simultáneamente convexo y balanceado.

escribe

$$(X, \tau_{LF}) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} (X_n, \tau_n).$$

En este caso se dice que $(X, \tau_{LF})$ es un *espacio LF*. El adjetivo *estricto* se refiere a la compatibilidad de las topologías de las etapas, no a que las inclusiones sean propias. Se permiten sucesiones estacionarias; en particular, todo espacio de Fréchet se obtiene tomando $X_n = X$ con la misma topología para todo $n$.

**Observación 4.4.3.** Si en la definición anterior cada espacio $X_n$ es de Banach, entonces $X$ se denomina un espacio LB. En particular, todo espacio LB es un espacio LF.

**Observación 4.4.4.** La noción de espacio LF surge naturalmente en el desarrollo del análisis funcional y de la teoría de distribuciones durante la primera mitad del siglo XX. En aquel momento se observó que muchos espacios fundamentales del análisis no podían describirse adecuadamente dentro de la categoría de espacios de Banach o incluso de espacios de Fréchet, aunque sí podían construirse como uniones crecientes de estos últimos.

Uno de los ejemplos más importantes apareció en la teoría de distribuciones de Laurent Schwartz. El espacio de funciones suaves con soporte compacto, $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$, posee una estructura topológica esencial para el estudio de distribuciones y ecuaciones diferenciales parciales, pero no es metrizable bajo su topología natural. Sin embargo, puede escribirse como unión numerable y creciente de los espacios $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f) \subseteq K\}$, donde $K \Subset \Omega$ recorre los compactos de $\Omega$. Cada uno de estos espacios resulta ser un espacio de Fréchet, lo que motivó el estudio sistemático de límites inductivos numerables de espacios de Fréchet.

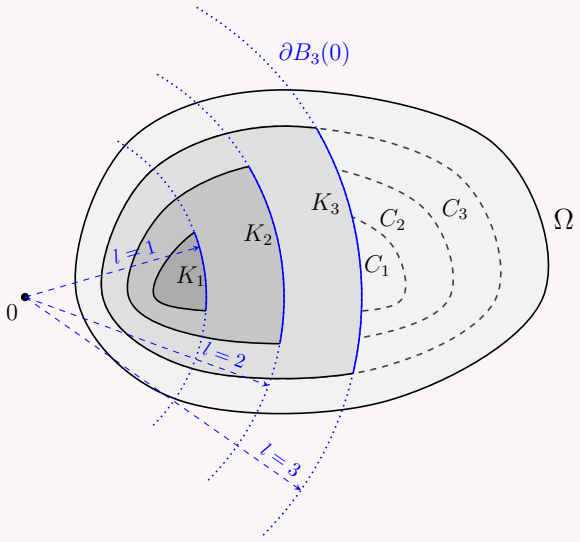
La teoría fue desarrollada posteriormente dentro del marco general de los espacios localmente convexos por autores como Jean Dieudonné y Alexander Grothendieck, convirtiéndose en una herramienta fundamental en análisis funcional, teoría de distribuciones, geometría diferencial y análisis global.

Para ver que $\mathcal{D}(\Omega)$ es un espacio LF, construiremos primero una sucesión exhaustiva de compactos en $\Omega$.

Para cada $l \in \mathbb{N}$, definimos $C_l := \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; d\left(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega\right) \geq \dfrac{1}{l} \right\}$, y posteriormente $K_l := C_l \cap \overline{B}_{\text{euc}}(0, l)$.

La idea geométrica detrás de esta construcción es doble: por una parte, los conjuntos $C_l$ fuerzan a los puntos a permanecer a distancia positiva de la frontera $\partial\Omega$; por otra, la intersección con la bola cerrada $\overline{B}_{\text{euc}}(0, l)$ impide que los puntos escapen al infinito.

Es inmediato verificar que cada $K_l$ es compacto, que $K_l \subseteq \operatorname{int}(K_{l+1})$, y que $\Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$.




**Interpretación geométrica**

El conjunto $K_l = C_l \cap \overline{B}_{\text{euc}}(0,l)$ se obtiene al combinar dos restricciones complementarias:

(a) $C_l$ elimina los puntos demasiado cercanos a $\partial\Omega$;

(b) $\overline{B}_{\text{euc}}(0,l)$ controla el comportamiento en el infinito.

En consecuencia, la frontera de $K_l$ está formada por:

$$\partial K_l \subseteq \left\{ x \in \Omega \mid d(x,\partial\Omega) = \frac{1}{l} \right\} \cup \partial B_{\text{euc}}(0,l).$$

De este modo, la sucesión $(K_l)_{l\in\mathbb{N}}$ proporciona una exhaustión por compactos natural de $\Omega$.

**Figura 4.2.** Construcción de una exhaustión compacta de $\Omega$.

Tomando ahora $X_l := \mathcal{D}_{K_l}(\Omega)$, las condiciones (a)–(c) de la Definición 4.4.2 quedan satisfechas. La familia es creciente y exhaustiva, cada espacio $X_l$ es de Fréchet y las topologías son compatibles por el Teorema 4.3.4.

Resta verificar que la topología $\tau_{LF}$ coincide con la topología inductiva localmente convexa asociada a las inclusiones $\mathcal{D}_{K_l}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$.

**Proposición 4.4.5.** La topología $\tau_{LF}$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ coincide con la topología inductiva localmente convexa asociada a la familia de inclusiones

$$\iota_l \colon \mathcal{D}_{K_l}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega), \qquad l \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Denotemos por $\tau_{LC}$ la topología inductiva localmente convexa en $\mathcal{D}(\Omega)$ asociada a la familia

$$\big((\mathcal{D}_{K_l}(\Omega), \tau_{K_l}), \iota_l\big)_{l\in\mathbb{N}}.$$

Por el Teorema 4.4.1, una base local del origen para $\tau_{LC}$ está dada por la familia $\mathcal{U}$ de todos los subconjuntos absolutamente convexos $U \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ tales que $U \cap \mathcal{D}_{K_l}(\Omega)$ es una vecindad del origen en $(\mathcal{D}_{K_l}(\Omega), \tau_{K_l})$ para todo $l \in \mathbb{N}$.

Comparemos esta familia con la base local $\mathcal{B}_0$ que define la topología $\tau_{LF}$. Recordemos que, por definición, $V \in \mathcal{B}_0$ si y solo si $0 \in V$, $V$ es absolutamente convexo, y $V \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ es una vecindad del origen en $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$ para todo compacto $K \subseteq \Omega$.

Así, la única diferencia aparente entre las familias $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B}_0$ es que, en la definición de $\mathcal{U}$, la condición de vecindad se exige únicamente para los compactos de la exhaustión $(K_l)_{l\in\mathbb{N}}$, mientras que en la definición de $\mathcal{B}_0$ se exige para todo compacto $K \subseteq \Omega$. Veamos que ambas condiciones son equivalentes.

Probemos primero que $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{U}$. Sea $V \in \mathcal{B}_0$. Como cada $K_l$ es compacto, por la definición de $\mathcal{B}_0$ se tiene que $V \cap \mathcal{D}_{K_l}(\Omega)$ es una vecindad del origen en $(\mathcal{D}_{K_l}(\Omega), \tau_{K_l})$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Como además $V$ es absolutamente

convexo, concluimos que $V \in \mathcal{U}$.
Probemos ahora la contención recíproca. Sea $U \in \mathcal{U}$ y sea $K \subseteq \Omega$ un compacto arbitrario. Como $(K_l)_{l\in\mathbb{N}}$ es una sucesión exhaustiva de compactos en $\Omega$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_l$.
Entonces $\mathcal{D}_K(\Omega) \subseteq \mathcal{D}_{K_l}(\Omega)$.
Además, la topología $\tau_K$ coincide con la topología inducida por $\tau_{K_l}$ sobre el subespacio $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Puesto que $U \cap \mathcal{D}_{K_l}(\Omega)$ es una vecindad del origen en $(\mathcal{D}_{K_l}(\Omega), \tau_{K_l})$, se sigue que

$$\big(U \cap \mathcal{D}_{K_l}(\Omega)\big) \cap \mathcal{D}_K(\Omega) = U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$$

es una vecindad del origen en $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$.
Como $K \subseteq \Omega$ era un compacto arbitrario, $U$ satisface la condición de vecindad requerida en la definición de $\mathcal{B}_0$. Además, como $U \cap \mathcal{D}_{K_l}(\Omega)$ es una vecindad del origen para cualquier $l \in \mathbb{N}$, se tiene $0 \in U$. Por lo tanto, $U \in \mathcal{B}_0$.
Hemos probado que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{U}$.
En consecuencia, $\tau_{LF}$ y $\tau_{LC}$ tienen la misma base local del origen. Por la Proposición B.10.2, ambas topologías coinciden. Es decir, $\tau_{LF} = \tau_{LC}$. □

Como consecuencia, $(\mathcal{D}(\Omega), \tau_{LF})$ es el límite inductivo estricto

$$\mathcal{D}(\Omega) = \varinjlim_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_l}(\Omega),$$

y por lo tanto es un espacio LF.

La ventaja de esta descripción es que muchas propiedades fundamentales de $\mathcal{D}(\Omega)$ se deducen directamente de su estructura LF, en un marco puramente topológico, las cuales nos servirán para construir los espacios de distribuciones en haces vectoriales sin tener que repetir las construcciones y las pruebas.

**Teorema 4.4.6.** Sea $(X, \tau)$ un espacio *LF* con sucesión definitoria $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces:

(a) $X$ es Hausdorff.

(b) Un conjunto $B \subseteq X$ es topológicamente acotado si y solo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B \subseteq X_m$ y $B$ es topológicamente acotado en $X_m$.

(c) $X$ es completo; en particular, es secuencialmente completo.

(d) Una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ si y solo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \cup \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq X_m$ y $x_k \to x$ en la topología de $X_m$.

El argumento de límites inductivos estrictos procede de [149, Capítulo 13].

*Demostración.* Probaremos la completitud mediante filtros, pues un espacio *LF* no tiene por qué ser metrizable.
Usaremos repetidamente la siguiente observación elemental. Si $A$ es un conjunto absolutamente convexo, $u, v \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ satisfacen $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, entonces $\alpha u + \beta v \in A$.
Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, la afirmación se sigue de que $A$ es balanceado. Supongamos ahora que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, y

definamos $s := |\alpha| + |\beta|$. Como $0 < s \leq 1$, se tiene

$$\alpha u + \beta v = s\left(\frac{|\alpha|}{s}\frac{\alpha}{|\alpha|}u + \frac{|\beta|}{s}\frac{\beta}{|\beta|}v\right).$$

Como $A$ es balanceado, $\frac{\alpha}{|\alpha|}u, \frac{\beta}{|\beta|}v \in A$; como $\frac{|\alpha|}{s} + \frac{|\beta|}{s} = 1$, el término entre paréntesis pertenece a $A$ por convexidad. Finalmente, como $s \leq 1$ y $A$ es balanceado, concluimos que $\alpha u + \beta v \in A$.

(a) Sea $x \in X \setminus \{0\}$. Como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_m$. Puesto que $X_m$ es de Fréchet, es Hausdorff; por lo tanto, existe una vecindad del origen en $X_m$ que no contiene a $x$. Por la Proposición B.10.15, podemos elegir una vecindad absolutamente convexa $U_m$ del origen en $X_m$ tal que $x \notin U_m$.

Para $n < m$, definimos $U_n := U_m \cap X_n$. Como la topología de $X_n$ coincide con la topología inducida por $X_m$, cada $U_n$ es una vecindad absolutamente convexa del origen en $X_n$. Además, para $2 \leq n \leq m$ se tiene $U_n \cap X_{n-1} = U_{n-1}$.

Construiremos ahora inductivamente $U_n$ para $n > m$. Supongamos definida $U_{n-1}$ como vecindad absolutamente convexa del origen en $X_{n-1}$. Dado que la topología de $X_{n-1}$ coincide con la topología inducida por $X_n$, existe una vecindad absolutamente convexa $V_n$ del origen en $X_n$ tal que $V_n \cap X_{n-1} \subseteq U_{n-1}$. Definimos

$$U_n := \operatorname{cobal}(V_n \cup U_{n-1})^4 = \left\{\alpha v + \beta u \mid v \in V_n,\ u \in U_{n-1},\ |\alpha| + |\beta| \leq 1\right\}.$$

Por construcción, $U_n$ es absolutamente convexo y contiene a $V_n$; en particular, es una vecindad del origen en $X_n$.

Afirmamos que $U_n \cap X_{n-1} = U_{n-1}$. La contención $U_{n-1} \subseteq U_n \cap X_{n-1}$ es inmediata, pues $U_{n-1} \subseteq U_n$ y $U_{n-1} \subseteq X_{n-1}$. Para probar la otra, tomemos $z \in U_n \cap X_{n-1}$. Entonces existen $v \in V_n$, $u \in U_{n-1}$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tales que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ y $z = \alpha v + \beta u$. Si $\alpha = 0$, entonces $z = \beta u \in U_{n-1}$, pues $U_{n-1}$ es balanceado. Si $\alpha \neq 0$, de la igualdad anterior obtenemos

$$v = \alpha^{-1}(z - \beta u) \in X_{n-1},$$

ya que $z, u \in X_{n-1}$. Por lo tanto, $v \in V_n \cap X_{n-1} \subseteq U_{n-1}$. Como también $u \in U_{n-1}$ y $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, la observación preliminar sobre conjuntos absolutamente convexos da $z = \alpha v + \beta u \in U_{n-1}$. Queda probada la igualdad.

Definamos ahora

$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

La sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, pues $U_{n-1} = U_n \cap X_{n-1} \subseteq U_n$. De aquí se sigue que $U$ es absolutamente convexo. Si $y, z \in U$, existen índices $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $y \in U_r$ y $z \in U_s$. Tomando $N := \max\{r, s\}$, obtenemos $y, z \in U_N$; por lo tanto, si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ satisfacen $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, entonces $\alpha y + \beta z \in U_N \subseteq U$, pues $U_N$ es absolutamente convexo.

Veamos que $U \cap X_n = U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $r \geq n$, las igualdades $U_j \cap X_{j-1} = U_{j-1}$ permiten descender sucesivamente desde $r$ hasta $n$:

$$U_r \cap X_n = (U_r \cap X_{r-1}) \cap X_n = U_{r-1} \cap X_n = \cdots = U_n.$$

Si, en cambio, $r < n$, entonces $U_r \subseteq U_n \subseteq X_n$, de modo que $U_r \cap X_n = U_r \subseteq U_n$. Por consiguiente,

$$U \cap X_n = \left( \bigcup_{r=1}^{\infty} U_r \right) \cap X_n = \bigcup_{r=1}^{\infty} (U_r \cap X_n) = U_n.$$

Así, $U \cap X_n$ es una vecindad del origen en $X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de la topología $LF$, $U$ es una vecindad del origen en $X$. Aplicando la igualdad anterior al índice $m$ fijado al comienzo, obtenemos $U \cap X_m = U_m$. Como $x \in X_m$ y $x \notin U_m$, se concluye que $x \notin U$.

Hemos encontrado, para cada $x \in X \setminus \{0\}$, una vecindad del origen que no contiene a $x$. Por lo tanto, $X$ es Hausdorff.

(b) Supongamos primero que $B \subseteq X_m$ es topológicamente acotado en $X_m$. Sea $U$ una vecindad del origen en $X$. Como la inclusión $\iota_m \colon X_m \hookrightarrow X$ es continua, $U \cap X_m$ es una vecindad del origen en $X_m$. Por la acotación topológica de $B$ en $X_m$, existe $\lambda > 0$ tal que

$$B \subseteq \lambda(U \cap X_m) \subseteq \lambda U.$$

Así, $B$ es topológicamente acotado en $X$.

Recíprocamente, supongamos que $B$ es topológicamente acotado en $X$ y que no está contenido en ningún $X_m$. Elegimos recursivamente puntos $x_k \in B$ e índices $m_k \in \mathbb{N}$ del siguiente modo. Tomamos $x_1 \in B \setminus X_1$ y sea $m_1$ el menor índice tal que $x_1 \in X_{m_1}$. Una vez escogido $m_{k-1}$, tomamos $x_k \in B \setminus X_{m_{k-1}}$ y sea $m_k$ el menor índice tal que $x_k \in X_{m_k}$. Entonces $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente y, para cada $k$, $x_k \in X_{m_k} \setminus X_{m_k-1}$.

Como la topología de $X_{m_k-1}$ coincide con la topología inducida por $X_{m_k}$ y $X_{m_k-1}$ es completo, por ser de Fréchet, se sigue que $X_{m_k-1}$ es un subespacio cerrado de $X_{m_k}$. Dado que $x_k \notin X_{m_k-1}$, el Corolario B.10.35 garantiza la existencia de un funcional lineal continuo $f_k \in X'_{m_k}$ tal que $f_k|_{X_{m_k-1}} = 0$ y $f_k(x_k) = k$.

Construiremos una vecindad del origen $U$ en $X$ a partir de una sucesión creciente de vecindades absolutamente convexas $U_n \subseteq X_n$.

Para $n = 1$, fijamos una vecindad absolutamente convexa $U_1$ del origen en $X_1$. Supongamos construida $U_{n-1}$ como vecindad absolutamente convexa del origen en $X_{n-1}$. Como la topología de $X_{n-1}$ coincide con la topología inducida por $X_n$, existe una vecindad absolutamente convexa $V_n$ del origen en $X_n$ tal que $V_n \cap X_{n-1} \subseteq U_{n-1}$. Definimos

$$W_n := \operatorname{cobal}(V_n \cup U_{n-1}) = \left\{ \alpha v + \beta u \mid v \in V_n,\ u \in U_{n-1},\ |\alpha| + |\beta| \leq 1 \right\}.$$

Como $W_n$ contiene a $V_n$, es una vecindad del origen en $X_n$; además, por construcción, es absolutamente convexo. El mismo argumento empleado en el inciso anterior muestra que $W_n \cap X_{n-1} = U_{n-1}$.

Definimos ahora

$$U_n := \begin{cases} W_n, & \text{si } n \neq m_k \text{ para todo } k, \\ W_n \cap \{x \in X_n \mid |f_k(x)| \leq 1\}, & \text{si } n = m_k. \end{cases}$$

Cada $U_n$ es absolutamente convexo. Además, si $n = m_k$, el conjunto $\{x \in X_n \mid |f_k(x)| \leq 1\}$ es una vecindad

del origen en $X_n$, pues contiene al abierto $\{x \in X_n \mid |f_k(x)| < 1\}$. Por lo tanto, cada $U_n$ es una vecindad absolutamente convexa del origen en $X_n$.

La igualdad $U_n \cap X_{n-1} = U_{n-1}$ se conserva en todos los pasos. Si $n \neq m_k$ para todo $k$, se tiene simplemente $U_n \cap X_{n-1} = W_n \cap X_{n-1} = U_{n-1}$. Si $n = m_k$, entonces

$$\begin{aligned} U_{m_k} \cap X_{m_k-1} &= W_{m_k} \cap \{x \in X_{m_k} \mid |f_k(x)| \leq 1\} \cap X_{m_k-1} \\ &= W_{m_k} \cap X_{m_k-1} = U_{m_k-1}, \end{aligned}$$

ya que $f_k$ se anula sobre $X_{m_k-1}$.

Como $U_{n-1} = U_n \cap X_{n-1} \subseteq U_n$, la sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Definamos $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Al ser unión de una sucesión creciente de conjuntos absolutamente convexos, $U$ es absolutamente convexo; además, de las igualdades anteriores se obtiene $U \cap X_n = U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de la topología $LF$, $U$ es una vecindad del origen en $X$.

Como $B$ es topológicamente acotado en $X$, existe $\lambda > 0$ tal que $B \subseteq \lambda U$. En particular, $x_k \in \lambda U$ para todo $k$. Como $x_k \in X_{m_k}$, se tiene

$$x_k \in \lambda U \cap X_{m_k} = \lambda(U \cap X_{m_k}) = \lambda U_{m_k}.$$

Por la definición de $U_{m_k}$, todo elemento $y \in U_{m_k}$ satisface $|f_k(y)| \leq 1$. Como $\dfrac{x_k}{\lambda} \in U_{m_k}$,

$$\left| f_k\left(\frac{x_k}{\lambda}\right) \right| \leq 1,$$

y por lo tanto $|f_k(x_k)| \leq \lambda$. Sin embargo, por construcción, $f_k(x_k) = k$. Así, $k \leq \lambda$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual es imposible.

Esta contradicción demuestra que $B$ debe estar contenido en algún $X_m$. Resta ver que es topológicamente acotado en $X_m$. Sea $V$ una vecindad del origen en $X_m$. Como la topología de $X_m$ coincide con la topología inducida por $X$, existe una vecindad $W$ del origen en $X$ tal que $V = W \cap X_m$. Puesto que $B$ es topológicamente acotado en $X$, existe $\lambda > 0$ tal que $B \subseteq \lambda W$. Como además $B \subseteq X_m$,

$$B \subseteq \lambda W \cap X_m = \lambda(W \cap X_m) = \lambda V.$$

Por lo tanto, $B$ es topológicamente acotado en $X_m$.

(c) Probaremos la completitud mediante filtros, pues $X$ no es necesariamente metrizable. Recordemos que un filtro $\mathscr{F}$ en $X$ es una familia de subconjuntos no vacíos, cerrada por intersecciones finitas y por paso a superconjuntos. Se dice que $\mathscr{F}$ es de Cauchy si, para toda vecindad $U$ del origen, existe $M \in \mathscr{F}$ tal que $M - M \subseteq U$; el espacio es completo si todo filtro de Cauchy converge.

Sea $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy en $X$. Los conjuntos

$$M + V, \qquad M \in \mathscr{F}, \quad V \text{ vecindad del origen en } X,$$

forman una base de filtro: la intersección de dos de ellos contiene $(M_1 \cap M_2) + (V_1 \cap V_2)$. Denotemos por $\mathscr{G}$ el filtro que generan. Cada conjunto básico $M + V$ pertenece a $\mathscr{F}$, pues contiene a $M$; por lo

tanto, $\mathscr{F}$ es más fino que $\mathscr{G}$. Además, $\mathscr{G}$ es de Cauchy. En efecto, dada una vecindad $U$ del origen, elegimos una vecindad absolutamente convexa $V$ tal que $V+V-V\subseteq U$ y un conjunto $M\in\mathscr{F}$ tal que $M-M\subseteq V$. Entonces

$$(M+V)-(M+V)\subseteq V+V-V\subseteq U.$$

Afirmamos que existe $p\in\mathbb{N}$ tal que

$$A\cap X_p\neq\varnothing \qquad \text{para todo } A\in\mathscr{G}. \tag{$*$}$$

Supongamos lo contrario. Para cada $n$ podríamos escoger un conjunto básico $A_n=M_n+V_n\in\mathscr{G}$ tal que $A_n\cap X_n=\varnothing$, con $M_n\in\mathscr{F}$. Reduciendo sucesivamente las vecindades, podemos suponer que cada $V_n$ es absolutamente convexa y que $V_{n+1}\subseteq V_n$. Definamos

$$W_n:=\operatorname{conv}\left(V_n\cup\bigcup_{k<n}(V_k\cap X_k)\right).$$

Se tiene $(M_n+W_n)\cap X_n=\varnothing$. Para $n=1$ esto se sigue de $W_1=V_1$. Si $n\geq 2$, todo elemento de $W_n$ puede escribirse como $ty+(1-t)z$, con $0\leq t\leq 1$, $y\in V_n$ y $z\in X_{n-1}$, después de reemplazar $z$ por un elemento de la envolvente convexa de $\bigcup_{k<n}(V_k\cap X_k)$. Si $m+ty+(1-t)z\in X_n$, con $m\in M_n$, entonces $m+ty\in(M_n+V_n)\cap X_n$, porque $V_n$ es balanceada, lo cual contradice la elección de $A_n$.

Pongamos ahora

$$W:=\operatorname{conv}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(V_k\cap X_k)\right).$$

El conjunto $W$ es absolutamente convexo y $W\cap X_k$ contiene a la vecindad $V_k\cap X_k$ del origen en $X_k$; por la definición de la topología $LF$, $W$ es una vecindad del origen en $X$. La monotonía de $(V_k)$ muestra además que $W\subseteq W_n$ para todo $n$: los términos con índice menor que $n$ aparecen en la definición de $W_n$, mientras que los de índice mayor o igual que $n$ están contenidos en $V_n$.

Como $\mathscr{G}$ es de Cauchy, existe $B\in\mathscr{G}$ tal que $B-B\subseteq W$. El conjunto $B$ también pertenece a $\mathscr{F}$ y, por lo tanto, $B\cap M_n\neq\varnothing$ para todo $n$. Si $b_n\in B\cap M_n$, entonces

$$B\subseteq b_n+(B-B)\subseteq M_n+W_n.$$

En consecuencia, $B\cap X_n=\varnothing$ para todo $n$, lo cual es imposible porque $X=\bigcup_n X_n$ y un filtro no contiene al conjunto vacío. Queda demostrada la afirmación $(*)$.

Fijemos $p$ como en $(*)$. Los conjuntos $A\cap X_p$, con $A\in\mathscr{G}$, forman una base de un filtro $\mathscr{G}_p$ en $X_p$. Este filtro es de Cauchy: si $U_p$ es una vecindad del origen en $X_p$, la igualdad entre la topología original de $X_p$ y la inducida por $X$ permite elegir una vecindad $U$ del origen en $X$ tal que $U\cap X_p\subseteq U_p$, y basta aplicar la propiedad de Cauchy de $\mathscr{G}$. Como $X_p$ es de Fréchet, existe $x\in X_p$ tal que $\mathscr{G}_p$ converge a $x$.

Esto implica que $x$ es un punto de adherencia de $\mathscr{G}$. Un filtro de Cauchy que posee un punto de adherencia converge a él: dada una vecindad $U$ del origen, elegimos una vecindad balanceada $V$ con $V+V\subseteq U$ y $A\in\mathscr{G}$ con $A-A\subseteq V$; como $A\cap(x+V)\neq\varnothing$, si $a$ pertenece a esta intersección, entonces $A\subseteq x+V+V\subseteq x+U$. Así, $\mathscr{G}$ converge a $x$. Puesto que $\mathscr{F}$ es más fino que $\mathscr{G}$, también $\mathscr{F}$ converge a $x$.

Esto prueba que $X$ es completo.

(d) Supongamos primero que $x_k \to x$ en $X$. Entonces $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y por la Proposición B.10.13, el conjunto $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es topológicamente acotado en $X$. Como el unitario $\{x\}$ también es topológicamente acotado, la unión $B := \{x\} \cup \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es topológicamente acotada en $X$. Por el inciso (b), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B \subseteq X_m$. Como la topología de $X_m$ coincide con la topología inducida por $X$, se sigue que $x_k \to x$ en $X_m$.

Recíprocamente, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \cup \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq X_m$ y $x_k \to x$ en $X_m$, entonces $x_k \to x$ en $X$ por la continuidad de la inclusión canónica $X_m \hookrightarrow X$.

□

## 4.5 Distribuciones: el dual de $\mathcal{D}(\Omega)$

El concepto de distribución se obtendrá a partir del dual de $\mathcal{D}(\Omega)$. Para ello estudiaremos primero algunas propiedades de los funcionales lineales continuos definidos en $\mathcal{D}(\Omega)$.

**Teorema 4.5.1.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $T$ es continuo.

(b) $T$ está acotado.

(c) Si $\{\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con respecto a $\tau$, entonces

$$\lim_{\ell\to\infty} T(\varphi_\ell) = T(\varphi).$$

(d) $T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ es continuo para todo $K \subseteq \Omega$ compacto.

(e) Para cada $K \subseteq \Omega$ compacto, existe $j \in \mathbb{N}_0$ y $c_{K,j} > 0$ tal que

$$|T(\varphi)| \leq c_{K,j}\|\varphi\|_{C^j(K)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega). \tag{4.2}$$

*Demostración.* Veamos que (a) implica (b). Si $T$ es continua, entonces $T$ está acotada por el Teorema B.10.29. Para (b)⇒(c), supongamos que $T$ está acotado y sea $\{\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\ell \to \varphi$ respecto de $\tau$. Por el inciso (d) del Teorema 4.4.6, existe un compacto $K \subseteq \Omega$ tal que

$$\{\varphi\} \cup \{\varphi_\ell \mid \ell \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$$

y $\varphi_\ell \to \varphi$ en la topología de Fréchet de $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

[4] Si $A \subseteq X$ es un subconjunto de un espacio vectorial, su envolvente absolutamente convexa se define como

$$\operatorname{cobal}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_j \;\middle|\; x_j \in A,\ \sum_{j=1}^{r} |\lambda_j| \leq 1 \right\}.$$

Es el menor subconjunto absolutamente convexo de $X$ que contiene a $A$.

La restricción

$$T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)} : \mathcal{D}_K(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es acotada. En efecto, la inclusión $\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ es continua y, por lo tanto, transforma conjuntos topológicamente acotados en conjuntos topológicamente acotados; después se aplica la acotación de $T$. Como $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es metrizable, el Teorema B.10.29 muestra que esta restricción es continua. En consecuencia,

$$T(\varphi_\ell) \longrightarrow T(\varphi).$$

(c)⇒(d). Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Supongamos que $\{\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$ y que

$$d_K(\varphi_\ell, \varphi) \to 0.$$

Por la Proposición B.10.23, esto significa que $\varphi_\ell \to \varphi$ en $(\mathcal{D}_K(\Omega), \tau_K)$. Como la inclusión

$$\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

es continua, se sigue que $\varphi_\ell \to \varphi$ respecto a $\tau$. Por (c),

$$T(\varphi_\ell) \to T(\varphi).$$

Así, $T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ es secuencialmente continua. Como $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es metrizable, se concluye que $T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ es continuo.
(d)⇒(a). Sea $V \subseteq \mathbb{R}$ una vecindad absolutamente convexa del origen y pongamos

$$U := T^{-1}(V).$$

El conjunto $U$ es absolutamente convexo. Para cada compacto $K \subseteq \Omega$, la continuidad de $T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ implica que

$$U \cap \mathcal{D}_K(\Omega) = \left(T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)}\right)^{-1}(V)$$

es una vecindad del origen en $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Por la descripción de las vecindades del origen para la topología final localmente convexa del Teorema 4.4.1, $U$ es una vecindad del origen en $\mathcal{D}(\Omega)$. Así, $T$ es continua en el origen y, por linealidad, en todo punto.
(d)⇔(e). Supongamos que (d) se cumple y sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Como $T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ es continuo en el origen, dada $\varepsilon = 1$, existen $j \in \mathbb{N}_0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$V_{K,j,n} \subseteq T^{-1}((-1,1)).$$

Esto significa que

$$|T(\varphi)| \le 1 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \text{ con } \|\varphi\|_{C^j(K)} < \frac{1}{n}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ y $\varphi \neq 0$, entonces

$$\left\| \frac{1}{2n} \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{C^j(K)}} \right\|_{C^j(K)} < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto

$$\left| T\left( \frac{1}{2n} \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{C^j(K)}} \right) \right| \leq 1.$$

Por la linealidad de $T$ se sigue que

$$|T(\varphi)| \leq 2n\|\varphi\|_{C^j(K)}.$$

Esto prueba (e). Recíprocamente, supongamos que (e) se cumple y sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Queremos probar que

$$T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)} : \mathcal{D}_K(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua.
Por hipótesis, existe $j \in \mathbb{N}_0$ y existe $c_K > 0$ tales que

$$|T(\varphi)| \leq c_{K,j}\|\varphi\|_{C^j(K)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Basta ver que $T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ es continuo en 0. Como $T$ es lineal, la continuidad en el origen implica continuidad en todo punto.
Sea entonces $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{c_{K,j}}{\varepsilon}$ y, por lo tanto,

$$\frac{c_{K,j}}{n} < \varepsilon.$$

Consideremos ahora $\varphi \in V_{K,j,n}$. Por definición de $V_{K,j,n}$, esto significa que

$$\|\varphi\|_{C^j(K)} < \frac{1}{n}.$$

Aplicando la cota dada por (e), obtenemos

$$|T(\varphi)| \leq c_{K,j}\|\varphi\|_{C^j(K)} < \frac{c_{K,j}}{n} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\varphi \in V_{K,j,n} \quad \Longrightarrow \quad T(\varphi) \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

y en consecuencia

$$V_{K,j,n} \subseteq \left(T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)}\right)^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)).$$

Como $V_{K,j,n}$ es una vecindad de 0 en $\mathcal{D}_K(\Omega)$, se concluye que

$$\left(T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)}\right)^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$$

es una vecindad de 0. Esto prueba que $T \restriction_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ es continuo en 0, y por linealidad, es continua en todo $\mathcal{D}_K(\Omega)$. □

**Definición 4.5.2.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. El cual de $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$ se llama ***el espacio de distribuciones definidas sobre*** $\Omega$ y sus elementos se llaman ***distribuciones***. Frecuentemente usaremos la notación de dualidad $\langle T, \varphi \rangle$ para denotar $T(\varphi)$. El espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ se considera dotado con la topología débil-

$*$. Así, una sucesión $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$T_k(\varphi) \to T(\varphi), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En este caso decimos que $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $T$ en el *sentido de distribuciones* o en *sentido distribucional*.

**Ejemplo 4.5.3.** Si $\psi \in C^\infty(\Omega)$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, entonces el funcional $\psi T \colon \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$(\psi T)(\varphi) := T(\psi\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

es una distribución.
Primero observamos que $\psi T$ es lineal. Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\psi T)(a\varphi_1 + b\varphi_2) = T\big(\psi(a\varphi_1 + b\varphi_2)\big) = T(a\psi\varphi_1 + b\psi\varphi_2) = a(\psi T)(\varphi_1) + b(\psi T)(\varphi_2).$$

Veamos ahora que $\psi T$ es continua. Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Como $T$ es una distribución, por el inciso (e) del Teorema 4.5.1, existe $j \in \mathbb{N}_0$ y existe $c_K > 0$ tales que

$$|T(\eta)| \leq c_K \|\eta\|_{C^j(K)}, \qquad \forall \eta \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Sea ahora $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Entonces $\psi\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ y por lo tanto

$$|(\psi T)(\varphi)| = |T(\psi\varphi)| \leq c_K \|\psi\varphi\|_{C^j(K)}.$$

Para estimar este seminorma usamos la regla de Leibniz para derivadas parciales con multiíndices (Proposición 1.1.17). Si $|\alpha| \leq j$, entonces

$$\partial^\alpha(\psi\varphi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta\psi)(\partial^{\alpha-\beta}\varphi).$$

Tomando supremo sobre $K$ obtenemos

$$\|\partial^\alpha(\psi\varphi)\|_{C^0(K)} \leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta\psi\|_{C^0(K)} \|\partial^{\alpha-\beta}\varphi\|_{C^0(K)}.$$

Como $\psi \in C^\infty(\Omega)$ y $K$ es compacto, cada derivada $\partial^\beta\psi$ es acotada en $K$. Definimos

$$M_\beta := \|\partial^\beta\psi\|_{C^0(K)}.$$

Entonces

$$\|\partial^\alpha(\psi\varphi)\|_{C^0(K)} \leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_\beta \|\partial^{\alpha-\beta}\varphi\|_{C^0(K)}.$$

Sumando sobre $|\alpha| \leq j$ se obtiene que existe una constante $C_K > 0$ tal que

$$\|\psi\varphi\|_{C^j(K)} \leq C_K \|\varphi\|_{C^j(K)}.$$

Sustituyendo en la estimación anterior se sigue que

$$|(\psi T)(\varphi)| \leq c_K C_K \|\varphi\|_{C^j(K)}.$$

Aplicando nuevamente el inciso (e) del Teorema 4.5.1, concluimos que $\psi T$ es una distribución, es decir,

$$\psi T \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Ejemplo 4.5.4.** Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Definimos el funcional

$$T_f \colon \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Entonces $T_f$ es una distribución. La linealidad se sigue de la linealidad de la integral. Para probar la continuidad, Sea $K \subseteq \Omega$ compacto y sea $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Entonces

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_K f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \int_K |f(x)\|\varphi(x)|\,dx.$$

Como $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{K,0}$ para todo $x \in K$, se obtiene

$$|T_f(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{K,0} \int_K |f(x)|\,dx.$$

Definiendo

$$c_K := \int_K |f(x)|\,dx,$$

tenemos

$$|T_f(\varphi)| \leq c_K \|\varphi\|_{K,0}.$$

Por el inciso (e) del Teorema 4.5.1, se concluye que $T_f$ es una distribución.

**Ejemplo 4.5.5.** Sea $x_0 \in \Omega$. El funcional

$$\delta_{x_0} \colon \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0),$$

se llama **delta de Dirac** centrada en $x_0$. La linealidad es inmediata. Veamos que es continua. Sea $K \subseteq \Omega$ compacto tal que $x_0 \in K$ y sea $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Entonces

$$|\delta_{x_0}(\varphi)| = |\varphi(x_0)| \leq \|\varphi\|_{C^0(K)} = \|\varphi\|_{K,0}.$$

Por lo tanto

$$|\delta_{x_0}(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{K,0}.$$

Aplicando el inciso (e) del Teorema 4.5.1, concluimos que $\delta_{x_0}$ es una distribución.

Una operación importante que podemos hacer con las distribuciones es considerar la *restricción* de una distribución:

**Definición 4.5.6.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos la restricción de $v$ a $\Omega$ como la distribución $v \restriction_\Omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dada por

$$\langle v \restriction_\Omega, \varphi \rangle := \langle v, \tilde{\varphi} \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donde $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es la extensión por cero de $\varphi$ fuera de $\Omega$.

## 4.6 Orden de una distribución

En esta sección definimos el orden de una distribución. Los ejemplos anteriores muestran que el entero $j \in \mathbb{N}_0$ en (4.2) puede cambiar con la elección de distribución y el conjunto compacto que elijamos. Si el mismo entero funciona para todo $K \subseteq \Omega$ compacto, entonces el entero más pequeño para el cual (4.2) funciona se conoce como el *orden de la distribución* $T$.

**Definición 4.6.1.** Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Decimos que $T$ es una distribución de *orden menor o igual que* $m$ si existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe una constante $c_K > 0$ con la propiedad de que

$$|T(\varphi)| \leq c_K \|\varphi\|_{K,m} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Si tal entero $m$ existe, el menor de ellos se llama el *orden de la distribución* $T$ y se denota por $\operatorname{ord}(T)$. Si no existe tal entero, decimos que $T$ es una distribución de *orden infinito*.

**Ejemplo 4.6.2.** Los ejemplos anteriores permiten identificar el orden de varias distribuciones importantes.

(a) Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, entonces la distribución

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

tiene orden 0.

Si $K \subseteq \Omega$ es compacto y $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, entonces

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_K f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \int_K |f(x)||\varphi(x)|\,dx \leq \|\varphi\|_{K,0} \int_K |f(x)|\,dx.$$

Definiendo

$$c_K := \int_K |f(x)|\,dx,$$

obtenemos

$$|T_f(\varphi)| \leq c_K \|\varphi\|_{K,0}.$$

Por lo tanto el entero $m = 0$ funciona en la definición anterior, y se concluye que

$$\operatorname{ord}(T_f) = 0.$$

(b) Para $x_0 \in \Omega$, la delta de Dirac

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$$

también es una distribución de orden 0.

Si $K \subseteq \Omega$ es compacto y $x_0 \in K$, entonces para $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$

$$|\delta_{x_0}(\varphi)| = |\varphi(x_0)| \leq \|\varphi\|_{C^0(K)} = \|\varphi\|_{K,0}.$$

Por lo tanto

$$|\delta_{x_0}(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{K,0},$$

y nuevamente el entero $m = 0$ satisface la condición de la definición, lo que implica

$$\operatorname{ord}(\delta_{x_0}) = 0.$$

(c) Si $\psi \in C^\infty(\Omega)$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es de orden $m$, entonces $\psi T$ también es de orden menor o igual que $m$.

La estimación del ejemplo anterior proporciona una constante $C_K > 0$ tal que

$$\|\psi\varphi\|_{K,m} \leq C_K \|\varphi\|_{K,m}.$$

Como $T$ tiene orden $m$, existe $c_K > 0$ tal que

$$|T(\eta)| \leq c_K \|\eta\|_{K,m}.$$

Tomando $\eta = \psi\varphi$ obtenemos

$$|(\psi T)(\varphi)| = |T(\psi\varphi)| \leq c_K \|\psi\varphi\|_{K,m} \leq c_K C_K \|\varphi\|_{K,m}.$$

Por lo tanto $\psi T$ satisface la definición con el mismo entero $m$, y así

$$\operatorname{ord}(\psi T) \leq m.$$

(d) Sea ahora $\mu$ una medida de Radon con signo[1] sobre $\Omega$. Definimos

$$T_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Primero observamos que $T_\mu$ es lineal por la linealidad de la integral.

Veamos que es continua. Sea $K \subseteq \Omega$ compacto y sea $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Como $\varphi$ se anula fuera de $K$, se tiene

$$T_\mu(\varphi) = \int_K \varphi \, d\mu.$$

Sea $|\mu|$ la variación total[2] de $\mu$. Entonces

$$|T_\mu(\varphi)| = \left| \int_K \varphi \, d\mu \right| \leq \int_K |\varphi| \, d|\mu|.$$

Como $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{K,0}$ para todo $x \in K$, se obtiene

$$|T_\mu(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{K,0} \int_K d|\mu| = |\mu|(K)\|\varphi\|_{K,0}.$$

Definiendo

$$c_K := |\mu|(K),$$

obtenemos

$$|T_\mu(\varphi)| \leq c_K \|\varphi\|_{K,0}.$$

Por la definición de orden de una distribución se concluye que

$$\operatorname{ord}(T_\mu) = 0.$$

Resulta que todas las distribuciones de orden 0 se pueden identificar con medidas.

**Teorema 4.6.3.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(a) Si $T$ es positivo, es decir, si

$$T(\varphi) \geq 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ con } \varphi \geq 0,$$

entonces existe una única medida de Radon positiva $\mu\colon \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty]$ tal que

$$T(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(b) Si $T$ tiene orden 0, entonces existen dos medidas de Radon positivas

$$\mu_1, \mu_2\colon \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty]$$

tales que

$$T(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu_1 - \int_\Omega \varphi \, d\mu_2, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Demostración.* Recordemos que $C_c(\Omega)$ se dota de la topología de límite inductivo estricto

$$C_c(\Omega) = \varinjlim_{i \in \mathbb{N}} C_{K_i}(\Omega),$$

[1] Una *medida con signo* sobre $\Omega$ es una función $\mu\colon \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow [-\infty,\infty]$ definida en la $\sigma$-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\Omega)$ tal que $\mu(\varnothing) = 0$, toma a lo más uno de los valores $\infty$ y $-\infty$, y para toda familia numerable $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$ de conjuntos disjuntos se cumple $\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \mu(E_k)$. Se trata de la noción global de la Definición B.5.19. Para que sea de Radon se exige, además, que sus variaciones positiva y negativa sean de Radon; véase la Definición B.5.22.

[2] Sea $\mu$ una medida con signo. Su *variación total* es la medida positiva $|\mu|\colon \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty]$ definida por

$$|\mu|(E) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^\infty |\mu(E_k)| \;\middle|\; E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k,\ E_k \in \mathcal{B}(\Omega),\ E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j \right\}.$$

Equivalentemente, si $\mu = \mu^+ - \mu^-$ es la descomposición de Jordan de $\mu$, entonces $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

donde $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una exhaustión creciente de $\Omega$ por compactos y

$$C_{K_i}(\Omega) := \{u \in C_c(\Omega) \mid \operatorname{supp}(u) \subseteq K_i\}$$

se considera con la norma uniforme

$$\|u\|_{K_i,\infty} := \|u\|_{C^0(K_i)}.$$

En particular, un funcional lineal $L\colon C_c(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continuo si y sólo si para todo compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C_K > 0$ tal que

$$|L(u)| \leq C_K \|u\|_{K,\infty}, \qquad \forall u \in C_c(\Omega) \text{ con } \operatorname{supp}(u) \subset K.$$

(a) Supongamos primero que $T$ es positivo. Mostraremos que $T$ tiene orden 0.

Sea $K \subset \Omega$ compacto. Tomemos un abierto acotado $U \subset \Omega$ tal que

$$K \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega.$$

Consideremos una función flan $\psi \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$\psi \equiv 1 \text{ en } K, \qquad \operatorname{supp}(\psi) \subset U, \qquad 0 \leq \psi \leq 1.$$

En particular $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Sea ahora $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Como $\psi \equiv 1$ en $K$ y $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$, se tiene

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{K,0}\psi(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

De aquí se deduce que

$$\|\varphi\|_{K,0}\psi - \varphi \geq 0, \qquad \|\varphi\|_{K,0}\psi + \varphi \geq 0.$$

Como $T$ es positivo,

$$T(\|\varphi\|_{K,0}\psi - \varphi) \geq 0, \qquad T(\|\varphi\|_{K,0}\psi + \varphi) \geq 0.$$

Por linealidad,

$$-\|\varphi\|_{K,0}T(\psi) \leq T(\varphi) \leq \|\varphi\|_{K,0}T(\psi),$$

y por lo tanto

$$|T(\varphi)| \leq T(\psi)\|\varphi\|_{K,0}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Esto muestra que $T$ es de orden 0.

Tomemos ahora una sucesión de abiertos acotados $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\Omega_i \Subset \Omega_{i+1}, \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i = \Omega,$$

y definamos $K_i := \overline{\Omega_i}$. Entonces cada $K_i$ es compacto y $K_i \subset \Omega$.

Como $T$ tiene orden 0, para cada $i$ existe $c_i > 0$ tal que

$$|T(\varphi)| \leq c_i \|\varphi\|_{K_i,0}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{K_i}(\Omega). \tag{4.3}$$

Sea $u \in C_c(\Omega_i)$. Como $\operatorname{supp}(u)$ es compacto y está contenido en $\Omega_i$, existe una sucesión

$$u_k \in \mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$$

tal que

$$u_k \to u$$

uniformemente en $K_i$.

Por (4.3),

$$|T(u_k - u_\ell)| \leq c_i \|u_k - u_\ell\|_{K_i,0} \to 0 \qquad (k, \ell \to \infty).$$

Por consiguiente $\{T(u_k)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y definimos

$$T_i(u) := \lim_{k\to\infty} T(u_k).$$

Veamos que esta definición no depende de la sucesión aproximante. Supongamos que

$$v_k \in \mathcal{D}_{K_i}(\Omega), \qquad v_k \to u$$

uniformemente en $K_i$. Entonces

$$|T(u_k - v_k)| \leq c_i \|u_k - v_k\|_{K_i,0} \leq c_i \left( \|u_k - u\|_{K_i,0} + \|u - v_k\|_{K_i,0} \right) \to 0,$$

y de aquí se sigue

$$\lim_{k\to\infty} T(u_k) = \lim_{k\to\infty} T(v_k).$$

Por lo tanto $T_i(u)$ está bien definido.

Sean ahora $u, v \in C_c(\Omega_i)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tomemos sucesiones

$$u_k \to u, \qquad v_k \to v$$

uniformemente en $K_i$, con

$$u_k, v_k \in \mathcal{D}_{K_i}(\Omega).$$

Entonces

$$\alpha u_k + \beta v_k \to \alpha u + \beta v$$

uniformemente en $K_i$, y por linealidad de $T$ obtenemos

$$T_i(\alpha u + \beta v) = \lim_{k\to\infty} T(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha T_i(u) + \beta T_i(v).$$

Así $T_i$ es lineal.

Además, si $u \geq 0$, podemos escoger una sucesión aproximante $u_k \geq 0$. Entonces

$$T(u_k) \geq 0,$$

y al pasar al límite se obtiene

$$T_i(u) \geq 0.$$

Por lo tanto $T_i$ es positivo.

Pasando al límite en (4.3) obtenemos

$$|T_i(u)| \leq c_i \|u\|_{K_i,0}, \qquad \forall u \in C_c(\Omega_i),$$

y en consecuencia $T_i$ es continuo respecto de la norma uniforme.

Si $u \in C_c(\Omega_i)$, cualquier sucesión aproximante válida para $T_i$ lo es también para $T_{i+1}$, por lo que

$$T_{i+1}(u) = T_i(u).$$

Así los funcionales $T_i$ son compatibles y definen un funcional lineal

$$L\colon C_c(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$L(u) = T_i(u) \qquad (u \in C_c(\Omega_i)).$$

Sea ahora $K \subset \Omega$ compacto. Elijamos $i$ tal que $K \subset \Omega_i$. Si $\operatorname{supp}(u) \subset K$, entonces

$$|L(u)| = |T_i(u)| \leq c_i \|u\|_{K_i,0} = c_i \|u\|_{K,0}.$$

Esto muestra que $L$ es localmente acotado y por lo tanto continuo en $C_c(\Omega)$.

Aplicando el teorema de representación de Riesz (Teorema B.5.23) obtenemos una única medida de Radon positiva $\mu$ tal que

$$L(u) = \int_\Omega u \, d\mu, \qquad \forall u \in C_c(\Omega).$$

Como $L$ extiende a $T$, se concluye

$$T(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(b) Supongamos ahora que $T$ tiene orden 0. Entonces, para todo compacto $K \subset \Omega$ existe $C_K > 0$ tal que

$$|T(\varphi)| \leq C_K \|\varphi\|_{K,0}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Repitiendo el procedimiento anterior obtenemos funcionales lineales continuos

$$T_i\colon C_c(\Omega_i) \longrightarrow \mathbb{R}$$

compatibles entre sí, que inducen un funcional lineal

$$L\colon C_c(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que extiende a $T$.

Además, el mismo argumento muestra que $L$ es localmente acotado. Como $\Omega$ es localmente compacto, de Hausdorff y $\sigma$-compacto, el inciso (b) del Teorema B.5.23 proporciona directamente dos medidas de Radon positivas $\mu_1, \mu_2$ tales que

$$L(u) = \int_\Omega u\, d\mu_1 - \int_\Omega u\, d\mu_2, \qquad \forall u \in C_c(\Omega).$$

Cada integral es finita porque $u$ tiene soporte compacto. No es necesario que la diferencia de las medidas esté definida en todos los borelianos de $\Omega$; la representación se entiende en el sentido local de la Definición B.5.22. Por lo tanto

$$T(\varphi) = \int_\Omega \varphi\, d\mu_1 - \int_\Omega \varphi\, d\mu_2, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

□

## 4.7 Derivadas distribucionales

La noción de derivada débil motivó el concepto de distribución pues como vimos anteriormente, hay funciones que no tienen derivadas débiles pero son *suficientemente bien portadas* en el sentido de que deberían admitir cierto tipo de derivada *generalizada*. El concepto de distribución nos permitirá extender la noción de derivada como se muestra a continuación:

**Definición 4.7.1.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dado un multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{0\}$, definimos la $\alpha$-ésima derivada *distribucional* de $T$ como

$$D^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Para $j \in \mathbb{N}$, el símbolo $\nabla^j T$ representa la colección de todas las $\alpha$-ésimas derivadas distribucionales de $T$ con $|\alpha| = j$.

**Observación 4.7.2.** Naturalmente la $\alpha$-ésima derivada distribucional de una distribución $T$ debe ser nuevamente una distribución. Para probarlo notemos que por el Teorema 4.5.1, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $K \subseteq \Omega$ es compacto, entonces existe $j \in \mathbb{N}_0$ y una constante $c_K > 0$ tal que

$$|T(\varphi)| \leq c_K \|\varphi\|_{C^j(K)}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Entonces

$$|D^\alpha T(\varphi)| = |T(D^\alpha \varphi)| \leq c_K \|D^\alpha \varphi\|_{C^j(K)} \leq c_K \|\varphi\|_{C^{j+|\alpha|}(K)}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Nuevamente por el Teorema 4.5.1 obtenemos que $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Además, esta estimación permite controlar el orden de la derivada distribucional. Si $T$ es de orden finito $m = \operatorname{ord}(T)$, tomando $j = m$ en la desigualdad anterior obtenemos

$$\operatorname{ord}(D^\alpha T) \leq m + |\alpha|.$$

Si $T$ no es de orden finito, entonces $\operatorname{ord}(T) = \infty$ y la desigualdad anterior continúa siendo válida en $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, pues

$$\operatorname{ord}(D^\alpha T) \leq \infty = \infty + |\alpha|.$$

En particular, si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $T_u$ es la distribución inducida por $u$ y $\alpha$ es un multiíndice, entonces la $\alpha$-ésima derivada débil de $u$, $D^\alpha u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (en caso de existir), cumple que su distribución inducida $T_{D^\alpha u} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es la $\alpha$-ésima derivada distribucional de $T_u$, es decir,

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces por definición de derivada distribucional

$$D^\alpha T_u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi.$$

Como $D^\alpha u$ es la derivada débil de $u$, se cumple

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u\, \varphi,$$

y por lo tanto

$$D^\alpha T_u(\varphi) = \int_\Omega D^\alpha u\, \varphi = T_{D^\alpha u}(\varphi).$$

Como esto vale para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, concluimos que

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}.$$

Las derivadas direccionales se extienden de manera similar:

**Definición 4.7.3.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dado un vector $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, definimos la $k$-ésima derivada direccional de $T$ en la dirección de $\nu$ como

$$\frac{\partial^k T}{\partial \nu^k}(\varphi) := (-1)^k T\left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial \nu^k}\right), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En particular, si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces la $k$-ésima derivada direccional débil o distribucional de $u$ en la dirección $\nu$ es la distribución

$$\frac{\partial^k T_u}{\partial \nu^k} \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Hay otros operadores diferenciales que admiten una extensión al sentido distribucional como el laplaciano.

**Ejemplo 4.7.4.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. El laplaciano de $u$ en el sentido distribucional se define como la distribución

$$T_{\Delta u} := \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 T_u.$$

En otras palabras, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} T_{\Delta u}(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 T_u(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} T_u(\partial_i^2 \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u\, \partial_i^2 \varphi = \int_\Omega u\, \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Decimos que $u$ es *subarmónica* en $\Omega$ si su laplaciano distribucional es positivo, es decir, si

$$T_{\Delta u}(\varphi) \geq 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ con } \varphi \geq 0.$$

En tal caso, $T_{\Delta u}$ es una distribución positiva. Por el Teorema 4.6.3, toda distribución positiva es una medida de Radon positiva. Por lo tanto existe una única medida de Radon positiva $\mu$ en $\Omega$ tal que

$$T_{\Delta u}(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En consecuencia, el laplaciano distribucional de una función subarmónica puede identificarse con una medida de Radon positiva.

**Ejemplo 4.7.5.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $F = (F_1, \ldots, F_n) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. La divergencia de $F$ en el sentido distribucional se define como la distribución

$$T_{\operatorname{div} F} := \sum_{i=1}^{n} \partial_i T_{F_i}.$$

En otras palabras, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} T_{\operatorname{div} F}(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i T_{F_i}(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} T_{F_i}(\partial_i \varphi) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega F_i\, \partial_i \varphi = -\int_\Omega F \cdot \nabla \varphi. \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.7.6.** Sea $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) := \begin{cases} \cos(x), & \text{si } -\pi \leq x \leq 0, \\ 1 - \dfrac{x}{\pi}, & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcule la derivada de $u$ en el sentido distribucional y encuentre su orden.

(b) Sea $v := u \restriction_{(-\pi,\pi)}$. Calcule la primera y segunda derivada de $v$ en el sentido distribucional en $(-\pi,\pi)$ y encuentre sus órdenes.

(c) Sea $w\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ y supongamos que existen

$$\lim_{x\to a^-} w(x), \qquad \lim_{x\to a^+} w(x).$$

Calcule la derivada de $w$ en el sentido distribucional. ¿Qué puede decir acerca de su orden? ¿Bajo qué condiciones puede concluirse que tiene orden 0?

**Solución.** (a) Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Como $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, la función $u$ induce una distribución

$$T_u\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad T_u(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Por definición de derivada distribucional,

$$T_u'(\varphi) := -T_u(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Como $u$ está dada por expresiones distintas en $[-\pi,0]$ y en $(0,\pi]$, se tiene

$$T_u'(\varphi) = -\int_{-\pi}^{0} \cos(x)\varphi'(x)\,dx - \int_0^{\pi} \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\varphi'(x)\,dx.$$

Integramos por partes en cada término. Para el primero,

$$\begin{aligned} -\int_{-\pi}^{0} \cos(x)\varphi'(x)\,dx &= -\Big[\cos(x)\varphi(x)\Big]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} (-\sin x)\varphi(x)\,dx \\ &= -\varphi(0) - \varphi(-\pi) + \int_{-\pi}^{0} (-\sin x)\varphi(x)\,dx, \end{aligned}$$

pues $\cos(0) = 1$ y $\cos(-\pi) = -1$.

Para el segundo término,

$$-\int_0^{\pi} \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\varphi'(x)\,dx = -\left[\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\varphi(x)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx$$

$$= \varphi(0) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx.$$

Sumando ambas expresiones obtenemos

$$T_u'(\varphi) = -\varphi(-\pi) + \int_{-\pi}^{0} (-\sin x)\varphi(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx.$$

Esto puede escribirse como

$$T_u'(\varphi) = T_f(\varphi) - \delta_{-\pi}(\varphi),$$

donde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) := \begin{cases} -\sin x, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ -\dfrac{1}{\pi}, & \text{si } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$T_u' = T_f - \delta_{-\pi}.$$

En otras palabras,

$$u' = f - \delta_{-\pi}$$

en el sentido distribucional.

Determinemos ahora su orden. Como $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, la distribución $T_f$ es de orden 0. Además, $\delta_{-\pi}$ también es de orden 0. De aquí se sigue que $u'$, al ser suma de distribuciones de orden 0, es una distribución de orden 0.

(b) Consideremos ahora $v := u \restriction_{(-\pi,\pi)}$. Entonces

$$v(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{si } -\pi < x \leq 0, \\ 1 - \dfrac{x}{\pi}, & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Además,

$$\lim_{x\to 0^-} v(x) = \cos(0) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} v(x) = 1 - \frac{0}{\pi} = 1,$$

de modo que $v$ es continua en 0. En particular, $v \in L^1_{\text{loc}}((-\pi,\pi))$, y por lo tanto induce una distribución

$$T_v : \mathcal{D}((-\pi,\pi)) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad T_v(\varphi) := \int_{-\pi}^{\pi} v(x)\varphi(x)\,dx.$$

Calculemos su primera derivada distribucional. Sea $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$. Por definición,

$$T_v'(\varphi) := -T_v(\varphi') = -\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Al separar la integral según la definición de $v$, obtenemos

$$T_v'(\varphi) = -\int_{-\pi}^{0} \cos(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\varphi'(x)\,dx.$$

Integramos por partes en cada intervalo. Para el primero,

$$\begin{aligned} -\int_{-\pi}^{0} \cos(x)\varphi'(x)\,dx &= -\Big[\cos(x)\varphi(x)\Big]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} (-\sin x)\varphi(x)\,dx \\ &= -\varphi(0) - \varphi(-\pi) + \int_{-\pi}^{0} (-\sin x)\varphi(x)\,dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$, se tiene $\varphi(-\pi)=0$. Por consiguiente,

$$-\int_{-\pi}^{0}\cos(x)\varphi'(x)\,dx = -\varphi(0)+\int_{-\pi}^{0}(-\sin x)\varphi(x)\,dx.$$

Para el segundo término,

$$-\int_0^{\pi}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\varphi'(x)\,dx = -\left[\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\varphi(x)\right]_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\,dx$$

$$=\varphi(0)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\,dx,$$

pues $\left(1-\frac{\pi}{\pi}\right)\varphi(\pi)=0$.

Sumando ambas expresiones, los términos en $\varphi(0)$ se cancelan y obtenemos

$$T_v'(\varphi)=\int_{-\pi}^{0}(-\sin x)\varphi(x)\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\,dx.$$

Esto puede escribirse como

$$T_v'(\varphi)=\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\varphi(x)\,dx,$$

donde

$$g(x):=\begin{cases}-\sin x, & \text{si } -\pi<x<0,\\ -\dfrac{1}{\pi}, & \text{si } 0<x<\pi.\end{cases}$$

Por lo tanto,

$$T_v'=T_g.$$

En consecuencia,

$$v'=\begin{cases}-\sin x, & \text{si } -\pi<x<0,\\ -\dfrac{1}{\pi}, & \text{si } 0<x<\pi,\end{cases}\qquad \text{en el sentido distribucional.}$$

Como $g\in L^1_{\mathrm{loc}}((-\pi,\pi))$, la distribución $T_g$ es de orden 0. Por consiguiente, $v'$ es una distribución de orden 0.

Calculemos ahora la segunda derivada distribucional de $v$. Como $T_v'=T_g$, se tiene

$$T_v''=(T_v')'=(T_g)'.$$

Sea $\varphi\in\mathcal{D}((-\pi,\pi))$. Entonces

$$T_v''(\varphi)=T_g'(\varphi)=-T_g(\varphi')=-\int_{-\pi}^{0}(-\sin x)\varphi'(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi'(x)\,dx.$$

Integramos por partes en cada término. Para el primero,

$$-\int_{-\pi}^{0}(-\sin x)\varphi'(x)\,dx = -\Big[(-\sin x)\varphi(x)\Big]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}(-\cos x)\varphi(x)\,dx.$$

Como $\sin(0) = 0$ y $\sin(-\pi) = 0$, el término de frontera es nulo, de modo que

$$-\int_{-\pi}^{0}(-\sin x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0}(-\cos x)\varphi(x)\,dx.$$

Para el segundo término,

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\big[\varphi(x)\big]_{0}^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\varphi(0),$$

ya que $\varphi(\pi) = 0$.

Sustituyendo en la expresión de $T_v''(\varphi)$, llegamos a

$$T_v''(\varphi) = \int_{-\pi}^{0}(-\cos x)\varphi(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\varphi(0).$$

Esto significa que

$$T_v'' = T_h - \frac{1}{\pi}\delta_0,$$

donde

$$h(x) := \begin{cases} -\cos x, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

En otras palabras,

$$v'' = \begin{cases} -\cos x, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{si } 0 < x < \pi, \end{cases} - \frac{1}{\pi}\delta_0$$

en el sentido distribucional.

Veamos ahora su orden. Como $h \in L^1_{\text{loc}}((-\pi,\pi))$, la distribución $T_h$ es de orden 0. Además, $\delta_0$ es de orden 0, por lo tanto, $v''$ es una distribución de orden 0.

(c) Sea ahora $w\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, y supongamos que existen los límites laterales

$$\lim_{x\to a^-} w(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^+} w(x).$$

Denotaremos estos límites por

$$w(a^-) := \lim_{x\to a^-} w(x), \qquad w(a^+) := \lim_{x\to a^+} w(x).$$

Por hipótesis, ambos números reales están bien definidos.

Como $w$ es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, en particular es continua en $(-\infty, a)$ y en $(a,\infty)$. Además, al existir los límites laterales finitos en $a$, la función $w$ es localmente acotada cerca de $a$. De aquí se sigue que

$$w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}),$$

y por lo tanto $w$ induce una distribución

$$T_w\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad T_w(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} w(x)\varphi(x)\,dx.$$

Calculemos su derivada distribucional. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Por definición,

$$T_w'(\varphi) := -T_w(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} w(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Separamos la integral en los intervalos $(-\infty, a)$ y $(a, \infty)$:

$$T_w'(\varphi) = -\int_{-\infty}^{a} w(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{a}^{\infty} w(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Supongamos además que la derivada clásica de $w$ en $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, que denotaremos por $w'_{\mathrm{cl}}$, pertenece a $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ al prolongarla arbitrariamente en el punto $a$. Entonces podemos integrar por partes en cada uno de los dos intervalos anteriores. Obtenemos

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{a} w(x)\varphi'(x)\,dx &= -\Big[w(x)\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} w'_{\mathrm{cl}}(x)\varphi(x)\,dx \\ &= -w(a^-)\varphi(a) + \int_{-\infty}^{a} w'_{\mathrm{cl}}(x)\varphi(x)\,dx, \end{aligned}$$

pues $\varphi$ tiene soporte compacto.

De manera análoga,

$$\begin{aligned} -\int_{a}^{\infty} w(x)\varphi'(x)\,dx &= -\Big[w(x)\varphi(x)\Big]_{a}^{\infty} + \int_{a}^{\infty} w'_{\mathrm{cl}}(x)\varphi(x)\,dx \\ &= w(a^+)\varphi(a) + \int_{a}^{\infty} w'_{\mathrm{cl}}(x)\varphi(x)\,dx. \end{aligned}$$

Sumando ambas igualdades llegamos a

$$T_w'(\varphi) = \int_{-\infty}^{a} w'_{\mathrm{cl}}(x)\varphi(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} w'_{\mathrm{cl}}(x)\varphi(x)\,dx + \big(w(a^+) - w(a^-)\big)\varphi(a).$$

Como un punto tiene medida nula, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{a} w'_{\mathrm{cl}}(x)\varphi(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} w'_{\mathrm{cl}}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} w'_{\mathrm{cl}}(x)\varphi(x)\,dx.$$

En consecuencia,

$$T_w'(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} w'_{\mathrm{cl}}(x)\varphi(x)\,dx + \big(w(a^+) - w(a^-)\big)\varphi(a),$$

es decir,

$$T_w' = T_{w'_{\mathrm{cl}}} + \big(w(a^+) - w(a^-)\big)\delta_a.$$

En otras palabras,

$$w' = w'_{\mathrm{cl}} + \big(w(a^+) - w(a^-)\big)\delta_a$$

en el sentido distribucional.

Consideremos ahora el orden de $T_w'$. Como $T_w$ es una distribución de orden 0, de la Observación 4.7.2 se sigue que $T_w'$ es una distribución de orden a lo más 1.

Si además $w'_{\mathrm{cl}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, entonces $T_{w'_{\mathrm{cl}}}$ es de orden 0, y como $\delta_a$ también es de orden 0, concluimos que

$$T_w' = T_{w'_{\mathrm{cl}}} + \big(w(a^+) - w(a^-)\big)\delta_a$$

es una distribución de orden 0.

En particular, esto sucede si las dos ramas de $w$, prolongadas en $a$ con los valores $w(a^-)$ y $w(a^+)$, son absolutamente continuas en $[b,a]$ y $[a,c]$ para cualesquiera $b < a < c$. El teorema fundamental del cálculo para funciones absolutamente continuas da la integrabilidad de $|w'_{\mathrm{cl}}|$ en $(b,a)$ y en $(a,c)$. Todo compacto de $\mathbb{R}$ está contenido en algún intervalo $[b,c]$ de este tipo, por lo que $w'_{\mathrm{cl}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Esta condición controla la derivada al aproximarse a $a$; la continuidad absoluta en intervalos compactos separados de $a$ no basta para ello.

□

Después de estudiar varios ejemplos de distribuciones obtenidas como derivadas, resulta natural preguntar hasta qué punto toda distribución admite una representación de este tipo. El siguiente teorema ofrece una respuesta local:

**Teorema 4.7.7.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces para cada $K \subseteq \Omega$ compacto existe una función continua $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y un multiíndice $\alpha$ (ambos dependientes de $K$) tales que

$$T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

*Demostración.* Sea $K \subseteq \Omega$ un compacto fijo. Como $K$ es compacto y $\Omega$ es abierto, existe un abierto $U_0$ tal que $K \subseteq U_0 \Subset \Omega$. Por la Proposición 1.3.6, existe $\chi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\chi = 1$ en $K$ y $\operatorname{supp}(\chi) \subseteq U_0$. En particular, $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Definimos $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mediante

$$S(\psi) := T\big((\chi\psi)\restriction_\Omega\big), \qquad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

La multiplicación por $\chi$ y la restricción a $\Omega$ son continuas en los espacios de funciones de prueba correspondientes; por lo tanto, $S$ es una distribución. Además, $\operatorname{supp}(S) \subseteq \operatorname{supp}(\chi)$.
Elegimos un cubo cerrado

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

tal que $\operatorname{supp}(\chi) \subseteq \operatorname{Int}(Q)$. Esta elección no requiere que $Q$ esté contenido en $\Omega$. Si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ y $\widetilde{\varphi}$ denota su extensión por cero a $\mathbb{R}^n$, entonces $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n)$ y

$$S(\widetilde{\varphi}) = T(\chi\varphi) = T(\varphi). \tag{4.4}$$

Denotemos por $\beta := (1, \ldots, 1)$ al multiíndice cuyas componentes son todas iguales a 1.

Sea ahora $\psi \in \mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n)$. Para $x \in Q$ definimos el subcubo

$$Q(x) := \{y \in Q \mid a_i \le y_i \le x_i,\ i = 1,\dots,n\}.$$

Como $\psi \in \mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n)$, su soporte está contenido en el cubo cerrado $Q$. Dado que $\psi$ es de clase $C^\infty$ y se anula idénticamente en $\mathbb{R}^n \setminus Q$, tanto $\psi$ como todas sus derivadas parciales deben anularse sobre la frontera $\partial Q$. Esto garantiza que al aplicar el Teorema B.6.5 en cada variable, integrando desde el extremo inferior $a_i$, los términos de frontera son nulos.
El Teorema B.6.5, aplicado en la primera variable, proporciona

$$\psi(x) = \psi(a_1, x_2, \dots, x_n) + \int_{a_1}^{x_1} \partial_1 \psi(y_1, x_2, \dots, x_n)\, dy_1 = \int_{a_1}^{x_1} \partial_1 \psi(y_1, x_2, \dots, x_n)\, dy_1.$$

Como $\partial_1 \psi$ se anula sobre $\partial Q$, en particular vale cero cuando la segunda coordenada es exactamente $a_2$. Esto permite aplicar el Teorema B.6.5 al integrando respecto a la segunda variable sin que aparezcan términos de frontera. Repitiendo este argumento sucesivamente en cada una de las $n$ variables —y usando en cada paso que las derivadas intermedias también se anulan en la frontera de $Q$— obtenemos la identidad integral

$$\psi(x) = \int_{Q(x)} D^\beta \psi(y)\, dy, \qquad \forall x \in Q. \tag{4.5}$$

Como $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la restricción de $S$ a $\mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n)$ es continua por el Teorema 4.5.1. Por lo tanto, existen un entero $j \ge 0$ y una constante $C'_Q > 0$ tales que

$$|S(\psi)| \le C'_Q \|\psi\|_{C^j(Q)}, \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n),$$

donde

$$\|\psi\|_{C^j(Q)} = \max_{|\alpha| \le j} \|D^\alpha \psi\|_{C^0(Q)}.$$

Sea ahora $\alpha$ un multiíndice con $|\alpha| \le j$ y pongamos $\gamma := (j+1)\beta - \alpha$. Como $\alpha_i \le j$, se tiene $\gamma_i \ge 1$ para todo $i$. Al aplicar $\gamma_i$ veces el teorema fundamental del cálculo en la variable $i$ y usar que todas las derivadas intermedias se anulan cuando $x_i = a_i$, se obtiene

$$D^\alpha \psi(x) = \int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_n}^{x_n} \left( \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - y_i)^{\gamma_i - 1}}{(\gamma_i - 1)!} \right) D^{(j+1)\beta} \psi(y)\, dy_n \cdots dy_1.$$

En efecto, para una sola variable ésta es la fórmula de integración repetida, que se prueba por inducción sobre $\gamma_i$; la fórmula mostrada resulta al aplicarla sucesivamente en las $n$ variables y usar Fubini. Como $0 \le x_i - y_i \le b_i - a_i$ en el recinto de integración, al tomar valores absolutos y ampliar dicho recinto a todo $Q$ obtenemos

$$|D^\alpha \psi(x)| \le C_{Q,\alpha} \int_Q |D^{(j+1)\beta} \psi(y)|\, dy,$$

donde la constante

$$C_{Q,\alpha} := \prod_{i=1}^{n} \frac{(b_i - a_i)^{\gamma_i - 1}}{(\gamma_i - 1)!}$$

depende únicamente de las longitudes del cubo $Q$ y del multiíndice $\gamma = (j+1)\beta - \alpha$. Tomando el supremo

sobre $x \in Q$, el máximo sobre $|\alpha| \le j$, y definiendo

$$C_Q := \max_{|\alpha|\le j} C_{Q,\alpha},$$

deducimos que

$$\|\psi\|_{C^j(Q)} \le C_Q \int_Q |D^{(j+1)\beta}\psi(y)|\,dy.$$

En consecuencia, absorbiendo $C_Q$ en una nueva constante global $C := C'_Q C_Q$, obtenemos la cota

$$|S(\psi)| \le C \int_Q |D^{(j+1)\beta}\psi(y)|\,dy, \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n). \tag{4.6}$$

Definimos ahora el operador lineal

$$L\colon \mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(Q), \qquad L(\psi) = D^{(j+1)\beta}\psi.$$

El operador $L$ es inyectivo. En efecto, supongamos que $D^{(j+1)\beta}\psi = 0$. Probaremos por inducción descendente que $D^{q\beta}\psi = 0$ para $q = j, j-1, \dots, 0$. Si $q = j$, la identidad (4.5), aplicada a $D^{j\beta}\psi$, da $D^{j\beta}\psi = 0$ en $Q$. Si $0 \le q < j$ y ya sabemos que $D^{(q+1)\beta}\psi = 0$, la misma identidad, aplicada esta vez a $D^{q\beta}\psi$, produce $D^{q\beta}\psi = 0$. Al llegar a $q = 0$ obtenemos $\psi = 0$ en $Q$; el argumento también cubre directamente el caso $j = 0$. Todas las aplicaciones son legítimas porque las derivadas de $\psi$ pertenecen a $\mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n)$ y, por ello, se anulan en $\partial Q$. Fuera de $Q$ la función $\psi$ ya es nula, de modo que $\psi = 0$ en $\mathbb{R}^n$.

Sea $Y := L(\mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n))$ la imagen de $L$. Definimos un funcional lineal $T_1\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $T_1(L(\psi)) := S(\psi)$. La inyectividad de $L$ garantiza que $T_1$ está bien definido. Además, por (4.6),

$$|T_1(w)| \le C\|w\|_{L^1(Q)}, \qquad \forall w \in Y.$$

Por el teorema de Hahn–Banach en su forma analítica (Teorema B.2.27), podemos extender $T_1$ a un funcional lineal continuo sobre todo $L^1(Q)$. Como el espacio dual $(L^1(Q))^*$ se identifica isométricamente con $L^\infty(Q)$ respecto a la medida de Lebesgue, existe una función $v \in L^\infty(Q)$ tal que

$$T_1(\psi) = \int_Q v\psi, \qquad \forall \psi \in L^1(Q).$$

En particular, para $\psi \in \mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n)$ obtenemos

$$S(\psi) = \int_Q v D^{(j+1)\beta}\psi.$$

Extendemos $v$ por cero fuera de $Q$ y definimos

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} v(y_1, \dots, y_n)\,dy_n \cdots dy_1.$$

Como $v$ es acotada y tiene soporte compacto, la función $u_0$ está bien definida. Además, si $x, x' \in \mathbb{R}^n$, la diferencia simétrica entre los recintos $\{y \in Q : y \le x\}$ y $\{y \in Q : y \le x'\}$ está contenida en la unión de $n$ franjas

cuyas medidas tienden a cero cuando $x' \to x$. Por consiguiente,

$$|u_0(x') - u_0(x)| \le \|v\|_{L^\infty(Q)} \lambda_n\big(\{y \in Q : y \le x'\} \triangle \{y \in Q : y \le x\}\big) \longrightarrow 0,$$

y $u_0$ es continua en $\mathbb{R}^n$. Verifiquemos que satisface la ecuación distribucional $D^\beta u_0 = v$. Para cualquier función de prueba $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, evaluamos la acción dual:

$$\begin{aligned}\langle D^\beta u_0, \varphi\rangle &= (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\, D^\beta \varphi(x)\, dx \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\{y \le x\}} v(y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \right) D^\beta \varphi(x)\, dx,\end{aligned}$$

donde la notación $y \le x$ indica $y_i \le x_i$ para todo $i$. Por el Teorema B.6.18, intercambiamos el orden de integración; para un $y$ fijo, la variable $x$ recorre el dominio $\{x \ge y\}$:

$$\langle D^\beta u_0, \varphi\rangle = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} v(y_1, \dots, y_n) \left( \int_{\{x \ge y\}} D^\beta \varphi(x)\, dx \right) dy_1 \cdots dy_n.$$

Integrar $D^\beta \varphi = \partial_1 \cdots \partial_n \varphi$ en cada variable $x_i$ desde $y_i$ hasta $\infty$ arroja exactamente $(-1)^n \varphi(y_1, \dots, y_n)$ debido a que $\varphi$ tiene soporte compacto. Por lo tanto,

$$\langle D^\beta u_0, \varphi\rangle = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} v(y_1, \dots, y_n)(-1)^n \varphi(y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n = \langle v, \varphi\rangle.$$

Esto demuestra que $D^\beta u_0 = v$ en el sentido de las distribuciones.
Sustituyendo este hecho en la expresión anterior para $S(\psi)$ y usando la definición de derivada distribucional, obtenemos, para toda $\psi \in \mathcal{D}_Q(\mathbb{R}^n)$,

$$S(\psi) = \langle D^\beta u_0, D^{(j+1)\beta}\psi\rangle = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} u_0\, D^{(j+2)\beta}\psi = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} u_0\, D^{(j+2)\beta}\psi.$$

Definimos ahora el multiíndice $\alpha := (j+2)\beta$, de modo que $|\alpha| = (j+2)n$. Para ajustar el signo, definimos la función continua

$$\widehat{u} := (-1)^{n-|\alpha|} u_0 = (-1)^{(j+1)n} u_0,$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que $n - |\alpha| = -(j+1)n$ y que $(-1)^{-(j+1)n} = (-1)^{(j+1)n}$ (pues la paridad de un entero y la de su opuesto coinciden). Sea $u := \widehat{u}\,\restriction_\Omega$. Con esta elección se tiene $(-1)^{|\alpha|}\widehat{u} = (-1)^n u_0$. Finalmente, si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, entonces, por (4.4) y porque $\operatorname{supp}(D^\alpha \widetilde{\varphi}) \subseteq K \subseteq \Omega$,

$$T(\varphi) = S(\widetilde{\varphi}) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}\, D^\alpha \widetilde{\varphi} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi.$$

Esto completa la demostración. □

## 4.8 Funciones de rápido decrecimiento y la clase de Schwartz

Las funciones de prueba con soporte compacto son adecuadas para estudiar fenómenos locales, pero el soporte compacto no se conserva bajo la transformada de Fourier. Para analizar simultáneamente una función y sus

frecuencias conviene sustituir esa condición por otra que controle el comportamiento en el infinito. La clase de Schwartz reúne las funciones suaves cuyas derivadas decrecen más rápido que cualquier potencia. Su topología registra todos esos controles a la vez y será el espacio de prueba natural para las distribuciones temperadas. El desarrollo de esta sección sigue [97, Capítulo 10, §§10.4–10.8], con la normalización unitaria de Fourier que se fijará más adelante.

Trabajaremos con funciones de valores complejos. Las funciones reales se consideran mediante la inclusión canónica en las complejas; cuando sea necesario recuperar un resultado real bastará restringir los operadores obtenidos.

**Definición 4.8.1.** (Clase de Schwartz) La *clase de Schwartz* de $\mathbb{R}^n$ es

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \;\middle|\; p_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty \text{ para cualesquiera } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\},$$

donde $p_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|$. Para $N \in \mathbb{N}_0$ escribiremos también

$$q_N(\varphi) := \max_{|\alpha|+|\beta| \le N} p_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

Dotamos a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la topología localmente convexa generada por la familia numerable $(q_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$.

La condición anterior equivale a que, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ y cada multiíndice $\beta$, la función $(1+\|x\|)^m D^\beta \varphi(x)$ sea acotada. En particular, $D^\beta \varphi(x) \to 0$ más rápido que $\|x\|^{-m}$ para cualquier $m$. La función $x \mapsto e^{-\|x\|^2}$ pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y no tiene soporte compacto, mientras que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

**Proposición 4.8.2.** (Seminormas equivalentes) Para $N \in \mathbb{N}_0$ definamos

$$r_N(\varphi) := \max_{|\beta| \le N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^N |D^\beta \varphi(x)|.$$

Las familias $(q_N)$ y $(r_N)$ generan la misma topología en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente, para cada $N$ existen $M \in \mathbb{N}_0$ y constantes positivas $c_N, C_N$ tales que $q_N \le c_N r_N$ y $r_N \le C_N q_M$.

*Demostración.* Si $|\alpha|+|\beta| \le N$, entonces $|x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \le (1+\|x\|)^N |D^\beta \varphi(x)|$, de donde $q_N \le r_N$. Para la desigualdad opuesta usamos que existe una constante $C_N > 0$ tal que

$$(1+\|x\|)^N \le C_N \sum_{|\alpha| \le N} |x^\alpha|, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Esta estimación se obtiene expandiendo $(1+|x_1|+\cdots+|x_n|)^N$ y observando que $\|x\| \le |x_1|+\cdots+|x_n|$. Por lo tanto, $r_N(\varphi) \le C_N q_{2N}(\varphi)$. □

**Teorema 4.8.3.** (Estructura de Fréchet de la clase de Schwartz) El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Fréchet. Una sucesión $(\varphi_j)$ converge a $\varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $q_N(\varphi_j - \varphi) \to 0$ para todo $N \in \mathbb{N}_0$.

*Demostración.* La familia numerable $(q_N)$ induce, por la Proposición B.10.24, una métrica invariante compatible con la topología. Resta comprobar la completitud. Sea $(\varphi_j)$ una sucesión de Cauchy. Para cada par de multiíndices $\alpha, \beta$, la sucesión $(x^\alpha D^\beta \varphi_j)_j$ es de Cauchy en el espacio de Banach $C_b(\mathbb{R}^n)$ y converge unifor-

memente a una función continua $g_{\alpha,\beta}$.
Pongamos $\varphi := g_{0,0}$. Para $i \in \{1,\dots,n\}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, el Teorema B.6.5 proporciona

$$\varphi_j(x+te_i) - \varphi_j(x) = \int_0^t D_i\varphi_j(x+se_i)\,ds.$$

La convergencia uniforme permite pasar al límite dentro de la integral y obtener

$$\varphi(x+te_i) - \varphi(x) = \int_0^t g_{0,e_i}(x+se_i)\,ds.$$

Así, $D_i\varphi = g_{0,e_i}$. Repitiendo el argumento se concluye que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $D^\beta\varphi = g_{0,\beta}$ para todo $\beta$. Como la multiplicación por $x^\alpha$ conmuta con el límite uniforme, $x^\alpha D^\beta\varphi = g_{\alpha,\beta}$ y, por lo tanto, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, $p_{\alpha,\beta}(\varphi_j - \varphi) \to 0$ para todo $\alpha,\beta$, lo que prueba la convergencia en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

**Proposición 4.8.4.** (Operaciones continuas en $\mathcal{S}$) Sean $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Los mapeos

$$\varphi \longmapsto D^\alpha\varphi, \qquad \varphi \longmapsto x^\alpha\varphi, \qquad \varphi \longmapsto \varphi(\cdot - a), \qquad \varphi \longmapsto \varphi \circ A$$

son endomorfismos lineales continuos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La multiplicación $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es bilineal y continua.

*Demostración.* Las dos primeras afirmaciones se siguen directamente de la definición. Para las traslaciones usamos $\|x\| \le \|x-a\| + \|a\|$ y la fórmula binomial. Si $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, entonces

$$\|A^{-1}\|^{-1}\|x\| \le \|Ax\| \le \|A\|\|x\|, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

La regla de la cadena y estas desigualdades muestran que, para cada par de multiíndices $\alpha,\beta$, existe una constante $C_{\alpha,\beta,A} > 0$, dependiente sólo de $\alpha$, $\beta$, $A$ y de la norma euclidiana fijada, tal que

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi \circ A) \le C_{\alpha,\beta,A} \max_{\substack{|\delta|=|\alpha| \\ |\gamma|=|\beta|}} p_{\delta,\gamma}(\varphi).$$

En efecto, $\|x\|^{|\alpha|} \le \|A^{-1}\|^{|\alpha|}\|Ax\|^{|\alpha|}$, la potencia $\|Ax\|^{|\alpha|}$ se acota por una suma finita de monomios de grado $|\alpha|$, y cada derivada de $\varphi \circ A$ es una combinación lineal finita de derivadas de $\varphi$ de orden $|\beta|$, con coeficientes que dependen sólo de $A$. Finalmente, la regla de Leibniz da

$$x^\alpha D^\beta(\varphi\psi) = \sum_{\gamma \le \beta} \binom{\beta}{\gamma} (x^\alpha D^\gamma\varphi) D^{\beta-\gamma}\psi,$$

y cada sumando se controla mediante una seminorma de $\varphi$ y una seminorma de $\psi$. □

**Proposición 4.8.5.** (Densidad) El espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Además, para todo $1 \le p < \infty$, las inclusiones

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$$

tienen imagen densa y la inclusión $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ es continua.

*Demostración.* Tomemos $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $0 \le \eta \le 1$ y $\eta = 1$ en $\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,1)$, y definamos $\eta_R(x) := \eta(\frac{x}{R})$. Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la función $\eta_R\varphi$ pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. La regla de Leibniz muestra que $D^\beta((1-\eta_R)\varphi)$ es suma de términos de la forma $R^{-|\gamma|}(D^\gamma\eta)(\frac{x}{R})D^{\beta-\gamma}\varphi(x)$. Cuando $\gamma = 0$, el término se anula en $\|x\| \le R$ y su seminorma tiende a cero por el rápido decrecimiento de $\varphi$; cuando $|\gamma| > 0$, está sostenido en un anillo de radios comparables con $R$ y el mismo decrecimiento absorbe cualquier potencia de $R$. Por consiguiente, $\eta_R\varphi \to \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Si $m > \frac{n}{p}$, entonces

$$\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \le r_m(\varphi)^p \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^{-mp}\, dx,$$

por lo que la inclusión en $L^p(\mathbb{R}^n)$ es continua. La densidad resulta de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y de la Proposición B.7.18. □

## 4.9 Distribuciones temperadas

La topología de $\mathcal{S}$ permite imponer crecimiento controlado a una distribución. A diferencia de una distribución general, una distribución temperada puede transformarse por Fourier porque la transformada preserva la clase de Schwartz.

**Definición 4.9.1.** (Distribución temperada) Una *distribución temperada* es un funcional lineal continuo $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$. El dual continuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se denota por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y se dota, salvo indicación contraria, de la topología débil-$*$ $\sigma(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.

**Proposición 4.9.2.** (Criterio de continuidad) Un funcional lineal $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ pertenece a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si existen $N \in \mathbb{N}_0$ y $C > 0$ tales que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le C q_N(\varphi) \qquad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Demostración.* La suficiencia es inmediata. Supongamos que $T$ es continuo en el origen. Existe una vecindad básica

$$U = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid q_{N_1}(\varphi) < \varepsilon_1, \dots, q_{N_k}(\varphi) < \varepsilon_k\}$$

tal que $|T(\varphi)| < 1$ para $\varphi \in U$. Como las seminormas $q_N$ son crecientes, si $N := \max_j N_j$ y $\varepsilon := \min_j \varepsilon_j$, entonces $q_N(\varphi) < \varepsilon$ implica $\varphi \in U$. Para $q_N(\varphi) > 0$ aplicamos lo anterior a $\frac{\varepsilon\varphi}{2q_N(\varphi)}$ y obtenemos $|T(\varphi)| \le 2\varepsilon^{-1} q_N(\varphi)$. Si $q_N(\varphi) = 0$, entonces $\varphi = 0$. □

**Proposición 4.9.3.** (Inclusiones naturales) Para todo $1 \le p \le \infty$ existe un encaje lineal continuo e inyectivo

$$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \qquad f \longmapsto T_f, \qquad \langle T_f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

También toda función localmente integrable de crecimiento a lo más polinomial define una distribución temperada. Toda distribución con soporte compacto es temperada.

*Demostración.* Sea $p'$ el exponente conjugado. Por la desigualdad de Hölder de la Proposición B.7.9 y la

continuidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} q_N(\varphi)$$

para algún $N$. La inyectividad se sigue de la Proposición B.6.20.
Si $|f(x)| \le C(1+\|x\|)^m$ casi en todas partes, elegimos $N > m+n$ y estimamos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f\varphi| \le C r_N(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^{m-N}\, dx.$$

Para la última afirmación, sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto $K$. Elegimos $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ igual a uno en una vecindad de $K$ y definimos, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle := \langle T, \chi\varphi\rangle.$$

La definición no depende del corte: si $\chi_1$ y $\chi_2$ valen uno cerca de $K$, entonces $(\chi_1 - \chi_2)\varphi$ se anula en una vecindad de $\operatorname{supp}(T)$ y, por la definición del soporte de una distribución, $\langle T, (\chi_1-\chi_2)\varphi\rangle = 0$. Por la estimación local de orden finito de $T$ sobre $\operatorname{supp}(\chi)$, existen $C > 0$ y $N \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$|\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle| \le C \max_{|\alpha|\le N} \|D^\alpha(\chi\varphi)\|_{C^0(\operatorname{supp}(\chi))} \le C_\chi q_N(\varphi).$$

Así, $\widetilde{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y su restricción a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ coincide con $T$. □

**Ejemplo 4.9.4.** Todo polinomio define una distribución temperada. Más generalmente, si $\mu$ es una medida de Radon para la cual existen $C, m > 0$ con $|\mu|(B_{\text{euc}}(0,R)) \le C(1+R)^m$ para $R \ge 1$, entonces $\langle T_\mu, \varphi\rangle := \int \varphi\, d\mu$ define un elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Para verlo, se descompone $\mathbb{R}^n$ en la bola unitaria y los anillos $k \le \|x\| < k+1$; el crecimiento de $\mu$ queda absorbido por una seminorma $r_N(\varphi)$ con $N > m+1$.

**Definición 4.9.5.** (Derivación y multiplicación) Sean $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Definimos

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle, \qquad \langle x^\alpha T, \varphi\rangle := \langle T, x^\alpha\varphi\rangle.$$

Ambos funcionales pertenecen a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

La afirmación final se sigue de la continuidad de las operaciones de la Proposición 4.8.4. El mismo argumento permite multiplicar $T$ por cualquier función $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ cuyas derivadas tengan crecimiento a lo más polinomial: la regla de Leibniz muestra que $\varphi \mapsto a\varphi$ es continua en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

## 4.10 Convolución y regularización

La convolución conecta la regularización por molificadores con la multiplicación en frecuencia. Recordamos primero la desigualdad que garantiza su existencia en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$.

**Teorema 4.10.1.** (Desigualdad de Young para convoluciones) Sean $1 \le p, q, r \le \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g$ está definido casi en todas partes, pertenece a $L^r(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

En particular, $L^1(\mathbb{R}^n) * L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ continuamente.

*Demostración.* El caso $r = \infty$ es la Proposición B.7.9 aplicada a $y \mapsto f(x-y)g(y)$. El caso $p = 1$ se obtiene mediante el Teorema B.8.2 y la invariancia por traslaciones:

$$\|f * g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g(\cdot - y)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \, dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

El caso $q = 1$ resulta por conmutatividad. En los demás casos $1 < p, q \le r < \infty$; si $p = r$ o $q = r$, en la aplicación de Hölder que sigue se omite el factor cuyo exponente conjugado es infinito. En el caso restante escribimos

$$|f(x-y)g(y)| = \left(|f(x-y)|^p |g(y)|^q\right)^{\frac{1}{r}} |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(y)|^{1-\frac{q}{r}}.$$

La Proposición B.7.9 con exponentes $r$, $\frac{pr}{r-p}$ y $\frac{qr}{r-q}$, seguida del Teorema B.6.17 y del caso $L^1(\mathbb{R}^n) * L^1(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$, proporciona

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{r-p} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{r-q},$$

que es la desigualdad afirmada. □

**Proposición 4.10.2.** (Convolución en la clase de Schwartz) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y

$$D^\alpha(\varphi * \psi) = (D^\alpha \varphi) * \psi = \varphi * (D^\alpha \psi).$$

El mapeo $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ es bilineal y continuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

*Demostración.* La derivación bajo el signo integral está justificada por el rápido decrecimiento, que proporciona una mayorante integrable para los cocientes incrementales; se aplica el Teorema de convergencia dominada B.6.14. Para controlar la variable $x$ usamos $x^\alpha = (x - y + y)^\alpha$ y la fórmula multinomial. Cada término de $x^\alpha D^\beta(\varphi * \psi)$ es la convolución de una función $y^\gamma D^\delta \psi(y)$ con una función $(x-y)^{\alpha-\gamma} D^{\beta-\delta}\varphi(x-y)$. La desigualdad de Young $L^1(\mathbb{R}^n) * L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ del Teorema 4.10.1 controla ese término mediante seminormas de Schwartz. La misma estimación prueba la continuidad bilineal. □

Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ escribimos $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$.

**Definición 4.10.3.** (Convolución de una distribución temperada con una función de Schwartz) Sean $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Definimos

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

**Proposición 4.10.4.** (Regularización temperada) La función $T * \varphi$ es suave y

$$D^\alpha(T * \varphi) = T * (D^\alpha \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi.$$

Para cada $\alpha$ existen $C_\alpha > 0$ y $N_\alpha \in \mathbb{N}_0$ tales que $|D^\alpha(T * \varphi)(x)| \le C_\alpha(1+\|x\|)^{N_\alpha}$. Además, si $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ satisface $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$ y $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$, entonces $T * \rho_\varepsilon \to T$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.

*Demostración.* El cociente incremental de $x \mapsto \varphi(x - \cdot)$ converge en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a la derivada correspondiente; la continuidad de $T$ permite pasar al límite y prueba la suavidad. La identidad con $D^\alpha T$ se obtiene trasladando la derivada a la función de prueba.
Por la Proposición 4.9.2, $|\langle T, \psi\rangle| \le C q_N(\psi)$. La desigualdad $\|y\| \le \|x-y\| + \|x\|$ y la fórmula binomial muestran que $q_N(\varphi(x-\cdot)) \le C_\varphi(1+\|x\|)^N$, lo que da el crecimiento polinomial.
Finalmente, para $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, el Teorema de Fubini B.6.18 y la definición de convolución proporcionan

$$\langle T * \rho_\varepsilon, \psi\rangle = \langle T, \check{\rho}_\varepsilon * \psi\rangle.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} \check{\rho} = 1$, el cambio de variable $y = \varepsilon z$ da

$$(\check{\rho}_\varepsilon * \psi)(x) - \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\rho}(z)\big(\psi(x - \varepsilon z) - \psi(x)\big)\, dz.$$

El Teorema fundamental del cálculo para funciones con valores en un espacio de Banach B.6.5, aplicado después de derivar a lo largo del segmento correspondiente, y la desigualdad

$$1 + \|x\| \le (1 + \|x - \varepsilon z\|)(1 + \varepsilon\|z\|)$$

implican, para cada $N \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \varepsilon \le 1$,

$$q_N(\check{\rho}_\varepsilon * \psi - \psi) \le C_N \varepsilon\, q_{N+1}(\psi) \int_{\mathbb{R}^n} |\rho(z)|\,\|z\|(1+\|z\|)^N\, dz.$$

La integral es finita porque $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $\check{\rho}_\varepsilon * \psi \to \psi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y la continuidad de $T$ concluye la prueba. □

## 4.11 La transformada de Fourier

La transformada de Fourier convierte derivadas en multiplicaciones y convoluciones en productos. Esta correspondencia permite medir regularidad mediante el comportamiento de una función en frecuencia. Elegimos la normalización unitaria porque hace que la transformada sea una isometría de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sin constantes adicionales. Para las propiedades clásicas, la extensión a distribuciones y la compatibilidad entre las distintas definiciones seguimos, con nuestra normalización en $\mathbb{R}^n$, el desarrollo de [29, Secciones 10.3–10.5]; las pruebas se incluyen para fijar todas las constantes y no confundir la fórmula integral con las extensiones por densidad o dualidad.

**Definición 4.11.1.** (Transformada de Fourier en $L^1$) Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\widehat{f}(\xi) := \mathcal{F}f(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Para $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformada inversa formal se define por

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\, d\xi.$$

**Proposición 4.11.2.** (Propiedades en $L^1$) El mapeo $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_b(\mathbb{R}^n)$ es lineal y

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Además, $\widehat{f}$ es uniformemente continua.

*Demostración.* La estimación se obtiene tomando valor absoluto dentro de la integral. Si $h \to 0$, entonces

$$|\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix\cdot h} - 1||f(x)|\, dx.$$

El lado derecho no depende de $\xi$, converge a cero puntualmente en la variable $x$ y está dominado por $2(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. El Teorema B.6.14 prueba la continuidad uniforme. □

**Proposición 4.11.3.** (Cálculo de Fourier en $\mathcal{S}$) Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, entonces

$$\mathcal{F}(D^\alpha \varphi)(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \qquad \mathcal{F}(x^\alpha \varphi)(\xi) = i^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi).$$

En particular, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son operadores lineales continuos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.

*Demostración.* La primera identidad se obtiene integrando por partes; los términos de frontera desaparecen por el rápido decrecimiento. La segunda se obtiene derivando bajo el signo integral. Combinando ambas identidades con

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C_N \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^N |h(x)|, \qquad N > n,$$

Leibniz aplicado a $D^\alpha(x^\beta \varphi)$ y la cota anterior con el peso $(1 + \|x\|)^{n+1}$ dan, de manera explícita,

$$p_{\alpha,\beta}(\widehat{\varphi}) \le C_{\alpha,\beta} q_{n+1+|\alpha|+|\beta|}(\varphi).$$

En efecto, cada sumando contiene una derivada de orden a lo sumo $|\alpha|$ y un monomio cuyo grado, después de incorporar el peso, no excede $|\beta| + n + 1$; el factor $(1 + \|x\|)^{-n-1}$ es integrable en $\mathbb{R}^n$. Esto prueba que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y la continuidad. El mismo cálculo, cambiando el signo de la fase, prueba la afirmación para $\mathcal{F}^{-1}$. □

**Lema 4.11.4.** (Transformada de la gaussiana) Para $a > 0$, la función $g_a(x) := e^{-\frac{a\|x\|^2}{2}}$ satisface

$$\widehat{g_a}(\xi) = a^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2a}}.$$

En particular, $g_1$ es fija por la transformada de Fourier.

*Demostración.* Por el Teorema de Fubini B.6.18 basta tratar $n = 1$. Sea $G(\xi) := \widehat{g_a}(\xi)$. La Proposición 4.11.3 y la identidad $g_a' = -axg_a$ dan $i\xi G = -aiG'$, es decir, $G'(\xi) = -\dfrac{\xi G(\xi)}{a}$. Por lo tanto, $G(\xi) = G(0)e^{-\frac{\xi^2}{2a}}$. Para calcular la constante ponemos $I_a := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}}\,dx$. El Teorema de Tonelli B.6.17 y el cambio a coordenadas polares, justificado por el Teorema de cambio de variable B.6.15, dan

$$I_a^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{a\|x\|^2}{2}}\,dx = 2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{ar^2}{2}}\,r\,dr = \frac{2\pi}{a}.$$

Así, $G(0) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} I_a = a^{-\frac{1}{2}}$. El producto de las fórmulas unidimensionales concluye la prueba. □

**Lema 4.11.5.** (Aproximación gaussiana de la identidad) Para $\varepsilon > 0$, sea

$$k_\varepsilon(x) := (2\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}}.$$

Entonces $k_\varepsilon \geq 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon = 1$ y, para todo $\delta > 0$,

$$\int_{\{\|x\|\geq\delta\}} k_\varepsilon(x)\,dx \longrightarrow 0.$$

Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $k_\varepsilon * f \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$; la convergencia es uniforme cuando $f$ es acotada y uniformemente continua.

*Demostración.* La masa se calcula con el Lema 4.11.4. El cambio $x = \sqrt{\varepsilon}z$ y la integrabilidad de la gaussiana prueban la concentración. Además, el Teorema B.8.2 da

$$\|k_\varepsilon * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(y)\|\tau_y f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dy.$$

Se divide la integral en $\{\|y\| < \delta\}$ y su complemento; en la primera parte se usa la Proposición B.8.17, y en la segunda la cota $2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ y la concentración. El mismo argumento con la norma uniforme prueba la última afirmación. □

**Teorema 4.11.6.** (Inversión de Fourier en la clase de Schwartz) Para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se cumple

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi).$$

Por consiguiente, $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo topológico cuya inversa es $\mathcal{F}^{-1}$.

*Demostración.* Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. El Teorema de Fubini B.6.18 y el Lema 4.11.4 dan

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} e^{-\frac{\varepsilon\|\xi\|^2}{2}} \widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) k_\varepsilon(x-y)\,dy,$$

donde $k_\varepsilon$ es la función del Lema 4.11.5. Dicho lema muestra que el lado derecho converge a $\varphi(x)$. En el lado izquierdo, $e^{-\frac{\varepsilon\|\xi\|^2}{2}} \to 1$ y el integrando está dominado por $|\widehat{\varphi}| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. El Teorema B.6.14 produce $\mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$. La segunda identidad se obtiene cambiando el signo de la fase. □

**Corolario 4.11.7.** (Inversión en $L^1$) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f$ coincide casi en todas partes con una función continua que se anula en el infinito y

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. En particular, la transformada de Fourier es inyectiva en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

*Demostración.* Sea $k_\varepsilon$ la gaussiana de la prueba anterior. Por el Teorema de Fubini B.6.18,

$$(f * k_\varepsilon)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} e^{-\frac{\varepsilon\|\xi\|^2}{2}} \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

El lado derecho converge uniformemente a $\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}$ por el Teorema B.6.14. El lado izquierdo converge a $f$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ por el Lema 4.11.5. Una subsucesión converge puntualmente casi en todas partes, de modo que $f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}$ casi en todas partes. Pongamos $h := \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}$. Por la Proposición 4.11.2, aplicada con el signo opuesto en la fase, $h$ es uniformemente continua. Además, $h = f$ casi en todas partes y $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, de modo que $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Estas dos propiedades implican que $h$ se anula en el infinito. En efecto, de lo contrario existirían $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(x_j)$ con $\|x_j\| \to \infty$ y $|h(x_j)| \geq \varepsilon$. La continuidad uniforme proporciona un radio $r > 0$, independiente de $j$, tal que $|h(x)| \geq \varepsilon/2$ si $\|x - x_j\| < r$. Pasando a una subsucesión, podemos suponer que las bolas $B(x_j, r)$ son ajenas dos a dos: después de elegir finitos centros, se toma el siguiente a distancia mayor que $2r$ de todos ellos. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\, dx \geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B(x_j,r)} |h(x)|\, dx \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} \lambda_n(B(0,r)) = \infty,$$

lo cual contradice la integrabilidad de $h$. □

**Teorema 4.11.8.** (Lema de Riemann–Lebesgue) La transformada de Fourier induce un operador continuo

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n).$$

En particular, $\widehat{f}(\xi) \to 0$ cuando $\|\xi\| \to \infty$.

*Demostración.* Por la Proposición 4.8.5, existe $(\varphi_j) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi_j \to f$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$. La Proposición 4.11.2 implica que $\widehat{\varphi}_j \to \widehat{f}$ uniformemente. Cada $\widehat{\varphi}_j$ pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$, y $C_0(\mathbb{R}^n)$ es cerrado en la norma uniforme. □

**Proposición 4.11.9.** (Convolución, producto y simetrías) Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}\,\widehat{g}, \qquad \mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Si $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$ y $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, entonces

$$\mathcal{F}(f(\cdot - a))(\xi) = e^{-ia\cdot\xi} \widehat{f}(\xi), \qquad \mathcal{F}(e^{ia\cdot(\cdot)} f)(\xi) = \widehat{f}(\xi - a),$$

y

$$\mathcal{F}(f\circ A)(\xi)=|\det A|^{-1}\widehat{f}(A^{-T}\xi).$$

*Demostración.* Como $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la función $(x,y)\mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable en $\mathbb{R}^{2n}$ y el Teorema de Fubini B.6.18 es aplicable. Con $z=x-y$,

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}f(y)g(x-y)\,dy\,dx$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-iy\cdot\xi}f(y)\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-iz\cdot\xi}g(z)\,dz\right)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

Aplicando esta identidad a $\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}$ y $\mathcal{F}^{-1}\widehat{g}$, y usando el Teorema 4.11.6, se obtiene $\mathcal{F}(fg)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\widehat{f}*\widehat{g}$.
Para la traslación se sustituye $y=x-a$; para la modulación se reúne la fase como $e^{-ix\cdot(\xi-a)}$. Finalmente, con $y=Ax$,

$$\mathcal{F}(f\circ A)(\xi)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\det A|^{-1}\int e^{-iy\cdot A^{-T}\xi}f(y)\,dy,$$

que es la última fórmula. Cada cambio de orden o de variable está justificado por la integrabilidad absoluta de las funciones de Schwartz. □

### 4.11.1 La transformada en $L^2$ y en la escala $L^p$

La definición inicial de Fourier sobre funciones integrables no basta para los argumentos energéticos. El teorema de Plancherel extiende la transformada a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y fija el punto de partida para estudiar qué estimaciones sobreviven fuera del exponente hilbertiano.

**Teorema 4.11.10.** (Parseval y Plancherel) Para $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{g(x)}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi.$$

En particular, $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. La transformada de Fourier se extiende de manera única a un operador unitario $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, cuya inversa es la extensión de $\mathcal{F}^{-1}$.

*Demostración.* Como $f,h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$, la integral doble correspondiente es absolutamente convergente. El Teorema de Fubini B.6.18 da la identidad bilineal

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)h(\xi)\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\widehat{h}(x)\,dx$$

en la que ambos emparejamientos son bilineales. Tomamos $h=\overline{\widehat{g}}$. Por inversión,

$$\widehat{h}(x)=\mathcal{F}(\overline{\widehat{g}})(x)=\overline{\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g})(x)}=\overline{g(x)}.$$

Sustituir esta igualdad prueba Parseval. Con $g=f$ obtenemos $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.
Sea ahora $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ y elijamos $f_m\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $f_m\to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. La isometría muestra que $(\widehat{f_m})$ es de

Cauchy; definimos $\mathcal{F}f := \lim_{m\to\infty} \widehat{f_m}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si $(\widetilde{f_m})$ es otra aproximación, entonces

$$\|\widehat{f_m} - \widehat{\widetilde{f_m}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_m - \widetilde{f_m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0,$$

de modo que la definición es independiente de la sucesión y conserva la norma. El mismo procedimiento extiende $\mathcal{F}^{-1}$; las identidades de inversión en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y el paso al límite prueban que ambos operadores extendidos son inversos. En particular, $\mathcal{F}$ es unitario y suprayectivo. Esto también demuestra la identidad de Parseval para todo par de elementos de $L^2(\mathbb{R}^n)$ por aproximación. □

Cuando $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ la expresión integral que define $\widehat{f}$ puede no converger. La transformada se entiende entonces como el límite en $L^2(\mathbb{R}^n)$ construido en la prueba. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, tomamos truncaciones y regularizaciones $f_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que convergen simultáneamente en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sus transformadas convergen uniformemente a la transformada integral por la Proposición 4.11.2, y convergen en $L^2(\mathbb{R}^n)$ a la transformada de Plancherel. Una subsucesión del segundo límite converge casi en todas partes; por unicidad del límite puntual, ambas transformadas coinciden casi en todas partes.

**Proposición 4.11.11.** (Funciones $L^p$ como distribuciones temperadas) Para todo $1 \le p \le \infty$, el mapeo

$$L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \qquad f \longmapsto T_f, \qquad \langle T_f, \varphi\rangle := \int f(x)\varphi(x)\,dx,$$

es lineal, continua e inyectiva. Por lo tanto, $\widehat{f} := \widehat{T_f}$ siempre está definido como distribución temperada. Para $p = 2$ coincide con la transformada de Plancherel, y para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ coincide con la fórmula integral.

La compatibilidad con distribuciones regulares se recoge en [29, Sección 10.5].

*Demostración.* Si $p < \infty$, la desigualdad de Hölder de la Proposición B.7.9 da

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Eligiendo $N > \frac{n}{p'}$ se tiene

$$\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le \|(1+\|x\|)^{-N}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^N|\varphi(x)|.$$

Para $p = \infty$ se usa la misma estimación con $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ y cualquier $N > n$. Esto prueba la continuidad en la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y, por lo tanto, $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si $T_f = 0$, entonces la integral de $f$ contra toda función de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es cero; la Proposición B.6.20 implica $f = 0$ casi en todas partes, de donde la inyectividad.
La compatibilidad con Plancherel se verifica primero en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y se extiende a $L^2(\mathbb{R}^n)$ por densidad y continuidad. Para la definición integral en $L^1(\mathbb{R}^n)$, la identidad se obtiene directamente al emparejar con una función de Schwartz y aplicar el Teorema de Fubini B.6.18. □

### 4.11.2 Fourier en distribuciones temperadas

Las soluciones débiles y los símbolos de crecimiento polinómico obligan a abandonar el marco de las funciones. Como la transformada preserva el espacio de Schwartz, la dualidad proporciona una extensión canónica a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

**Definición 4.11.12.** (Transformada de una distribución temperada) Para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definimos $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{F}^{-1}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ por

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle, \qquad \langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle.$$

La definición usa la transpuesta topológica de la transformada en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. No se introduce conjugación porque las distribuciones se consideran funcionales lineales.

**Teorema 4.11.13.** (Fourier en $\mathcal{S}'$) La transformada de Fourier es un isomorfismo lineal y débil-$*$ continuo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo, con inversa $\mathcal{F}^{-1}$. Para todo $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y todo multiíndice $\alpha$,

$$\mathcal{F}(D^\alpha T) = (i\xi)^\alpha \widehat{T}, \qquad \mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{T}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\mathcal{F}(T * \varphi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{T}\, \widehat{\varphi}.$$

*Demostración.* La continuidad y la fórmula de inversión se obtienen por transposición del Teorema 4.11.6. Para la derivada,

$$\langle \mathcal{F}(D^\alpha T), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, \mathcal{F}((i\,\cdot)^\alpha \varphi) \rangle,$$

que es la acción de $(i\xi)^\alpha \widehat{T}$. La identidad con $x^\alpha T$ es análoga. La fórmula de convolución se verifica primero emparejando ambos lados con una función de Schwartz y aplicando el Teorema de Fubini B.6.18; la continuidad permite concluir para todo $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

## 4.12 Descomposición diádica de Littlewood–Paley

La transformada de Fourier permite separar una distribución en bandas de frecuencia. En lugar de estudiar simultáneamente todo el espectro, aislaremos primero las frecuencias bajas y después anillos cuya escala característica es $2^j$, con $j \in \mathbb{N}$. Esta descomposición inhomogénea conserva la información de la distribución completa y permitirá medir la regularidad observando cómo decrece cada bloque cuando la frecuencia aumenta. Será la base común para los espacios de Bessel, Besov y Triebel–Lizorkin.

**Proposición 4.12.1.** (Resolución diádica de la unidad) Existe una función radial $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \le \chi \le 1$, $\chi = 1$ en $\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,1)$ y $\operatorname{supp}(\chi) \subseteq B_{\mathrm{euc}}(0,2)$. Si

$$\varphi_0(\xi) := \chi(\xi), \qquad \varphi_j(\xi) := \chi(2^{-j}\xi) - \chi(2^{-j+1}\xi), \quad j \in \mathbb{N},$$

entonces $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_j$ está sostenida en un anillo $c2^j \le \|\xi\| \le C2^j$ para $j \in \mathbb{N}$, y

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \varphi_j(\xi) = 1, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En cada punto sólo un número uniforme de anillos ampliados se intersecta.

*Demostración.* La existencia de $\chi$ se obtiene a partir de una función de corte radial. La suma parcial es

telescópica:

$$\sum_{j=0}^{N} \varphi_j(\xi) = \chi(2^{-N}\xi),$$

y converge a uno. Las afirmaciones sobre los soportes se deducen de los lugares donde $\chi(2^{-j}\xi)$ y $\chi(2^{-j+1}\xi)$ pueden diferir. □

**Definición 4.12.2.** (Bloques diádicos) Fijada una resolución como la anterior, para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\Delta_j T := \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \widehat{T}), \qquad j \in \mathbb{N}_0.$$

Las distribuciones $\Delta_j T$ se llaman *bloques diádicos* de $T$.

**Teorema 4.12.3.** (Descomposición de Littlewood–Paley) Para todo $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$T = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \Delta_j T$$

con convergencia en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la convergencia tiene lugar en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

*Demostración.* La suma parcial es $\mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-N}\cdot)\widehat{T})$. Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ basta probar que $\chi(2^{-N}\cdot)\varphi \to \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La diferencia se anula en una bola cuyo radio tiende a infinito; al derivarla aparecen términos $2^{-N|\alpha|}(D^\alpha\chi)(2^{-N}\xi)D^\beta\varphi(\xi)$. El rápido decrecimiento de $\varphi$ hace que cada seminorma tienda a cero. La continuidad de $T$ prueba la convergencia en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, el mismo cálculo se aplica directamente a $\widehat{T}$. □

**Teorema 4.12.4.** (Desigualdades de Bernstein) Sean $1 \le p \le q \le \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ y $R > 0$.

(a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\operatorname{supp}(\widehat{f}) \subseteq \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,R)$, entonces

$$\|D^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C R^{|\alpha| + n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad |\alpha| \le m.$$

(b) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\operatorname{supp}(\widehat{f}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid cR \le \|\xi\| \le CR\}$, entonces

$$C_1 R^m \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_2 R^m \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Las constantes dependen únicamente de los parámetros indicados y de $c, C$, no de $R$ ni de $f$.

*Demostración.* Por escalamiento basta considerar $R = 1$. Elegimos $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ igual a uno en una vecindad del soporte de $\widehat{f}$. Entonces $f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\mathcal{F}^{-1}\eta) * f$ y

$$D^\alpha f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(D^\alpha \mathcal{F}^{-1}\eta) * f.$$

El Teorema 4.10.1, con $1 + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r}$, prueba la primera estimación. Para la cota inferior de la segunda, elegimos $\eta$ sostenida fuera del origen e igual a uno en el anillo. Si $m = 0$, la afirmación es inmediata. Si

$m \geq 1$, ponemos

$$D_m(\xi) := \sum_{\ell=1}^{n} \xi_\ell^{2m}, \qquad m_{me_\ell}(\xi) := i^{-m}\eta(\xi)\frac{\xi_\ell^m}{D_m(\xi)},$$

donde $(e_\ell)_{\ell=1}^n$ es la base canónica. El denominador es positivo fuera del origen; por lo tanto, $m_{me_\ell} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y

$$\eta(\xi) = \sum_{\ell=1}^{n} m_{me_\ell}(\xi)(i\xi_\ell)^m.$$

Como $\eta\widehat{f} = \widehat{f}$, al invertir Fourier obtenemos

$$f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{n} (\mathcal{F}^{-1} m_{me_\ell}) * D_\ell^m f.$$

Cada $\mathcal{F}^{-1} m_{me_\ell}$ pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$; el Teorema 4.10.1 da entonces

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{\ell=1}^{n} \|D_\ell^m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

La cota superior es la primera parte. □

La interacción finita de los anillos diádicos será el mecanismo que permita comparar, más adelante, las normas construidas a partir de distintas resoluciones.

# 5

# Espacios de interpolación

Entre dos espacios que miden niveles distintos de tamaño o regularidad aparecen con frecuencia espacios intermedios. La interpolación hace precisa esta idea y permite deducir la continuidad de un operador en niveles intermedios a partir de sus cotas en dos extremos. También permite obtener resultados de compacidad bajo hipótesis que precisaremos. En este libro la teoría tendrá tres funciones: obtener desigualdades fraccionarias a partir de resultados enteros, distinguir las escalas real y compleja de Sobolev, y transportar definiciones euclidianas a cartas y trivializaciones. Usaremos los resultados de análisis funcional, integración y desigualdades de Hardy del apéndice de análisis, así como la transformada de Fourier del Capítulo 4. Los resultados de este capítulo se aplicarán a las escalas del Capítulo 6 y, posteriormente, a espacios de funciones y secciones en variedades.

Desarrollaremos los métodos real de Lions–Peetre y complejo de Calderón. Como referencias generales usaremos [97, Capítulos 16–17] y [20]; las aplicaciones a espacios de funciones se comparan con [146, §1.6] y [130, §2.3].

**Interpolar en lugar de volver a demostrar**

La teoría de interpolación maduró al reconocer que muchas estimaciones extremas contienen información sobre todos los niveles intermedios. Los métodos de Lions–Peetre cuantifican la descomposición de un elemento entre dos espacios, mientras que el método complejo de Calderón utiliza familias holomorfas. Una estimación de un operador en dos espacios puede así dar estimaciones en toda una familia de espacios intermedios. En el estudio de la regularidad, esto permite pasar de órdenes enteros a órdenes fraccionarios.

## 5.1 Pares compatibles de espacios de Banach

La interpolación compara dos niveles de regularidad dentro de un mismo espacio ambiente. La compatibilidad garantiza que la suma y la intersección de los espacios extremos estén bien definidas y sean adecuadas para medir descomposiciones.

**Definición 5.1.1.** (Par compatible) Un par $(X_0, X_1)$ de espacios normados se llama *compatible* si existen encajes lineales continuos de $X_0$ y $X_1$ en un mismo espacio vectorial topológico de Hausdorff $X$. Identificaremos ambos espacios con sus imágenes en $X$.

El espacio ambiente sólo sirve para dar sentido a la igualdad entre elementos de $X_0$ y $X_1$. Definimos

$$X_0 \cap X_1 \quad \text{con} \quad \|x\|_{X_0\cap X_1} := \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\},$$

y

$$X_0 + X_1 := \{x_0 + x_1 \mid x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1\}, \qquad \|x\|_{X_0+X_1} := \inf_{\substack{x_0\in X_0,\ x_1\in X_1\\ x=x_0+x_1}} \big(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\big).$$

**Proposición 5.1.2.** Si $(X_0, X_1)$ es un par compatible de espacios de Banach, entonces $X_0 \cap X_1$ y $X_0 + X_1$ son espacios de Banach. Las inclusiones $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X_j \hookrightarrow X_0 + X_1$, $j = 0, 1$, son continuas.

*Demostración.* Una sucesión de Cauchy en $X_0 \cap X_1$ converge en cada $X_j$. Los dos límites coinciden en $X$ porque los encajes son continuos y $X$ es de Hausdorff; el límite común pertenece a la intersección.
Para la suma, consideremos $X_0 \times X_1$ con la norma $\|(x_0, x_1)\| := \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}$ y el subespacio

$$N := \{(x, -x) \mid x \in X_0 \cap X_1\}.$$

El subespacio $N$ es cerrado: si $(x_k, -x_k) \to (a, b)$ en $X_0 \times X_1$, entonces $x_k \to a$ y $x_k \to -b$ en $X$, de donde $a = -b \in X_0 \cap X_1$. El mapeo $(x_0, x_1) \mapsto x_0 + x_1$ induce una isometría del cociente $(X_0 \times X_1)/N$ sobre $X_0 + X_1$. La completitud de los cocientes de Banach por subespacios cerrados concluye la prueba. □

Salvo indicación contraria, los pares compatibles que usaremos a partir de ahora serán de espacios de Banach.

## 5.2 El método real: el funcional $K$

Para comparar $x$ con los dos espacios extremos lo descompondremos como $x = x_0 + x_1$. Una misma descomposición puede ser adecuada a una escala y poco eficiente a otra. El funcional siguiente elige el menor coste posible cuando la norma de la segunda componente se multiplica por $t$.

**Definición 5.2.1.** (Funcional $K$) Sea $(X_0, X_1)$ un par compatible. Para $x \in X_0 + X_1$ y $t > 0$ definimos

$$K(t, x; X_0, X_1) := \inf_{\substack{x_0\in X_0,\ x_1\in X_1\\ x=x_0+x_1}} \big(\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}\big).$$

Cuando el par sea claro escribiremos simplemente $K(t, x)$.

Para cada $t > 0$, $K(t, \cdot)$ es una norma en $X_0 + X_1$ y satisface

$$\min\{1, t\}\,\|x\|_{X_0+X_1} \le K(t, x) \le \max\{1, t\}\,\|x\|_{X_0+X_1}, \qquad x \in X_0 + X_1.$$

El parámetro $t$ pondera la componente $x_1$: cuando $t$ es pequeño, su norma contribuye menos al coste. Si $X_1$ representa mayor regularidad que $X_0$, el funcional cuantifica cuánto cuesta separar de $x$ una parte más regular.

**Proposición 5.2.2.** (Propiedades elementales del funcional $K$) Sean $x, y \in X_0 + X_1$ y $s, t > 0$. Entonces:

(a) $K(t, x + y) \le K(t, x) + K(t, y)$ y $K(t, \lambda x) = |\lambda| K(t, x)$;

(b) $t \mapsto K(t, x)$ es creciente y cóncava;

(c) $t \mapsto t^{-1}K(t,x)$ es decreciente;

(d) $K(t,x;X_0,X_1) = tK(t^{-1},x;X_1,X_0)$;

(e) $K(t,x) \le \min\{\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}\}$ cuando $x \in X_0 \cap X_1$;

(f) $\min\{1,t\}\|x\|_{X_0+X_1} \le K(t,x) \le \max\{1,t\}\|x\|_{X_0+X_1}$.

*Demostración.* Las propiedades algebraicas se obtienen sumando descomposiciones y pasando al ínfimo. Cada función $t \mapsto \|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}$ es afín y creciente; el ínfimo de esta familia es creciente y cóncavo. Además, $t^{-1}K(t,x)$ es el ínfimo de las funciones decrecientes $t \mapsto t^{-1}\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}$, tomadas sobre las descomposiciones de $x$; por ello es decreciente. La simetría se obtiene intercambiando $x_0$ y $x_1$. Las dos últimas estimaciones resultan de las descomposiciones $x = x+0$, $x = 0+x$ y de comparar los coeficientes $1, t$ con su mínimo y su máximo. □

La regularidad intermedia exige un control simultáneo en todas las escalas $t \in (0,\infty)$. El factor $t^{-\theta}$ fija el nivel intermedio; el exponente $q$ determina cómo se reúnen sus costes. La medida $dt/t$ asigna el mismo peso a intervalos que se obtienen uno de otro mediante una dilatación.

**Definición 5.2.3.** (Espacio de interpolación real) Sean $0 < \theta < 1$ y $1 \le q \le \infty$. Definimos

$$(X_0,X_1)_{\theta,q} := \{x \in X_0 + X_1 \mid \|x\|_{\theta,q;K} < \infty\},$$

donde, si $q < \infty$,

$$\|x\|_{\theta,q;K} := \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}K(t,x)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

y $\|x\|_{\theta,\infty;K} := \sup_{t\in(0,\infty)} t^{-\theta}K(t,x)$.

**Teorema 5.2.4.** (Propiedades básicas del método $K$) Si $(X_0,X_1)$ es un par compatible de espacios de Banach, entonces $(X_0,X_1)_{\theta,q}$ es un espacio de Banach y

$$X_0 \cap X_1 \hookrightarrow (X_0,X_1)_{\theta,q} \hookrightarrow X_0 + X_1$$

continuamente. Si $X_1 \hookrightarrow X_0$, sea $C_E$ la norma del encaje, sea $T_E := \max\{1, C_E\}$ y pongamos, para $q < \infty$,

$$N_{\theta,q}(x) := \|x\|_{X_0} + \left(\int_0^1 (t^{-\theta}K(t,x))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

y, para $q = \infty$,

$$N_{\theta,\infty}(x) := \|x\|_{X_0} + \sup_{t\in(0,1]} t^{-\theta}K(t,x).$$

Entonces, si $q < \infty$,

$$\frac{\|x\|_{\theta,q;K}}{\max\{1,(\theta q)^{-\frac{1}{q}}\}} \le N_{\theta,q}(x) \le \left(1 + (\theta q)^{\frac{1}{q}} T_E^\theta\right)\|x\|_{\theta,q;K},$$

mientras que

$$\|x\|_{\theta,\infty;K} \le N_{\theta,\infty}(x) \le (1 + T_E^{\theta})\|x\|_{\theta,\infty;K}.$$

*Demostración.* Si $x \in X_0 \cap X_1$, la Proposición 5.2.2 da $K(t,x) \le \min\{1,t\}\|x\|_{X_0\cap X_1}$. Como

$$\int_0^1 t^{(1-\theta)q}\,\frac{dt}{t} + \int_1^\infty t^{-\theta q}\,\frac{dt}{t} < \infty,$$

se obtiene el primer encaje cuando $q < \infty$. Para $q = \infty$, se usa directamente $\sup_{t\in(0,\infty)} t^{-\theta}\min\{1,t\} = 1$. Para el segundo, la Proposición 5.2.2 implica $\|x\|_{X_0+X_1} \le K(t,x)$ para $1 \le t \le 2$. Por lo tanto, si $q < \infty$,

$$\|x\|_{X_0+X_1} \le (\log 2)^{-\frac{1}{q}}\, 2^{\theta}\|x\|_{\theta,q;K};$$

si $q = \infty$, basta evaluar en $t = 1$.
Sea ahora $(x_j)$ de Cauchy en $(X_0,X_1)_{\theta,q}$. El segundo encaje implica que $x_j \to x$ en $X_0 + X_1$ para algún $x$. Para $q < \infty$, la continuidad de la norma $K(t,\cdot)$ en $X_0 + X_1$ y el Lema de Fatou B.6.12 dan

$$\|x_j - x\|_{\theta,q;K}^q \le \liminf_{k\to\infty} \|x_j - x_k\|_{\theta,q;K}^q.$$

El caso $q = \infty$ se obtiene tomando el supremo después de pasar al límite para cada $t$. Así, $x_j \to x$ en el espacio de interpolación.
Si $X_1 \hookrightarrow X_0$, sea $C_E$ la norma del encaje y sea $T_E := \max\{1, C_E\}$. Entonces $X_0 + X_1 = X_0$ y, para toda descomposición $x = x_0 + x_1$,

$$\|x\|_{X_0} \le \|x_0\|_{X_0} + C_E\|x_1\|_{X_1}.$$

En consecuencia, si $t \ge T_E$, se tiene $K(t,x) \ge \|x\|_{X_0}$; la descomposición $x = x + 0$ da la desigualdad opuesta. De aquí

$$\int_{T_E}^\infty \left(t^{-\theta}K(t,x)\right)^q \frac{dt}{t} = \frac{T_E^{-\theta q}}{\theta q}\|x\|_{X_0}^q.$$

Además, $K(t,x) \le \|x\|_{X_0}$ para todo $t > 0$. Si $I_0 := \int_0^1 (t^{-\theta}K(t,x))^q\, dt/t$, se sigue que

$$\|x\|_{\theta,q;K} \le \left(I_0 + (\theta q)^{-1}\|x\|_{X_0}^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \max\{1, (\theta q)^{-\frac{1}{q}}\} N_{\theta,q}(x).$$

La identidad de la cola desde $T_E$ da, en sentido inverso, $\|x\|_{X_0} \le (\theta q)^{\frac{1}{q}} T_E^{\theta}\|x\|_{\theta,q;K}$, mientras que $I_0^{\frac{1}{q}} \le \|x\|_{\theta,q;K}$. Esto prueba las dos cotas para $q < \infty$. Para $q = \infty$, la desigualdad $K(t,x) \le \|x\|_{X_0}$ muestra que $\|x\|_{\theta,\infty;K} \le N_{\theta,\infty}(x)$, y la igualdad $K(T_E,x) = \|x\|_{X_0}$ da $\|x\|_{X_0} \le T_E^{\theta}\|x\|_{\theta,\infty;K}$; de aquí resulta la cota restante. □

**Lema 5.2.5.** (Discretización diádica) Para $0 < \theta < 1$ y $1 \le q \le \infty$, existen constantes $c_{\theta,q}, C_{\theta,q} > 0$ tales que

$$c_{\theta,q}\left\|\left(2^{-k\theta}K(2^k,x)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \le \|x\|_{\theta,q;K} \le C_{\theta,q}\left\|\left(2^{-k\theta}K(2^k,x)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}.$$

Las constantes dependen únicamente de $\theta$ y $q$.

*Demostración.* Si $2^k \le t \le 2^{k+1}$, la monotonía de $K$ y de $\frac{K(t,x)}{t}$ da

$$2^{-\theta}2^{-k\theta}K(2^k,x) \le t^{-\theta}K(t,x) \le 2^{1-\theta}2^{-k\theta}K(2^k,x).$$

Integramos sobre cada intervalo $[2^k, 2^{k+1}]$ respecto de $dt/t$ y sumamos. El argumento con supremos cubre $q = \infty$. □

**Corolario 5.2.6.** (Monotonía en el segundo índice) Si $1 \le q_0 \le q_1 \le \infty$, entonces

$$(X_0, X_1)_{\theta,q_0} \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,q_1}.$$

Además, $(X_0, X_1)_{\theta,q} = (X_1, X_0)_{1-\theta,q}$ y, para todo $x$,

$$\|x\|_{\theta,q;K,(X_0,X_1)} = \|x\|_{1-\theta,q;K,(X_1,X_0)}.$$

*Demostración.* La primera afirmación se sigue del Lema 5.2.5 y de $\ell^{q_0} \hookrightarrow \ell^{q_1}$. Para la segunda usamos $K(t,x;X_0,X_1) = tK(t^{-1},x;X_1,X_0)$ y el cambio de variable $s = t^{-1}$. □

**Proposición 5.2.7.** (Desigualdad multiplicativa) Existe $C_{\theta,q} > 0$ tal que, para todo $x \in X_0 \cap X_1$,

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}} \le C_{\theta,q}\|x\|_{X_0}^{1-\theta}\|x\|_{X_1}^{\theta}.$$

*Demostración.* Si $x = 0$ la afirmación es inmediata. En otro caso, pongamos $a := \|x\|_{X_0} > 0$, $b := \|x\|_{X_1} > 0$ y $t_0 := a/b$. Si $q < \infty$, la Proposición 5.2.2 da

$$\begin{aligned}\|x\|_{\theta,q;K}^q &\le b^q \int_0^{t_0} t^{(1-\theta)q}\,\frac{dt}{t} + a^q \int_{t_0}^{\infty} t^{-\theta q}\,\frac{dt}{t} \\ &= \left(\frac{1}{(1-\theta)q} + \frac{1}{\theta q}\right) a^{(1-\theta)q} b^{\theta q}.\end{aligned}$$

Para $q = \infty$, la función $t^{-\theta}\min\{a, tb\}$ alcanza su máximo en $t = t_0$, donde vale $a^{1-\theta}b^{\theta}$. □

## 5.3 Interpolación de operadores

El valor analítico del método $K$ consiste en transferir cotas conocidas en los extremos a los espacios intermedios. El resultado siguiente precisa esa transferencia y conserva el control de la norma del operador.

**Teorema 5.3.1.** (Teorema de interpolación del método $K$) Sean $(X_0, X_1)$ y $(Y_0, Y_1)$ pares compatibles de espacios de Banach. Sea $T : X_0 + X_1 \longrightarrow Y_0 + Y_1$ lineal y supongamos que sus restricciones $T : X_j \longrightarrow Y_j$ son continuas, con normas $M_j$, $j = 0, 1$. Entonces

$$T : (X_0, X_1)_{\theta,q} \longrightarrow (Y_0, Y_1)_{\theta,q}$$

es continuo y

$$\|T\| \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

*Demostración.* Si $x = x_0 + x_1$, entonces

$$K(t, Tx; Y_0, Y_1) \leq M_0 \|x_0\|_{X_0} + tM_1 \|x_1\|_{X_1}.$$

Al tomar el ínfimo,

$$K(t, Tx; Y_0, Y_1) \leq M_0 K\left(t\frac{M_1}{M_0}, x; X_0, X_1\right).$$

La conclusión se obtiene con el cambio de variable $s = \frac{tM_1}{M_0}$. Si alguna norma $M_j$ es cero, se aproxima por $M_j + \varepsilon$ y se hace $\varepsilon \to 0^+$. □

**Corolario 5.3.2.** (Interpolación de encajes) Si $X_j \hookrightarrow Y_j$ para $j \in \{0,1\}$, entonces $(X_0, X_1)_{\theta,q} \hookrightarrow (Y_0, Y_1)_{\theta,q}$. Si existen operadores lineales $R\colon X_j \longrightarrow Y_j$ y $S\colon Y_j \longrightarrow X_j$, continuos en ambos extremos y tales que $SR = I$ en $X_0 + X_1$, entonces $S$ induce una retracción y $R$ una corretracción entre los espacios interpolados.

*Demostración.* La inclusión $I\colon X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ restringida a cada extremo es un operador continuo $I\colon X_j \to Y_j$. El teorema de interpolación de operadores aplicado a $I$ proporciona un operador continuo

$$I\colon (X_0, X_1)_{\theta,q} \longrightarrow (Y_0, Y_1)_{\theta,q},$$

que es precisamente el encaje de la primera afirmación.
En la segunda situación, el mismo teorema aplicado por separado a $R$ y $S$ da operadores continuos

$$R\colon (X_0, X_1)_{\theta,q} \longrightarrow (Y_0, Y_1)_{\theta,q}, \qquad S\colon (Y_0, Y_1)_{\theta,q} \longrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,q}.$$

Para $x \in (X_0, X_1)_{\theta,q} \subseteq X_0 + X_1$, la identidad supuesta en el espacio suma implica

$$S(Rx) = x.$$

Por lo tanto, $S \circ R = I$ en el espacio interpolado: $S$ es una retracción y $R$ es la corretracción correspondiente. □

**Teorema 5.3.3.** (Compacidad hacia un espacio de destino común) Sea $Y$ un espacio de Banach y sea $T\colon X_0 + X_1 \longrightarrow Y$ lineal. Si $T\colon X_0 \longrightarrow Y$ es compacto y $T\colon X_1 \longrightarrow Y$ es continuo, entonces

$$T\colon (X_0, X_1)_{\theta,q} \longrightarrow Y$$

es compacto para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$.

*Demostración.* Sea $B$ un conjunto acotado en $(X_0, X_1)_{\theta,q}$. Por el Lema 5.2.5, también cuando $q = \infty$, existe $C > 0$ tal que $K(t,x) \leq Ct^\theta$ para todo $t > 0$ y $x \in B$. Para cada $x \in B$ elegimos $x = a_{x,t} + b_{x,t}$ con

$$\|a_{x,t}\|_{X_0} + t\|b_{x,t}\|_{X_1} \leq 2Ct^\theta.$$

Fijada una tolerancia $\varepsilon > 0$, elegimos $t$ tan grande que $2C\|T\|_{X_1 \to Y} t^{\theta-1} < \varepsilon$. El conjunto $\{a_{x,t} \mid x \in B\}$ es acotado en $X_0$ y, por la compacidad de $T\colon X_0 \longrightarrow Y$, su imagen admite una cubierta por un número finito

de bolas de radio $\varepsilon$. Como

$$\|Tb_{x,t}\|_Y \leq 2C\|T\|_{X_1\to Y}t^{\theta-1} < \varepsilon,$$

$T(B)$ admite una cubierta finita por bolas de radio $2\varepsilon$. Así, $T(B)$ es totalmente acotado; como $Y$ es completo, su cerradura es compacta. Esto prueba la afirmación. □

## 5.4 El método $J$

El funcional $K$ describe a un elemento mediante una sola descomposición dependiente de la escala. El método $J$ usa, en cambio, una superposición continua de elementos que pertenecen simultáneamente a los dos extremos.

**Definición 5.4.1.** (Funcional $J$) Para $a \in X_0 \cap X_1$ y $t > 0$ definimos

$$J(t,a;X_0,X_1) := \max\{\|a\|_{X_0}, t\|a\|_{X_1}\}.$$

Una función $u\colon (0,\infty) \longrightarrow X_0 \cap X_1$ será admisible para $x \in X_0 + X_1$ si es fuertemente medible, la integral de Bochner $\int_0^\infty u(t)\,dt/t$ converge en $X_0 + X_1$ y

$$x = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}.$$

**Definición 5.4.2.** (Espacio definido por el método $J$) Sean $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$. Definimos $(X_0,X_1)_{\theta,q;J}$ como el conjunto de los $x \in X_0 + X_1$ que admiten una representación anterior para la cual

$$t \longmapsto t^{-\theta}J(t,u(t))$$

pertenece a $L^q((0,\infty),dt/t)$. Su norma es el ínfimo de la norma en $L^q((0,\infty),dt/t)$ sobre todas las representaciones admisibles.

**Lema 5.4.3.** (De una representación $J$ a una estimación $K$) Si $x = \int_0^\infty u(t)\,dt/t$ es una representación admisible con $t^{-\theta}J(t,u(t)) \in L^q((0,\infty),dt/t)$, entonces para $r > 0$

$$K(r,x) \leq \int_0^r \|u(t)\|_{X_0}\frac{dt}{t} + r\int_r^\infty \|u(t)\|_{X_1}\frac{dt}{t}.$$

*Demostración.* Separamos la integral en $(0,r)$ y $(r,\infty)$. Si $g(t) := t^{-\theta}J(t,u(t)) \in L^q((0,\infty),dt/t)$, entonces

$$\int_0^r \|u(t)\|_{X_0}\frac{dt}{t} \leq \int_0^r t^\theta g(t)\frac{dt}{t} < \infty$$

y

$$\int_r^\infty \|u(t)\|_{X_1}\frac{dt}{t} \leq \int_r^\infty t^{\theta-1}g(t)\frac{dt}{t} < \infty.$$

La finitud se sigue de la Proposición B.7.9, o directamente si $q = 1,\infty$. Por el criterio de integrabilidad de Bochner de la Proposición B.6.23, la primera parte converge en $X_0$ y la segunda en $X_1$. Esta separación es una descomposición admisible para $K(r,x)$ y la desigualdad triangular para la integral de Bochner da la estimación afirmada. □

**Teorema 5.4.4.** (Equivalencia de los métodos $K$ y $J$) Para todo par compatible de espacios de Banach, $0<\theta<1$ y $1\le q\le\infty$,

$$(X_0,X_1)_{\theta,q;K}=(X_0,X_1)_{\theta,q;J}$$

y existen constantes $c_{\theta,q},C_{\theta,q}>0$, independientes del par y del elemento, tales que

$$c_{\theta,q}\|x\|_{\theta,q;K}\le\|x\|_{\theta,q;J}\le C_{\theta,q}\|x\|_{\theta,q;K}$$

para todo $x$ del espacio común.

*Demostración.* Sea primero $x$ dado por una representación $J$. El Lema 5.4.3, seguido de las dos desigualdades integrales de Hardy del Teorema B.8.6,

$$\left\|r^{-\theta}\int_0^r h(t)\,\frac{dt}{t}\right\|_{L^q((0,\infty),dr/r)}\le\frac{1}{\theta}\|t^{-\theta}h(t)\|_{L^q((0,\infty),dt/t)}$$

y

$$\left\|r^{1-\theta}\int_r^\infty h(t)\,\frac{dt}{t}\right\|_{L^q((0,\infty),dr/r)}\le\frac{1}{1-\theta}\|t^{1-\theta}h(t)\|_{L^q((0,\infty),dt/t)},$$

da $\|x\|_{\theta,q;K}\le C_{\theta,q}\|x\|_{\theta,q;J}$. En la primera desigualdad aplicamos $h(t)=\|u(t)\|_{X_0}$ y en la segunda $h(t)=\|u(t)\|_{X_1}$. Para la inclusión opuesta usamos una construcción diádica. Elegimos descomposiciones $x=a_k+b_k$ tales que

$$\|a_k\|_{X_0}+2^k\|b_k\|_{X_1}\le 2K(2^k,x).$$

El Lema 5.2.5 da $K(2^k,x)\le C2^{k\theta}\|x\|_{\theta,q;K}$. Pongamos $v_k:=a_{k+1}-a_k=b_k-b_{k+1}$. Entonces

$$\|a_k\|_{X_0}\longrightarrow 0\quad(k\to-\infty),\qquad\|b_k\|_{X_1}\longrightarrow 0\quad(k\to\infty).$$

Al truncar la suma se obtiene $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N}v_k=a_{N+1}-a_{-N}\to x$ en $X_0+X_1$. Por lo tanto, $\displaystyle x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}v_k$ en $X_0+X_1$. Además,

$$J(2^k,v_k)\le C\big(K(2^k,x)+K(2^{k+1},x)\big).$$

Definimos $u(t):=(\log 2)^{-1}v_k$ para $2^k\le t<2^{k+1}$. Para $k\le 0$ usamos $\|v_k\|_{X_0}\le C2^{k\theta}\|x\|_{\theta,q;K}$; para $k>0$ usamos $\|v_k\|_{X_1}\le C2^{-k(1-\theta)}\|x\|_{\theta,q;K}$. Las dos series geométricas son convergentes. Por tanto, $u$ es integrable en $X_0+X_1$ y $\displaystyle x=\int_0^\infty u(t)\,dt/t$. El Lema 5.2.5 y la estimación anterior dan $\|x\|_{\theta,q;J}\le C\|x\|_{\theta,q;K}$. □

**Lema 5.4.5.** (Caracterización discreta del método $J$) Sea $0<\theta<1$ y $1\le q\le\infty$. Un elemento $x\in X_0+X_1$ pertenece a $(X_0,X_1)_{\theta,q}$ si y sólo si admite una representación

$$x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k\quad\text{en } X_0+X_1,\qquad u_k\in X_0\cap X_1,$$

para la cual

$$\big(2^{-k\theta}J(2^k,u_k;X_0,X_1)\big)_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell^q(\mathbb{Z}).$$

Además, la norma de interpolación es equivalente al ínfimo de la norma de esta sucesión sobre todas las

representaciones anteriores. Si $q < \infty$, $X_0 \cap X_1$ es denso en $(X_0, X_1)_{\theta,q}$.

*Demostración.* Supongamos primero que se tiene una representación discreta y escribamos $c_k := 2^{-k\theta} J(2^k, u_k)$. Para $k \le 0$,

$$\|u_k\|_{X_0} \le 2^{k\theta} c_k,$$

y, para $k > 0$,

$$\|u_k\|_{X_1} \le 2^{-k(1-\theta)} c_k.$$

La Proposición B.7.9 para sucesiones y la suma de las series geométricas muestran que las dos colas convergen respectivamente en $X_0$ y $X_1$. Definiendo $u(t) := (\log 2)^{-1} u_k$ en $[2^k, 2^{k+1})$, obtenemos una representación admisible y, para todo $t \in [2^k, 2^{k+1})$,

$$\frac{2^{-\theta}}{\log 2} 2^{-k\theta} J(2^k, u_k) \le t^{-\theta} J(t, u(t)) \le \frac{2}{\log 2} 2^{-k\theta} J(2^k, u_k).$$

Esto prueba una de las estimaciones de normas.
Recíprocamente, dada una representación admisible $u(t)$, ponemos

$$u_k := \int_{2^k}^{2^{k+1}} u(t) \frac{dt}{t}.$$

La Proposición B.6.27 permite sumar estas integrales en $X_0 + X_1$ y da $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$. La desigualdad triangular para la integral de Bochner y $2^k \le t$ implican

$$J(2^k, u_k) \le \int_{2^k}^{2^{k+1}} J(t, u(t)) \frac{dt}{t}.$$

La Proposición B.7.9 en cada intervalo diádico, seguida del Teorema B.6.17, proporciona

$$\left\| \left(2^{-k\theta} J(2^k, u_k)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \le C_{\theta,q} \|t^{-\theta} J(t, u(t))\|_{L^q((0,\infty), dt/t)}.$$

El caso $q = \infty$ se obtiene tomando supremos. Pasar al ínfimo sobre las representaciones y usar el Teorema 5.4.4 concluye la equivalencia de normas. Si $q < \infty$, las sumas finitas $\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ |k|\le N}} u_k \in X_0 \cap X_1$ convergen a $x$ en la norma de interpolación, porque las colas de una sucesión de $\ell^q(\mathbb{Z})$ tienden a cero. Esto prueba la última afirmación. □

## 5.5 Reiteración

La interpolación puede aplicarse más de una vez. El resultado siguiente afirma que no aparecen escalas nuevas cuando se interpola entre dos niveles ya interpolados.

**Lema 5.5.1.** (Fórmula de Holmstedt) Sea $(X_0, X_1)$ un par compatible de espacios de Banach, sean $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ y $1 \le q_0, q_1 \le \infty$. Pongamos $X_{\theta_j} := (X_0, X_1)_{\theta_j, q_j}$. Existen constantes $c, C > 0$ tales que, para $x \in X_0 + X_1$

y $r>0$, se tiene

$$c\big(A_0(r,x)+r^{\theta_1-\theta_0}A_1(r,x)\big)\le K(r^{\theta_1-\theta_0},x;X_{\theta_0},X_{\theta_1})\le C\big(A_0(r,x)+r^{\theta_1-\theta_0}A_1(r,x)\big),$$

donde

$$A_0(r,x):=\big\|t^{-\theta_0}K(t,x;X_0,X_1)\big\|_{L^{q_0}((0,r),dt/t)},$$

y

$$A_1(r,x):=\big\|t^{-\theta_1}K(t,x;X_0,X_1)\big\|_{L^{q_1}((r,\infty),dt/t)},$$

con supremos cuando algún $q_j=\infty$. Si $x\notin X_{\theta_0}+X_{\theta_1}$, el funcional del centro se interpreta como $+\infty$. Las constantes $c$ y $C$ dependen sólo de $\theta_0,\theta_1,q_0,q_1$.

*Demostración.* Pongamos $\delta:=\theta_1-\theta_0$ y elijamos $m\in\mathbb{Z}$ de modo que $2^m\le r<2^{m+1}$. Supongamos primero que $A_0(r,x)+r^{\delta}A_1(r,x)<\infty$. Para cada $k\in\mathbb{Z}$ elegimos una descomposición $x=a_k+b_k$ tal que

$$\|a_k\|_{X_0}+2^k\|b_k\|_{X_1}\le 2K(2^k,x;X_0,X_1)$$

y ponemos $u_k:=a_{k+1}-a_k=b_k-b_{k+1}$. La comparación de $K$ en intervalos diádicos da $K(2^k,x)\le C2^{k\theta_0}A_0(r,x)$ para $2^{k+1}\le r$ y $K(2^k,x)\le C2^{k\theta_1}A_1(r,x)$ para $2^{k-1}\ge r$. Así, $a_k\to 0$ en $X_0$ cuando $k\to-\infty$ y $b_k\to 0$ en $X_1$ cuando $k\to\infty$. Por lo tanto, $x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k$ en $X_0+X_1$, y

$$\|u_k\|_{X_0}+2^k\|u_k\|_{X_1}\le C\big(K(2^k,x)+K(2^{k+1},x)\big).$$

Definimos

$$x_0:=\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\le m}}u_k,\qquad x_1:=\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k>m}}u_k.$$

La caracterización discreta del método $J$ del Lema 5.4.5, el Lema 5.2.5 y la comparación de $r$ con $2^m$ dan

$$\|x_0\|_{X_{\theta_0}}\le CA_0(r,x),\qquad \|x_1\|_{X_{\theta_1}}\le CA_1(r,x).$$

Para los términos próximos al corte usamos $K(2^{m+1},x)\le 4K(2^{m-1},x)$ y el intervalo $[2^{m-1},2^m]\subseteq(0,r)$; en la otra cola usamos $[2^{m+1},2^{m+2}]\subseteq(r,\infty)$. De este modo las constantes también controlan los términos situados junto a $r$. Cada serie converge en $X_0+X_1$ y define una representación $J$ del espacio indicado; esto prueba la pertenencia incluso cuando $q_j=\infty$, sin exigir convergencia de las sumas parciales en la norma de ese espacio. Como $x=x_0+x_1$, esta descomposición prueba

$$K(r^{\delta},x;X_{\theta_0},X_{\theta_1})\le C\big(A_0(r,x)+r^{\delta}A_1(r,x)\big).$$

Si alguna cola es infinita, esta desigualdad es automática.
Para la cota opuesta, sea $x=y_0+y_1$ con $y_j\in X_{\theta_j}$. El Lema 5.2.5 implica la estimación puntual

$$K(t,y_j;X_0,X_1)\le Ct^{\theta_j}\|y_j\|_{X_{\theta_j}},\qquad t>0.$$

La desigualdad triangular para $K(t,\cdot)$ proporciona

$$A_0(r,x) \le C\big(\|y_0\|_{X_{\theta_0}} + r^{\delta}\|y_1\|_{X_{\theta_1}}\big)$$

y

$$r^{\delta}A_1(r,x) \le C\big(\|y_0\|_{X_{\theta_0}} + r^{\delta}\|y_1\|_{X_{\theta_1}}\big).$$

Aquí sólo se integran las potencias $t^{\delta q_0}$ en $(0,r)$ y $t^{-\delta q_1}$ en $(r,\infty)$; si algún exponente es infinito se toman supremos. Al tomar el ínfimo sobre las descomposiciones $x = y_0 + y_1$ obtenemos la desigualdad restante. □

**Teorema 5.5.2.** (Teorema de reiteración real) Sean $0 \le \theta_0 < \theta_1 \le 1$, $0 < \eta < 1$ y $1 \le q, q_0, q_1 \le \infty$. Si $X_{\theta_j} = (X_0, X_1)_{\theta_j, q_j}$ cuando $0 < \theta_j < 1$, mientras que $X_{\theta_0} = X_0$ si $\theta_0 = 0$ y $X_{\theta_1} = X_1$ si $\theta_1 = 1$, entonces

$$(X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{\eta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}, \qquad \theta := (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1,$$

y existen constantes $c, C > 0$, dependientes sólo de $\theta_0, \theta_1, \eta, q, q_0, q_1$, tales que

$$c\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}} \le \|x\|_{(X_{\theta_0},X_{\theta_1})_{\eta,q}} \le C\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}}$$

para todo $x$ del espacio común.

*Demostración.* Supongamos primero $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ y pongamos $\delta := \theta_1 - \theta_0$, de modo que $\theta = \theta_0 + \eta\delta$. Escribimos

$$K_*(\tau, x) := K(\tau, x; X_{\theta_0}, X_{\theta_1}), \qquad c_k := 2^{-k\theta}K(2^k, x; X_0, X_1).$$

La prueba del Lema 5.2.5, con base geométrica $2^{\delta}$ en lugar de 2, proporciona constantes $d_*, D_* > 0$ tales que

$$d_*\big\|(2^{-k\eta\delta}K_*(2^{k\delta}, x))_k\big\|_{\ell^q} \le \|x\|_{(X_{\theta_0},X_{\theta_1})_{\eta,q}} \le D_*\big\|(2^{-k\eta\delta}K_*(2^{k\delta}, x))_k\big\|_{\ell^q}.$$

Por el Lema 5.5.1, la sucesión situada entre barras queda acotada, término a término y en ambos sentidos, por múltiplos de

$$B_{0,k} := 2^{-k\eta\delta}A_0(2^k, x), \qquad B_{1,k} := 2^{k(1-\eta)\delta}A_1(2^k, x).$$

Descomponer las integrales que definen $A_0$ y $A_1$ en los intervalos $[2^j, 2^{j+1}]$ y usar la monotonía de $K$ y de $\frac{K(t,x)}{t}$, como en la prueba del lema de discretización, reduce la cota superior a los dos operadores sobre sucesiones

$$(\mathsf{H}^-_{a,r}c)_k := \left(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\le k}} (2^{-a(k-j)}|c_j|)^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$(\mathsf{H}^+_{a,r}c)_k := \left(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\ge k}} (2^{-a(j-k)}|c_j|)^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

con supremos si $r = \infty$, tomando respectivamente $(a,r) = (\eta\delta, q_0)$ y $(a,r) = ((1-\eta)\delta, q_1)$. Para cualesquiera

$a>0$ y $1\le q,r\le\infty$ existe $C_{a,q,r}>0$ tal que

$$\|\mathsf{H}^-_{a,r}c\|_{\ell^q}+\|\mathsf{H}^+_{a,r}c\|_{\ell^q}\le C_{a,q,r}\|c\|_{\ell^q}.$$

En efecto, si $q\ge r<\infty$, elevamos a la potencia $r$ y aplicamos Young en $\ell^{\frac{q}{r}}$ al núcleo geométrico $(2^{-arm}\mathbf{1}_{\{m\ge 0\}})_m$. Si $q<r$, usamos

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} d_j^r\right)^{\frac{q}{r}}\le\sum_{j\in\mathbb{Z}} d_j^q$$

y sumamos primero respecto del índice exterior; aparece la serie geométrica $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}_0}2^{-aqm}$. Para $r=\infty$, el supremo se acota por la suma de potencia $q$, y para $q=\infty$ la afirmación se obtiene directamente. El operador de cola se trata con el núcleo reflejado. Se deduce

$$\|x\|_{(X_{\theta_0},X_{\theta_1})_{\eta,q}}\le C\|(c_k)_k\|_{\ell^q}\le C'\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}}.$$

Para la cota inversa, el intervalo $[2^k,2^{k+1}]$ contenido en la definición de $A_0(2^{k+1},x)$ y la monotonía de $K$ dan una constante $d_0=d_0(\theta_0,q_0)>0$ tal que

$$2^{-(k+1)\eta\delta}A_0(2^{k+1},x)\ge d_0c_k.$$

Esto también vale para $q_0=\infty$, interpretando la norma como supremo. La cota inferior de Holmstedt y las dos discretizaciones proporcionan

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}}\le C\|x\|_{(X_{\theta_0},X_{\theta_1})_{\eta,q}}.$$

Consideremos ahora $\theta_0=0<\theta_1<1$. Probaremos primero

$$K(r^{\theta_1},x;X_0,X_{\theta_1})\asymp K(r,x)+r^{\theta_1}A_1(r,x),\tag{5.1}$$

donde $\asymp$ significa que cada miembro está acotado por una constante positiva multiplicada por el otro, uniformemente en $x$ y $r$.
Si el miembro derecho es finito y $x\neq 0$, elegimos $x=a+b$ con

$$\|a\|_{X_0}+r\|b\|_{X_1}\le 2K(r,x).$$

Para $t<r$ usamos $K(t,b)\le t\|b\|_{X_1}$; para $t\ge r$, la desigualdad triangular y la monotonía dan

$$K(t,b)\le K(t,x)+\|a\|_{X_0}\le 3K(t,x).$$

Al integrar en ambos intervalos, o tomar supremos, obtenemos

$$\|b\|_{X_{\theta_1}}\le C\big(r^{-\theta_1}K(r,x)+A_1(r,x)\big).$$

Esta descomposición prueba una de las cotas de (5.1). Para la otra, escribimos $x=y_0+y_1$, donde $y_0\in X_0$ y

$y_1 \in X_{\theta_1}$. La estimación puntual para $K$ y la integral de $t^{-\theta_1 q_1}$ sobre $(r,\infty)$ dan

$$K(r,x) \le \|y_0\|_{X_0} + C r^{\theta_1} \|y_1\|_{X_{\theta_1}},$$
$$r^{\theta_1} A_1(r,x) \le C\|y_0\|_{X_0} + r^{\theta_1}\|y_1\|_{X_{\theta_1}}.$$

Tomamos el ínfimo sobre $y_0, y_1$.
El caso $0 < \theta_0 < \theta_1 = 1$ se obtiene aplicando la fórmula anterior al par $(X_1, X_0)$, con parámetro $1-\theta_0$ y escala $r^{-1}$. En efecto, la simetría del funcional $K$ y el cambio $t \mapsto t^{-1}$ transforman esa fórmula en

$$K(r^{1-\theta_0}, x; X_{\theta_0}, X_1) \asymp A_0(r,x) + r^{-\theta_0} K(r,x). \tag{5.2}$$

Multiplicamos (5.1) por $r^{-\eta\theta_1}$, o (5.2) por $r^{-\eta(1-\theta_0)}$. El término que contiene $K(r,x)$ es, en ambos casos, $r^{-\theta}K(r,x)$. El otro término se controla por $\mathsf{H}^+_{(1-\eta)\theta_1,q_1}$ o $\mathsf{H}^-_{\eta(1-\theta_0),q_0}$, respectivamente. Las estimaciones ya probadas para estos operadores dan la cota superior, y el término $r^{-\theta}K(r,x)$ da la inferior. Si $\theta_0 = 0$ y $\theta_1 = 1$, la afirmación coincide con la definición. □

**Definición 5.5.3.** (Sumas $\ell^q$ de una familia de espacios de Banach) Sea $I$ un conjunto y sea $(Z_i)_{i\in I}$ una familia de espacios de Banach. Para $1 \le q < \infty$, definimos

$$\ell^q\big(I;(Z_i)_{i\in I}\big) := \left\{ z = (z_i)_{i\in I} \;\middle|\; z_i \in Z_i \text{ para todo } i \in I, \quad \sum_{i\in I} \|z_i\|_{Z_i}^q < \infty \right\},$$

con la norma

$$\|z\|_{\ell^q(I;(Z_i)_{i\in I})} := \left( \sum_{i\in I} \|z_i\|_{Z_i}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

La suma sobre un conjunto arbitrario se entiende como el supremo de las sumas sobre subconjuntos finitos. Para $q = \infty$, ponemos

$$\ell^\infty\big(I;(Z_i)_{i\in I}\big) := \left\{ z = (z_i)_{i\in I} \;\middle|\; z_i \in Z_i \text{ para todo } i \in I, \quad \sup_{i\in I} \|z_i\|_{Z_i} < \infty \right\},$$

con la norma del supremo. Si todos los espacios coinciden con un mismo espacio $Z$, escribimos simplemente $\ell^q(I;Z)$. Cuando $I = \mathbb{Z}$ y la familia está indicada en el argumento, también usaremos la abreviatura $\ell^q((Z_k)_{k\in\mathbb{Z}})$.

**Lema 5.5.4.** (Dualidad de sumas $\ell^q$) Sea $I$ un conjunto, sea $(Z_i)_{i\in I}$ una familia de espacios de Banach y sea $1 \le q < \infty$. Entonces

$$\big(\ell^q\big(I;(Z_i)_{i\in I}\big)\big)' = \ell^{q'}\big(I;(Z_i')_{i\in I}\big)$$

isométricamente, mediante el emparejamiento

$$\langle z, \lambda\rangle := \sum_{i\in I} \lambda_i(z_i).$$

*Demostración.* La desigualdad de Hölder para familias sumables muestra que cada $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$ del espacio de la derecha define un funcional continuo y que su norma no excede $\|\lambda\|_{\ell^{q'}(I;(Z_i')_{i\in I})}$.
Recíprocamente, sea $\Lambda$ un funcional continuo sobre el espacio de la izquierda. Para cada $i \in I$, denotemos por

$$\iota_i \colon Z_i \longrightarrow \ell^q\big(I;(Z_j)_{j\in I}\big)$$

la inclusión en la coordenada $i$ y pongamos $\lambda_i := \Lambda \circ \iota_i$. Si $F \subseteq I$ es finito, elegimos $z_i \in Z_i$ de norma uno que realice $\|\lambda_i\|_{Z_i'}$ con un error arbitrariamente pequeño. La dualidad de $\ell^q(F)$ da

$$\left(\sum_{i\in F} \|\lambda_i\|_{Z_i'}^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \le \|\Lambda\|,$$

con la interpretación usual del máximo cuando $q' = \infty$. Al tomar el supremo sobre los subconjuntos finitos $F$, obtenemos $\lambda \in \ell^{q'}(I;(Z_i')_{i\in I})$ y $\|\lambda\| \le \|\Lambda\|$.
Las familias de soporte finito son densas en $\ell^q(I;(Z_i)_{i\in I})$ para $q < \infty$. Por ello, la igualdad

$$\Lambda(z) = \sum_{i\in I} \lambda_i(z_i)$$

se prueba primero para soporte finito y se extiende por continuidad. La primera estimación da la igualdad de normas. El argumento incluye $q = 1$, en cuyo caso $q' = \infty$. □

Un par de Banach $(X_0, X_1)$ se llama *regular* si $X_0 \cap X_1$ es denso en cada $X_j$. En ese caso, los duales $X_0'$ y $X_1'$ se consideran como subespacios de $(X_0 \cap X_1)'$ mediante restricción y forman un par compatible.

**Lema 5.5.5.** (Dual de la intersección de un par regular) Si $(X_0, X_1)$ es un par regular, entonces las restricciones identifican isométricamente

$$(X_0 \cap X_1)' = X_0' + X_1',$$

donde la intersección lleva la norma máxima y la suma de los duales lleva la norma cociente. Más generalmente, para $t > 0$,

$$\|y\|_{(X_0\cap X_1, J(t,\cdot))'} = K(t^{-1}, y; X_0', X_1').$$

*Demostración.* Consideremos la inclusión diagonal

$$D \colon X_0 \cap X_1 \longrightarrow X_0 \times X_1, \qquad Dx = (x, x),$$

donde el producto lleva la norma $\max\{\|x_0\|_{X_0}, t\|x_1\|_{X_1}\}$. Todo funcional $y$ sobre la diagonal se extiende, conservando la norma, por el Corolario de Hahn–Banach B.2.29. Un funcional sobre el producto tiene la forma $(x_0, x_1) \mapsto y_0(x_0) + y_1(x_1)$ y su norma es $\|y_0\|_{X_0'} + t^{-1}\|y_1\|_{X_1'}$. Restringirlo a la diagonal y tomar el ínfimo sobre todas las extensiones da la fórmula. La regularidad garantiza que la restricción $X_j' \to (X_0 \cap X_1)'$ sea inyectiva, de modo que la suma sea un par compatible y no sólo un cociente abstracto. □

## 5.6 Dualidad para la interpolación real

**Teorema 5.6.1.** (Dualidad del método real) Sea $(X_0, X_1)$ un par regular, sea $0 < \theta < 1$ y sea $1 \le q < \infty$. Entonces el emparejamiento entre $X_0 + X_1$ y $X_0' \cap X_1'$ se extiende a un isomorfismo topológico

$$\big((X_0, X_1)_{\theta,q}\big)' \cong (X_0', X_1')_{\theta,q'},$$

donde $q'$ es el exponente conjugado. Para $q = \infty$ se conserva el encaje continuo del espacio del lado derecho en el dual del lado izquierdo, pero la sobreyectividad puede fallar. Más precisamente, si $1 \le q < \infty$ y $\Lambda_y(x) := \langle x, y\rangle$, existen constantes $c_{\theta,q}, C_{\theta,q} > 0$ tales que

$$c_{\theta,q}\|y\|_{(X_0',X_1')_{\theta,q'}} \le \|\Lambda_y\|_{((X_0,X_1)_{\theta,q})'} \le C_{\theta,q}\|y\|_{(X_0',X_1')_{\theta,q'}}.$$

*Demostración.* Pongamos $\Delta := X_0 \cap X_1$, $\Sigma := X_0 + X_1$ y $Y := (X_0', X_1')_{\theta,q'}$. La regularidad permite considerar todos los elementos de $Y$ como funcionales sobre $\Delta$.
Si $a \in \Delta$ y $v \in X_0' \cap X_1'$, toda descomposición $a = a_0 + a_1$ satisface

$$|\langle a, v\rangle| \le \big(\|a_0\|_{X_0} + t^{-1}\|a_1\|_{X_1}\big) J(t, v; X_0', X_1').$$

Por tanto,

$$|\langle a, v\rangle| \le K(t^{-1}, a; X_0, X_1) J(t, v; X_0', X_1'). \tag{5.3}$$

Representamos $y \in Y$ mediante el método $J$ del par dual:

$$y = \int_0^\infty v(t)\,\frac{dt}{t} \quad \text{en } X_0' + X_1' = \Delta'.$$

La igualdad del espacio suma con $\Delta'$ procede del Lema 5.5.5. Evaluar en $a \in \Delta$ es una operación continua en ese espacio, de modo que (5.3), Hölder y el cambio $r = t^{-1}$ dan

$$\begin{aligned} |\langle a, y\rangle| &\le \int_0^\infty \big(t^\theta K(t^{-1}, a)\big)\big(t^{-\theta} J(t, v(t))\big)\,\frac{dt}{t} \\ &\le \|a\|_{\theta,q;K}\|t^{-\theta} J(t, v(t))\|_{L^{q'}((0,\infty), dt/t)}. \end{aligned}$$

Tomamos el ínfimo sobre las representaciones y aplicamos el Teorema 5.4.4. Si $q < \infty$, la densidad de $\Delta$ del Lema 5.4.5 permite extender $y$ de manera única a un funcional continuo $\Lambda_y$ en $(X_0, X_1)_{\theta,q}$, con la cota afirmada.
Sea, recíprocamente, $\Lambda \in ((X_0, X_1)_{\theta,q})'$ y supongamos $q < \infty$. Definimos

$$Z_k := (\Delta, 2^{-k\theta} J(2^k, \cdot)), \qquad \mathcal{J}_{\theta,q} := \ell^q\big(\mathbb{Z}; (Z_k)_k\big).$$

Cada $Z_k$ es de Banach por la Proposición 5.1.2. El Lema 5.4.5 muestra que $S((a_k)_{k\in\mathbb{Z}}) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k$ es continuo y suprayectivo desde $\mathcal{J}_{\theta,q}$ al espacio interpolado. Aplicamos directamente el Lema 5.5.4 al funcional $\Lambda \circ S$.

Obtenemos funcionales $\lambda_k \in \Delta'$ tales que

$$\left\| \left( 2^{k\theta} \|\lambda_k\|_{(\Delta, J(2^k,\cdot))'} \right)_k \right\|_{\ell^{q'}} \le C_{\theta,q} \|\Lambda\|.$$

Al evaluar en una sucesión cuya única coordenada no nula es $a \in \Delta$, resulta $\lambda_k(a) = \Lambda(a)$. Así, todos los $\lambda_k$ coinciden con $y := \Lambda|_\Delta$. El Lema 5.5.5 transforma la estimación en

$$\left\| \left( 2^{k\theta} K(2^{-k}, y; X_0', X_1') \right)_k \right\|_{\ell^{q'}} \le C_{\theta,q} \|\Lambda\|.$$

El Lema 5.2.5, con el cambio de índice $k \mapsto -k$, implica $y \in Y$ y da la otra cota de normas. Como $\Delta$ es denso, $\Lambda = \Lambda_y$ en todo el espacio.

Para $q = \infty$ hay que precisar el emparejamiento fuera de $\Delta$. Sea $x \in (X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ y tomemos las sumas parciales $x_N$ de una representación $J$ discreta casi óptima. Entonces $x_N \in \Delta$, $x_N \to x$ en $\Sigma$ y

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \|x_N\|_{\theta,\infty;K} \le C_\theta \|x\|_{\theta,\infty;K}.$$

Si $y \in X_0' \cap X_1'$, su acción es continua en $\Sigma$. La estimación ya obtenida sobre $\Delta$, seguida del límite en $N$, da

$$|\langle x, y \rangle| \le C_\theta \|x\|_{\theta,\infty;K} \|y\|_{(X_0', X_1')_{\theta,1}}.$$

El Lema 5.4.5, aplicado al par dual con segundo índice 1, permite extender este emparejamiento a todo $y \in (X_0', X_1')_{\theta,1}$. Es bilineal, continuo e inyectivo en $y$, pues sobre $\Delta$ coincide con su acción original. La prueba de sobreyectividad anterior requiere la dualidad de $\ell^q$ con $q < \infty$ y no se aplica al extremo $q = \infty$. □

## 5.7 El método complejo

En esta sección los espacios de Banach serán complejos. Una función $F\colon U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow X$ se llama holomorfa si el límite

$$F'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h}$$

existe en la norma de $X$ para cada $z \in U$.

Para aplicar el método a un espacio real $X$, usamos su complejificación $X_\mathbb{C} := X + iX$, con la norma

$$\|x + iy\|_{X_\mathbb{C}} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x \cos t - y \sin t\|_X.$$

La multiplicación por un escalar complejo produce una rotación en el par $(x, y)$ y una multiplicación por su módulo, por lo que esta expresión es una norma compleja. Además,

$$\max\{\|x\|_X, \|y\|_X\} \le \|x + iy\|_{X_\mathbb{C}} \le \|x\|_X + \|y\|_X,$$

lo que prueba la completitud. Las inclusiones de un par real se complejifican en un mismo espacio ambiente. Definimos su espacio interpolado real como la parte fija de la conjugación en $[X_{0,\mathbb{C}}, X_{1,\mathbb{C}}]_\theta$. La conjugación conserva la norma de Calderón al sustituir $F(z)$ por $\overline{F(\bar{z})}$. Si $T$ es real y continuo, su extensión compleja tiene la misma norma: la desigualdad $\|T_\mathbb{C}(x+iy)\| \le \|T\|\|x+iy\|$ se obtiene en cada término del supremo, y la cota inversa se obtiene sobre $X$. Así, los teoremas de operadores se aplican también a espacios reales. Las igualdades isométricas que

siguen se formulan para espacios complejos con las normas indicadas. Al pasar a sus partes reales se conservan las identificaciones con normas equivalentes.

Denotaremos por

$$\mathcal{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}, \qquad \overline{\mathcal{T}} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$$

la franja abierta y su cerradura, respectivamente.

Antes de definir el espacio de Calderón, fijamos las herramientas de variable compleja que se usarán tanto en el caso escalar como en el vectorial.

**Proposición 5.7.1.** (Fórmula integral de Cauchy con valores en un espacio de Banach) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, sea $X$ un espacio de Banach complejo y sea $F\colon U \longrightarrow X$ holomorfa. Si $\overline{B}_{\mathrm{euc}}(z_0, r) \subseteq U$, entonces, para $z \in B_{\mathrm{euc}}(z_0, r)$ y $m \in \mathbb{N}_0$,

$$F^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}\, d\zeta, \tag{5.4}$$

donde la circunferencia se recorre con orientación positiva y la integral es de Bochner. En particular, $F$ admite alrededor de cada punto una serie de Taylor convergente en la norma de $X$. Si $X = \mathbb{C}$ y dos funciones holomorfas coinciden en un conjunto con un punto de acumulación interior, entonces coinciden en cada componente conexa de $U$ que contenga ese punto.

*Demostración.* Comenzamos con el caso escalar y el argumento de Goursat. Si la integral de una función holomorfa sobre la frontera de un triángulo no fuese cero, al dividir el triángulo en cuatro triángulos congruentes podríamos escoger uno cuya integral tuviese módulo al menos igual a la cuarta parte de la original. La iteración produce triángulos encajados, con diámetros que tienden a cero y un punto común $a$. Para cada $\varepsilon > 0$, la diferenciabilidad de $f$ en $a$ proporciona $\delta > 0$ tal que

$$|f(\zeta) - f(a) - f'(a)(\zeta - a)| \le \varepsilon |\zeta - a| \qquad \text{si } |\zeta - a| < \delta.$$

Las integrales de los dos términos afines sobre una frontera triangular son nulas. Si $d_k := \operatorname{diam}(T_k) < \delta$, todo punto de $T_k$ dista de $a$ a lo sumo $d_k$ y la longitud de $\partial T_k$ no excede $3d_k$; por consiguiente,

$$\left| \int_{\partial T_k} f(\zeta)\, d\zeta \right| \le 3\varepsilon d_k^2.$$

Por otro lado, los triángulos son congruentes tras reescalar por $2^{-k}$, de modo que $d_k = 2^{-k} d_0$, mientras que la elección inductiva implica

$$\left| \int_{\partial T_k} f(\zeta)\, d\zeta \right| \ge 4^{-k} \left| \int_{\partial T_0} f(\zeta)\, d\zeta \right|.$$

Si la última integral fuese no nula, dividir por $d_k^2$ y elegir $3\varepsilon < d_0^{-2} \left| \int_{\partial T_0} f(\zeta)\, d\zeta \right|$ produciría una contradicción. Así, la integral sobre toda frontera triangular es cero. Al sumar sobre una triangulación, las integrales de las aristas interiores se cancelan. Se obtiene así el resultado para regiones poligonales, también con agujeros. Para las circunferencias que usaremos, aproximamos por polígonos inscritos; la continuidad uniforme del integrando en un entorno compacto y la convergencia de estas parametrizaciones permiten pasar al límite en las integrales.

Aplicamos este hecho a $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ en la región comprendida entre $|\zeta - z_0| = r$ y una circunferencia pequeña

centrada en $z$. Al contraer esta última circunferencia obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

La derivación del núcleo bajo la integral da la fórmula para $f^{(m)}$.
Volvamos al caso vectorial. La continuidad de $F$ sobre la circunferencia garantiza la existencia de la integral de Bochner. Para todo $\lambda \in X'$, la función $\lambda \circ F$ es holomorfa y la compatibilidad de la integral con operadores lineales continuos, Proposición B.6.27, permite aplicar la fórmula escalar para $m = 0$. El Teorema de Hahn–Banach B.2.27 muestra que $X'$ separa puntos y proporciona la identidad vectorial para $F(z)$. En cada disco concéntrico de radio menor que $r$, los cocientes incrementales de $(\zeta - z)^{-1}$ convergen uniformemente sobre la circunferencia a $(\zeta - z)^{-2}$. La desigualdad de la integral de Bochner permite derivar la identidad en la norma de $X$. Repitiendo este argumento se obtienen todas las derivadas y la fórmula para cada $m$.
Si $|z - z_0| < \rho < r$, la serie geométrica del núcleo converge uniformemente para $|z - z_0| \le \rho$; podemos integrarla término a término y obtenemos la serie de Taylor de $F$ con convergencia uniforme en norma sobre ese disco. En el caso escalar, el primer coeficiente no nulo de dicha serie muestra que los ceros de una función holomorfa no idénticamente nula son aislados. Esto prueba la última afirmación. □

**Lema 5.7.2.** (Principio del máximo y límites holomorfos) Se cumplen las afirmaciones siguientes.

(a) Si $Q \subseteq \mathbb{C}$ es un rectángulo compacto y $f : Q \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y holomorfa en el interior, entonces $\max_{z \in Q} |f(z)| = \max_{z \in \partial Q} |f(z)|$. Además, si $|f|$ alcanza su máximo en un punto interior, entonces $f$ es constante.

(b) Un límite uniforme sobre compactos de funciones holomorfas escalares es holomorfo.

(c) Si $X$ es un espacio de Banach, un límite uniforme sobre compactos de funciones holomorfas con valores en $X$ es holomorfo.

*Demostración.* La Proposición 5.7.1, con $m = 0$, da la propiedad del valor medio. Si $|f|$ alcanza un máximo interior, la igualdad en la desigualdad triangular de esa fórmula obliga a que $f$ sea constante en un entorno; la última afirmación de la misma proposición propaga la constancia a todo el interior conexo del rectángulo. Esto prueba (a).
Para (b) y (c), sea $(F_j)$ una sucesión que converge uniformemente sobre compactos a $F$, con valores respectivamente en $\mathbb{C}$ o en $X$. Cada $F_j$ satisface la fórmula de Cauchy de la Proposición 5.7.1. La convergencia uniforme sobre la circunferencia permite pasar al límite en la integral de Bochner y proporciona

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

en cada disco cuya cerradura esté contenida en el dominio común. En un disco concéntrico más pequeño, el núcleo y su derivada respecto de $z$ están uniformemente acotados sobre la circunferencia. El Teorema fundamental del cálculo B.6.5 permite entonces derivar bajo la integral y prueba la holomorfía de $F$. □

**Lema 5.7.3.** (Tres líneas de Hadamard) Sea $F : \overline{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y acotada, holomorfa en $\mathcal{T}$, y supongamos

que $|F(j+it)| \le M_j$ para $t \in \mathbb{R}$ y $j = 0, 1$. Entonces

$$|F(\theta)| \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

*Demostración.* Podemos suponer $M_0 M_1 > 0$. Para $\varepsilon > 0$ consideramos

$$G_\varepsilon(z) := F(z) M_0^{z-1} M_1^{-z} e^{\varepsilon(z-\theta)^2}.$$

En los lados verticales de un rectángulo $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$, $|\operatorname{Im} z| \le R$, el módulo está acotado por $e^{\varepsilon} \max\{\theta^2, (1-\theta)^2\}$; en los lados horizontales tiende a cero cuando $R \to \infty$. El principio del máximo del Lema 5.7.2, aplicado al rectángulo, y después el límite $R \to \infty$ dan $|G_\varepsilon(\theta)| \le e^{\varepsilon} \max\{\theta^2, (1-\theta)^2\}$. Finalmente hacemos $\varepsilon \to 0^+$. Si $M_j = 0$, aplicamos lo anterior con $M_j + \delta$ y hacemos $\delta \to 0^+$. □

Las dos rectas que delimitan $\mathcal{T}$ representarán los espacios extremos: sobre $it$ mediremos en $X_0$ y sobre $1+it$ en $X_1$, para $t \in \mathbb{R}$. Una función holomorfa enlaza estos valores de frontera. Su evaluación en $z = \theta$ producirá el elemento intermedio, y las tres líneas controlarán su tamaño.

**Definición 5.7.4.** (Espacio de Calderón) Sea $(X_0, X_1)$ un par compatible de espacios de Banach complejos. Denotamos por $\mathscr{F}(X_0, X_1)$ el espacio de las funciones $F : \overline{\mathcal{T}} \longrightarrow X_0 + X_1$ que son continuas y acotadas, holomorfas en $\mathcal{T}$, satisfacen $F(j+it) \in X_j$, tienen restricciones $t \mapsto F(j+it)$ continuas en la norma de $X_j$ y tales que $F(j+it) \to 0$ en $X_j$ cuando $|t| \to \infty$, y tienen norma

$$\|F\|_{\mathscr{F}} := \max_{j \in \{0,1\}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(j+it)\|_{X_j} < \infty.$$

Para $0 < \theta < 1$ definimos

$$[X_0, X_1]_\theta := \{F(\theta) \mid F \in \mathscr{F}(X_0, X_1)\}, \qquad \|x\|_{[X_0,X_1]_\theta} := \inf_{\substack{F \in \mathscr{F}(X_0,X_1) \\ F(\theta) = x}} \|F\|_{\mathscr{F}}.$$

**Teorema 5.7.5.** (Interpolación compleja de operadores) El espacio $[X_0, X_1]_\theta$ es de Banach. Si $T : X_0 + X_1 \longrightarrow Y_0 + Y_1$ es lineal y $T : X_j \longrightarrow Y_j$ tiene norma $M_j$, entonces

$$T : [X_0, X_1]_\theta \longrightarrow [Y_0, Y_1]_\theta$$

es continuo y $\|T\| \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

*Demostración.* Escribamos $\Sigma := X_0 + X_1$. Para $\lambda \in \Sigma'$ de norma a lo más uno, las restricciones de $\lambda$ a $X_j$ tienen norma a lo más uno. El Lema 5.7.3, aplicado a $z \mapsto \lambda(F(z+it))$, y Hahn–Banach dan

$$\sup_{z \in \overline{\mathcal{T}}} \|F(z)\|_\Sigma \le \|F\|_{\mathscr{F}}. \tag{5.5}$$

Por ello, una sucesión de Cauchy en $\mathscr{F}$ converge uniformemente en $\Sigma$ sobre la franja cerrada y uniformemente en $X_j$ sobre cada recta de frontera. El límite es continuo en las normas indicadas, sus valores de frontera tienden a cero, y el Lema 5.7.2 conserva la holomorfía. Por tanto, $\mathscr{F}$ es de Banach. La evaluación

$F \mapsto F(\theta)$ es continua por (5.5); su núcleo es cerrado. El espacio $[X_0, X_1]_\theta$, con la norma de su definición, es el cociente por ese núcleo y es de Banach. En particular,

$$\|x\|_\Sigma \le \|x\|_{[X_0,X_1]_\theta}.$$

Si $x \in X_0 \cap X_1$, el representante $F(z) = e^{\varepsilon(z-\theta)^2}x$ muestra también el encaje continuo $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow [X_0, X_1]_\theta$. El operador $T$ es continuo entre los espacios suma: basta aplicar sus cotas extremas a una descomposición y tomar el ínfimo. Si $M_0 M_1 > 0$ y $F \in \mathscr{F}(X_0, X_1)$, ponemos

$$G(z) := M_0^{z-1} M_1^{-z} T(F(z)).$$

Esta función pertenece a $\mathscr{F}(Y_0, Y_1)$ y satisface $\|G\|_{\mathscr{F}} \le \|F\|_{\mathscr{F}}$. Como $G(\theta) = M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} T(F(\theta))$, el ínfimo sobre $F$ da la cota requerida. Si algún $M_j$ es cero, usamos las cotas $M_j + \varepsilon$ y hacemos $\varepsilon \to 0^+$. □

**Lema 5.7.6.** (Criterio dual para la norma de Lebesgue) Sea $(A, \mu)$ un espacio de medida $\sigma$-finito y sea $h$ una función medible finita casi en todas partes. Para $1 \le s \le \infty$,

$$\|h\|_{L^s(A)} = \sup\left\{ \left| \int_A hg\, d\mu \right| \;\middle|\; \begin{array}{l} g \text{ simple, de soporte de medida finita,} \\ hg \in L^1(A), \quad \|g\|_{L^{s'}(A)} \le 1 \end{array} \right\},$$

permitiendo que ambos miembros sean infinitos.

*Demostración.* Hölder prueba una desigualdad si $h \in L^s$, y si la norma de $h$ es infinita esa desigualdad es automática. Para la otra, tomamos una sucesión creciente de conjuntos de medida finita cuya unión es $A$ y la intersectamos con $\{|h| \le N\}$. En cada conjunto resultante, cuando $1 < s < \infty$ usamos la función $\overline{\operatorname{sgn} h}|h|^{s-1}$, normalizada en $L^{s'}$. Es acotada y puede aproximarse uniformemente por funciones simples; si es necesario se divide cada aproximación por el máximo de uno y su norma. El valor del supremo es al menos la norma $L^s$ de $h$ restringida a ese conjunto. Para $s = 1$ se usa $\overline{\operatorname{sgn} h}$, de norma a lo más uno en $L^\infty$. La convergencia monótona da la conclusión en ambos casos. Si $s = \infty$, para cada $0 < a < \|h\|_\infty$ elegimos un conjunto de medida positiva y finita donde $a < |h| \le N$, y usamos el indicador normalizado de ese conjunto multiplicado por $\overline{\operatorname{sgn} h}$. Las mismas aproximaciones simples muestran que el supremo es al menos $a$. □

**Teorema 5.7.7.** (Riesz–Thorin) Sean $(A, \mu)$ y $(B, \nu)$ espacios de medida $\sigma$–finitos, sean $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$ y sea

$$T : L^{p_0}(A) + L^{p_1}(A) \longrightarrow L^{q_0}(B) + L^{q_1}(B)$$

un operador lineal. Supongamos

$$\|Tf\|_{L^{q_j}(B)} \le M_j \|f\|_{L^{p_j}(A)}, \qquad j = 0, 1.$$

Si $0 < \theta < 1$ y

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

entonces la restricción de $T$ a $L^{p_\theta}(A)$ toma valores en $L^{q_\theta}(B)$ y

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}(B)} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^{p_\theta}(A)}.$$

*Demostración.* Supongamos primero $p_\theta < \infty$ y $q_\theta > 1$. Por homogeneidad basta considerar funciones simples

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbf{1}_{E_k}, \qquad g = \sum_{\ell=1}^{L} b_\ell \mathbf{1}_{F_\ell},$$

con conjuntos disjuntos de medida finita y $\|f\|_{L^{p_\theta}(A)} = \|g\|_{L^{q'_\theta}(B)} = 1$. Para $a \neq 0$ escribimos $\omega(a) := \frac{a}{|a|}$ y ponemos

$$\frac{1}{p(z)} := \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}, \qquad \frac{1}{q'(z)} := \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}.$$

Con la convención de omitir los coeficientes nulos, definimos

$$f_z := \sum_{k=1}^{N} |a_k|^{\frac{p_\theta}{p(z)}} \omega(a_k) \mathbf{1}_{E_k}, \qquad g_z := \sum_{\ell=1}^{L} |b_\ell|^{\frac{q'_\theta}{q'(z)}} \omega(b_\ell) \mathbf{1}_{F_\ell}.$$

Entonces $f_\theta = f$, $g_\theta = g$ y, para $j \in \{0,1\}$ y $t \in \mathbb{R}$,

$$\|f_{j+it}\|_{L^{p_j}(A)} = 1, \qquad \|g_{j+it}\|_{L^{q'_j}(B)} = 1.$$

Si $p_j = \infty$ o $q'_j = \infty$, la igualdad se interpreta con $\frac{1}{\infty} = 0$ y se verifica tomando el máximo esencial. La función

$$\Phi(z) := \int_B (T f_z)(y) g_z(y)\, d\nu(y)$$

es holomorfa y acotada en la franja cerrada; al expandir las dos sumas se reduce a una suma finita de funciones exponenciales de $z$. La hipótesis en los bordes y la desigualdad de Hölder de la Proposición B.7.9 dan $|\Phi(j+it)| \le M_j$. El Lema 5.7.3 proporciona

$$\left| \int_B (Tf) g\, d\nu \right| \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Al deshacer la normalización y usar el criterio del Lema 5.7.6, obtenemos la estimación para $1 < q_\theta < \infty$. Si $q_\theta = 1$, necesariamente $q_0 = q_1 = 1$; se toma $g_z = g \in L^\infty(B)$ y el mismo argumento funciona. Si $q_\theta = \infty$, necesariamente $q_0 = q_1 = \infty$; la cota se obtiene aplicando el argumento a funciones $g \in L^1(B)$ y usando de nuevo la dualidad. Si $p_\theta = \infty$, entonces $p_0 = p_1 = \infty$ y se toma $f_z = f$.

Finalmente, la Proposición B.7.5 permite pasar de funciones simples a toda función de $L^{p_\theta}(A)$ cuando $p_\theta < \infty$. Este límite conserva el operador original: $L^{p_\theta}(A)$ se incluye continuamente en $L^{p_0}(A) + L^{p_1}(A)$. Para verlo, si $p_0 < p_1$ y $f \neq 0$, dividimos $f$ en los conjuntos $\{|f| > \|f\|_{p_\theta}\}$ y $\{|f| \le \|f\|_{p_\theta}\}$; las dos partes tienen normas en $L^{p_0}$ y $L^{p_1}$ a lo más $\|f\|_{p_\theta}$. Si $p_1 < p_0$ se intercambian los papeles, y si $p_0 = p_1$ el encaje es inmediato. El operador $T$ es continuo entre los espacios suma, por sus cotas extremas, y ambos límites coinciden localmente en medida. Cuando $p_\theta = \infty$, el argumento con $f_z = f$ se aplica a cada $f \in L^\infty(A)$, sin aproximar en esa norma. Esto concluye la prueba. □

**Teorema 5.7.8.** (Desigualdad de Hausdorff–Young) Sea $1 \le p \le 2$ y sea $p'$ su exponente conjugado. La transformada de Fourier se extiende de manera única a un operador continuo

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$$

y satisface

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le (2\pi)^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demostración.* La norma del operador de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es a lo más $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ por la Proposición 4.11.2; en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es uno por el Teorema de Plancherel 4.11.10. El Teorema de Riesz–Thorin 5.7.7, aplicado inicialmente a funciones simples de soporte finito, da el resultado para $1 < p < 2$ y la constante indicada. La densidad de ese subespacio en $L^p(\mathbb{R}^n)$, dada por la Proposición B.7.5, proporciona la extensión única. □

El intervalo $1 \le p \le 2$ en Hausdorff–Young es esencial. Para $p > 2$ la Proposición 4.11.11 todavía define la transformada en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, pero no hay en general un operador continuo $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Para $p = \infty$ ya aparece el fenómeno más sencillo: la función constante uno satisface

$$\mathcal{F}1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_0$$

en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, que no es una función. Para $2 < p < \infty$, la falta de una cota $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ puede verse con sumas de modulaciones. Si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\psi}$ está sostenida en una bola suficientemente pequeña y $L > 0$ separa sus trasladados, se consideran

$$f_N(x) := \psi(x)\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k e^{ikLx_1}, \qquad \varepsilon_k \in \{-1, 1\}.$$

El Teorema B.8.8, integrado en $x$ mediante el Teorema B.6.17, permite elegir los signos de modo que $\|f_N\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_p N^{\frac{1}{2}}\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Los soportes disjuntos de los bloques de frecuencia dan $\|\widehat{f_N}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = N^{\frac{1}{p'}}\|\widehat{\psi}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$. Como $\frac{1}{p'} > \frac{1}{2}$, una cota uniforme sería imposible.

**Corolario 5.7.9.** (Interpolación compleja de espacios de Lebesgue) Sea $(A, \mu)$ un espacio de medida $\sigma$–finito, sean $1 \le p_0, p_1 \le \infty$ y sea $0 < \theta < 1$. Si

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

entonces

$$[L^{p_0}(A), L^{p_1}(A)]_\theta = L^p(A)$$

con igualdad de normas bajo la normalización usual del método complejo.

*Demostración.* Sea $F \in \mathscr{F}(L^{p_0}(A), L^{p_1}(A))$. Para una función simple $g$ de soporte de medida finita, con $\|g\|_{L^{p'}(A)} = 1$, construimos como en la prueba del Teorema 5.7.7 una familia analítica $g_z$ tal que $g_\theta = g$ y $\|g_{j+it}\|_{L^{p_j'}(A)} = 1$. El Lema de las tres líneas 5.7.3, aplicado a

$$z \longmapsto \int_A F(z, x) g_z(x)\, d\mu(x)$$

da $\left|\int_A F(\theta, x) g(x)\, d\mu(x)\right| \le \|F\|_{\mathscr{F}}$. El criterio dual del Lema 5.7.6 produce

$$\|F(\theta)\|_{L^p(A)} \le \|F\|_{\mathscr{F}},$$

y, al tomar el ínfimo, se obtiene $[L^{p_0}(A), L^{p_1}(A)]_\theta \hookrightarrow L^p(A)$.

Para la inclusión inversa, si $p < \infty$, comenzamos con una función simple no nula $f$ de soporte de medida finita y consideramos

$$F(z,x) := e^{\varepsilon(z-\theta)^2} \|f\|_{L^p(A)}^{1-\frac{p}{p(z)}} |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}} \operatorname{sgn} f(x), \qquad \frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}.$$

Entonces $F(\theta) = f$ y, en la frontera $j+it$, el módulo de la potencia de $f$ es $|f|^{\frac{p}{p_j}}$; por ello

$$\|F(j+it)\|_{L^{p_j}(A)} \le e^{\varepsilon(j-\theta)^2} \|f\|_{L^p(A)}.$$

El factor gaussiano garantiza además la desaparición cuando $|t| \to \infty$. Al hacer $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos

$$\|f\|_{[L^{p_0}(A), L^{p_1}(A)]_\theta} \le \|f\|_{L^p(A)}.$$

La Proposición B.7.5 y la completitud del Teorema 5.7.5 permiten pasar a todo $f \in L^p(A)$ cuando $p < \infty$. Si alguno de los exponentes extremos es infinito, se usa la convención $\frac{1}{\infty} = 0$ en la misma fórmula; si $p = \infty$, necesariamente $p_0 = p_1 = \infty$: la función $z \mapsto e^{\varepsilon(z-\theta)^2} f$ da una cota y el Lema de las tres líneas da la otra. □

### 5.7.1 Traslaciones, regularización y estimaciones de frontera

Para interpolar familias de espacios necesitaremos algo más que la cota por el máximo de las normas de frontera. Primero justificaremos las aproximaciones que utilizaremos; después obtendremos una estimación que promedia esas normas.

**Lema 5.7.10.** (Traslaciones y regularización gaussiana) Sea $F \in \mathscr{F}(X_0, X_1)$ y sea $0 < \alpha < 1$. Entonces

$$t \longmapsto F(\alpha + it)$$

es continua con valores en $[X_0, X_1]_\alpha$, tiende a cero cuando $|t| \to \infty$ y satisface

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(\alpha+it)\|_{[X_0,X_1]_\alpha} \le \|F\|_{\mathscr{F}}.$$

Además, existen funciones $F_\varepsilon \in \mathscr{F}(X_0, X_1)$, enteras con valores en $X_0 \cap X_1$, tales que $F_\varepsilon \to F$ en $\mathscr{F}$. En particular, $X_0 \cap X_1$ es denso en $[X_0, X_1]_\alpha$.

*Demostración.* La función $z \mapsto F(z+it)$ pertenece a $\mathscr{F}$ con la misma norma que $F$, lo que da la cota. Las funciones de frontera son continuas y tienden a cero; por tanto, son uniformemente continuas. De aquí

$$\|F(\cdot + ih) - F\|_{\mathscr{F}} \longrightarrow 0 \qquad (h \to 0),$$

y la evaluación en $\alpha + it$ prueba la continuidad afirmada. Para justificar el límite al infinito, fijemos $d > 0$ y usemos el representante $z \mapsto e^{d(z-\alpha)^2} F(z+it)$. Resulta

$$\|F(\alpha+it)\|_{[X_0,X_1]_\alpha} \le e^{d\max\{\alpha^2,(1-\alpha)^2\}} \max_{j\in\{0,1\}} \sup_{s\in\mathbb{R}} e^{-ds^2} \|F(j+i(t+s))\|_{X_j}.$$

En $|s| > R$ el factor gaussiano hace pequeño el miembro derecho uniformemente en $t$; en $|s| \le R$, los valores

de frontera tienden uniformemente a cero cuando $|t| \to \infty$.
Para $\varepsilon > 0$ definimos, inicialmente sobre la franja,

$$F_\varepsilon(z) := \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/\varepsilon} F(z+it)\, dt.$$

Las integrales son de Bochner. El Teorema de Cauchy usado en la Proposición 5.7.1, aplicado sobre rectángulos al integrando, permite desplazar la recta de integración y da

$$F_\varepsilon(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{(z-j-it)^2/\varepsilon} F(j+it)\, dt, \qquad j = 0, 1. \tag{5.6}$$

En efecto, sobre los lados horizontales el módulo del núcleo está acotado por una constante multiplicada por $e^{-(R-|\operatorname{Im} z|)^2/\varepsilon}$; sus integrales tienden a cero. Se desplazan primero rectas interiores y luego se pasa a la frontera por continuidad y convergencia dominada.
El miembro derecho de (5.6) define una función entera con valores en $X_j$: sobre cada compacto en $z$, todas las derivadas del núcleo admiten una cota integrable en $t$. Las dos expresiones coinciden en la franja y, por el principio de identidad, en todo $\mathbb{C}$ con valores en $X_0 + X_1$. Definen así una función entera en $X_0 \cap X_1$. Sobre la recta $j + i\mathbb{R}$ son convoluciones gaussianas de la función de frontera en $X_j$, de donde

$$\|F_\varepsilon\|_{\mathscr{F}} \le \|F\|_{\mathscr{F}}, \qquad \|F_\varepsilon - F\|_{\mathscr{F}} \longrightarrow 0.$$

Para la segunda afirmación se separa la integral en $|t| < \delta$, donde se usa la continuidad uniforme, y $|t| \ge \delta$, donde la masa de la gaussiana tiende a cero. La evaluación en $\alpha$ prueba la densidad. □

**Lema 5.7.11.** (Estimación integral de la norma interpolada) Para $0 < \alpha < 1$ ponemos

$$P_0(\alpha, t) := \frac{\sin(\pi\alpha)}{2(\cosh(\pi t) - \cos(\pi\alpha))}, \qquad P_1(\alpha, t) := \frac{\sin(\pi\alpha)}{2(\cosh(\pi t) + \cos(\pi\alpha))}.$$

Estos núcleos son positivos, integrables y tienen masas $m_0 := 1 - \alpha$ y $m_1 := \alpha$, respectivamente. Si $F \in \mathscr{F}(X_0, X_1)$, entonces

$$\|F(\alpha)\|_{[X_0, X_1]_\alpha} \le \exp\left( \sum_{j=0}^{1} \int_{\mathbb{R}} P_j(\alpha, t) \log \|F(j+it)\|_{X_j}\, dt \right). \tag{5.7}$$

Usamos $\log 0 = -\infty$. En particular, si $1 \le r_0, r_1 \le \infty$,

$$\|F(\alpha)\|_{[X_0, X_1]_\alpha} \le B_0^{1-\alpha} B_1^{\alpha}, \tag{5.8}$$

donde

$$B_j := \left( \frac{1}{m_j} \int_{\mathbb{R}} P_j(\alpha, t) \|F(j+it)\|_{X_j}^{r_j}\, dt \right)^{1/r_j}$$

si $r_j < \infty$, y $B_j := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(j+it)\|_{X_j}$ si $r_j = \infty$. También se tiene

$$\|F(\alpha)\|_{[X_0, X_1]_\alpha} \le \sum_{j=0}^{1} \int_{\mathbb{R}} P_j(\alpha, t) \|F(j+it)\|_{X_j}\, dt. \tag{5.9}$$

Las mismas estimaciones valen para una función continua y acotada sobre la franja, holomorfa en su interior, cuyas restricciones de frontera sean continuas y acotadas en $X_j$, aunque no tiendan a cero.

*Demostración.* Describimos primero la función armónica que interviene en la prueba. Para funciones reales suaves $\varphi_0, \varphi_1$, constantes fuera de un intervalo compacto, ponemos

$$u(x,y) := \sum_{j=0}^{1} \int_{\mathbb{R}} P_j(x, y-t)\varphi_j(t)\,dt, \qquad 0 < x < 1.$$

Los núcleos se obtienen mediante el cambio $w = e^{\pi i z}$ en el núcleo de Poisson del semiplano superior

$$\frac{\operatorname{Im} w}{\pi |s-w|^2}\,ds.$$

Para $s > 0$ se escribe $s = e^{-\pi t}$, y para $s < 0$, $s = -e^{-\pi t}$; estas dos sustituciones dan precisamente $P_0$ y $P_1$. El núcleo del semiplano es la parte imaginaria de $\pi^{-1}(s-w)^{-1}$, así que es armónico. Su integral en $s$ es uno, y su masa fuera de un entorno del punto de frontera tiende a cero. Esto demuestra la armonicidad de $u$ y sus valores $u(j,y) = \varphi_j(y)$. La integración del núcleo sobre las semirrectas positiva y negativa, usando una primitiva arctangente, da las masas $1-x$ y $x$. En particular, $u$ queda entre el mínimo y el máximo de los datos de frontera. Para datos suaves como los elegidos, $u$ y sus primeras derivadas se extienden continuamente hasta las rectas de frontera. Esto puede comprobarse en el núcleo del semiplano: para la derivada tangencial se integra por partes y se aplica el núcleo al dato derivado. Para la derivada normal se resta, cerca del punto de frontera, el polinomio de Taylor de orden uno del dato. El término lineal tiene integral nula sobre intervalos simétricos; el resto es de orden dos y proporciona una cota integrable para el núcleo derivado. Fuera de ese entorno no hay singularidad. La convergencia dominada justifica los límites y la continuidad local de ambas derivadas.

La función $u$ tiene una conjugada armónica en la franja. Podemos construirla, con la normalización $v(\alpha, 0) = 0$, mediante

$$v(x,y) := -\int_{\alpha}^{x} u_y(s,0)\,ds + \int_{0}^{y} u_x(x,t)\,dt.$$

La igualdad $u_{xx} + u_{yy} = 0$ da $v_y = u_x$ y $v_x = -u_y$. Por tanto, $h := u + iv$ es holomorfa, $h(\alpha) = u(\alpha, 0)$ es real, y $\operatorname{Re} h(j+it) = \varphi_j(t)$.

Fijemos $\varepsilon, \delta > 0$. Las funciones $t \mapsto \log(\|F(j+it)\|_{X_j} + \varepsilon)$ son continuas y tienden a $\log \varepsilon$. Mediante un corte fuera de un intervalo grande y una convolución con una función suave, elegimos $\varphi_j$ como arriba de modo que

$$\log(\|F(j+it)\|_{X_j} + \varepsilon) \le \varphi_j(t) \le \log(\|F(j+it)\|_{X_j} + \varepsilon) + \delta.$$

Construimos $h$ con estos datos y definimos

$$G(z) := e^{h(\alpha) - h(z)} F(z).$$

La acotación de $\operatorname{Re} h$ prueba que $G \in \mathscr{F}$; además, $G(\alpha) = F(\alpha)$ y

$$\|G(j+it)\|_{X_j} \le e^{u(\alpha,0)} \frac{\|F(j+it)\|_{X_j}}{\|F(j+it)\|_{X_j} + \varepsilon} \le e^{u(\alpha,0)}.$$

Por la definición de la norma interpolada,

$$\log \|F(\alpha)\|_{[X_0,X_1]_\alpha} \le \delta + \sum_{j=0}^{1} \int_{\mathbb{R}} P_j(\alpha,t) \log(\|F(j+it)\|_{X_j} + \varepsilon)\, dt.$$

Hacemos primero $\delta \to 0$ y luego $\varepsilon \to 0^+$. La convergencia monótona, aplicada después de restar una cota superior constante, justifica el límite incluso si la integral vale $-\infty$.

Para obtener (5.8), aplicamos la concavidad del logaritmo respecto de las medidas de probabilidad $m_j^{-1} P_j(\alpha,t)\, dt$ a las potencias $r_j$. Esa desigualdad integral se sigue de $\log s \le s-1$, dividiendo primero por el promedio. Si $r_j = \infty$, usamos el supremo. La misma desigualdad respecto de la medida de masa uno sobre ambas rectas da (5.9).

Finalmente, para una función con valores de frontera acotados que no se anulan al infinito, aplicamos lo anterior a $e^{d(z-\alpha)^2} F(z)$. Esta función pertenece a $\mathscr{F}$ y tiene el mismo valor en $\alpha$. Hacemos $d \to 0^+$ en las estimaciones, usando convergencia dominada; los núcleos decrecen exponencialmente y los valores de frontera están acotados. □

### 5.7.2 Sumas de espacios y funciones con valores en Banach

Las aplicaciones a bloques de Fourier y a familias de cartas requieren interpolar varias componentes a la vez. Primero estudiaremos una familia finita, donde cada componente admite un representante de Calderón. Después pasaremos a familias infinitas mediante truncaciones, y a funciones medibles mediante aproximación por funciones simples. Las restricciones sobre los exponentes expresan precisamente cuándo estas aproximaciones convergen en norma.

Para un espacio de Banach $X$, escribiremos $L^r(A;X)$ para las clases de funciones fuertemente medibles con norma

$$\|f\|_{L^r(A;X)} := \left( \int_A \|f(a)\|_X^r \, d\mu(a) \right)^{1/r}$$

finita, o con norma dada por el supremo esencial si $r = \infty$. Estos espacios son completos. En efecto, de una sucesión de Cauchy se extrae una subsucesión cuyas diferencias tienen normas sumables. Minkowski y convergencia monótona muestran que la suma puntual de las normas de esas diferencias pertenece a $L^r$, si $r < \infty$. Así, la serie converge casi en todas partes en $X$ y sus colas tienden a cero en $L^r$. Si $r = \infty$, la misma conclusión se obtiene fuera de la unión numerable de los conjuntos nulos de las cotas esenciales. El límite es fuertemente medible por el Lema B.6.24.

**Proposición 5.7.12.** (Interpolación de sumas $\ell^p$ y espacios de Bochner) Sea $I$ un conjunto, sean $1 \le r_0, r_1 < \infty$ y $0 < \theta < 1$, y pongamos

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}.$$

Para una familia de pares compatibles de espacios de Banach complejos $(X_{0,i}, X_{1,i})_{i\in I}$, se tiene isométricamente

$$\left[\ell^{r_0}\left(I;(X_{0,i})_{i\in I}\right), \ell^{r_1}\left(I;(X_{1,i})_{i\in I}\right)\right]_\theta = \ell^r\left(I;([X_{0,i},X_{1,i}]_\theta)_{i\in I}\right). \tag{5.10}$$

Si $w_{0,i}, w_{1,i} > 0$, la misma identidad con normas ponderadas es

$$\left[\ell^{r_0}\left(I;(w_{0,i}X_{0,i})_{i\in I}\right), \ell^{r_1}\left(I;(w_{1,i}X_{1,i})_{i\in I}\right)\right]_\theta = \ell^r\left(I;(w_{0,i}^{1-\theta} w_{1,i}^{\theta}[X_{0,i},X_{1,i}]_\theta)_{i\in I}\right), \tag{5.11}$$

donde $wX$ denota $X$ con norma $w\|\cdot\|_X$. Para una familia finita, estas identidades valen también si alguno de los $r_j$ es infinito, con $1/\infty = 0$.
Si $(A,\mu)$ es $\sigma$-finito y $(X_0,X_1)$ es un par compatible, entonces, para $r_0,r_1<\infty$, también se tiene isométricamente

$$[L^{r_0}(A;X_0),L^{r_1}(A;X_1)]_\theta = L^r(A;[X_0,X_1]_\theta). \tag{5.12}$$

*Demostración.* Comenzamos con una familia finita. Sea $F$ una función de Calderón para las sumas de los extremos y escribamos $F_i$ para su coordenada $i$. Las proyecciones coordenadas son continuas en los extremos, por lo que $F_i\in\mathscr{F}(X_{0,i},X_{1,i})$. Apliquemos (5.8) a cada $F_i$ y pongamos

$$b_{j,i} := \left(\frac{1}{m_j}\int_{\mathbb{R}} P_j(\theta,t)\|F_i(j+it)\|_{X_{j,i}}^{r_j}\,dt\right)^{1/r_j},\quad m_0=1-\theta,\quad m_1=\theta,$$

con supremos si $r_j=\infty$. Obtenemos

$$\|F_i(\theta)\|_{[X_{0,i},X_{1,i}]_\theta}\le b_{0,i}^{1-\theta}b_{1,i}^{\theta}.$$

Si $r<\infty$, Hölder para sumas, con $r(1-\theta)/r_0+r\theta/r_1=1$, da

$$\|(F_i(\theta))_i\|_{\ell^r([X_{0,i},X_{1,i}]_\theta)}\le\|(b_{0,i})_i\|_{\ell^{r_0}}^{1-\theta}\|(b_{1,i})_i\|_{\ell^{r_1}}^{\theta}\le\|F\|_{\mathscr{F}}.$$

La última cota se obtiene intercambiando la suma y la integral por Tonelli. Si alguno de los $r_j$ es infinito, se usa el máximo de los $b_{j,i}$; si $r=\infty$, ambos extremos son infinitos y se toma el máximo en la estimación coordenada. Esto prueba una de las inclusiones.
Para la otra, sea $x=(x_i)_i$, pongamos $a_i:=\|x_i\|_{[X_{0,i},X_{1,i}]_\theta}$ y $A:=\|(a_i)_i\|_{\ell^r}$. Si $A=0$ no hay nada que probar. Omitimos las coordenadas nulas y elegimos representantes $F_i(\theta)=x_i$ con $\|F_i\|_{\mathscr{F}}\le(1+\varepsilon)a_i$. Cuando $r<\infty$, definimos

$$\frac{1}{r(z)}:=\frac{1-z}{r_0}+\frac{z}{r_1},\qquad F(z):=\left(A^{1-r/r(z)}a_i^{r/r(z)-1}F_i(z)\right)_i.$$

Es una función de Calderón para las sumas y $F(\theta)=x$. En cada frontera,

$$\|F(j+it)\|_{\ell^{r_j}(X_{j,i})}\le(1+\varepsilon)A^{1-r/r_j}\left(\sum_{i\in I}a_i^r\right)^{1/r_j}=(1+\varepsilon)A,$$

con la interpretación del máximo si $r_j=\infty$. Si ambos extremos son infinitos, basta tomar $F=(F_i)_i$; la familia es finita. Hacer $\varepsilon\to0^+$ prueba la igualdad de normas.
Para $I$ arbitrario y $r_0,r_1<\infty$, restringir a subconjuntos finitos da la primera inclusión y su cota, pues la norma de $\ell^r(I)$ es el supremo de las normas de sus restricciones finitas. En sentido inverso, todo elemento de $\ell^r(I)$ tiene a lo más un número numerable de coordenadas no nulas: para cada entero $k\ge1$ sólo hay finitas coordenadas de norma mayor que $1/k$. Sus truncaciones convergen en $\ell^r$, y la cota ya probada las hace de Cauchy en el espacio interpolado. La completitud y las proyecciones coordenadas identifican el límite. No se ha usado densidad en una suma infinita $\ell^\infty$.
La fórmula con pesos se obtiene primero en cada coordenada. En efecto, multiplicar un representante por $w_0^{z-\theta}w_1^{\theta-z}$ conserva su valor en $\theta$ y cambia sus normas de frontera ponderadas por el factor común $w_0^{1-\theta}w_1^{\theta}$. La multiplicación inversa da la otra desigualdad. Aplicamos entonces la fórmula de sumas recién probada.
Pasemos a las funciones de Bochner. Para conjuntos medibles disjuntos $E_1,\dots,E_N$ de medida positiva y

finita, definimos

$$Pf := \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{1}_{E_\nu} \frac{1}{\mu(E_\nu)} \int_{E_\nu} f \, d\mu,$$

y ponemos $Pf = 0$ fuera de su unión. La desigualdad para la integral de Bochner y Hölder muestran, para todo Banach $X$ y $1 \le s < \infty$,

$$\|Pf\|_{L^s(A;X)} \le \|f\|_{L^s(A;X)}.$$

Su imagen se identifica con una suma finita de copias de $X$, cuya norma tiene pesos $\mu(E_\nu)^{1/s}$. La fórmula ponderada da exactamente el peso $\mu(E_\nu)^{1/r}$ en el espacio interpolado.
Sea $F \in \mathscr{F}(L^{r_0}(A;X_0), L^{r_1}(A;X_1))$. Para cada $j$, la imagen de la recta de frontera, junto con el cero, es compacta en $L^{r_j}(A;X_j)$. Elegimos una red finita de esa imagen y aproximamos sus elementos por funciones simples de soporte de medida finita. Tal aproximación existe por la medibilidad fuerte y la integrabilidad de la norma: se truncan primero el dominio y el tamaño de la función y luego se usan las funciones simples de su definición. Una partición común de los soportes de estas aproximaciones produce un operador $P$ que las fija. Su contractividad implica, para cada función $f$ de la red y su aproximación $g$,

$$\|Pf - f\| \le \|P(f-g)\| + \|g - f\| \le 2\|f - g\|.$$

Al hacer pequeñas las redes y los errores, obtenemos operadores $P_k$ tales que $P_k F \to F$ en $\mathscr{F}$.
La igualdad para sumas finitas implica

$$\|P_k F(\theta) - P_l F(\theta)\|_{L^r(A;[X_0,X_1]_\theta)} \le \|(P_k - P_l)F\|_{\mathscr{F}}.$$

Para usarla, basta refinar las dos particiones a una partición común. Así, $P_k F(\theta)$ converge en el espacio de Bochner del miembro derecho de (5.12). Ese límite coincide con $F(\theta)$: ambas convergencias implican convergencia local en medida con valores en $X_0 + X_1$, usando Hölder sobre conjuntos de medida finita. Esto prueba la inclusión desde el miembro izquierdo. La cota es uno, puesto que $\|P_k F\|_{\mathscr{F}} \le \|F\|_{\mathscr{F}}$.
Finalmente, las funciones simples de soporte de medida finita con valores en $[X_0, X_1]_\theta$ son densas en su espacio de Bochner. Para cada una, la construcción con representantes coordenados y los pesos anteriores da la inclusión inversa con cota uno. Las diferencias de dos funciones simples se tratan sobre una partición común; la completitud permite pasar al límite. Esto concluye la prueba. □

### 5.7.3 Reiteración compleja

Para demostrar la reiteración conservando las hipótesis generales, usaremos una descripción por coeficientes de Fourier de funciones periódicas. La idea es expresar un elemento de dos maneras: como suma de una sucesión y como valor constante de una sucesión descompuesta entre los extremos. La relación entre ambas se obtiene tomando diferencias y sumas parciales. Este procedimiento se relaciona con el enfoque de [100, §§4 y 6].

**Definición 5.7.13.** (Espacios de coeficientes de Fourier) Sea $X$ un espacio de Banach complejo. Denotamos por $\mathcal{C}(X)$ el espacio de sucesiones $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de la forma

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt, \qquad f \in L^1((-\pi,\pi);X),$$

identificando los extremos del intervalo. Su norma es

$$\|u\|_{\mathcal{C}(X)} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(t)\|_X \, dt.$$

Para $b > 1$ y $\rho \in \mathbb{R}$, escribimos

$$\mathcal{C}_b(\rho; X) := \{u \mid (b^{\rho n} u_n)_n \in \mathcal{C}(X)\}, \qquad \|u\|_{\mathcal{C}_b(\rho;X)} := \|(b^{\rho n} u_n)_n\|_{\mathcal{C}(X)}.$$

Estos coeficientes periódicos usan la medida $dt/(2\pi)$; no son la transformada de Fourier en $\mathbb{R}$ definida en el capítulo anterior.

Justifiquemos que la norma está bien definida. El núcleo de Fejér

$$\Phi_N(t) := \frac{1}{N+1}\left|\sum_{k=0}^{N} e^{ikt}\right|^2$$

es no negativo, tiene integral uno respecto de $dt/(2\pi)$ y satisface $\Phi_N(t) \le ((N+1)\sin^2(t/2))^{-1}$ fuera de $t = 0$. Por ello, sus convoluciones aproximan uniformemente a las funciones continuas periódicas: se usa continuidad uniforme cerca de cero y la cota anterior en el complemento. Aproximando una función de Bochner en $L^1$ por funciones simples y sus indicadores escalares por funciones continuas periódicas, el mismo resultado vale en $L^1$, pues las convoluciones tienen norma a lo más uno. Sus coeficientes son

$$(Q_N u)_n := \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)_+ u_n.$$

En consecuencia, si todos los coeficientes de $f$ son cero, entonces $\Phi_N * f = 0$ para todo $N$ y $f = 0$. Esto prueba la unicidad de $f$ y la completitud de $\mathcal{C}(X)$, por su identificación isométrica con $L^1$ con medida normalizada. También prueba

$$\|Q_N u\|_{\mathcal{C}_b(\rho;X)} \le \|u\|_{\mathcal{C}_b(\rho;X)}, \qquad Q_N u \longrightarrow u \quad \text{en } \mathcal{C}_b(\rho; X). \tag{5.13}$$

Cada coordenada satisface $\|b^{\rho n} u_n\|_X \le \|u\|_{\mathcal{C}_b(\rho;X)}$. Así, los espacios de coeficientes forman pares compatibles en el espacio de sucesiones con valores en $X_0 + X_1$, equipado con la topología de convergencia coordenada.

**Lema 5.7.14.** (Representaciones discretas del método complejo) Sean $b > 1$ y $0 < \theta < 1$. Para un par compatible $(X_0, X_1)$, pongamos

$$\mathcal{U}_0 := \mathcal{C}_b(-\theta; X_0), \qquad \mathcal{U}_1 := \mathcal{C}_b(1-\theta; X_1).$$

Entonces $x \in [X_0, X_1]_\theta$ si y sólo si existe $u \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$ tal que

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \quad \text{en } X_0 + X_1.$$

Su norma es equivalente al ínfimo de $\max\{\|u\|_{\mathcal{U}_0}, \|u\|_{\mathcal{U}_1}\}$ sobre estas representaciones. También es equivalente a

$$\|\underline{x}\|_{\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_1}, \qquad \underline{x} := (x)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

En particular, la última cantidad es finita exactamente para los elementos de $[X_0, X_1]_\theta$. Las constantes dependen sólo de $b$ y $\theta$.

*Demostración.* Si $u \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$, las cotas coordenadas dan

$$\|u_n\|_{X_0} \le b^{\theta n}\|u\|_{\mathcal{U}_0}, \qquad \|u_n\|_{X_1} \le b^{-(1-\theta)n}\|u\|_{\mathcal{U}_1}.$$

Usamos la primera para $n < 0$ y la segunda para $n \ge 0$. Las series geométricas prueban convergencia absoluta en $X_0 + X_1$. Los polinomios exponenciales

$$H_N(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} b^{(z-\theta)n}(Q_N u)_n$$

toman valores en $X_0 \cap X_1$ y tienen período imaginario $P := 2\pi/\log b$. En la frontera $j+it$, su función periódica es la suma de Fejér de la función cuyos coeficientes son $b^{(j-\theta)n}u_n$.
El Lema 5.7.11, en su versión para funciones acotadas, implica

$$\|H_N(\theta) - H_M(\theta)\|_{[X_0,X_1]_\theta} \le C_{b,\theta} \max_{j\in\{0,1\}} \|(Q_N - Q_M)u\|_{\mathcal{U}_j}. \tag{5.14}$$

Para comprobar la constante, descomponemos cada integral de Poisson en intervalos de longitud $P$. El núcleo periodizado $\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_j(\theta, t+kP)$ está uniformemente acotado en $[0,P]$, porque $P_j$ es continuo y decrece exponencialmente. Esto controla la integral por una constante multiplicada por el promedio $P^{-1}\int_0^P \|H_N(j+it) - H_M(j+it)\|_{X_j}\,dt$. Por (5.13), los valores $H_N(\theta)$ convergen en el espacio interpolado; en el espacio suma convergen a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$. Obtenemos así la primera cota de normas.
Probemos la dirección contraria. Si $H$ es holomorfa en la franja, continua y acotada hasta la frontera en las normas correspondientes, y tiene período imaginario $P$, definimos

$$u_n := b^{-(j-\theta)n}\frac{1}{P}\int_0^P H(j+it)e^{-in(\log b)t}\,dt, \qquad j = 0,1. \tag{5.15}$$

Las dos expresiones coinciden: se aplica Cauchy a $b^{-n(z-\theta)}H(z)$ en un rectángulo de altura $P$, y las integrales horizontales se cancelan por periodicidad. Se llega a las rectas de frontera por continuidad. Por tanto, $u_n \in X_0 \cap X_1$, $u \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$ y

$$\max_{j\in\{0,1\}} \|u\|_{\mathcal{U}_j} \le \max_{j\in\{0,1\}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|H(j+it)\|_{X_j}.$$

Las mismas integrales sobre la recta $\operatorname{Re} z = \theta$ muestran que $(u_n)_n$ son los coeficientes de $H(\theta+it)$. La convergencia de Fejér en esa recta y la convergencia absoluta ya probada dan $H(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$.
Ahora sea $x \in [X_0,X_1]_\theta$, $x \ne 0$, y elijamos $F(\theta) = x$ con $\|F\|_{\mathscr{F}} \le 2\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta}$. Fijamos $d > 0$ tan grande que

$$2\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{-dk^2P^2} \le \frac{1}{2}$$

y periodizamos:

$$H(z) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{d(z+ikP-\theta)^2}F(z+ikP).$$

La serie converge uniformemente sobre compactos y sobre un período de cada frontera, con valores en $X_j$

en la frontera $j$. Además,

$$\max_{j\in\{0,1\}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|H(j+it)\|_{X_j} \le C_{b,\theta}\|F\|_{\mathscr{F}},$$

pues $\sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-d(t+kP)^2} < \infty$. Si $y := H(\theta)$, el Lema 5.7.10 y la elección de $d$ dan

$$\|x-y\|_{[X_0,X_1]_\theta} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{-dk^2P^2}\|F(\theta+ikP)\|_{[X_0,X_1]_\theta} \le \frac{1}{2}\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta}.$$

La fórmula (5.15) representa $y$ con norma en $\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1$ a lo más $C_{b,\theta}\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta}$. Repetimos la construcción sobre $x-y$ y sobre los residuos sucesivos. Sus normas son a lo más $2^{-l}\|x\|$. Las sucesiones de coeficientes obtenidas forman una serie absolutamente convergente en el Banach $\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1$. Su suma $u$ satisface $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = x$ y tiene la cota requerida. El intercambio de ambas sumas se justifica por la continuidad del operador $u\mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ en el espacio suma, demostrada con las series geométricas al comienzo.

Resta la caracterización mediante $\underline{x}$. Dada una representación $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$, ponemos

$$a_n := \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k<n}} u_k \in X_0, \qquad c_n := \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\ge n}} u_k \in X_1.$$

Entonces $a_n + c_n = x$. En los coeficientes ponderados,

$$b^{-\theta n}a_n = \sum_{l\in\mathbb{N}} b^{-\theta l}b^{-\theta(n-l)}u_{n-l},$$
$$b^{(1-\theta)n}c_n = \sum_{l\in\mathbb{N}_0} b^{-(1-\theta)l}b^{(1-\theta)(n+l)}u_{n+l}.$$

Desplazar los índices de una sucesión de $\mathcal{C}(X)$ corresponde a multiplicar su función por $e^{ilt}$, una isometría en $L^1$. Las series geométricas anteriores dan

$$\|a\|_{\mathcal{U}_0} + \|c\|_{\mathcal{U}_1} \le C_{b,\theta} \max_{j\in\{0,1\}} \|u\|_{\mathcal{U}_j}.$$

Recíprocamente, si $x = a_n + c_n$ con $a\in\mathcal{U}_0$ y $c\in\mathcal{U}_1$, definimos

$$u_n := a_{n+1} - a_n = c_n - c_{n+1} \in X_0\cap X_1.$$

La misma invariancia por desplazamientos implica

$$\|u\|_{\mathcal{U}_0} \le (1+b^\theta)\|a\|_{\mathcal{U}_0}, \qquad \|u\|_{\mathcal{U}_1} \le (1+b^{-(1-\theta)})\|c\|_{\mathcal{U}_1}.$$

Las cotas coordenadas muestran que $a_n\to 0$ en $X_0$ cuando $n\to-\infty$ y $c_n\to 0$ en $X_1$ cuando $n\to\infty$. Así, $\sum_{n=-N}^{N} u_n = a_{N+1} - a_{-N} \to x$ en el espacio suma. Tomar ínfimos completa la prueba. □

**Lema 5.7.15.** (Descomposición de coeficientes en un nivel intermedio) Sea $b > 1$, $0 \le \alpha \le 1$ y pongamos $E_\alpha := [X_0, X_1]_\alpha$ si $0 < \alpha < 1$, $E_0 := X_0$ y $E_1 := X_1$. Entonces

$$\mathcal{C}(E_\alpha) \hookrightarrow \mathcal{C}_b(-\alpha; X_0) + \mathcal{C}_b(1-\alpha; X_1) \tag{5.16}$$

con norma a lo más uno.

*Demostración.* Si $\alpha = 0$ o $1$, el espacio del miembro izquierdo coincide con uno de los sumandos, y la afirmación es inmediata. Supongamos $0 < \alpha < 1$ y denotemos por $V$ el espacio suma de la derecha. Comenzamos con un polinomio trigonométrico

$$f(t) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\le N}} u_n e^{int}, \qquad u_n \in X_0 \cap X_1.$$

Así, su sucesión de coeficientes pertenece a $V$. Sea $\Lambda \in V'$ de norma a lo más uno. Por (5.13), los funcionales $\Lambda \circ Q_M$ tienen norma a lo más uno y convergen a $\Lambda$ sobre cada elemento de $V$. Cada uno depende de un número finito de coordenadas, de modo que tiene la forma

$$(\Lambda \circ Q_M)(v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(v_n), \qquad y_n \in (X_0 + X_1)',$$

con sólo finitos $y_n$ no nulos. Para $j \in \{0,1\}$ ponemos

$$H(z,t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} b^{(\alpha-z)n} e^{-int} y_n.$$

La norma de $\Lambda \circ Q_M$ restringido a $\mathcal{C}_b(j-\alpha; X_j)$ es

$$\sup_{t\in[-\pi,\pi]} \|H(j,t)\|_{X_j'} \le 1. \tag{5.17}$$

Para verificar la igualdad que da esta norma, si $(b^{(j-\alpha)n} v_n)_n$ son los coeficientes de $g \in L^1((-\pi,\pi); X_j)$, entonces

$$(\Lambda \circ Q_M)(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(j,t)(g(t))\, dt.$$

Esto prueba una desigualdad. Para la otra elegimos un punto $t_0$ y un vector unitario de $X_j$ que realice el valor de $\|H(j,t_0)\|_{X_j'}$ con error arbitrariamente pequeño, y lo multiplicamos por un indicador de un intervalo pequeño alrededor de $t_0$, normalizado en $L^1$. La continuidad de $H(j,\cdot)$ da el límite requerido. No se necesita identificar el dual completo de un espacio de Bochner.

Si $F \in \mathscr{F}(X_0, X_1)$ y $t$ está fijo, la función escalar $z \mapsto H(z,t)(F(z))$ es holomorfa y acotada en la franja. En la frontera $j + is$,

$$H(j+is, t) = H(j, t + s\log b),$$

de modo que (5.17) y el Lema de las tres líneas implican

$$|H(\alpha,t)(F(\alpha))| \le \|F\|_{\mathscr{F}}.$$

Al tomar el ínfimo sobre $F$, vemos que $H(\alpha,t)$ tiene norma a lo más uno sobre $E_\alpha$. Por consiguiente,

$$|(\Lambda\circ Q_M)(u)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\alpha,t)(f(t))\,dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(t)\|_{E_\alpha}\,dt.$$

Hacemos $M\to\infty$ y tomamos el supremo sobre $\Lambda$. Hahn–Banach da $\|u\|_V \le \|u\|_{\mathcal{C}(E_\alpha)}$.
El Lema 5.7.10 asegura que $X_0\cap X_1$ es denso en $E_\alpha$. Por ello, los polinomios trigonométricos con coeficientes en esa intersección son densos en $L^1((-\pi,\pi);E_\alpha)$: primero se aplica Fejér y luego se aproximan sus finitos coeficientes. La cota obtenida y la completitud de $V$ extienden el encaje a toda $\mathcal{C}(E_\alpha)$. Las proyecciones coordenadas muestran que esta extensión conserva cada coeficiente, por lo que es la inclusión de (5.16). □

**Teorema 5.7.16.** (Reiteración compleja) Sean $0\le\theta_0<\theta_1\le 1$, $0<\eta<1$ y $\theta := (1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1$. Si $X_{\theta_j} := [X_0,X_1]_{\theta_j}$ en los puntos interiores y se conservan $X_0, X_1$ en los extremos, entonces

$$[X_{\theta_0},X_{\theta_1}]_\eta = [X_0,X_1]_\theta$$

con normas equivalentes. Las constantes dependen sólo de $\theta_0,\theta_1,\eta$.

*Demostración.* Pongamos $Y_j := X_{\theta_j}$ y $\delta := \theta_1-\theta_0$. Para la primera inclusión, sea $F\in\mathscr{F}(X_0,X_1)$ y consideremos sus regularizaciones $F_\varepsilon$ del Lema 5.7.10. Las funciones

$$G_\varepsilon(z) := F_\varepsilon(\theta_0+\delta z)$$

son holomorfas en $X_0\cap X_1$ y pertenecen a $\mathscr{F}(Y_0,Y_1)$. La cota sobre las rectas interiores del mismo lema da

$$\|G_\varepsilon\|_{\mathscr{F}(Y_0,Y_1)} \le \|F_\varepsilon\|_{\mathscr{F}(X_0,X_1)} \le \|F\|_{\mathscr{F}(X_0,X_1)}.$$

En las rectas que coinciden con un extremo se usa directamente la norma de frontera. Para comprobar la acotación en el espacio suma y la holomorfía exigidas, se usa que $F_\varepsilon$ es entera en la intersección y la fórmula (5.6): sus normas en ambos extremos están acotadas en cada franja vertical de ancho finito. La misma estimación aplicada a $F_\varepsilon - F_{\varepsilon'}$ muestra que $(G_\varepsilon)$ es de Cauchy en $\mathscr{F}(Y_0,Y_1)$. Su límite toma en $\eta$ el valor $F(\theta)$, por la continuidad de las inclusiones en $X_0+X_1$. Así,

$$\|F(\theta)\|_{[Y_0,Y_1]_\eta} \le \|F\|_{\mathscr{F}(X_0,X_1)}.$$

Para la inclusión inversa fijamos $b=e$ y $c := b^\delta > 1$. Sea $x\in[Y_0,Y_1]_\eta$. La caracterización por sucesiones constantes del Lema 5.7.14, aplicada al par $(Y_0,Y_1)$ con base $c$, permite escribir

$$\underline{x} = v_0+v_1, \qquad v_j\in\mathcal{C}_c(j-\eta;Y_j),$$

con suma de normas a lo más $C\|x\|_{[Y_0,Y_1]_\eta}$, salvo un error arbitrariamente pequeño. Como $\delta(j-\eta)=\theta_j-\theta$, las sucesiones

$$w_{j,n} := b^{(\theta_j-\theta)n}v_{j,n}$$

pertenecen a $\mathcal{C}(Y_j)$ con la misma norma que $v_j$ en su espacio ponderado. El Lema 5.7.15 las descompone

como

$$w_j = a_{j,0} + a_{j,1}, \qquad a_{j,0} \in \mathcal{C}_b(-\theta_j; X_0), \qquad a_{j,1} \in \mathcal{C}_b(1-\theta_j; X_1),$$

con suma de normas a lo más $\|w_j\|_{\mathcal{C}(Y_j)}$, salvo un error arbitrariamente pequeño. Multiplicar cada coordenada por $b^{(\theta-\theta_j)n}$ y sumar sobre $j \in \{0,1\}$ da

$$\underline{x} = a_0 + a_1, \qquad a_0 \in \mathcal{C}_b(-\theta; X_0), \qquad a_1 \in \mathcal{C}_b(1-\theta; X_1).$$

Los pesos se cancelan exactamente: por ejemplo, $b^{-\theta n} b^{(\theta-\theta_j)n} = b^{-\theta_j n}$. Por tanto,

$$\|\underline{x}\|_{\mathcal{C}_b(-\theta;X_0)+\mathcal{C}_b(1-\theta;X_1)} \le C\|x\|_{[Y_0,Y_1]_\eta}.$$

Otra aplicación del Lema 5.7.14 implica $x \in [X_0, X_1]_\theta$ y da la cota inversa. Las constantes dependen sólo de las bases $b, c$ y de los parámetros indicados; el lema de descomposición tiene norma uno. Esto incluye $\theta_0 = 0$ o $\theta_1 = 1$. □

**Lema 5.7.17.** (Lema de pegado de Calderón) Sea $0 \le \alpha_0 < \alpha_1 \le 1$, sea $0 < \eta < 1$ y pongamos $\alpha := (1-\eta)\alpha_0 + \eta\alpha_1$. Si $G \in \mathscr{F}(X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1})$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \in \mathscr{F}(X_0, X_1)$ tal que

$$F_\varepsilon(\alpha) = G(\eta), \qquad \|F_\varepsilon\|_{\mathscr{F}(X_0,X_1)} \le C_{\alpha_0,\alpha_1,\eta}\left(\|G\|_{\mathscr{F}(X_{\alpha_0},X_{\alpha_1})} + \varepsilon\right).$$

Asimismo, para $F \in \mathscr{F}(X_0, X_1)$ y $0 < \alpha < 1$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(\alpha + it)\|_{[X_0,X_1]_\alpha} \le \|F\|_{\mathscr{F}}.$$

*Demostración.* El Teorema 5.7.16 da $G(\eta) \in [X_0, X_1]_\alpha$ con norma a lo más $C\|G\|_{\mathscr{F}}$. Elegimos un representante cuyo valor en $\alpha$ sea $G(\eta)$ y cuya norma esté a una distancia menor que $\varepsilon$ del ínfimo que define esa norma. La última afirmación es el Lema 5.7.10. □

**Proposición 5.7.18.** (Interpolación real de sumas $\ell^p$) Sea $1 \le p < \infty$. Para todo par compatible $(X_0, X_1)$ y $0 < \theta < 1$,

$$(\ell^p(X_0), \ell^p(X_1))_{\theta,p} = \ell^p((X_0, X_1)_{\theta,p})$$

como conjuntos, y para toda sucesión $x = (x_j)$ se cumple

$$\|x\|_{\ell^p((X_0,X_1)_{\theta,p})} \le \|x\|_{(\ell^p(X_0),\ell^p(X_1))_{\theta,p}} \le 2^{1-\frac{1}{p}}\|x\|_{\ell^p((X_0,X_1)_{\theta,p})}.$$

*Demostración.* Para una sucesión $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, pongamos $J := \mathbb{N}$ y

$$A(t,x) := \left(\sum_{j\in J} K(t, x_j; X_0, X_1)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $x = a + b$, la desigualdad de Minkowski del Teorema B.7.3, aplicada al espacio de medida discreto $J$, da

$$A(t,x) \le \|a\|_{\ell^p(X_0)} + t\|b\|_{\ell^p(X_1)}.$$

Al tomar el ínfimo se obtiene $A(t,x) \le K(t,x;\ell^p(X_0),\ell^p(X_1))$. En sentido inverso elegimos, para cada coordenada, $x_j = a_j + b_j$ con $\|a_j\|_{X_0} + t\|b_j\|_{X_1} \le K(t,x_j) + \varepsilon_j$, donde $(\varepsilon_j) \in \ell^p(J)$ es arbitrariamente pequeña. Entonces

$$\|a\|_{\ell^p(X_0)} + t\|b\|_{\ell^p(X_1)} \le 2^{1-\frac{1}{p}} \left( \sum_{j\in J} (\|a_j\|_{X_0} + t\|b_j\|_{X_1})^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Al hacer tender $(\varepsilon_j)$ a cero resulta

$$A(t,x) \le K(t,x;\ell^p(X_0),\ell^p(X_1)) \le 2^{1-\frac{1}{p}} A(t,x).$$

Elevamos a la potencia $p$, integramos respecto de $t^{-\theta p}\,dt/t$ y aplicamos Tonelli, Teorema B.6.17. Las estimaciones valen también si alguno de los miembros es infinito. Si el miembro derecho es finito, la estimación en $t = 1$ y las descomposiciones elegidas muestran que $x$ pertenece al espacio suma; por tanto, ambas inclusiones han quedado justificadas. □

## 5.8 Espacios de Lorentz como espacios de interpolación

Los encajes fraccionarios obtenidos por el método real llegan de manera natural a espacios de Lorentz. Recordamos sólo lo que se usará después.

**Definición 5.8.1.** (Reordenamiento decreciente y espacios de Lorentz) Sea $(A,\mu)$ un espacio de medida $\sigma$-finito y sin átomos, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Definimos

$$\mu_f(\lambda) := \mu(\{x \in A \mid |f(x)| > \lambda\}), \qquad f^*(t) := \inf\{\lambda \in (0,\infty) \mid \mu_f(\lambda) \le t\}, \qquad t > 0,$$

con $\inf \varnothing = \infty$. Para $1 < p < \infty$ y $1 \le q \le \infty$, el espacio $L^{p,q}(A)$ está formado por las clases de funciones para las cuales

$$\|f\|_{L^{p,q}(A)} := \|t^{1/p} f^*(t)\|_{L^q((0,\infty),dt/t)} < \infty,$$

y, si $q = \infty$, definimos explícitamente

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(A)} = \sup_{t\in(0,\infty)} t^{1/p} f^*(t).$$

También usaremos

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds, \qquad \|f\|^{\#}_{L^{p,q}(A)} := \|t^{1/p} f^{**}(t)\|_{L^q((0,\infty),dt/t)}.$$

La primera expresión es una cuasinorma; la segunda será una norma equivalente, como probaremos a continuación.

**Lema 5.8.2.** (Identidades de reordenamiento) En las condiciones de la definición anterior, para $t > 0$ se cumple

$$\int_0^t f^*(s)\,ds = \sup_{\substack{E\subseteq A \text{ medible} \\ \mu(E)\le t}} \int_E |f|\,d\mu.$$

En consecuencia, si $f = g + h$,

$$\int_0^t f^*(s)\,ds \le \int_0^t g^*(s)\,ds + \int_0^t h^*(s)\,ds.$$

Además, para $0 < p < \infty$,

$$\int_A |f|^p\,d\mu = \int_0^\infty f^*(t)^p\,dt.$$

*Demostración.* La definición del inverso generalizado y la continuidad por la derecha de $\mu_f$ dan

$$|\{s > 0 \mid f^*(s) > \lambda\}| = \mu_f(\lambda), \qquad \lambda > 0.$$

En efecto, $s \ge \mu_f(\lambda)$ implica $f^*(s) \le \lambda$. Si $s < \mu_f(\lambda)$, la continuidad por la derecha proporciona $\delta > 0$ con $\mu_f(\lambda + \delta) > s$, y entonces $f^*(s) \ge \lambda + \delta$. Esta argumentación incluye el caso $\mu_f(\lambda) = \infty$, por continuidad creciente de las medidas cuando el nivel decrece hacia $\lambda$. La fórmula de Cavalieri de la Proposición B.8.1 da por tanto

$$\int_0^t f^*(s)\,ds = \int_0^\infty \min\{t, \mu_f(\lambda)\}\,d\lambda. \tag{5.18}$$

Para $\mu(E) \le t$, Cavalieri también implica

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_0^\infty \mu(E \cap \{|f| > \lambda\})\,d\lambda \le \int_0^\infty \min\{t, \mu_f(\lambda)\}\,d\lambda.$$

Para la desigualdad opuesta usaremos que, en un espacio sin átomos, un conjunto medible de medida finita contiene subconjuntos de cualquier medida comprendida entre cero y su medida. Una justificación es la siguiente. Todo conjunto de medida positiva contiene un subconjunto de medida positiva menor que cualquier $\varepsilon > 0$: se divide en dos partes de medida positiva y se repite con la menor. Para obtener una medida prescrita $a$, se eligen partes disjuntas sin rebasar $a$ y, en cada paso, con medida mayor que la mitad del supremo de las medidas todavía admisibles. Si la suma de las medidas tendiese a un valor menor que $a$, el resto contendría una parte fija de medida positiva menor que la diferencia; ésta seguiría siendo admisible en todos los pasos, contradiciendo la convergencia de la suma. La unión de las partes tiene medida $a$.
Si $|f|$ es simple y tiene soporte de medida finita, se elige $E$ tomando primero sus conjuntos de nivel más alto y, cuando es necesario, una parte del último nivel para completar medida $t$. Se alcanza así la cantidad de (5.18). Para una función general, aproximamos $|f|$ por una sucesión creciente de funciones simples no negativas con soporte de medida finita. Sus funciones de distribución crecen hacia $\mu_f$; la convergencia monótona en (5.18) permite pasar al límite y prueba la igualdad de supremos.
Aplicar esa igualdad a $|g + h| \le |g| + |h|$ da la subaditividad. Finalmente, $|f|$ y $f^*$ tienen la misma función de distribución; Cavalieri aplicado a sus potencias $p$ da la última identidad. □

La subaditividad anterior y Minkowski muestran que $\|\cdot\|^{\#}_{L^{p,q}(A)}$ es una norma. Como $f^* \le f^{**}$, una de las comparaciones es inmediata. Para la otra, ponemos $g(t) := t^{1/p} f^*(t)$ y observamos que

$$t^{1/p} f^{**}(t) = \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{1-1/p} g(s)\,\frac{ds}{s}.$$

El Teorema B.8.6, con $1 - 1/p = 1/p' > 0$, da

$$\|f\|_{L^{p,q}(A)} \le \|f\|^{\#}_{L^{p,q}(A)} \le p'\|f\|_{L^{p,q}(A)}. \tag{5.19}$$

Esto prueba también la desigualdad cuasitriangular para la primera expresión. El teorema siguiente proporcionará la completitud para la norma equivalente.

**Teorema 5.8.3.** (Interpolación de espacios $L^p$) Sea $(A,\mu)$ un espacio de medida $\sigma$–finito y sin átomos. Sean $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$ y

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Entonces

$$(L^{p_0}(A), L^{p_1}(A))_{\theta,q} = L^{p,q}(A)$$

como conjuntos. Más precisamente, existen $c_{p_0,p_1,\theta,q}, C_{p_0,p_1,\theta,q} > 0$, independientes de $f$ y de $(A,\mu)$, tales que

$$c_{p_0,p_1,\theta,q}\|f\|_{L^{p,q}(A)} \le \|f\|_{(L^{p_0}(A),L^{p_1}(A))_{\theta,q}} \le C_{p_0,p_1,\theta,q}\|f\|_{L^{p,q}(A)}.$$

Además, $L^{p,p}(A) = L^p(A)$ con igualdad de normas y, si $q_0 \le q_1$, entonces $L^{p,q_0}(A) \hookrightarrow L^{p,q_1}(A)$.

*Demostración.* Probaremos primero la identidad

$$K(t,f;L^1(A),L^\infty(A)) = \int_0^t f^*(s)\,ds. \tag{5.20}$$

Si $f = g + h$, el Lema 5.8.2 da

$$\int_0^t f^*(s)\,ds \le \|g\|_{L^1(A)} + t\|h\|_{L^\infty(A)}.$$

Tomar el ínfimo prueba una desigualdad. Para la otra, supongamos que la integral es finita y pongamos $\lambda := f^*(t) < \infty$. Con $\operatorname{sgn} f = f/|f|$ donde $f \neq 0$, y cero en sus ceros, definimos

$$g := \operatorname{sgn} f\,(|f| - \lambda)_+, \qquad h := f - g.$$

La monotonía de $\mu_f$ y la definición de $\lambda$ implican $\mu_f(s) > t$ si $0 < s < \lambda$ y $\mu_f(s) \le t$ si $s > \lambda$. Por Cavalieri y (5.18),

$$\|g\|_{L^1(A)} + t\|h\|_{L^\infty(A)} \le \int_\lambda^\infty \mu_f(s)\,ds + t\lambda = \int_0^t f^*(s)\,ds.$$

En particular, esta construcción prueba $f \in L^1 + L^\infty$ siempre que la integral sea finita. Si es infinita, la primera desigualdad ya impide una descomposición de costo finito. Así se obtiene (5.20), con la interpretación extendida.

Para $1 < p < \infty$ pongamos $\alpha := 1 - 1/p$. La identidad anterior da

$$\|f\|_{(L^1(A),L^\infty(A))_{\alpha,q}} = \|t^{1/p} f^{**}(t)\|_{L^q((0,\infty),dt/t)} = \|f\|^{\#}_{L^{p,q}(A)}.$$

Las comparaciones (5.19) prueban $(L^1,L^\infty)_{1-1/p,q} = L^{p,q}$, así como la completitud con la norma $\|\cdot\|^{\#}$, por el Teorema 5.2.4.

Para los exponentes generales escribimos $\alpha_j := 1 - 1/p_j$. Si $1 < p_j < \infty$, lo recién probado con segundo índice $p_j$, junto con la última identidad del Lema 5.8.2, identifica

$$L^{p_j}(A) = L^{p_j,p_j}(A) = (L^1(A), L^\infty(A))_{\alpha_j,p_j}$$

con normas equivalentes. Si $p_0 = 1$ o $p_1 = \infty$, se conserva el extremo correspondiente. Aplicamos el Teorema 5.5.2; su parámetro final es

$$(1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = 1 - \left(\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\right) = 1 - \frac{1}{p}.$$

Obtenemos la identidad afirmada. La equivalencia de las normas en los extremos se transporta por el Teorema 5.3.1, aplicado a la identidad en ambos sentidos; de aquí la dependencia indicada de las constantes. La igualdad $L^{p,p} = L^p$ es isométrica para la cuasinorma de la Definición 5.8.1, pues

$$\|f\|^p_{L^{p,p}(A)} = \int_0^\infty f^*(t)^p \, dt = \|f\|^p_{L^p(A)}.$$

Finalmente, la monotonía de $f^*$ permite comparar, en cada intervalo $[2^k, 2^{k+1}]$, la norma que define $L^{p,q}$ con la de la sucesión $(2^{k/p} f^*(2^k))_k$ en $\ell^q(\mathbb{Z})$. La cota inferior usa el extremo derecho y la superior el izquierdo; el desplazamiento de un índice sólo introduce el factor $2^{1/p}$. El encaje $\ell^{q_0} \hookrightarrow \ell^{q_1}$ cuando $q_0 \le q_1$ prueba la última afirmación. □

# 6

# Regularidad intermedia

La regularidad no avanza únicamente en escalones enteros. Entre tener $m$ y $m+1$ derivadas integrables existe una gama continua de comportamientos que aparece en problemas de traza, interpolación, ecuaciones no locales y teoría espectral. Para medir esos órdenes intermedios utilizaremos diferencias de valores, multiplicadores de Fourier y descomposición en frecuencias.

**Varias escalas para una misma pregunta**

Los potenciales de Bessel relacionaron regularidad y transformada de Fourier; Slobodeckij y Gagliardo desarrollaron seminormas basadas en diferencias; Besov y Triebel organizaron escalas capaces de separar el orden de suavidad de la manera en que se suman las frecuencias. Cada construcción refleja propiedades distintas de las funciones. Sus coincidencias y diferencias permiten elegir la escala adecuada para localizar en cartas, tomar trazas e interpolar operadores.

Los espacios $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ miden la regularidad mediante derivadas de orden entero. Los problemas no locales muestran que también es necesario cuantificar órdenes intermedios. Para $0 < s < 1$, la ecuación formal

$$(-\Delta)^s u = f$$

está asociada con la energía

$$\mathcal{E}_s(u) = \frac{c_{n,s}}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \, dx\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} f\, u \, dx.$$

El primer término compara los valores de $u$ en pares de puntos, en lugar de usar una derivada local, y conduce a la seminorma de Gagliardo–Slobodeckij. Para $1 < p < \infty$, la expresión análoga

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dx\, dy$$

motiva los espacios $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, y aparece en las energías asociadas con el $p$-laplaciano fraccionario.

Existe otra vía hacia la regularidad fraccionaria. El operador $(I - \Delta)^{s/2}$ se define mediante Fourier y conduce a

los potenciales de Bessel y a los espacios $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Las dos construcciones recuperan $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ cuando $s = m \in \mathbb{N}_0$, pero para $s \notin \mathbb{N}_0$ sólo coinciden en general en el caso hilbertiano $p = 2$. Las trazas y la regularidad elíptica requieren además órdenes negativos y escalas que se comporten bien bajo localización.

Por esta razón aparecen conjuntamente Sobolev–Slobodeckij, Bessel, Besov y Triebel–Lizorkin. Cada escala organiza de manera distinta la integrabilidad, el orden de suavidad y la distribución de las frecuencias. El capítulo construye estas escalas, relaciona sus parámetros y demuestra las propiedades de interpolación, localización y encaje que se utilizarán en variedades. Seguimos [98, Capítulos 6–8 y 11–12], [146, Capítulo 1] y [130, §§2.2–2.3].

## 6.1 Potenciales de Bessel y los espacios $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$

Escribimos

$$\langle \xi \rangle := (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Lema 6.1.1.** (Desigualdad de Peetre) Para todo $\mu \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\langle \xi + \eta \rangle^{\mu} \le 2^{\frac{|\mu|}{2}} \langle \xi \rangle^{\mu} \langle \eta \rangle^{|\mu|}.$$

*Demostración.* La desigualdad triangular y $2ab \le a^2 + b^2$ dan

$$\begin{aligned} \langle \xi + \eta \rangle^2 &= 1 + \|\xi + \eta\|^2 \\ &\le 1 + 2\|\xi\|^2 + 2\|\eta\|^2 \\ &\le 2(1 + \|\xi\|^2)(1 + \|\eta\|^2) = 2\langle \xi \rangle^2 \langle \eta \rangle^2. \end{aligned}$$

Si $\mu \ge 0$, elevamos esta desigualdad a la potencia $\frac{\mu}{2}$. Si $\mu < 0$, aplicamos la desigualdad anterior a $\xi = (\xi + \eta) - \eta$ y obtenemos

$$\langle \xi \rangle \le \sqrt{2} \langle \xi + \eta \rangle \langle \eta \rangle.$$

Al dividir por $\langle \xi \rangle \langle \xi + \eta \rangle$ y elevar a la potencia $|\mu|$, resulta

$$\langle \xi + \eta \rangle^{\mu} \le 2^{\frac{|\mu|}{2}} \langle \xi \rangle^{\mu} \langle \eta \rangle^{|\mu|},$$

como se quería. □

Para cada $s \in \mathbb{R}$ y cada multiíndice $\alpha$ existe $C_{s,\alpha} > 0$ tal que

$$|D^{\alpha} \langle \xi \rangle^{s}| \le C_{s,\alpha} \langle \xi \rangle^{s - |\alpha|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En particular, todas estas derivadas tienen crecimiento a lo más polinomial. Por la observación que sigue a la Definición 4.9.5, la multiplicación $T \mapsto \langle \cdot \rangle^{s} T$ está bien definida y es continua en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

**Definición 6.1.2.** (Operador y espacio de Bessel) Sean $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < \infty$. Definimos

$$J^{s} u := \mathcal{F}^{-1}\big(\langle \cdot \rangle^{s} \widehat{u}\big), \qquad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

y

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid J^s u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}, \qquad \|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} := \|J^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

El operador $J^{-s}$ se llama *potencial de Bessel* de orden $s$.

**Proposición 6.1.3.** (Estructura de la escala de Bessel) Sean $s, t \in \mathbb{R}$ y $1 < p < \infty$.

(a) $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach y $J^s : H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo isométrico con inversa $J^{-s}$.

(b) $J^t : H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-t,p}(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo isométrico.

(c) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

(d) Respecto del emparejamiento distribucional extendido desde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, el dual de $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ se identifica isométricamente con $H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$: si $\Lambda_v(u) := \langle v, u\rangle$, entonces

$$\|\Lambda_v\|_{(H^{s,p}(\mathbb{R}^n))'} = \|v\|_{H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demostración.* Las identidades $J^s J^{-s} = I = J^{-s} J^s$ valen en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ porque los símbolos se multiplican. Así, $J^s$ identifica $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con $L^p(\mathbb{R}^n)$, que es completo por el Teorema B.7.3; esto prueba (a) y (b). Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, la densidad establecida en la Proposición 4.8.5 permite elegir $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $f_j \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ponemos $u_j := J^{-s} f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; entonces $u_j \to J^{-s} f$ en $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.
Para la dualidad, si $v \in H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$ y $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la identidad de Parseval del Teorema 4.11.10, aplicada primero a funciones de Schwartz y después por densidad, permite escribir

$$\langle v, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (J^{-s} v)(x)(J^s u)(x)\, dx.$$

La desigualdad de Hölder de la Proposición B.7.9 da

$$|\Lambda_v(u)| \le \|J^{-s} v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \|J^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Recíprocamente, un funcional continuo sobre $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ se transporta mediante $J^{-s} : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ a un funcional sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$. El Teorema B.7.7 produce $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, y $v := J^s g \in H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$ representa al funcional original y satisface

$$\|v\|_{H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda_v\|_{(H^{s,p}(\mathbb{R}^n))'}.$$

□

Para $s > 0$, el potencial $J^{-s}$ admite una representación por convolución. Esta descripción enlaza la construcción de Fourier con la que más adelante se hará mediante el semigrupo del calor.

**Proposición 6.1.4.** (Núcleo de Bessel euclidiano) Sea $s > 0$. Existe una función radial positiva $G_s \in L^1(\mathbb{R}^n)$, con $\int_{\mathbb{R}^n} G_s = 1$, tal que

$$J^{-s} f = G_s * f$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y, por continuidad, para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Además,

$$G_s(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^\infty e^{-t} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} t^{\frac{s}{2}-1}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

El valor en el origen puede fijarse arbitrariamente sin cambiar el elemento de $L^1$; la integral allí puede divergir cuando $s \le n$.

*Demostración.* La identidad gamma

$$\langle \xi \rangle^{-s} = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^\infty e^{-t(1+\|\xi\|^2)} t^{\frac{s}{2}-1}\, dt$$

y la fórmula de la transformada de la gaussiana del Lema 4.11.4 muestran que la transformada de Fourier de $G_s$, con la normalización de la Definición 4.11.1, es $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \langle \xi \rangle^{-s}$. La fórmula de convolución de la Proposición 4.11.9 da $J^{-s} f = G_s * f$ para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. El Teorema de Tonelli B.6.17 prueba que $G_s \ge 0$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_s(x)\, dx = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1}\, dt = 1.$$

La desigualdad de Young del Teorema 4.10.1, junto con la densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $p < \infty$, extiende la identidad a esos exponentes. Para $p = \infty$, la misma fórmula define directamente $G_s * f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y la identidad se entiende en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, donde se verifica por dualidad contra funciones de Schwartz. □

**Definición 6.1.5.** (Espacios de Bessel en un abierto) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Definimos $H^{s,p}(\Omega)$ como el espacio de restricciones a $\Omega$ de elementos de $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, con la norma cociente

$$\|u\|_{H^{s,p}(\Omega)} := \inf \left\{ \|U\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \;\middle|\; U \restriction_\Omega = u \right\}.$$

La definición anterior es extrínseca: no afirma que una seminorma calculada sólo dentro de $\Omega$ sea equivalente a la norma cociente. Esa equivalencia requiere una propiedad de extensión del abierto y se demostrará para dominios Lipschitz. Esta precisión será esencial al comparar $H^{s,p}(\Omega)$ con los espacios intrínsecos de Slobodeckij.

### 6.1.1 La escala hilbertiana euclidiana y la localización

Para la regularidad elíptica sólo necesitaremos el caso $p = 2$. Escribiremos $H^s(\mathbb{R}^n) := H^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ y $\langle \xi \rangle := (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Si $r \in \mathbb{N}$, el espacio $H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$ se define componente a componente y se dota de la norma

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} := \sum_{a=1}^r \|u^a\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Aunque la definición anterior está disponible para todo $s \in \mathbb{R}$, en la prueba de la regularidad elíptica local sólo se usarán índices enteros, incluidos los índices negativos. Los órdenes no enteros se retomarán después al estudiar las escalas asociadas al semigrupo del calor.

**Proposición 6.1.6.** (Propiedades elementales de la escala $H^s(\mathbb{R}^n)$) Sean $s,t\in\mathbb{R}$, $t\geq s$, y sea $\alpha$ un multiíndice. Entonces se cumplen las afirmaciones siguientes.

(a) $H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ es denso en él.

(b) La inclusión $H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)\hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ es continua.

(c) La derivada distribucional induce un operador lineal continuo

$$D^\alpha : H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)\longrightarrow H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r).$$

(d) La traslación $\tau_h u(x):=u(x-h)$ es una isometría de $H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ y

$$\|\tau_h u-u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } h\to 0.$$

(e) En el caso real, el dual de $H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^r)$ se identifica isométricamente con $H^{-s}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^r)$. En el caso complejo, la identificación hermitiana complejo–lineal correcta es

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n,\overline{\mathbb{C}^r})\xrightarrow{\cong}\big(H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)\big)'. \tag{6.1}$$

Además, la base estándar de $\mathbb{C}^r$ define el emparejamiento distribucional complejo–bilineal

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)\times H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)\longrightarrow\mathbb{C},\qquad (v,u)\longmapsto\langle v,u\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}, \tag{6.2}$$

que también induce un isomorfismo complejo–lineal isométrico del primer factor sobre el dual del segundo. Esta segunda identificación usa la trivialización estándar; la primera es la forma hermitiana intrínseca.

*Demostración.* Por el Teorema de Plancherel 4.11.10, el mapeo

$$\Lambda^s : H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r),\qquad \widehat{\Lambda^s u}(\xi):=\langle\xi\rangle^s\widehat{u}(\xi),$$

es una isometría suprayectiva, con inversa $\Lambda^{-s}$. En el caso real se considera la complejificación al tomar transformadas de Fourier. Los multiplicadores $\langle\xi\rangle^{\pm s}$, por ser reales y pares, conmutan con la conjugación en el espacio físico y preservan las distribuciones reales. Por ello la isometría y su inversa están bien definidas también para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. La completitud de $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ prueba que $H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ es de Hilbert, con el producto interno transportado por $\Lambda^s$.

Para la densidad, sea $u\in H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$. La densidad en $L^2$ permite elegir $(f_j)\subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ tal que $f_j\to\Lambda^s u$ en $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$. Ponemos $u_j:=\Lambda^{-s}f_j$. Las derivadas del símbolo $\langle\xi\rangle^{-s}$ tienen crecimiento a lo más polinómico, de modo que su multiplicación preserva la clase de Schwartz. Como Fourier y su inversa también preservan esa clase, $u_j\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$; si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, la compatibilidad con la conjugación da además $u_j=\overline{u_j}$. Así, en ambos casos $u_j\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ y

$$\|u_j-u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}=\|f_j-\Lambda^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\longrightarrow 0.$$

Si $t \geq s$, entonces $\langle \xi \rangle^s \leq \langle \xi \rangle^t$, de donde

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} = \|\langle \xi \rangle^s \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} \leq \|\langle \xi \rangle^t \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} = \|u\|_{H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

Asimismo, como $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)$ y $|\xi^\alpha| \leq \langle \xi \rangle^{|\alpha|}$,

$$\|D^\alpha u\|_{H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

La transformada de Fourier de $\tau_h u$ es $e^{-ih\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)$, por lo que $\|\tau_h u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} = \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}$. Además,

$$\|\tau_h u - u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |e^{-ih\cdot\xi} - 1|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

El integrando converge puntualmente a cero y está dominado por $4\langle \xi \rangle^{2s} \|\widehat{u}(\xi)\|^2_{\mathbb{C}^r} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. El Teorema de convergencia dominada de Lebesgue B.6.14 da la continuidad de las traslaciones.
Finalmente, sea primero $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Por la forma complejo–lineal de Riesz, Corolario B.3.13, cada funcional $F$ sobre $H^s$ posee un único representante $\overline{g} \in \overline{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)}$ tal que

$$F(u) = \langle \Lambda^s u, g \rangle_{L^2}.$$

Si $w := \Lambda^s g \in H^{-s}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$, esta igualdad se escribe

$$F(u) = \langle \Lambda^s u, \Lambda^{-s} w \rangle_{L^2}.$$

La conjugación puntual identifica complejo–linealmente $\overline{H^{-s}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)}$ con $H^{-s}(\mathbb{R}^n,\overline{\mathbb{C}^r})$; obtenemos así (6.1), incluida la igualdad de normas.
Para el emparejamiento bilineal, si $u, v$ son de Schwartz, Plancherel y la convención de Fourier dan

$$\langle v, u \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{a=1}^{r} \widehat{v^a}(-\xi)\widehat{u^a}(\xi) \, d\xi.$$

Insertando los pesos $\langle \xi \rangle^{-s}$ y $\langle \xi \rangle^s$, Cauchy–Schwarz y el cambio $\xi \mapsto -\xi$ prueban que su norma es a lo más $\|v\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. La igualdad de normas y la suprayectividad se obtienen de la identificación hermitiana anterior mediante la conjugación y la reflexión $\xi \mapsto -\xi$. La densidad de $\mathcal{S}$ extiende el emparejamiento y prueba (6.2). En el caso real se omite la conjugación y el mismo argumento da la afirmación indicada. □

**Definición 6.1.7.** (Espacios de Sobolev locales de orden real) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sea $s \in \mathbb{R}$. Definimos

$$H^s_{\mathrm{loc}(\mathbb{R}^n)}(\Omega,\mathbb{K}^r) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{K}^r) \;\middle|\; \chi u \in H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r) \text{ para toda } \chi \in C^\infty_c(\Omega) \right\},$$

donde $\chi u$ se extiende por cero fuera de $\Omega$.

### 6.1.2 Multiplicación, regularización y conmutadores

La continuidad ordinaria de la multiplicación por una función suave no basta para congelar coeficientes en órdenes negativos. Necesitaremos separar el término principal, controlado por la norma uniforme del coeficiente, de

un resto que pierde una derivada.

**Lema 6.1.8.** (Estimación afinada para la multiplicación) Sean $s \in \mathbb{R}$ y $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Existe una constante $C_{a,s} > 0$ tal que

$$\|av\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + C_{a,s}\|v\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Para una función matricial $A \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, M_{q\times r}(\mathbb{K}))$ existe una constante $C_{A,s} > 0$ tal que

$$\|Av\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^q)} \leq C_{q,r}\|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,M_{q\times r}(\mathbb{K}))}\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + C_{A,s}\|v\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

*Demostración.* Por densidad basta considerar $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Escribimos $\Lambda^s$ para el multiplicador de Fourier con símbolo $\langle\xi\rangle^s$. Entonces

$$\Lambda^s(av) = a\Lambda^s v + R_s(a,v),$$

donde, salvo la constante fija determinada por la normalización de la transformada de Fourier,

$$\widehat{R_s(a,v)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\langle\xi\rangle^s - \langle\xi-\eta\rangle^s\big)\widehat{a}(\eta)\widehat{v}(\xi-\eta)\,d\eta.$$

El Teorema fundamental del cálculo para funciones con valores en un espacio de Banach B.6.5, aplicado a $t \mapsto \langle\xi - t\eta\rangle^s$, junto con la desigualdad de Peetre del Lema 6.1.1, proporciona una constante $C_s > 0$ para la cual

$$\big|\langle\xi\rangle^s - \langle\xi-\eta\rangle^s\big| \leq C_s\|\eta\|\langle\eta\rangle^{|s|+1}\langle\xi-\eta\rangle^{s-1}.$$

Como $a \in C_c^\infty$, su transformada de Fourier es de rápido decaimiento y la función

$$K_s(\eta) := C_s\|\eta\|\langle\eta\rangle^{|s|+1}|\widehat{a}(\eta)|$$

pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$. La desigualdad de Young para convoluciones del Teorema 4.10.1 da

$$\|R_s(a,v)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|K_s\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por otra parte,

$$\|a\Lambda^s v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

La suma de las dos estimaciones prueba la desigualdad escalar. La afirmación matricial se obtiene aplicando el resultado a cada entrada y sumando un número finito de componentes. □

**Lema 6.1.9.** (Criterio de localización) Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{K}^r)$ y sea $s \in \mathbb{R}$. Las condiciones siguientes son equivalentes.

(a) $u \in H^s_{\mathrm{loc}(\mathbb{R}^n)}(\Omega,\mathbb{K}^r)$.

(b) Para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$, con $\chi = 1$ en una vecindad de $K$, tal que $\chi u \in H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$.

(c) Cada punto $x \in \Omega$ posee una vecindad abierta $V \Subset \Omega$ y una función $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$, con $\chi = 1$ en una vecindad de $\overline{V}$, para la cual $\chi u \in H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$.

*Demostración.* La implicación (a)⇒(b) es inmediata después de elegir, mediante la Proposición 1.3.6, una función flan igual a uno en una vecindad de $K$, y (b)⇒(c) se obtiene tomando un compacto que contenga al punto en su interior.
Supongamos (c) y sea $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$. El compacto $\operatorname{supp}(\zeta)$ queda cubierto por un número finito de abiertos $V_1, \dots, V_N$ como en (c). Elegimos una partición de la unidad $\eta_1, \dots, \eta_N$ en una vecindad de $\operatorname{supp}(\zeta)$, subordinada a esta cubierta, y funciones $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tales que $\chi_j = 1$ en una vecindad de $\overline{V_j}$ y $\chi_j u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\zeta u = \sum_{j=1}^{N} (\zeta \eta_j)(\chi_j u).$$

La estimación afinada para la multiplicación del Lema 6.1.8 muestra que cada sumando pertenece a $H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$. La suma es finita, de modo que $\zeta u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $u \in H^s_{\mathrm{loc}(\mathbb{R}^n)}$. □

**Proposición 6.1.10.** (Orden de Sobolev local de una distribución) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K}^r)$. Para toda $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\chi T \in H^{-N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r).$$

En particular, cada distribución pertenece localmente a algún espacio de Sobolev de orden entero negativo, aunque el entero puede depender del compacto considerado.

*Demostración.* El argumento es componente a componente, por lo que basta tratar el caso escalar. Sea $K \Subset \Omega$ un compacto que contenga el soporte de $\chi$ en su interior. La continuidad de $T$ sobre $\mathcal{D}_K(\Omega)$ proporciona un entero $q \in \mathbb{N}_0$ y una constante $C > 0$ tales que

$$|\langle T, \psi \rangle| \le C \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le q}} \sup_{x \in K} |D^\alpha \psi(x)| \qquad \text{para toda } \psi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Aplicando esta desigualdad a $\psi = \chi\varphi$, con $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, y usando la regla de Leibniz, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|\langle \chi T, \varphi \rangle| \le C_1 \max_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\beta| \le q}} \|D^\beta \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Elegimos un entero $N > q + \dfrac{n}{2}$. Por el Teorema de inversión de Fourier 4.11.6 y la desigualdad de Cauchy–Schwarz del Teorema B.3.2, para $|\beta| \le q$ se tiene

$$|D^\beta \varphi(x)| \le C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^{|\beta|} |\widehat{\varphi}(\xi)| \, d\xi \le C_3 \left( \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-2(N-|\beta|)} \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^N(\mathbb{R}^n)}.$$

La integral es finita porque $N - |\beta| > \dfrac{n}{2}$. Por lo tanto,

$$|\langle \chi T, \varphi \rangle| \le C_4 \|\varphi\|_{H^N(\mathbb{R}^n)}.$$

La densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $H^N(\mathbb{R}^n)$, probada en la Proposición 6.1.6, permite extender $\chi T$ a un funcional continuo sobre $H^N(\mathbb{R}^n)$. La identificación dual de la Proposición 6.1.6 concluye que $\chi T \in H^{-N}(\mathbb{R}^n)$. □

Sea $\rho$ el molificador radial del Teorema B.9.1, y pongamos $J_\varepsilon u := \rho_\varepsilon * u$.

**Proposición 6.1.11.** (Molificadores en la escala $H^s(\mathbb{R}^n)$) Sean $s \in \mathbb{R}$ y $0 < \varepsilon \leq 1$. Entonces $J_\varepsilon$ induce un operador lineal continuo en $H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$ y

$$\|J_\varepsilon u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

Además,

$$J_\varepsilon u \longrightarrow u \quad \text{en } H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r) \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0^+.$$

Si $u$ tiene soporte compacto, entonces $J_\varepsilon u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$ y

$$\operatorname{supp}(J_\varepsilon u) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}_{\text{euc}}(x, \operatorname{supp}(u)) \leq \varepsilon\}.$$

Finalmente, como $\rho$ es radial, $J_\varepsilon$ es autoadjunto respecto del emparejamiento de $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$ y de la dualidad $H^{-s}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$–$H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$.

*Demostración.* El cambio de variable $y = \varepsilon z$ permite escribir

$$J_\varepsilon u = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) \tau_{\varepsilon z} u \, dz,$$

donde la integral se toma en el espacio de Hilbert $H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$. Como las traslaciones son isometrías,

$$\|J_\varepsilon u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) \|\tau_{\varepsilon z} u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \, dz = \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

Asimismo,

$$\|J_\varepsilon u - u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) \|\tau_{\varepsilon z} u - u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \, dz.$$

Para cada $z$ fijo, el integrando converge a cero por la Proposición 6.1.6, y está dominado por $2\rho(z)\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}$. El Teorema de convergencia dominada de Bochner B.6.25 prueba la convergencia en $H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$.

Si $u$ tiene soporte compacto, la convolución de una distribución compactamente soportada con $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es suave. La inclusión de soportes se sigue directamente de que $\rho_\varepsilon$ se anula fuera de $\overline{B}_{\text{euc}}(0, \varepsilon)$. Finalmente, la radialidad implica $\rho_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(-x)$; el Teorema de Fubini B.6.18, aplicado primero a funciones suaves, y la densidad dan $\langle J_\varepsilon u, v\rangle = \langle u, J_\varepsilon v\rangle$ y después la misma identidad por dualidad. □

**Lema 6.1.12.** (Conmutador de Friedrichs) Sea $j \in \mathbb{Z}$ y sea $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Existe una constante $C_{a,j} > 0$, independiente de $0 < \varepsilon \leq 1$, tal que

$$\|[a, J_\varepsilon]v\|_{H^{j+1}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{a,j} \|v\|_{H^j(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $v \in H^j(\mathbb{R}^n)$, donde $[a, J_\varepsilon] := aJ_\varepsilon - J_\varepsilon a$. La misma afirmación vale para coeficientes matriciales, componente a componente.

*Demostración.* Comenzamos con $j = 0$ y fijamos $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Para $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$[a, J_\varepsilon]v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(a(x) - a(x-y)\big)\rho_\varepsilon(y)v(x-y)\,dy.$$

El Teorema fundamental del cálculo para funciones con valores en un espacio de Banach B.6.5, aplicado a $t \mapsto a(x - ty)$, da

$$|a(x) - a(x-y)| \le \|Da\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|y\|.$$

Por la desigualdad de Young del Teorema 4.10.1,

$$\|[a, J_\varepsilon]v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|Da\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\big\|\|y\|\rho_\varepsilon(y)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\varepsilon\|Da\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Al derivar la identidad $[a, J_\varepsilon]v = aJ_\varepsilon v - J_\varepsilon(av)$ obtenemos

$$D_\ell[a, J_\varepsilon]v = (D_\ell a)J_\varepsilon v + \int_{\mathbb{R}^n} \big(a(x) - a(x-y)\big)(D_\ell\rho_\varepsilon)(y)v(x-y)\,dy.$$

El primer término está acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por $\|D_\ell a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Para el segundo usamos nuevamente el Teorema B.6.5 y observamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|y\||D_\ell\rho_\varepsilon(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \|z\||D_\ell\rho(z)|\,dz,$$

que no depende de $\varepsilon$. Se obtiene así

$$\|[a, J_\varepsilon]v\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \le C_a\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

La densidad extiende la desigualdad a todo $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Procedemos por inducción. Supongamos que, para algún $q \in \mathbb{N}_0$, todo coeficiente $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisface

$$\|[b, J_\varepsilon]w\|_{H^{q+1}(\mathbb{R}^n)} \le C_{b,q}\|w\|_{H^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Si $v \in H^{q+1}(\mathbb{R}^n)$, la identidad distribucional

$$D_\ell[a, J_\varepsilon]v = [D_\ell a, J_\varepsilon]v + [a, J_\varepsilon]D_\ell v$$

y la hipótesis inductiva, aplicada a $D_\ell a$ y a $a$, proporcionan

$$\|D_\ell[a, J_\varepsilon]v\|_{H^{q+1}(\mathbb{R}^n)} \le C\|v\|_{H^{q+1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Junto con la cota en $L^2(\mathbb{R}^n)$, esto da

$$\|[a, J_\varepsilon]v\|_{H^{q+2}(\mathbb{R}^n)} \le C\|v\|_{H^{q+1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por inducción, la afirmación vale para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Sea ahora $j = -q$, con $q \in \mathbb{N}$. Como $J_\varepsilon$ es autoadjunto,

$$[a, J_\varepsilon]^* = -[\overline{a}, J_\varepsilon].$$

La parte ya demostrada, con índice $q-1$, afirma que $[\overline{a}, J_\varepsilon]\colon H^{q-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}^n)$ es uniformemente continuo. Por dualidad, $[a, J_\varepsilon]\colon H^{-q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-q+1}(\mathbb{R}^n)$ es uniformemente continuo. Esto concluye la prueba para todo $j \in \mathbb{Z}$. □

**Corolario 6.1.13.** (Conmutador de un operador diferencial con un molificador) Sea

$$Q = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le m}} A_\alpha(x) D^\alpha$$

un sistema diferencial en $\mathbb{R}^n$ cuyos coeficientes matriciales pertenecen a $C_c^\infty$. Para todo $j \in \mathbb{Z}$ existe una constante $C_{Q,j} > 0$, independiente de $0 < \varepsilon \le 1$, tal que

$$\|[Q, J_\varepsilon]v\|_{H^{j-m+1}(\mathbb{R}^n)} \le C_{Q,j} \|v\|_{H^j(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $v \in H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$.

*Demostración.* Las derivadas con coeficientes constantes conmutan con la convolución, de modo que

$$[Q, J_\varepsilon]v = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le m}} [A_\alpha, J_\varepsilon] D^\alpha v.$$

Por la Proposición 6.1.6, $D^\alpha v \in H^{j-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$. El Lema 6.1.12 da

$$[A_\alpha, J_\varepsilon] D^\alpha v \in H^{j-|\alpha|+1}(\mathbb{R}^n).$$

Como $|\alpha| \le m$, la inclusión $H^{j-|\alpha|+1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{j-m+1}(\mathbb{R}^n)$ es continua. Sumando el número finito de términos se obtiene la estimación afirmada. □

## 6.2 Espacios de Slobodeckij

Los potenciales de Bessel miden la regularidad mediante un multiplicador de Fourier. Existe una segunda manera, intrínseca en la variable espacial, que compara los valores de una función en dos puntos. La potencia del denominador se elige de modo que la expresión sea invariante bajo el escalamiento euclidiano. Esta construcción conduce a los espacios de Sobolev–Slobodeckij y conserva sentido en un abierto sin prolongar previamente la función fuera de él.

**Definición 6.2.1.** (Seminorma de Gagliardo y espacio de Slobodeckij) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, sean $0 < \sigma < 1$ y $1 \le p < \infty$. Para $u \in L^p(\Omega)$ definimos

$$[u]_{W^{\sigma,p}(\Omega)} := \left( \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{\|x - y\|^{n+\sigma p}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

El espacio $W^{\sigma,p}(\Omega)$ está formado por las funciones para las cuales esta seminorma es finita y se dota de

$$\|u\|_{W^{\sigma,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + [u]_{W^{\sigma,p}(\Omega)}.$$

Si $s = m + \sigma$, donde $m \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \sigma < 1$, ponemos

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in W^{m,p}(\Omega) \mid D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \text{ para } |\alpha| = m\},$$

con la norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = m}} [D^\alpha u]_{W^{\sigma,p}(\Omega)}.$$

Para $s = m \in \mathbb{N}_0$ se conserva la definición usual de $W^{m,p}(\Omega)$.

La definición en los enteros no se obtiene tomando formalmente $\sigma = 0$ o $\sigma = 1$: las integrales correspondientes no definen la norma entera. Más adelante veremos que esta discontinuidad aparente refleja una diferencia real entre los índices finos de las escalas de Besov y Triebel–Lizorkin.

**Proposición 6.2.2.** (Forma mediante incrementos) Si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < \sigma < 1$ y $1 \le p < \infty$, entonces

$$[u]^p_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\tau_h u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{\|h\|^{n+\sigma p}}\, dh, \qquad \tau_h u(x) := u(x+h).$$

En particular, el funcional del lado derecho es invariante por traslaciones.

*Demostración.* El integrando es no negativo. El Teorema B.6.17 y el cambio de variables $y = x + h$ proporcionan

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+h)-u(x)|^p}{\|h\|^{n+\sigma p}}\, dx\, dh = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{\|y-x\|^{n+\sigma p}}\, dy\, dx.$$

No es necesario suponer de antemano que alguna de las dos integrales sea finita. □

**Teorema 6.2.3.** (Estructura funcional y densidad) Sean $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$, y $1 \le p < \infty$.

(a) $W^{s,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Si $1 < p < \infty$, entonces $W^{s,p}(\Omega)$ es reflexivo; para todo $1 \le p < \infty$ es separable.

(c) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

*Demostración.* Tratamos primero $0 < s < 1$. Sea

$$d\mu_s(x,y) := \|x-y\|^{-n-sp}\, dx\, dy$$

en $\Omega \times \Omega \setminus \{x = y\}$. El mapeo

$$\mathcal{J}\colon u \longmapsto \left(u, \frac{u(x)-u(y)}{\|x-y\|^{\frac{n}{p}+s}}\right)$$

identifica isométricamente $W^{s,p}(\Omega)$ con un subespacio de

$$L^p(\Omega)\times L^p(\Omega\times\Omega, dx\,dy)$$

cuando el producto lleva la norma suma. Si se usa en el producto la norma $\ell^p$, y ponemos $a := \|u\|_{L^p(\Omega)}$ y $b := [u]_{W^{s,p}(\Omega)}$, entonces

$$(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}} \le a+b \le 2^{1-\frac{1}{p}}(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Ese subespacio es cerrado. En efecto, si $u_j \to u$ en $L^p(\Omega)$ y los cocientes convergen a $v$ en $L^p(\Omega\times\Omega)$, una subsucesión converge puntualmente casi en todas partes en ambos espacios. Fuera de un conjunto nulo se obtiene

$$v(x,y) = \frac{u(x)-u(y)}{\|x-y\|^{\frac{n}{p}+s}}.$$

La completitud del producto prueba (a). El mismo argumento, junto con la reflexividad y la separabilidad de los espacios $L^p$ establecidas en el Teorema B.7.7, prueba (b). Para $s = m+\sigma$ se aplica el argumento a las derivadas débiles de orden $m$ y se usa que el operador $u \mapsto (D^\alpha u)_{|\alpha|\le m}$ tiene gráfica cerrada en el producto de espacios $L^p(\Omega)$.

Probemos (c). Elegimos $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\eta = 1$ en $B_{\mathrm{euc}}(0,1)$ y ponemos $\eta_R(x) = \eta(\frac{x}{R})$. Para $0<s<1$,

$$\begin{aligned}&|(1-\eta_R(x))u(x) - (1-\eta_R(y))u(y)|\\ &\qquad \le |1-\eta_R(x)|\,|u(x)-u(y)| + |u(y)|\,|\eta_R(x)-\eta_R(y)|.\end{aligned}$$

El primer término converge a cero en la medida producto ponderada por el Teorema B.6.14. Para el segundo usamos

$$|\eta_R(x)-\eta_R(y)| \le C\min\left\{1, \frac{\|x-y\|}{R}\right\}.$$

Tras el cambio $h = x-y$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\min\left\{1,\frac{\|h\|}{R}\right\}^p}{\|h\|^{n+sp}}\,dh = C_{n,s,p}R^{-sp};$$

por lo tanto, el segundo término tiende a cero. Se concluye que $\eta_R u \to u$ en $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Sea ahora $\rho$ un molificador estándar y $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$. El Teorema B.8.2 y la invariancia por traslaciones dan

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\|\tau_{\varepsilon z}u - u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\,dz.$$

Las traslaciones son continuas en $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$: esto se sigue aplicando la Proposición B.8.17 tanto a $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ como a la función de dos variables que representa su cociente incremental en $L^p(\mathbb{R}^{2n})$. El Teorema B.6.14 implica $u_\varepsilon \to u$ en $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Aplicamos primero el corte y después la regularización; el resultado pertenece a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para $s = m+\sigma$, $0<\sigma<1$, desarrollamos también los términos que aparecen al cortar. Si $|\alpha| = m$, Leibniz da

$$D^\alpha(\eta_R u - u) = (\eta_R - 1)D^\alpha u + \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\ \beta\le\alpha,\ \beta\ne\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\eta_R\, D^\beta u.$$

El primer término converge a cero en $W^{\sigma,p}$ por lo ya demostrado. Para los restantes, $D^\beta u \in W^{1,p}$. El lema

de incrementos, cuya prueba sólo usa las propiedades de Sobolev entero, da

$$\|w\|_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \qquad w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n):$$

en la integral de incrementos se usa $\|\tau_h w - w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|h\|\|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para $\|h\| < 1$, y $2\|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ en el complemento. Si $\gamma = \alpha - \beta \neq 0$, tanto $\|D^\gamma \eta_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ como $\|D(D^\gamma \eta_R)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ tienden a cero. La fórmula de la diferencia de un producto y esas dos cotas implican

$$\|D^\gamma \eta_R\, D^\beta u\|_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|D^\gamma \eta_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|D(D^\gamma \eta_R)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)\|D^\beta u\|_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

Las derivadas de orden menor se controlan por el mismo Leibniz en $L^p$. Queda justificado el corte en la norma completa. La regularización conmuta con cada derivada débil, y la continuidad de las traslaciones ya probada se aplica a los cocientes de las derivadas de orden $m$. Por tanto, regularizar después del corte concluye la densidad también en los órdenes altos. □

### 6.2.1 La identidad de interpolación de Slobodeckij

La seminorma de Gagliardo no es una elección aislada: es exactamente la cantidad que mide la posición de $u$ entre $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Esta interpretación explica tanto el exponente $n + sp$ como muchas propiedades posteriores.

**Lema 6.2.4.** (Incrementos de una función de Sobolev) Si $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, entonces

$$\|\tau_h w - w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|h\|\,\|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{para todo } h \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Para $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, el Teorema B.6.5 da

$$w(x+h) - w(x) = \int_0^1 \nabla w(x+th)\cdot h\, dt.$$

El Teorema B.8.2 y la invariancia de la norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ por traslaciones producen la desigualdad. La densidad de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, Proposición 3.2.10, permite pasar a todo $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. □

**Teorema 6.2.5.** (Slobodeckij como espacio de interpolación real) Sean $0 < s < 1$ y $1 \le p < \infty$. Entonces

$$\left(L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\right)_{s,p} = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$$

y existen constantes $c_{n,s,p}, C_{n,s,p} > 0$ tales que

$$c_{n,s,p}\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{(L^p(\mathbb{R}^n),W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{s,p}} \le C_{n,s,p}\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

*Demostración.* Escribimos $K(t,u)$ para el funcional del par $(L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$. Si $u = v + w$, con $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, el Lema 6.2.4 y la desigualdad elemental $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ dan

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \le C_p\left(\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|h\|\|w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\right)^p.$$

Tomando el ínfimo y usando coordenadas polares,

$$[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K(\|h\|,u)^p}{\|h\|^{n+sp}}\,dh = C|\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\infty \left(t^{-s}K(t,u)\right)^p \frac{dt}{t}.$$

El encaje del espacio interpolado en $L^p(\mathbb{R}^n) + W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, demostrado en el Teorema 5.2.4, controla también la norma $L^p(\mathbb{R}^n)$. Esto prueba una de las inclusiones.
Para la recíproca tomamos un molificador no negativo $\rho$, sostenido en el bola unitario, y ponemos $u_t = \rho_t * u$. La descomposición

$$u = (u - u_t) + u_t$$

es admisible para $K(t,u)$. La Proposición B.7.9, respecto de la medida de probabilidad $\rho_t(h)\,dh$, proporciona

$$\|u - u_t\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le Ct^{-n} \int_{\{h\in\mathbb{R}^n \,|\, \|h\|<t\}} \|\tau_h u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dh.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} D_i\rho_t(h)\,dh = 0$,

$$D_i u_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_i\rho_t(h)\big(u(x-h) - u(x)\big)\,dh,$$

y otra aplicación de la Proposición B.7.9 da

$$\|\nabla u_t\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le Ct^{-n-p} \int_{\{h\in\mathbb{R}^n \,|\, \|h\|<t\}} \|\tau_h u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dh.$$

Además, el Teorema 4.10.1 da $\|u_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Por consiguiente,

$$K(t,u)^p \le C\left[t^{-n}\int_{\{\|h\|<t\}} \|\tau_h u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dh + t^p\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right]$$

para $0 < t < 1$. Multiplicamos por $t^{-sp}$, integramos respecto de $dt/t$ y aplicamos el Teorema B.6.17. Para el primer término aparece

$$\int_{\{\|h\|<1\}} \|\tau_h u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\|h\|}^1 t^{-n-sp-1}\,dt\right) dh \le C[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

El segundo término es $C\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 t^{(1-s)p}\,dt/t$. Aplicamos las dos desigualdades cuantificadas para la norma truncada del Teorema 5.2.4 y absorbemos sus constantes, que dependen sólo de $s$ y $p$; se obtiene así

$$\|u\|_{(L^p(\mathbb{R}^n),W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{s,p}} \le C\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

**Corolario 6.2.6.** (Interpolación entre órdenes enteros consecutivos) Sean $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < s < 1$ y $1 < p < \infty$. Entonces

$$\left(W^{m,p}(\mathbb{R}^n), W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n)\right)_{s,p} = W^{m+s,p}(\mathbb{R}^n)$$

como conjuntos, y existen constantes $c_{n,m,s,p}, C_{n,m,s,p} > 0$ tales que

$$c_{n,m,s,p}\|u\|_{W^{m+s,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{(W^{m,p}(\mathbb{R}^n),W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n))_{s,p}} \le C_{n,m,s,p}\|u\|_{W^{m+s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $u \in W^{m+s,p}(\mathbb{R}^n)$.

*Demostración.* Para $m = 0$ es el teorema anterior. Supongamos $m \ge 1$. Si $u = v+w$, con $v \in W^{m,p}$ y $w \in W^{m+1,p}$, el Lema 6.2.4 da, para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = m$,

$$\|\tau_h D^\alpha u - D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le 2\|v\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + C|h|\|w\|_{W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Tomamos el ínfimo sobre esas descomposiciones e integramos con el peso $\|h\|^{-n-sp}$, exactamente como en la prueba del caso $m = 0$. Se controlan así todas las seminormas de orden $m+s$. Además, $W^{m+1,p} \hookrightarrow W^{m,p}$ implica

$$K(1,u;W^{m,p},W^{m+1,p}) \ge c\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

La monotonía de $K$ y la parte de la integral de interpolación correspondiente a $1 \le t \le 2$ controlan también esta norma. Se obtiene la primera inclusión continua.

Para la recíproca, fijamos el molificador $\rho$ de la prueba anterior, sostenido en la bola unidad, y escribimos $u = (u - u_t) + u_t$, donde $u_t = \rho_t * u$. Si $|\alpha| < m$, el lema de incrementos da

$$\|D^\alpha(u-u_t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le Ct\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}, \qquad 0 < t < 1.$$

Para $|\alpha| = m$, Minkowski y Hölder dan

$$\|D^\alpha(u-u_t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \le Ct^{-n}\int_{\|h\|<t}\|\tau_h D^\alpha u - D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p\,dh.$$

Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} D_\ell \rho_t = 0$, también

$$t^p\|D_\ell D^\alpha u_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \le Ct^{-n}\int_{\|h\|<t}\|\tau_h D^\alpha u - D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p\,dh, \qquad \ell \in \{1,\dots,n\}.$$

Las derivadas de $u_t$ de orden a lo más $m$ se controlan por Young, de modo que

$$K(t,u;W^{m,p},W^{m+1,p})^p \le Ct^p\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p + Ct^{-n}\int_{\|h\|<t}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|=m}}\|\tau_h D^\alpha u - D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p\,dh.$$

Multiplicamos por $t^{-sp}$ e integramos con $dt/t$ en $0 < t < 1$. El primer término es integrable porque $s < 1$. Para el segundo, Tonelli y

$$\int_{\|h\|}^1 t^{-n-sp-1}\,dt \le \frac{\|h\|^{-n-sp}}{n+sp}, \qquad 0 < \|h\| < 1,$$

producen las seminormas de Gagliardo de las derivadas de orden $m$. Para $t \ge 1$, usamos la descomposición $u = u + 0$; la integral restante queda acotada por $\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p/(sp)$. Esto prueba la segunda inclusión.

Las normas enteras empleadas son las normas $\ell^p$ del libro. Si en alguna estimación aparece una suma de

normas, la comparación es explícita: para $r \in \{m, m+1\}$, con $N_r = \#\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid |\alpha| \le r\}$,

$$\left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le r}} a_\alpha^p \right)^{1/p} \le \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le r}} a_\alpha \le N_r^{1-1/p} \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le r}} a_\alpha^p \right)^{1/p}.$$

Las constantes dependen, por tanto, sólo de $n, m, s, p$ y del molificador fijado. El mismo argumento es válido para $p = 1$. □

## 6.3 Los espacios de Besov y de Triebel–Lizorkin

La descomposición de Littlewood–Paley del Capítulo 4 permite estudiar una distribución separando su contenido en escalas de frecuencia. Cada bloque $\Delta_j u$ mide la parte de $u$ situada aproximadamente en frecuencias de tamaño $2^j$, mientras que el bloque $\Delta_0 u$ reúne las frecuencias bajas. Una vez hecha esta separación aparecen dos maneras naturales de agregar la información. En la primera se toma la norma espacial de cada bloque y después se suman las escalas; en la segunda se combinan primero, punto a punto, todos los bloques y sólo al final se toma la norma espacial. El primer procedimiento conduce a los espacios de Besov y el segundo a los espacios de Triebel–Lizorkin.

La diferencia entre ambos órdenes de agregación no es meramente notacional. Cuando los índices coinciden, Tonelli permite intercambiar suma e integral; fuera de ese caso, la posición de la norma de sucesiones cambia en general el espacio obtenido. Esta distinción explicará posteriormente por qué los espacios de Sobolev–Slobodeckij se identifican con $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$, mientras que los potenciales de Bessel se identifican con $F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$. Esta forma de organizar las escalas es la descripción clásica de Littlewood–Paley; véanse, por ejemplo, [146, Capítulos 1–2] y [126, Capítulo 2].

Usaremos la resolución $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ y los bloques $\Delta_j$ de la Proposición 4.12.1 y la Definición 4.12.2. Elegimos además funciones reales y radiales $\widetilde{\varphi}_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, iguales a uno en una vecindad de $\operatorname{supp}(\varphi_j)$ y con soportes diádicos uniformes. Escribimos

$$\widetilde{\Delta}_j := \mathcal{F}^{-1} \widetilde{\varphi}_j \mathcal{F}, \qquad j \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces $\widetilde{\Delta}_j \Delta_j = \Delta_j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

### 6.3.1 Las herramientas de multiplicadores

La construcción diádica utiliza dos estimaciones: la continuidad de ciertos multiplicadores de Fourier y el control de una función por sus bloques de frecuencia. Necesitaremos que sus constantes sean uniformes respecto del índice del bloque.

**Teorema 6.3.1.** (Multiplicadores de Mikhlin) Sea $1 < p < \infty$ y sea $N \ge n + 2$ un entero. Supongamos que $m \in C^N(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ satisface

$$M_N(m) := \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le N}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \|\xi\|^{|\alpha|} |D^\alpha m(\xi)| < \infty.$$

Entonces el operador inicialmente definido en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$T_m f := \mathcal{F}^{-1}(m \widehat{f})$$

se extiende de manera única a un operador continuo en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,p,N} M_N(m) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

La misma cota vale para una familia de símbolos con constantes de Mikhlin uniformes.

*Demostración.* Si $M_N(m) = 0$, el símbolo es nulo. En otro caso dividimos primero $m$ por $M_N(m)$, y al final restituiremos este factor. Así podemos suponer $M_N(m) = 1$. Sea $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \vartheta(2^{-j}\xi) = 1$ para $\xi \neq 0$, y pongamos $m_j(\xi) = m(\xi)\vartheta(2^{-j}\xi)$. El cambio $\xi = 2^j\zeta$ y las hipótesis muestran que

$$\max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le N}} \|D^\alpha [m(2^j\cdot)\vartheta]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C M_N(m)$$

uniformemente en $j$. Integrando por partes en la transformada inversa se deduce, para el núcleo $K_j = \mathcal{F}^{-1} m_j$, que

$$|K_j(x)| \le C M_N(m) 2^{jn} (1 + 2^j\|x\|)^{-N}$$

y, aplicando el mismo cálculo a una derivada,

$$|\nabla K_j(x)| \le C M_N(m) 2^{j(n+1)} (1 + 2^j\|x\|)^{-N}.$$

La suma $K = \sum_{j\in\mathbb{Z}} K_j$ converge localmente de manera uniforme en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Separamos los índices según $2^j\|x\| \le 1$ o $2^j\|x\| > 1$ y sumamos las dos series geométricas; se obtiene

$$|K(x)| \le C M_N(m) \|x\|^{-n}, \qquad |K(x-h) - K(x)| \le C M_N(m) \frac{\|h\|}{\|x\|^{n+1}}$$

cuando $\|h\| \le \frac{1}{2}\|x\|$. El operador está acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por el Teorema 4.11.10, pues $m$ es acotado. Con la normalización unitaria de Fourier, el núcleo de convolución es $(2\pi)^{-n/2}K$. Esta representación se verifica primero fuera del soporte de una función de soporte compacto, donde la serie de núcleos converge absolutamente; las sumas parciales de los símbolos convergen además en $L^2$ por Plancherel.
Sea $f \in L^1 \cap L^2$, sea $\lambda > 0$ y apliquemos la descomposición de Calderón–Zygmund del Teorema B.8.15:

$$f = g + \sum_{Q\in\mathcal{Q}} b_Q, \qquad \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \le C\lambda \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \|b_Q\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Cada $b_Q$ tiene integral cero y soporte en $Q$, y $\sum_{Q\in\mathcal{Q}} |Q| \le C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}/\lambda$. Escribimos $Q^* = 4\sqrt{n}\,Q$, con el mismo centro $c_Q$. Si $x \notin Q^*$ y $y \in Q$, entonces $\|y - c_Q\| \le \|x - c_Q\|/2$. Por la cancelación,

$$T_m b_Q(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_Q [K(x-y) - K(x-c_Q)] b_Q(y)\, dy,$$

y la estimación del núcleo implica

$$|T_m b_Q(x)| \le C \frac{\ell(Q)}{\|x - c_Q\|^{n+1}} \|b_Q\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

La integral de $\ell(Q)\|x - c_Q\|^{-n-1}$ fuera de $Q^*$ está acotada por una constante dimensional. Por ello, si $E = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q^*$,

$$|E| \le C\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}, \qquad \int_{\mathbb{R}^n\setminus E} \sum_{Q\in\mathcal{Q}} |T_m b_Q| \le C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

La convergencia de la descomposición en $L^2$ identifica esta suma fuera de $E$ con $T_m(f-g)$. Chebyshev y la cota $L^2$ para la parte buena dan

$$\begin{aligned}|\{x\in\mathbb{R}^n \mid |T_m f(x)| > \lambda\}| &\le |E| + \frac{4}{\lambda^2}\|T_m g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n\setminus E} |T_m(f-g)| \\ &\le C\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}.\end{aligned}$$

El Teorema B.8.9 interpola esta cota débil $(1,1)$ con la cota fuerte $(2,2)$, y da continuidad en $L^p$ para $1 < p \le 2$. Si $p > 2$, aplicamos lo anterior al símbolo $\overline{m}$ en $L^{p'}$ y usamos la identidad de adjuntos y la dualidad de $L^p$. La densidad de $\mathcal{S}$ en $L^p$ da una única extensión continua. Finalmente, multiplicar de nuevo por $M_N(m)$ proporciona la cota lineal del enunciado y su uniformidad. □

**Teorema 6.3.2.** (Función cuadrada de Littlewood–Paley) Sea $1 < p < \infty$. Existen constantes $c_p, C_p > 0$ tales que, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$c_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \left\| \left( \sum_{j\in\mathbb{N}_0} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demostración.* Probamos primero la cota de la función cuadrada por la norma de $f$. Sea $J \subseteq \mathbb{N}_0$ finito. Para cada elección de signos $(\varepsilon_j)_{j\in J} \in \{-1,1\}^J$, el símbolo

$$m_\varepsilon(\xi) := \sum_{j\in J} \varepsilon_j \varphi_j(\xi)$$

satisface las hipótesis del Teorema 6.3.1 con constantes independientes de $J$ y de los signos: por la interacción finita de los soportes, en cada $\xi \neq 0$ interviene un número uniformemente acotado de términos y, después de escalar, las derivadas de $\varphi_j$ poseen las cotas requeridas. Por lo tanto,

$$\left\| \sum_{j\in J} \varepsilon_j \Delta_j f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Tomamos $\varepsilon_j = r_j(t)$, donde $(r_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ son las funciones de Rademacher, integramos en $t \in [0,1]$ y usamos el Teorema de Khintchine B.8.8 punto a punto en $x$. El Teorema B.6.17 permite intercambiar las integrales y da

$$\left\| \left( \sum_{j\in J} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Haciendo crecer $J$ hasta $\mathbb{N}_0$ y aplicando convergencia monótona obtenemos la cota superior completa.

Para la desigualdad inversa tomamos primero $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Como $\widetilde{\Delta}_j \Delta_j = \Delta_j$ y la resolución diádica reconstruye la identidad en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \langle \Delta_j f, \widetilde{\Delta}_j g\rangle.$$

La interacción finita de los soportes permite elegir los bloques ampliados de modo que la serie sea absolutamente convergente para funciones de Schwartz. Cauchy–Schwarz en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ proporciona

$$|\langle f, g\rangle| \le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} |\Delta_j f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} |\widetilde{\Delta}_j g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Aplicamos Hölder con exponentes $p$ y $p'$ y la cota de la función cuadrada ya demostrada, ahora para la resolución ampliada y para $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Así,

$$|\langle f, g\rangle| \le C \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} |\Delta_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

La dualidad del Teorema B.7.7 da la desigualdad inversa para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, la densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, Proposición 4.8.5, y la continuidad de la función cuadrada extienden la equivalencia a todo $L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Para $a > 0$ usaremos la abreviatura

$$\mathcal{M}_a f := \left[\mathcal{M}(|f|^a)\right]^{\frac{1}{a}}.$$

**Lema 6.3.3.** (Multiplicadores diádicos sobre sucesiones) Sean $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$ y $0 < a < \min\{p, q\}$, con la convención de omitir $q$ de este mínimo si $q = \infty$. Supongamos que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es una familia cuyos elementos están representados por funciones y satisfacen, para todo $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\operatorname{supp}(\widehat{f_j}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi\| \le A 2^j\}.$$

Si $T_j f_j = K_j * f_j$, donde $K_j(x) = 2^{jn} K^{(j)}(2^j x)$ y

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^{N+n+1} |K^{(j)}(x)| < \infty$$

para algún $N > \frac{n}{a}$, entonces

$$\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} |T_j f_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} |f_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

con los supremos habituales cuando $q = \infty$.

*Demostración.* El Lema B.8.16 da puntualmente $|T_j f_j| \le C \mathcal{M}_a f_j$. Si $q < \infty$, aplicamos el Teorema B.8.14 a la sucesión $(|f_j|^a)_{j\in\mathbb{N}_0}$ con exponentes $\frac{p}{a}$ y $\frac{q}{a}$, ambos mayores que uno, y elevamos el resultado a la potencia $\frac{1}{a}$.

Si $q = \infty$, usamos

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0} \mathcal{M}(|f_j|^a) \le \mathcal{M}\left(\sup_{j\in\mathbb{N}_0} |f_j|^a\right)$$

y la continuidad de $\mathcal{M}$ en $L^{\frac{p}{a}}(\mathbb{R}^n)$ dada por el Teorema B.8.11. □

**Definición 6.3.4.** (Espacios de Besov y de Triebel–Lizorkin) Sean $s \in \mathbb{R}$ y $1 \le q \le \infty$. En esta sección trabajaremos en el intervalo de Banach de estas escalas; la teoría clásica permite extender las definiciones a índices cuasi-Banach más generales, pero esos extremos no serán necesarios para los resultados posteriores.

(a) Si $1 \le p \le \infty$, definimos

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

donde

$$\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)_{j\in\mathbb{N}_0} \right\|_{\ell^q(\mathbb{N}_0)}.$$

(b) Si $1 \le p < \infty$, definimos

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|u\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

donde

$$\|u\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left( \sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{jsq}|\Delta_j u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

y, si $q = \infty$,

$$\|u\|_{F^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} := \left\| \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js}|\Delta_j u| \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

**Definición 6.3.5.** (Retracción y corretracción) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach. Un operador lineal continuo $R\colon X \longrightarrow Y$ es una *retracción* si existe un operador lineal continuo $S\colon Y \longrightarrow X$ tal que

$$RS = I_Y.$$

En ese caso, $S$ se llama una *corretracción* de $R$ o una inversa continua por la derecha. En particular, toda retracción es suprayectiva y toda corretracción es inyectiva.

Adoptaremos además la convención $F^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) := B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$. La escala usual $F^s_{\infty,q}$, con $q < \infty$, se define mediante promedios locales y no se utilizará en este capítulo; véase [146, Sección 1.5.2].

Si $p = q < \infty$, el Teorema B.6.17 muestra directamente que

$$B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$$

con la misma norma para una resolución fija. Para índices distintos, intercambiar $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\ell^q(\mathbb{N}_0)$ cambia en general el espacio.

La reconstrucción de una distribución exige conservar la información sobre las frecuencias de sus sumandos. El siguiente lema expresa esa condición y permite tratar también el extremo $p = 1$.

**Lema 6.3.6.** (Síntesis de bloques con soporte espectral controlado) Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 \le q \le \infty$ y $0 < c < C$. Supongamos que $v_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, y que

$$\operatorname{supp} \widehat{v}_0 \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi\| \le C\}, \qquad \operatorname{supp} \widehat{v}_j \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid c2^j \le \|\xi\| \le C2^j\} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Si $1 \le p \le \infty$, entonces

$$\Big\| \sum_{j \in \mathbb{N}_0} v_j \Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \Big\| \big(2^{js} \|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\big)_{j \in \mathbb{N}_0} \Big\|_{\ell^q}.$$

Si $1 \le p < \infty$, también

$$\Big\| \sum_{j \in \mathbb{N}_0} v_j \Big\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le C_2 \Big\| \big(2^{js} v_j\big)_{j \in \mathbb{N}_0} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^q)}.$$

En cada afirmación, la finitud del miembro derecho garantiza la convergencia de la serie en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

*Demostración.* Elegimos multiplicadores $P_j$ iguales a uno en los soportes indicados, con soporte en anillos algo mayores cuando $j \ge 1$. Para $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y cualquier $N > 0$,

$$\|P_j \zeta\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le C_N 2^{-jN} \mathfrak{p}_N(\zeta), \qquad j \in \mathbb{N}_0,$$

donde $\mathfrak{p}_N$ es una suma finita de seminormas de Schwartz. Para obtener esta cota se deriva el producto del símbolo de $P_j$ con $\widehat{\zeta}$, se usa el decrecimiento de todas las derivadas de $\widehat{\zeta}$ sobre el anillo y se integra por partes en la fórmula de inversión. El número de integraciones se elige mayor que $n$; así se controla simultáneamente la norma uniforme y la norma integral del resultado, y las restantes normas se obtienen por Hölder.

Cada una de las normas de sucesiones del enunciado domina $2^{js}\|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Como $\langle v_j, \zeta\rangle = \langle v_j, P_j\zeta\rangle$, Hölder da

$$|\langle v_j, \zeta\rangle| \le C_N 2^{-j(N+s)} \mathfrak{p}_N(\zeta)\, \mathcal{N},$$

donde $\mathcal{N}$ es el miembro derecho correspondiente. Elegir $N > |s|$ prueba la convergencia absoluta del emparejamiento y su continuidad en $\zeta$.

Los soportes espectrales implican $\Delta_k v_j = 0$ si $|k - j| > N_0$, para un entero fijo $N_0$. Young da

$$2^{ks} \Big\| \Delta_k \sum_{j \in \mathbb{N}_0} v_j \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}_0 \\ |j-k| \le N_0}} 2^{js} \|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

La Proposición B.8.4 prueba la cota de Besov. Para Triebel–Lizorkin elegimos $0 < a < 1$, de modo que $a < p$ y, si $q < \infty$, también $a < q$. El Lema 6.3.3, aplicado a los bloques $v_j$, permite tomar la norma $L^p(\ell^q)$ en la misma suma finita de desplazamientos. Esto da la segunda cota. Las estimaciones se aplican primero a sumas finitas; la convergencia distribucional identifica cada bloque del límite y Fatou permite pasar a la serie. Para $q = \infty$, se usa el supremo sobre $j \in \mathbb{N}_0$. □

**Teorema 6.3.7.** (Independencia de la resolución diádica) Sean $\|\cdot\|_{A,\Delta}$ y $\|\cdot\|_{A,\nabla}$ las normas construidas con dos resoluciones diádicas, donde $A = B^s_{p,q}$ o $A = F^s_{p,q}$, en los índices de la Definición 6.3.4. Existen $c_A, C_A > 0$, independientes de $u$, tales que

$$c_A\|u\|_{A,\Delta} \le \|u\|_{A,\nabla} \le C_A\|u\|_{A,\Delta}.$$

Estos espacios son de Banach y sus inclusiones en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ son continuas.

*Demostración.* Insertando los bloques ampliados, obtenemos

$$\nabla_k u = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_0\\ |j-k|\le N_0}} \nabla_k \widetilde{\Delta}_j \Delta_j u, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Los núcleos tienen normas integrales uniformes. Young para convoluciones y para sucesiones prueba la cota de Besov. Para la norma de Triebel–Lizorkin, el Lema 6.3.3 se aplica a $f_j = \Delta_j u$, cuyos soportes espectrales sí están controlados. La suma contiene solamente $2N_0 + 1$ desplazamientos de índices, de modo que da la cota requerida. Intercambiar las resoluciones concluye la equivalencia.
Para la completitud, tomemos los espacios de sucesiones

$$b^s_{p,q} := \left\{ (v_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \mid \left\| \left(2^{js}\|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)_{j\in\mathbb{N}_0} \right\|_{\ell^q} < \infty \right\},$$

$$f^s_{p,q} := \left\{ (v_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \mid \left\| \left(2^{js}v_j\right)_{j\in\mathbb{N}_0} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^q(\mathbb{N}_0))} < \infty \right\}.$$

En $L^p(\ell^\infty)$ entendemos sucesiones de funciones medibles, identificadas coordenada a coordenada casi en todas partes, con norma $\|\sup_{j\in\mathbb{N}_0}|v_j|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Ésta es una norma mixta; no se exige que el mapeo con valores en $\ell^\infty$ sea fuertemente medible en el sentido de Bochner. La completitud de ambos espacios de sucesiones se ve directamente: de una sucesión de Cauchy se extrae una subsucesión cuyas diferencias de normas sean sumables. La suma de los valores absolutos de esas diferencias es finita casi en todas partes, en la norma de sucesiones correspondiente. Se obtiene un límite medible coordenada a coordenada, y la desigualdad de la cola sumable prueba la convergencia en norma. Para los restantes índices, coincide con la completitud usual de Lebesgue y de las sumas de Banach. En cada uno conservamos únicamente las sucesiones cuyos soportes de Fourier estén contenidos en los anillos del lema anterior, elegidos de modo que incluyan los soportes de $\varphi_j$. Este subespacio es cerrado: la convergencia en cualquiera de las dos normas implica convergencia de cada coordenada en $L^p$, y por tanto en $\mathcal{S}'$; una distribución que se anula fuera de un cerrado fijo conserva esa propiedad al pasar al límite.
Sobre este subespacio definimos

$$R(v_j)_{j\in\mathbb{N}_0} := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} v_j, \qquad Su := (\Delta_j u)_{j\in\mathbb{N}_0}.$$

El lema prueba la continuidad de $R$; la definición de las normas prueba la de $S$. La reconstrucción diádica da $RS = I$. Por ello $SR$ es un proyector continuo del subespacio de sucesiones sobre $S(A)$. Su imagen es cerrada y de Banach, y $S$ identifica isométricamente $A$ con ella. La estimación del emparejamiento obtenida en el lema, aplicada a $v_j = \Delta_j u$, prueba también la continuidad de $A \hookrightarrow \mathcal{S}'$. □

Para la interpolación de Bessel será útil disponer de una síntesis definida sobre sucesiones sin restricciones

espectrales.

**Lema 6.3.8.** (Síntesis sobre el espacio completo de sucesiones) El operador

$$\widetilde{R}(v_j)_{j\in\mathbb{N}_0} := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \widetilde{\Delta}_j v_j$$

es continuo de $b^s_{p,q}$ en $B^s_{p,q}$ para $1 \le p, q \le \infty$. También es continuo de $f^s_{p,q}$ en $F^s_{p,q}$ si $1 < p < \infty$ y $1 \le q \le \infty$. En ambos casos $\widetilde{R}S = I$.

*Demostración.* Los bloques ampliados tienen núcleos dominados por

$$Ch_j(x), \qquad h_j(x) := 2^{jn}(1 + 2^j\|x\|)^{-n-1}.$$

La cota de Besov se sigue de Young y del lema de síntesis espectral. Para $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, la dominación por el maximal y Fefferman–Stein controlan $\|(\widetilde{\Delta}_j v_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^q(\mathbb{N}_0))}$. Si $q = \infty$, se usa

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0} |\widetilde{\Delta}_j v_j| \le C\mathcal{M}\left(\sup_{j\in\mathbb{N}_0} |v_j|\right).$$

Para $q = 1$, tomamos una familia finita y una función $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $g \ge 0$. Tonelli y la simetría de $h_j$ dan

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g \sum_{j=0}^{N} |\widetilde{\Delta}_j v_j| &\le C \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{N} |v_j|(h_j * g) \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{N} |v_j|\right) \mathcal{M}g \\ &\le C_p \left\| \sum_{j=0}^{N} |v_j| \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

La dualidad de $L^p$ y la convergencia monótona dan la cota para la familia completa. Los pesos $2^{js}$ se incorporan a $v_j$. Aplicamos entonces el lema de síntesis espectral a $\widetilde{\Delta}_j v_j$. □

El requisito $p > 1$ en la segunda afirmación es relevante: la prueba de completitud para $F^s_{1,q}$ utiliza el subespacio con soportes espectrales controlados del teorema anterior.

**Corolario 6.3.9.** (Aproximación y pérdida de regularidad) Para $p, q < \infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $B^s_{p,q}$ y en $F^s_{p,q}$. Para cualquier índice fino admisible, $1 \le p < \infty$, y $\varepsilon > 0$,

$$A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s-\varepsilon}_{p,p}(\mathbb{R}^n), \qquad A \in \{B, F\}.$$

Las sumas parciales diádicas convergen en este último espacio.

*Demostración.* Si ambos índices son finitos, las colas de la sucesión de bloques convergen a cero en la norma correspondiente, por convergencia dominada. El lema de síntesis espectral prueba lo mismo para las colas de la reconstrucción. Cada uno de los finitos bloques restantes se aproxima en $L^p$ por funciones de Schwartz;

aplicar un multiplicador que valga uno en su soporte espectral conserva la convergencia y mantiene el soporte en un anillo algo mayor. La síntesis finita da la aproximación en la norma del espacio.
En todos los casos,

$$2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{A^s_{p,q}}, \qquad j \in \mathbb{N}_0.$$

Multiplicar por $2^{-j\varepsilon}$ y sumar las potencias $p$ prueba la segunda afirmación y la convergencia de las colas. Para $q = \infty$, la convergencia afirmada tiene lugar en el espacio de orden $s - \varepsilon$. □

### 6.3.2 Identificaciones fundamentales e interpolación

En esta subsección utilizaremos los resultados abstractos de interpolación desarrollados en el Capítulo 5; en particular, aplicaremos los métodos real y complejo a las escalas euclidianas construidas aquí.

Las escalas recién definidas contienen varios espacios introducidos anteriormente. Conviene separar dos mecanismos. La identificación de los potenciales de Bessel con $F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ es una afirmación de Littlewood–Paley y, por lo tanto, depende de la forma en que se agregan cuadráticamente los bloques de frecuencia. En cambio, la identificación de los espacios de Sobolev–Slobodeckij no enteros con $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ procede de interpolación real. Las dos pruebas explican cómo surgen prolongaciones distintas de la escala entera de Sobolev.

**Teorema 6.3.10.** (Potenciales de Bessel y Sobolev enteros) Sean $1 < p < \infty$ y $s \in \mathbb{R}$.

(a) Para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$$

y existen $c_{s,p}, C_{s,p} > 0$ tales que

$$c_{s,p}\|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)} \le C_{s,p}\|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

(b) Si $m \in \mathbb{N}_0$, entonces

$$H^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

y existen $c_{m,p}, C_{m,p} > 0$ tales que

$$c_{m,p}\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{H^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \le C_{m,p}\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

La identificación clásica $F^s_{p,2} = H^{s,p}$ puede consultarse en [146, Capítulo 1].

*Demostración.* Primero extendemos el criterio de Littlewood–Paley a distribuciones. Si $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y

$$G_v := \left( \sum_{j \in \mathbb{N}_0} |\Delta_j v|^2 \right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

la reproducción diádica y Cauchy–Schwarz dan, para $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle v, \zeta\rangle| = \left|\sum_{j\in\mathbb{N}_0} \langle \Delta_j v, \widetilde{\Delta}_j \zeta\rangle\right| \\ \le \|G_v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} |\widetilde{\Delta}_j \zeta|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le C\|G_v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\zeta\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

La suma de emparejamientos converge absolutamente por la misma desigualdad. El argumento con signos usado en el Teorema 6.3.2 se aplica también a los bloques ampliados, pues sus símbolos tienen las mismas cotas uniformes y el mismo solapamiento finito. La densidad de $\mathcal{S}$ en $L^{p'}$ y la dualidad de $L^{p'}$ muestran que $v$ está representada por una función de $L^p$, con $\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|G_v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Junto con la cota directa de Littlewood–Paley, queda probado el criterio en ambas direcciones para $v \in \mathcal{S}'$.

En el soporte de $\varphi_j$, el peso $\langle \xi\rangle^s$ es comparable con $2^{js}$, uniformemente en $j \in \mathbb{N}_0$. Para pasar de esta comparación de símbolos a una comparación de normas consideramos

$$m_j(\xi) = 2^{-js}\langle \xi\rangle^s \widetilde{\varphi}_j(\xi), \qquad \widetilde{m}_j(\xi) = 2^{js}\langle \xi\rangle^{-s} \widetilde{\varphi}_j(\xi).$$

Después de $\xi = 2^j\zeta$, todas sus derivadas están acotadas uniformemente sobre un compacto fijo. Sus núcleos satisfacen, por integración por partes, las hipótesis del Lema 6.3.3. Aplicándolo con índice fino 2, primero a los bloques de $u$ y después a los de $J^s u$, obtenemos

$$c\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{2js}|\Delta_j u|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} |\Delta_j J^s u|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{2js}|\Delta_j u|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

El criterio distribucional anterior afirma que estas cantidades son finitas precisamente cuando $J^s u \in L^p$, y entonces son equivalentes a $\|J^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Esto demuestra (a).

Para (b), si $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $|\alpha| \le m$, el símbolo

$$b_\alpha(\xi) = (i\xi)^\alpha \langle \xi\rangle^{-m}$$

satisface las condiciones de Mikhlin: cada derivación disminuye su orden en uno, y su orden inicial es $|\alpha| - m \le 0$. Por tanto, $D^\alpha u = T_{b_\alpha} J^m u$ y

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le m}} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|J^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Para recuperar $J^m u$ a partir de las derivadas introducimos el polinomio positivo

$$P_m(\xi) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le m}} \xi^{2\alpha}.$$

Se tiene $c_m\langle \xi\rangle^{2m} \le P_m(\xi) \le C_m\langle \xi\rangle^{2m}$. La cota superior se obtiene estimando cada monomio. Para la inferior, si $\|\xi\| \ge 1$, alguna coordenada satisface $|\xi_\ell| \ge \|\xi\|/\sqrt{n}$, y el sumando $\xi_\ell^{2m}$ proporciona la cota; si $\|\xi\| \le 1$, se usa el término constante.

Definimos, para los mismos multiíndices,

$$a_\alpha(\xi) = \frac{\langle \xi \rangle^m (-i\xi)^\alpha}{P_m(\xi)}.$$

Al derivar $P_m P_m^{-1} = 1$, una inducción en $|\beta|$ da

$$|D^\beta (P_m^{-1})(\xi)| \le C_\beta \langle \xi \rangle^{-2m-|\beta|}, \qquad \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Leibniz implica entonces $|D^\beta a_\alpha(\xi)| \le C_{\alpha,\beta}\langle \xi \rangle^{|\alpha|-m-|\beta|}$; por ello los $a_\alpha$ también son símbolos de Mikhlin. La identidad algebraica

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le m}} a_\alpha(\xi)(i\xi)^\alpha = \langle \xi \rangle^m$$

proporciona, en $\mathcal{S}'$,

$$J^m u = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le m}} T_{a_\alpha} D^\alpha u.$$

La continuidad de cada multiplicador en $L^p$ prueba la desigualdad inversa. Las sumas de normas y las normas $\ell^p$ de este número finito de derivadas son equivalentes, de modo que se obtiene exactamente la norma de $W^{m,p}$ fijada en el libro. □

El teorema anterior permite transportar los métodos de interpolación a las escalas diádicas. Para el método real, la regularidad queda codificada en el peso $2^{js}$ de cada bloque; para el método complejo, esos pesos se interpolan geométricamente. Esta diferencia explica por qué el método real produce la escala de Besov, mientras que el método complejo conserva la escala de Bessel.

**Teorema 6.3.11.** (Interpolación de las escalas) Sean $s_0 < s_1$, $0 < \theta < 1$ y $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$.

(a) Si $1 < p < \infty$ y $1 \le q \le \infty$, entonces

$$(H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,p}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$$

y existen $c, C > 0$, dependientes de $n, s_0, s_1, p, q, \theta$ y de la resolución fijada, tales que

$$c\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{(H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,p}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q}} \le C\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

(b) Si $1 < p_0, p_1 < \infty$ y

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

entonces

$$[H^{s_0,p_0}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,p_1}(\mathbb{R}^n)]_\theta = H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$$

y existen $c, C > 0$, dependientes de $n, s_0, s_1, p_0, p_1, \theta$ y de la resolución fijada, tales que

$$c\|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{[H^{s_0,p_0}, H^{s_1,p_1}]_\theta} \le C\|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

(c) En particular, si $m \in \mathbb{N}$ y $0 < \theta < 1$, entonces

$$(L^p(\mathbb{R}^n), W^{m,p}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = B^{\theta m}_{p,q}(\mathbb{R}^n),$$

y

$$[L^p(\mathbb{R}^n), W^{m,p}(\mathbb{R}^n)]_\theta = H^{\theta m,p}(\mathbb{R}^n).$$

**Observación 6.3.12.** (Por qué se fija $p$ en el método real) En el inciso (a) no debe reemplazarse sin más $p$ por dos exponentes distintos $p_0, p_1$. Si $p^{-1} = (1-\theta)p_0^{-1} + \theta p_1^{-1}$, ya en el bloque de baja frecuencia aparecería

$$(L^{p_0}(\mathbb{R}^n), L^{p_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}^n),$$

un espacio de Lorentz, y no $L^p(\mathbb{R}^n)$ salvo en casos particulares. Las fórmulas con $p_0 \neq p_1$ conducen a escalas de Besov–Lorentz. El método complejo del inciso (b), en cambio, interpola simultáneamente la suavidad y el exponente espacial dentro de la escala de Bessel.

*Demostración.* Definimos el operador de análisis

$$Su := (\Delta_j u)_{j \in \mathbb{N}_0}$$

y el operador de síntesis

$$R(v_j)_{j \in \mathbb{N}_0} := \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \widetilde{\Delta}_j v_j.$$

El Lema 6.3.8, con $1 < p < \infty$ e índice fino 2, prueba que ambos operadores son continuos en las escalas que aparecen a continuación y satisfacen $RS = I$. De este modo, las escalas de funciones se identifican como retracciones de los espacios de sucesiones ponderados asociados a sus bloques diádicos.
Probemos (a). Escribimos

$$\delta := s_1 - s_0 > 0, \qquad t_k := 2^{-k\delta}, \qquad a_j := \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad j,k \in \mathbb{N}_0.$$

Para $k \in \mathbb{N}_0$ separamos las frecuencias altas y bajas mediante

$$u = u_0^{(k)} + u_1^{(k)},$$

con

$$u_0^{(k)} := \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}_0 \\ j > k}} \widetilde{\Delta}_j \Delta_j u, \qquad u_1^{(k)} := \sum_{j=0}^{k} \widetilde{\Delta}_j \Delta_j u.$$

La interacción finita de los bloques, la desigualdad triangular y la identificación $H^{s_i,p}(\mathbb{R}^n) = F^{s_i}_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ del Teorema 6.3.10 dan

$$K(t_k, u; H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)) \leq C \left( \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}_0 \\ j > k}} 2^{js_0} a_j + t_k \sum_{j=0}^{k} 2^{js_1} a_j \right). \tag{6.3}$$

En la dirección opuesta, sea $u = v_0 + v_1$ con $v_i \in H^{s_i,p}(\mathbb{R}^n)$. La continuidad uniforme del bloque $\Delta_j$ y la descripción $H^{s_i,p} = F^{s_i}_{p,2}$ implican

$$2^{js_0} a_j \le C\left(\|v_0\|_{H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)} + t_j \|v_1\|_{H^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Al tomar el ínfimo sobre todas las descomposiciones de $u$ obtenemos

$$2^{js} a_j \le C t_j^{-\theta} K(t_j, u; H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)). \tag{6.4}$$

Pongamos $b_j := 2^{js} a_j$. Multiplicar (6.3) por $t_k^{-\theta}$ transforma su lado derecho en

$$C\left(\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_0\\ j>k}} 2^{-\theta\delta(j-k)} b_j + \sum_{j=0}^{k} 2^{-(1-\theta)\delta(k-j)} b_j\right).$$

Las dos sucesiones de coeficientes son geométricamente sumables. El Lema 5.2.5 y las desigualdades de Hardy del Teorema B.8.5, junto con (6.4), dan constantes $c, C > 0$ tales que

$$c\left\|(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})_{j\in\mathbb{N}_0}\right\|_{\ell^q(\mathbb{N}_0)} \le \|u\|_{(H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,p}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q}} \le C\left\|(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})_{j\in\mathbb{N}_0}\right\|_{\ell^q(\mathbb{N}_0)}.$$

La discretización anterior describe la parte $0 < t \le 1$. Para $t \ge 1$, el encaje $H^{s_1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)$ implica que existe $c_0 > 0$, independiente de $t$ y de $u$, tal que

$$c_0 \|u\|_{H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)} \le K(t, u; H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)) \le \|u\|_{H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $t \ge 1$. Esta norma también está controlada por la norma de Besov. Para verlo, usando la reconstrucción diádica y la desigualdad triangular,

$$\|u\|_{H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_0} a_j = C \sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{-j(s-s_0)} b_j.$$

La sucesión $(2^{-j(s-s_0)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ pertenece a $\ell^{q'}(\mathbb{N}_0)$ cuando $1 < q < \infty$; para $q = 1$ se usa su cota uniforme y para $q = \infty$ su sumabilidad. Por Hölder en sucesiones, con estas interpretaciones en los extremos,

$$\|u\|_{H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{\ell^q(\mathbb{N}_0)}.$$

Por lo tanto, la integral de interpolación sobre $[1,\infty)$ queda controlada por la misma norma, ya que $t^{-\theta} \in L^q((1,\infty), dt/t)$ para $q < \infty$ y está acotada para $q = \infty$. Queda probado (a), incluidos los extremos $q = 1$ y $q = \infty$.

Para (b), definimos, para $i \in \{0,1\}$,

$$\ell^2_{s_i}(\mathbb{N}_0) := \left\{ (z_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \;\middle|\; \sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{2js_i}|z_j|^2 < \infty \right\},$$

con su norma natural, y ponemos

$$Y_i := L^{p_i}(\mathbb{R}^n; \ell^2_{s_i}(\mathbb{N}_0)).$$

Por el Teorema 6.3.10, $S$ y $R$ identifican $H^{s_i,p_i}(\mathbb{R}^n)$ con una retracción de $Y_i$. Los pesos se interpolan geométricamente,

$$(2^{js_0})^{1-\theta}(2^{js_1})^{\theta} = 2^{js},$$

y el exponente espacial satisface $p^{-1} = (1-\theta)p_0^{-1} + \theta p_1^{-1}$. La Proposición 5.7.12, aplicada a las sucesiones ponderadas sobre $\mathbb{N}_0$ (o, equivalentemente, extendiéndolas por cero a $\mathbb{Z}$) y después a los espacios de Bochner, proporciona

$$[Y_0, Y_1]_\theta = L^p(\mathbb{R}^n; \ell^2_s(\mathbb{N}_0)).$$

El Teorema 5.7.5, aplicado a $S$ y $R$, conserva la retracción. Finalmente, la identificación

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$$

del Teorema 6.3.10 identifica la retracción obtenida con $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y prueba (b).
Para (c), usamos $H^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ y $H^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, ambos por el Teorema 6.3.10, y aplicamos (a) y (b) con $s_0 = 0$ y $s_1 = m$. □

**Corolario 6.3.13.** (Interpolación real con distintos índices finos) Sean $s_0 < s_1$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $1 < p < \infty$ y $1 \le q, q_0, q_1 \le \infty$. Si $A_0, A_1 \in \{B, F\}$, entonces

$$\big((A_0)^{s_0}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n), (A_1)^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\big)_{\theta,q} = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$$

con normas equivalentes. Aquí $(A_i)^{s_i}_{p,q_i}$ significa $B^{s_i}_{p,q_i}$ o $F^{s_i}_{p,q_i}$, según la elección de $A_i$, para $i \in \{0,1\}$.

*Demostración.* La prueba del inciso (a) del teorema anterior utiliza dos propiedades de los extremos $Y_i = H^{s_i,p}$:

$$2^{js_i}\|\Delta_j v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|v\|_{Y_i}, \qquad \Big\|\sum_{j\in J} v_j\Big\|_{Y_i} \le C\sum_{j\in J} 2^{js_i}\|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

donde $J \subseteq \mathbb{N}_0$ y los $v_j$ tienen soporte espectral en los anillos correspondientes. La segunda afirmación incluye series cuando el miembro derecho es finito. Ambas propiedades valen también para $Y_i = (A_i)^{s_i}_{p,q_i}$: la primera se sigue de la definición, y la segunda del Lema 6.3.6 y de la desigualdad triangular.
Por tanto, con $t_k = 2^{-k(s_1-s_0)}$ y $a_j = \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, la misma separación de frecuencias produce

$$K(t_k, u; Y_0, Y_1) \le C\left(\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_0\\ j>k}} 2^{js_0}a_j + t_k\sum_{j=0}^{k} 2^{js_1}a_j\right), \qquad 2^{ks}a_k \le Ct_k^{-\theta}K(t_k, u; Y_0, Y_1).$$

Después de multiplicar la primera desigualdad por $t_k^{-\theta}$, aparecen exactamente las dos sucesiones geométricas de la prueba anterior. Young y la discretización de $K$ comparan la norma de Besov con la parte de la

norma de interpolación correspondiente a $0 < t \le 1$. Si $u \in B^s_{p,q}$, la segunda propiedad, con $i = 0$, da además

$$\|u\|_{Y_0} \le C \sum_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{-j(s-s_0)} \big(2^{js} a_j\big) \le C' \|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Para $t \ge 1$, usamos $K(t,u;Y_0,Y_1) \le \|u\|_{Y_0}$; la integrabilidad de $t^{-\theta}$ completa la cota en ese intervalo. Esto prueba las dos inclusiones. □

La fórmula real de interpolación identifica ahora los espacios definidos mediante diferencias con la escala de Besov.

**Corolario 6.3.14.** (Sobolev–Slobodeckij, Besov y Triebel–Lizorkin) Sea $1 < p < \infty$, sea $s > 0$ y supongamos $s \notin \mathbb{N}$. Entonces

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$$

y existen constantes $c_{n,s,p}, C_{n,s,p} > 0$ tales que

$$c_{n,s,p}\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,s,p}\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

La identificación mediante interpolación real es una descripción clásica; véase [146, Capítulos 1–2].

*Demostración.* Escribamos $s = m + \sigma$, con $m \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \sigma < 1$. El Corolario 6.2.6 da

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = (W^{m,p}(\mathbb{R}^n), W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n))_{\sigma,p}.$$

Por el Teorema 6.3.10, los dos espacios enteros del par pueden reemplazarse por $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ y $H^{m+1,p}(\mathbb{R}^n)$. El inciso (a) del Teorema 6.3.11 proporciona entonces

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n).$$

Por otra parte, para una resolución diádica fija, el Teorema B.6.17 permite intercambiar la suma y la integral:

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{jsp} |\Delta_j u(x)|^p \, dx \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{jsp} \|\Delta_j u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^p_{B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Con ello se obtiene la identificación y la equivalencia de normas. □

**Corolario 6.3.15.** (Cuándo coinciden $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$) Sea $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$, y sea $1 < p < \infty$.

(a) Si $1 < p \le 2$, entonces $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Si $2 \le p < \infty$, entonces $H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Hay igualdad si $p = 2$. Si $p \ne 2$, el encaje correspondiente es estricto.

Para $s = m \in \mathbb{N}_0$, en cambio,

$$H^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

para todo $1 < p < \infty$.

*Demostración.* Por el Corolario 6.3.14 y el Teorema 6.3.10, basta comparar $F^s_{p,p}$ con $F^s_{p,2}$. La inclusión $\ell^{q_0}(\mathbb{N}_0) \hookrightarrow \ell^{q_1}(\mathbb{N}_0)$, para $q_0 \le q_1$, aplicada en cada punto a $(2^{js}|\Delta_j u(x)|)_{j\in\mathbb{N}_0}$, prueba los encajes y la igualdad para $p = 2$.

Construiremos los ejemplos de estrictez dentro de cualquier bola abierta $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Esto permitirá emplearlos también en dominios. Por la independencia de la resolución podemos elegir un corte radial $\chi$, igual a uno cuando $\|\xi\| \le 1$, igual a cero cuando $\|\xi\| \ge 3/2$ y no creciente respecto del radio. Para $\varphi_j(\xi) = \chi(2^{-j}\xi) - \chi(2^{-j+1}\xi)$, $j \ge 1$, el bloque vale uno cuando $3/4 < 2^{-j}\|\xi\| < 1$. Tomemos $\xi_* = (7/8, 0, \dots, 0)$, un número $0 < \varepsilon < 1/16$, y

$$j_m = J + 4m, \qquad \lambda_m = 2^{j_m}\xi_*, \qquad m \in \mathbb{N},$$

con $J \in \mathbb{N}$. Las bolas de centro $\lambda_m$ y radio $\varepsilon 2^{j_m}$ quedan en regiones donde $\varphi_{j_m} = 1$; los demás bloques se anulan allí.

Fijemos $0 \ne \zeta \in C^\infty_c(B)$ y un corte $\omega \in C^\infty_c(B_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon))$, igual a uno cerca del origen. Definimos

$$\zeta_m = \mathcal{F}^{-1}\big(\omega(2^{-j_m}\cdot)\widehat{\zeta}\big).$$

Para cualesquiera multiíndices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ y cualquier $N > 0$, el decrecimiento rápido de $\widehat{\zeta}$ da

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(\zeta_m - \zeta)(x)| \le C_{\alpha,\beta,N}\, 2^{-j_m N}. \tag{6.5}$$

En efecto, el símbolo $1 - \omega(2^{-j_m}\xi)$ se anula en una bola de radio comparable con $2^{j_m}$. Derivar en $\xi$ para producir $x^\alpha$, multiplicar por $\xi^\beta$ y estimar la transformada inversa por su norma $L^1$ reduce la cota a integrales de colas de una función de Schwartz. Estas colas decrecen con cualquier potencia del radio.

Sea $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada. Como $s > 0$, las series

$$w = \sum_{m\in\mathbb{N}} a_m 2^{-j_m s} e^{i\langle\lambda_m, x\rangle}\zeta_m(x), \qquad u = \zeta(x)\sum_{m\in\mathbb{N}} a_m 2^{-j_m s} e^{i\langle\lambda_m, x\rangle}$$

convergen uniformemente y en $\mathcal{S}'$. La segunda función tiene soporte en $B$. Por la elección de las frecuencias,

$$2^{j_m s}\Delta_{j_m} w = a_m e^{i\langle\lambda_m, x\rangle}\zeta_m(x), \qquad \Delta_j w = 0 \quad \text{si } j \notin \{j_m \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

La sucesión $(a_m(\zeta_m - \zeta))_{m\in\mathbb{N}}$ pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n; \ell^q(\mathbb{N}))$ para todo $1 \le q \le \infty$: por (6.5), la suma de sus normas $L^p$ es finita. En cambio,

$$\big\|(a_m\zeta)_{m\in\mathbb{N}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^q(\mathbb{N}_0))} = \|\zeta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|(a_m)_{m\in\mathbb{N}}\|_{\ell^q}.$$

La desigualdad triangular, aplicada también a la diferencia, muestra que

$$w \in F^s_{p,q} \iff (a_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N}).$$

Además, $u - w \in \mathcal{S}$. Para verificarlo, derivamos cada sumando de la diferencia. Una derivada de la exponencial produce a lo más una potencia de $2^{j_m}$, y cualquier peso polinómico en $x$ se absorbe en la seminorma de

(6.5). Elegir $N$ mayor que esas potencias hace sumable la serie en cada seminorma de Schwartz. Por tanto,

$$u \in F^s_{p,q} \iff (a_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N}).$$

Si $p<2$, elegimos $a_m = m^{-\gamma}$ con $1/2<\gamma\le 1/p$; así $(a_m)\in \ell^2\setminus\ell^p$ y $u\in H^{s,p}\setminus W^{s,p}$. Si $p>2$, elegimos $1/p<\gamma\le 1/2$, y obtenemos $u\in W^{s,p}\setminus H^{s,p}$. Estas elecciones prueban la estrictez, incluso con soporte compacto en $B$. El caso entero se sigue del Teorema 6.3.10. □

**Observación 6.3.16.** (Dos prolongaciones distintas de la escala entera) El corolario aclara una fuente frecuente de ambigüedad terminológica. Algunos textos llaman "espacio de Sobolev fraccionario" tanto a $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ como a $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Mantendremos letras distintas. La escala

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$$

es estable bajo interpolación compleja y está adaptada a multiplicadores y operadores elípticos. La escala

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n), \qquad s\notin\mathbb{N},$$

se obtiene por interpolación real y está adaptada a diferencias, trazas y energías no locales. Para $p=2$ ambas perspectivas se reúnen.

## 6.4 Multiplicadores, cambios de coordenadas y localización

La teoría euclidiana sólo puede trasladarse a una variedad si dos operaciones son estables: multiplicar por una función de una partición de la unidad y cambiar de coordenadas. El siguiente resultado reúne ambas operaciones. La uniformidad de las constantes será decisiva en el capítulo de geometría acotada.

**Definición 6.4.1.** (Espacios $BC^j$ y $BUC^j$) Sea $U\subseteq\mathbb{R}^m$ un abierto, sea $F$ un espacio de Banach y sea $j\in\mathbb{N}_0$. Adoptamos los convenios $D^0 f = f$ y $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}^m;F)=F$. Para $0\le \ell\le j$, el espacio $\mathcal{L}^\ell(\mathbb{R}^m;F)$ lleva la norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}^\ell} := \sup\bigl\{\|A(v_1,\dots,v_\ell)\|_F \mid |v_1|\le 1,\dots,|v_\ell|\le 1\bigr\}.$$

Se define

$$BC^j(U,F) := \left\{ f\in C^j(U,F) \,\middle|\, \sum_{\ell=0}^{j} \sup_{x\in U}\|D^\ell f(x)\|_{\mathcal{L}^\ell} < +\infty \right\},$$

con la norma

$$\|f\|_{BC^j(U,F)} := \sum_{\ell=0}^{j} \sup_{x\in U}\|D^\ell f(x)\|_{\mathcal{L}^\ell}.$$

El espacio $BUC^j(U,F)$ es el subespacio de $BC^j(U,F)$ formado por las funciones para las cuales

$$D^\ell f : U \longrightarrow \mathcal{L}^\ell(\mathbb{R}^m;F)$$

es uniformemente continuo para cada $0\le\ell\le j$; lleva la norma inducida de $BC^j(U,F)$. En particular, $BC^0(U,F)$ es el espacio de funciones continuas y acotadas, mientras que $BUC^0(U,F)$ exige además con-

tinuidad uniforme.
Sea ahora $Q_+^m = [0,1)\times(-1,1)^{m-1}$ y sea $V \subseteq Q_+^m$ un abierto relativo. Ponemos

$$V^\circ := V \cap \big((0,1)\times(-1,1)^{m-1}\big).$$

Por $C^j(V,F)$ entendemos el espacio de funciones $f\colon V \longrightarrow F$ para las cuales $f\restriction_{V^\circ}$ es de clase $C^j$ y cada derivada $D^\ell(f\restriction_{V^\circ})$, $0 \le \ell \le j$, admite una extensión continua a $V$, exigiendo que la extensión de orden cero coincida con $f$. La extensión es única porque $V^\circ$ es denso en $V$ y se denota también por $D^\ell f$. Se definen $BC^j(V,F)$ y su norma mediante las fórmulas anteriores, sustituyendo $U$ por $V$, y $BUC^j(V,F)$ es el subespacio para el cual cada función extendida

$$D^\ell f\colon V \longrightarrow \mathcal{L}^\ell(\mathbb{R}^m;F)$$

es uniformemente continua respecto de la distancia euclidiana inducida. En particular, si $V = Q_+^m$, cada derivada de una función de $BUC^j(Q_+^m,F)$ posee una única extensión continua a la clausura euclidiana de $Q_+^m$. La convención se aplica asimismo a los dominios de traslape, relativamente abiertos en una media caja, y coincide con la noción usual de regularidad hasta la cara $\{0\}\times(-1,1)^{m-1}$ en una variedad con frontera.
Finalmente, si $\Omega$ es uno cualquiera de los dominios anteriores,

$$BC^\infty(\Omega,F) := \bigcap_{j\in\mathbb{N}_0} BC^j(\Omega,F), \qquad BUC^\infty(\Omega,F) := \bigcap_{j\in\mathbb{N}_0} BUC^j(\Omega,F),$$

con las familias de seminormas $\|\cdot\|_{BC^j}$; no se exige una sola cota uniforme en $j$. Para funciones matriciales y coeficientes tensoriales se toma como codominio el espacio finito-dimensional correspondiente, con su norma de operadores o la norma tensorial inducida por la norma euclidiana. Así, las cotas son simultáneas para todas las componentes.

Esta es la convención de suma usada en la regularidad uniforme de Amann. Si se introduce la norma auxiliar $\|f\|_{\max,j} := \max\limits_{\ell\in\{0,\dots,j\}} \sup\limits_{x\in U} \|D^\ell f(x)\|_{\mathcal{L}^\ell}$, entonces, explícitamente,

$$\|f\|_{\max,j} \le \|f\|_{BC^j} \le (j+1)\|f\|_{\max,j}.$$

Tampoco depende la clase de espacios de la norma euclidiana elegida. En efecto, si $a|v|_1 \le |v|_2 \le b|v|_1$ para todo $v\in\mathbb{R}^m$, con $a,b>0$, entonces, para cada $\ell$,

$$\|A\|_{\mathcal{L}^\ell,2} \le a^{-\ell}\|A\|_{\mathcal{L}^\ell,1}, \qquad \|A\|_{\mathcal{L}^\ell,1} \le b^\ell\|A\|_{\mathcal{L}^\ell,2}.$$

En consecuencia,

$$\|f\|_{BC^j,2} \le \max\{1,a^{-j}\}\|f\|_{BC^j,1}, \qquad \|f\|_{BC^j,1} \le \max\{1,b^j\}\|f\|_{BC^j,2}.$$

Las dos métricas del dominio son bi-Lipschitz, por lo que determinan la misma continuidad uniforme. Si $F$ es finito–dimensional y las normas de su codominio satisfacen

$$c_F\|w\|_{F,1} \le \|w\|_{F,2} \le C_F\|w\|_{F,1} \qquad (w\in F),$$

entonces las desigualdades anteriores toman la forma

$$\|f\|_{BC^j,2} \le C_F \max\{1, a^{-j}\}\|f\|_{BC^j,1}, \qquad \|f\|_{BC^j,1} \le c_F^{-1} \max\{1, b^j\}\|f\|_{BC^j,2}.$$

Por ello las clases $BC^j$ y $BUC^j$ no dependen de esas elecciones.

Las estimaciones de los cambios de coordenadas requieren controlar tanto la separación entre frecuencias como el decrecimiento del núcleo en el espacio. Escribimos

$$h_{r,D}(x) := 2^{rn}(1 + 2^r\|x\|)^{-D}, \qquad r \in \mathbb{N}_0, \quad D > n,$$

y, para una función de banda limitada $v$,

$$P_{r,\lambda}v(x) := \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|}{(1 + 2^r\|x - z\|)^\lambda}.$$

El Lema B.8.16 asegura que $P_{r,\lambda}v \le C\mathcal{M}_a v$ cuando $\lambda > n/a$ y el soporte de $\widehat{v}$ está en una bola de radio comparable con $2^r$.

**Lema 6.4.2.** (Estimación de los núcleos de un cambio de coordenadas) Sea $M \in \mathbb{N}$, sea $g \in BC^M(\mathbb{R}^n)$ y sea $\psi$ un difeomorfismo global de clase $C^{M+1}$. Supongamos que $\psi$ y $\psi^{-1}$ son Lipschitz y que sus derivadas de órdenes $1, \dots, M+1$ están acotadas. El núcleo $L_{j,r}(x,z)$ de

$$\Delta_j\left[g\,((\widetilde{\Delta}_r v)\circ\psi)\right](x) = \int_{\mathbb{R}^n} L_{j,r}(x,z)v(z)\,dz$$

satisface, para cualquier $D > n$,

$$|L_{j,r}(x,z)| \le C_{M,D}\,2^{-M|j-r|}h_{\min\{j,r\},D}(\psi(x) - z), \qquad j, r \in \mathbb{N}_0. \tag{6.6}$$

*Demostración.* Denotemos por $K_j$ y $\widetilde{K}_r$ los núcleos reales de convolución de los bloques, incluidas sus constantes de Fourier. Entonces

$$L_{j,r}(x,z) = \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x-y)g(y)\widetilde{K}_r(\psi(y) - z)\,dy.$$

Los núcleos de índice positivo tienen todos sus momentos nulos. Además, para cualquier multiíndice $\alpha$ y cualquier $D_1 > 0$,

$$|D^\alpha K_j(y)| + |D^\alpha \widetilde{K}_j(y)| \le C_{\alpha,D_1}\,2^{j(n+|\alpha|)}(1 + 2^j\|y\|)^{-D_1}.$$

Si $j \ge r$ y $j \ge 1$, restamos de $y \mapsto g(y)\widetilde{K}_r(\psi(y) - z)$ su polinomio de Taylor en $x$ de grado $M-1$. Los términos del polinomio desaparecen al integrarse contra $K_j(x-y)$. Leibniz y Faà di Bruno, Teorema 1.1.19, muestran que las derivadas de orden $M$ del resto están acotadas por

$$C2^{r(n+M)}(1 + 2^r\|\psi(x) - z\|)^{-D}(1 + 2^r\|x - y\|)^D$$

sobre el segmento entre $x$ e $y$. Aquí se usa

$$1 + 2^r\|\psi(x) - z\| \le C(1 + 2^r\|\psi(x + t(y-x)) - z\|)(1 + 2^r\|x - y\|), \qquad 0 \le t \le 1.$$

El resto integral contiene además $\|x-y\|^M$. La sustitución $w = 2^j(x-y)$, con $D_1 > M+D+n$, da

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_j(x-y)|\,\|x-y\|^M(1+2^r\|x-y\|)^D\,dy \le C2^{-jM}.$$

Resulta (6.6) en este caso.
Si $r > j$, hacemos primero $w = \psi(y)$. El factor contra el cual actúa $\widetilde{K}_r(w-z)$ es

$$K_j(x-\psi^{-1}(w))\,g(\psi^{-1}(w))\,|\det D\psi^{-1}(w)|.$$

Restamos su polinomio de Taylor en $z$, de grado $M-1$. Sus derivadas de orden $M$ requieren a lo más $M+1$ derivadas de $\psi^{-1}$, debido al determinante. El mismo cálculo, ahora con $2^{jM}\|w-z\|^M$, produce $2^{-M(r-j)}$. La condición bi-Lipschitz compara $\|x-\psi^{-1}(z)\|$ con $\|\psi(x)-z\|$. Cuando $j = r = 0$, la cota se obtiene directamente de la integral de dos núcleos de rápido decrecimiento. También queda cubierto el caso de índices iguales y positivos.

□

**Lema 6.4.3.** (Multiplicadores y difeomorfismos en la escala de Sobolev) Sean $s \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, con $k > |s|+n+1$. Para $H^{s,p}$ suponemos $1 < p < \infty$; para $B^s_{p,q}$, $1 \le p,q \le \infty$, y para $F^s_{p,q}$, $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$.

(a) Si $g \in BC^k(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|gu\|_{A^s_{p,q}} \le C\|g\|_{BC^k}\|u\|_{A^s_{p,q}}, \qquad A \in \{B,F\},$$

y la misma afirmación vale en $H^{s,p}$.

(b) Sea $\psi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase $C^{k+1}$, con

$$|\det D\psi(x)| \ge c > 0, \qquad \|D^\alpha \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \le C_\alpha \quad (1 \le |\alpha| \le k+1).$$

Entonces $u \mapsto u\circ\psi$ es continuo en las mismas escalas. Las constantes dependen sólo de los parámetros y de las cotas indicadas.

(c) Sea $\psi\colon U \longrightarrow V$ un difeomorfismo y $\eta \in C^{k+1}_c(U)$. Supongamos que en una vecindad del soporte de $\eta$ se cumplen las cotas de derivadas y las condiciones bi-Lipschitz del lema anterior. El operador

$$T_{\eta,\psi}u(x) := \begin{cases} \eta(x)u(\psi(x)), & x \in U, \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

es continuo en las mismas escalas. La cota es uniforme para familias con las mismas cotas de derivadas, constantes bi-Lipschitz, una cota para el diámetro de los soportes y una cota inferior positiva para su distancia al borde de esas vecindades.

*Demostración.* La fórmula de la matriz inversa y la cota inferior del determinante controlan $D\psi^{-1}$. Al diferenciar $\psi^{-1}\circ\psi = I$ y aplicar Faà di Bruno, el término que contiene $D^m\psi^{-1}$ es

$$(D^m\psi^{-1})\circ\psi\,[D\psi,\dots,D\psi].$$

Los demás términos contienen derivadas de $\psi^{-1}$ de orden menor que $m$. Una inducción en $m = 2,\dots,k+1$, seguida de la multiplicación por $D\psi^{-1}$ en cada argumento, controla todas las derivadas de la inversa. Integrar la primera derivada sobre segmentos prueba que ambas funciones son globalmente Lipschitz.
Elegimos $0 < a < 1$, $\lambda > n/a$ y un entero $M < k$ de modo que $M - \lambda > |s|$. Es posible porque $k > |s| + n + 1$. Aplicamos (6.6) a $v_r = \Delta_r u$, con $D > n + \lambda$. La definición de Peetre da

$$|v_r(z)| \le P_{r,\lambda} v_r(\psi(x))(1 + 2^r \|\psi(x) - z\|)^{\lambda}.$$

La integral del segundo factor contra $h_{\min\{j,r\},D}$ está acotada por $C2^{\lambda(r-j)_+}$. Por tanto,

$$|\Delta_j[g\,((\widetilde{\Delta}_r \Delta_r u) \circ \psi)](x)| \le C 2^{-(M-\lambda)|j-r|} \mathcal{M}_a(\Delta_r u)(\psi(x)). \tag{6.7}$$

La multiplicación corresponde a $\psi = I$, y la composición a $g = 1$.
Multiplicamos por $2^{js}$ y sumamos en $r \in \mathbb{N}_0$. Los coeficientes

$$\left(2^{-(M-\lambda-|s|)|j-r|}\right)_{j-r\in\mathbb{Z}}$$

forman una sucesión sumable. Para Besov, la continuidad escalar del maximal en $L^{p/a}$, seguida de Young para sucesiones, da la cota; si $p = \infty$, se usa directamente su cota en $L^\infty$. Para Triebel–Lizorkin aplicamos Fefferman–Stein con exponentes $p/a > 1$ y $q/a > 1$. Si $q = \infty$, usamos el maximal del supremo, como en el Lema 6.3.3. El cambio de variables introduce solamente la cota de $|\det D\psi^{-1}|$. La identidad $H^{s,p} = F^s_{p,2}$ da la afirmación para Bessel.
Para el inciso (c), reducimos el cambio local a un número finito de cambios globales. Fijemos $x_0$ cerca del soporte de $\eta$ y escribamos

$$A_0 = D\psi(x_0), \qquad a_0(x) = \psi(x_0) + A_0(x - x_0).$$

Si $B(x_0, 2r)$ está en la vecindad considerada, elegimos un corte $\chi$, igual a uno en $B(x_0, r)$, sostenido en $B(x_0, 2r)$, con $\|D\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C/r$. El teorema fundamental del cálculo, aplicado a $\psi - a_0$ y a su derivada, da

$$\|\psi - a_0\|_{L^\infty(B(x_0,2r))} \le Cr^2 \|D^2\psi\|_{L^\infty(B_{\mathrm{euc}}(x_0,2r))}, \qquad \|D(\psi - a_0)\|_{L^\infty(B(x_0,2r))} \le Cr \|D^2\psi\|_{L^\infty(B_{\mathrm{euc}}(x_0,2r))}.$$

Extendemos $F_0 = \chi(\psi - a_0)$ por cero. Por Leibniz, $\|DF_0\|_{L^\infty(B_{\mathrm{euc}}(x_0,2r))} \le Cr\|D^2\psi\|_{L^\infty(B_{\mathrm{euc}}(x_0,2r))}$. Escogemos $r > 0$, uniformemente bajo las hipótesis del inciso, de forma que $\|A_0^{-1}\|\|DF_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < 1/2$. La función

$$\Psi_0(x) = a_0(x) + F_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

coincide con $\psi$ en $B(x_0, r)$ y es bi-Lipschitz. Para comprobar además que es sobreyectiva, dado $y \in \mathbb{R}^n$ aplicamos el teorema del punto fijo a

$$x \longmapsto x_0 + A_0^{-1}\big(y - \psi(x_0) - F_0(x)\big),$$

cuya constante de contracción es menor que $1/2$. Su punto fijo es la única solución de $\Psi_0(x) = y$. El teorema de la función inversa y las cotas de derivadas ya demostradas proporcionan un difeomorfismo global con las cotas requeridas en (b).
Cubrimos el soporte de $\eta$ por un número finito de estas bolas y elegimos una partición suave subordinada

$(\beta_\ell)_{\ell=1}^N$. Entonces

$$T_{\eta,\psi}u = \sum_{\ell=1}^{N} \eta\beta_\ell\,(u\circ\Psi_\ell).$$

Aplicar (a) y (b) a cada sumando prueba (c). El radio de las bolas, el número $N$ y las derivadas de los cortes se controlan por las cotas indicadas en el enunciado; por ello también se obtiene la uniformidad afirmada. Precisemos el sentido distribucional cuando $s<0$ y los coeficientes tienen regularidad finita. La estimación del emparejamiento en la prueba del Lema 6.3.6, para una función de prueba sostenida en un compacto $K$, da

$$|\langle u,\zeta\rangle| \le C_K\|u\|_{A^s_{p,q}} \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|\le m}} \|D^\alpha\zeta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

si $m$ es un entero con $|s|+n<m<k$. Así, $u$ actúa continuamente también sobre funciones $C^m_c$. Se definen los operadores mediante

$$\langle gu,\zeta\rangle = \langle u,g\zeta\rangle, \qquad \langle u\circ\psi,\zeta\rangle = \left\langle u,(\zeta\circ\psi^{-1})|\det D\psi^{-1}|\right\rangle.$$

Las derivadas disponibles hacen legítimos ambos emparejamientos. Las sumas parciales diádicas convergen en este sentido: se aproxima la función de prueba $C^k_c$ en $C^m_c$ por funciones suaves y se usa la cota uniforme anterior. Por ello las estimaciones para sumas finitas pasan al operador distribucional mediante Fatou. Este argumento incluye $q=\infty$ sin exigir densidad en la norma de orden $s$. □

Para formular el principio de localización, llamaremos *sistema uniforme de localización* a una familia $(\eta_\nu)_{\nu\in I}\subseteq C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ que satisface:

(i) $0\le\eta_\nu\le 1$ y $\sum_{\nu\in I}\eta_\nu = 1$;

(ii) cada punto pertenece a lo más a $N$ soportes;

(iii) los diámetros de los soportes y todas las normas $\|\eta_\nu\|_{BC^k(\mathbb{R}^n)}$ están acotados uniformemente;

(iv) existen $\chi_\nu\in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, con $\chi_\nu=1$ cerca de $\operatorname{supp}(\eta_\nu)$, que satisfacen las mismas cotas y el mismo tipo de solapamiento.

**Teorema 6.4.4.** (Principio de localización) Sea $(\eta_\nu)$ un sistema uniforme de localización.

(a) Si $s\in\mathbb{R}$, $1<p<\infty$ y $1\le q\le\infty$, entonces existen constantes $c,C>0$, independientes de $u$, tales que

$$c\|u\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\sum_{\nu\in I}\|\eta_\nu u\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \le C\|u\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

En particular, la fórmula vale para $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)=F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ y, si $s>0$ no es entero, para $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)=F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Para $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ con $q\neq p$ no existe en general una equivalencia análoga con una suma exterior $\ell^p$. Sí existe cuando $q=p$, porque $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)=F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$.

*Demostración.* Omitimos los índices para los cuales $\eta_\nu = 0$ y elegimos $x_\nu \in \operatorname{supp}\eta_\nu$, $\nu \in I$. Las cotas de los diámetros colocan los soportes de $\eta_\nu$ y $\chi_\nu$ en bolas de radio fijo alrededor de $x_\nu$. Además, existe $r_0 > 0$, independiente de $\nu$, tal que $\chi_\nu > 1/2$ en $B(x_\nu, r_0)$: basta tomar

$$r_0 < \frac{1}{2\left(1 + \sup_{\nu\in I} \|D\chi_\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)}.$$

Como los soportes de $\chi_\nu$ tienen solapamiento acotado, comparar los volúmenes de estas bolas da

$$\#\{\nu \in I \mid \|x - x_\nu\| \le R\} \le C(1+R)^n, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad R > 0.$$

En particular, $I$ es numerable y, para $D > n$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{\nu\in I} (1 + \|x - x_\nu\|)^{-D} < \infty. \tag{6.8}$$

Para verificar la última cota se agrupan los centros en $\|x - x_\nu\| \le 1$ y en los anillos $2^m < \|x - x_\nu\| \le 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{N}_0$. La serie resultante está dominada por $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} 2^{m(n-D)}$.

Usaremos la estimación de núcleos anterior con el decrecimiento espacial que aportan los cortes. Para $a_\nu = \eta_\nu$ o $a_\nu = \chi_\nu$, sean $L_{\nu,j,r}$ los núcleos de $\Delta_j a_\nu \widetilde{\Delta}_r$. Para cualesquiera $M, D, E > 0$, con $E > n$, se tiene

$$|L_{\nu,j,r}(x,z)| \le C_{M,D,E} 2^{-M|j-r|}(1 + \|x - x_\nu\|)^{-D} h_{\min\{j,r\},E}(x - z). \tag{6.9}$$

La constante es uniforme en $\nu, j, r$.

Expliquemos la presencia del factor espacial. En la integral

$$L_{\nu,j,r}(x,z) = \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x-y) a_\nu(y) \widetilde{K}_r(y-z)\, dy,$$

$y$ pertenece a una bola de radio fijo alrededor de $x_\nu$. Si $x$ está en una bola algo mayor, ese factor es comparable con uno y se aplica el Lema 6.4.2. En el complemento, $1 + \|x - x_\nu\| \le C(1 + \|x - y\|)$. Para $j \ge r$, el decrecimiento de $K_j(x-y)$ permite extraer $(1 + \|x - x_\nu\|)^{-D} 2^{-M(j-r)}$; las potencias restantes se integran con $\widetilde{K}_r$. Para $r > j$, se restan los polinomios de Taylor contra $\widetilde{K}_r$. Cada derivada de $K_j(x-y)a_\nu(y)$ conserva el mismo decrecimiento fuera de la bola y aporta a lo más un factor $2^j$. La integración del resto aporta $2^{-rM}$. En ambos casos la desigualdad

$$1 + 2^{\min\{j,r\}}\|x - z\| \le (1 + 2^{\min\{j,r\}}\|x - y\|)(1 + 2^{\min\{j,r\}}\|y - z\|)$$

permite conservar el factor $h_{\min\{j,r\},E}(x-z)$. Se eligen inicialmente potencias de decrecimiento mayores que la suma de las que se extraen más $n+1$, por lo que todas las integrales restantes son uniformemente finitas. Sólo interviene un número finito de las cotas de derivadas de los cortes.

Fijamos $0 < a < 1$, $\lambda > n/a$, $D > n$ y $M > |s| + \lambda$. La integración de (6.9) contra $\Delta_r u$, como en (6.7), da

$$2^{js}|\Delta_j(a_\nu u)(x)| \le C w_\nu(x) \sum_{r\in\mathbb{N}_0} 2^{-(M-\lambda-|s|)|j-r|} 2^{rs} P_{r,\lambda}(\Delta_r u)(x),$$

donde $w_\nu(x) := (1+\|x-x_\nu\|)^{-D}$. Tomamos la norma $\ell^q$ en $j$, usamos Young para sucesiones y ponemos

$$G_u(x) := \Big\| \big(2^{rs} P_{r,\lambda}(\Delta_r u)(x)\big)_{r\in\mathbb{N}_0} \Big\|_{\ell^q}.$$

El control de Peetre y Fefferman–Stein, con el argumento del supremo si $q=\infty$, implican

$$\|G_u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por tanto, (6.8) y Tonelli dan

$$\sum_{\nu\in I} \|\eta_\nu u\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le C \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\nu\in I} w_\nu(x)^p G_u(x)^p \, dx \le C\|u\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Para la desigualdad inversa consideramos primero una familia finita $(v_\nu)_{\nu\in I}$ y el operador

$$R(v_\nu)_{\nu\in I} := \sum_{\nu\in I} \chi_\nu v_\nu.$$

La misma estimación, seguida de la desigualdad triangular en $\ell^q$, da puntualmente

$$\Big\| \big(2^{js}\Delta_j R(v_\nu)(x)\big)_{j\in\mathbb{N}_0} \Big\|_{\ell^q} \le C \sum_{\nu\in I} w_\nu(x) G_{v_\nu}(x).$$

Hölder respecto de la suma ponderada sobre $I$ implica

$$\left(\sum_{\nu\in I} w_\nu G_{v_\nu}\right)^p \le \left(\sum_{\nu\in I} w_\nu\right)^{p-1} \sum_{\nu\in I} w_\nu G^p_{v_\nu}.$$

Después de integrar resulta

$$\|R(v_\nu)\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{\nu\in I} \|v_\nu\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Las familias finitas son densas en la suma exterior $\ell^p$, de modo que $R$ se extiende continuamente a ella. Aplicamos esta cota a $v_\nu = \eta_\nu u$. La suma es localmente finita en el sentido distribucional y $\chi_\nu \eta_\nu = \eta_\nu$, por lo que $R(\eta_\nu u) = u$. Esto concluye (a).

Para (b) construiremos funciones con soporte espacial compacto. Elegimos una partición suave trasladada de una retícula que valga uno en bolas pequeños alrededor de sus centros, y $\zeta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, $\zeta \neq 0$, sostenida en uno de esos bolas. Elegimos centros distintos $x_m$ de la retícula, suficientemente separados para que cada trasladada de $\zeta$ quede en una región donde sólo un corte vale uno.

Podemos usar una resolución diádica cuyo símbolo de anillo valga uno cerca de algún punto $\xi_* \neq 0$. En efecto, basta elegir el corte inicial igual a uno en $\|\xi\| \le 1$ y nulo para $\|\xi\| \ge 3/2$; su diferencia diádica vale uno en $3/4 < \|\xi\| < 1$. Fijamos $\xi_*$ en ese anillo. Para enteros $j_m = J + Lm$, $m \in \mathbb{N}$, ponemos

$$v_m(x) := 2^{-j_m s} \zeta(x - x_m) e^{i 2^{j_m} \xi_* \cdot x}, \qquad u_N := \sum_{m=1}^{N} v_m.$$

Los enteros $J, L$ se fijarán una vez, independientemente de $N$. Para cualquier $M > |s|$, la regularidad de $\zeta$ da

$$2^{ks}\|\Delta_k v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_M 2^{-(M-|s|)|k-j_m|}, \qquad k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{6.10}$$

Para $k > j_m$, se usan $M$ derivadas de $\zeta e^{i2^{j_m}\xi_*\cdot x}$ y los momentos de $K_k$. Para $k < j_m$ separado por más de un número fijo de índices, se integra por partes en la dirección $\xi_*$ en la fórmula de convolución: cada integración aporta $2^{-j_m}$, mientras que derivar el núcleo aporta a lo más $2^k$. Las derivadas de $\zeta$ tienen normas $L^p$ fijas. Los índices restantes se controlan por Young. Estas operaciones prueban (6.10) también para $p = 1$ y $p = \infty$.

Además,

$$2^{j_m s} e^{-i2^{j_m}\xi_*\cdot x}\Delta_{j_m} v_m(x) \longrightarrow \zeta(x - x_m) \quad \text{en } L^p$$

uniformemente respecto de las traslaciones, cuando $j_m \to \infty$. Para verlo, el núcleo modulado tiene masa uno y escala $2^{-j_m}$; se escribe la diferencia mediante $\zeta(\cdot - y) - \zeta$ y se usa continuidad de las traslaciones. Para $p = \infty$, se usa la continuidad uniforme de $\zeta$. Tomamos $J$ de modo que la norma de estos bloques principales sea al menos $c_0 > 0$. Después elegimos $L$ tan grande que

$$C_M \sum_{\ell \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} 2^{-(M-|s|)L|\ell|} < c_0/2.$$

La desigualdad triangular inversa en cada bloque $j_m$ da $2^{j_m s}\|\Delta_{j_m} u_N\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ge c_0/2$. La cota superior de todos los bloques se obtiene sumando (6.10) y aplicando Young. Así,

$$cN^{1/q} \le \|u_N\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le CN^{1/q}.$$

Por la elección de los soportes, las localizaciones no nulas de $u_N$ son precisamente $v_1, \dots, v_N$, y cada una tiene norma de Besov entre dos constantes positivas. Por consiguiente,

$$cN^{1/p} \le \left\| \left( \|\eta_\nu u_N\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \right)_{\nu \in I} \right\|_{\ell^p} \le CN^{1/p}.$$

Se interpreta $N^{1/\infty} = 1$. La equivalencia de ambas normas, con constantes independientes de $N$, exigiría $p = q$. Para $p = q < \infty$, la identidad $B^s_{p,p} = F^s_{p,p}$ y (a) proporcionan la equivalencia afirmada. □

**Observación 6.4.5.** (Localización de Besov en variedades) El inciso (b) no impide localizar una función de Besov con un número finito de cartas, pero sí impide usar sin cambios una suma $\ell^p$ sobre un atlas infinito. En una variedad sin frontera, no compacta y de geometría acotada se define primero la escala $F$, que sí se localiza, y después

$$B^s_{p,q}(M) := (F^{s_0}_{p,p}(M), F^{s_1}_{p,p}(M))_{\theta,q}, \qquad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1.$$

En el caso euclidiano, el Corolario 6.3.13 justifica esta fórmula para cualesquiera $s_0 < s < s_1$, con $\theta = (s - s_0)/(s_1 - s_0)$. En la construcción sobre la variedad, la independencia de los parámetros auxiliares se obtiene combinando las fórmulas de localización con la reiteración. Las cotas uniformes de las cartas y de sus transiciones son las hipótesis que permiten controlar las constantes sobre un atlas infinito. El procedimiento se retomará en el Capítulo 13 y coincide con la construcción de Große–Schneider [72] y con el principio de localización de Amann [6].

## 6.5 Abiertos, operadores de extensión y comparación de las escalas

Para $A \in \{B, F\}$ definimos el espacio de restricción

$$A^s_{p,q}(\Omega) := \{U\restriction_\Omega \mid U \in A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\}, \qquad \|u\|_{A^s_{p,q}(\Omega)} := \inf_{\substack{U \in A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \\ U\restriction_\Omega = u}} \|U\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Esta convención coincide con la Definición 6.1.5 cuando $A^s_{p,q} = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n) = H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

La extensión debe usar únicamente valores de la distribución dentro del dominio. Para conseguirlo construiremos núcleos sostenidos en un cono que, al restarse de un punto del dominio, permanezca dentro de él. La cancelación de todos los momentos permitirá usar los mismos núcleos en cualquier orden de regularidad.

**Lema 6.5.1.** (Núcleos cónicos de reproducción) Sea $\omega\colon \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz de constante $L$, y pongamos

$$\Omega_\omega := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > \omega(x')\}, \qquad \mathcal{K}_L := \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_n < -(L+1)\|y'\|\}.$$

Existen $\varphi_0, \varphi, \psi_0, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tales que, al definir

$$\varphi_j(x) := 2^{jn}\varphi(2^j x), \qquad \psi_j(x) := 2^{jn}\psi(2^j x), \qquad j \in \mathbb{N},$$

se cumplen las siguientes propiedades.

(a) Los soportes de $\varphi_j, \psi_j$ están contenidos en $\mathcal{K}_L \cap \{x_n \le -c2^{-j}\}$, con $c > 0$. Además,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_0 = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \psi(x)\,dx = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n).$$

(b) Denotemos por

$$\mathcal{S}'(\Omega_\omega) := \{U\restriction_{\Omega_\omega} \mid U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\}$$

el espacio de restricciones de distribuciones temperadas. Para $u$ en este espacio, $\varphi_j * u$ es una función suave bien definida en $\Omega_\omega$, independiente de la prolongación, y

$$u = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \psi_j * (\varphi_j * u) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_\omega). \tag{6.11}$$

(c) Para $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, escribamos

$$Q_{j,\lambda}U(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\varphi_j * U)(y)|}{(1 + 2^j\|x - y\|)^\lambda}.$$

Si $\lambda > n/a$, donde $0 < a < 1$, entonces

$$\left\| \left(2^{js}\|Q_{j,\lambda}U\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)_{j \in \mathbb{N}_0} \right\|_{\ell^q} \le C\|U\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}, \tag{6.12}$$

$$\left\| \left(2^{js}Q_{j,\lambda}U\right)_{j \in \mathbb{N}_0} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^q(\mathbb{N}_0))} \le C\|U\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \tag{6.13}$$

en los índices de Banach definidos en el capítulo. La primera cota permite también $p = \infty$. Si $f_j =$

$(\varphi_j * U)\restriction_{\Omega_\omega}$, para todo $N > 0$ se tiene

$$|\Delta_k[\psi_j * (\mathbf{1}_{\Omega_\omega} f_j)](x)| \le C_N 2^{-N|j-k|} Q_{j,\lambda} U(x), \qquad j,k \in \mathbb{N}_0. \tag{6.14}$$

*Demostración.* Construiremos primero una función $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sostenida en $[1,\infty)$, con integral uno y todos sus momentos de orden positivo nulos. Elegimos $\rho \in C_c^\infty((1,2))$, con $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$. Para $0 \le \ell \le N$, la fórmula de interpolación polinomial en los puntos $2^0,\dots,2^N$, evaluada en cero, da los coeficientes

$$a_{\ell,N} := \prod_{\substack{r\in\{0,\dots,N\}\\ r\neq\ell}} \frac{2^r}{2^r - 2^\ell}.$$

En efecto, los polinomios

$$\prod_{\substack{r\in\{0,\dots,N\}\\ r\neq\ell}} \frac{t - 2^r}{2^\ell - 2^r}$$

valen uno en $t = 2^\ell$ y cero en los demás puntos. Su combinación con los valores de un polinomio de grado a lo más $N$ coincide con él, pues la diferencia tiene $N+1$ raíces. En particular,

$$\sum_{\ell=0}^{N} a_{\ell,N} 2^{\ell m} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & 1 \le m \le N. \end{cases}$$

Separar los factores con $r < \ell$ y $r > \ell$ muestra que

$$|a_{\ell,N}| \le C 2^{-\ell(\ell+1)/2}.$$

La constante es uniforme, porque $\prod_{r\in\mathbb{N}} (1 - 2^{-r}) > 0$. Esta última afirmación se sigue tomando logaritmos y usando $-\log(1-t) \le 2t$ para $0 \le t \le 1/2$. Para cada $\ell$, los productos tienen un límite $a_\ell$ cuando $N \to \infty$. La cota anterior permite pasar al límite en cada suma de momentos, incluso después de multiplicar por $2^{\ell m}$. Por tanto,

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} a_\ell 2^{\ell m} = \delta_{m0}, \qquad m \in \mathbb{N}_0.$$

Definimos

$$g(t) := \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} a_\ell 2^{-\ell} \rho(2^{-\ell} t).$$

La seminorma $\sup_{t\in\mathbb{R}} (1+|t|)^A |D^B g(t)|$, con $A, B \in \mathbb{N}_0$, queda dominada por una constante multiplicada por $\sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} |a_\ell| 2^{\ell(A-B-1)}$. Todas estas series convergen. Así, $g$ es de Schwartz, tiene el soporte requerido y sus momentos se calculan término a término.

Elegimos una matriz invertible $A$ cuyas columnas pertenezcan a un cono estrecho alrededor del semieje vertical positivo y cuyo cono positivo esté contenido en $\{y_n > (L+1)\|y'\|\}$. Tal elección se obtiene tomando $n$

vectores linealmente independientes suficientemente próximos al vector vertical. Ponemos $B := -A$ y

$$\vartheta(x) := |\det B|^{-1} \prod_{i=1}^{n} g((B^{-1}x)_i), \qquad \vartheta_j(x) := 2^{jn}\vartheta(2^j x), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

El cambio de variables $x = By$ prueba que $\vartheta$ tiene integral uno. Cada monomio de grado positivo en $By$ se expande como suma de monomios en $y$, y en cada uno aparece un momento positivo de algún factor $g$. Por ello todos los momentos positivos de $\vartheta$ son cero. Su soporte está en $\mathcal{K}_L$, separado del vértice por un plano $x_n = -c$.

Ahora definimos

$$\varphi_0 := \vartheta, \qquad \psi_0 := 3\vartheta - 2\vartheta * \vartheta,$$

y, para $j \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_j := \vartheta_j - \vartheta_{j-1},$$

$$\psi_j := 3(\vartheta_j + \vartheta_{j-1}) - 2(\vartheta_j * \vartheta_j + \vartheta_j * \vartheta_{j-1} + \vartheta_{j-1} * \vartheta_{j-1}).$$

Son las dilataciones de dos funciones fijas. La estabilidad del cono bajo sumas conserva los soportes. La fórmula de los momentos de una convolución, obtenida expandiendo $(x+y)^\alpha$, muestra que $\varphi_j$ y $\psi_j$ tienen todos sus momentos nulos. En particular, la integral de $\psi_j$ es $6-6=0$.

La identidad polinomial

$$(a-b)\big(3(a+b) - 2(a^2+ab+b^2)\big) = (3a^2 - 2a^3) - (3b^2 - 2b^3)$$

produce, en el álgebra de convoluciones, la suma telescópica

$$\sum_{j=0}^{N} \psi_j * \varphi_j = 3\vartheta_N * \vartheta_N - 2\vartheta_N * \vartheta_N * \vartheta_N.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta = 1$, $\vartheta_N * \zeta \to \zeta$ en $\mathcal{S}$ para $\zeta \in \mathcal{S}$. Se comprueba escribiendo la diferencia como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta(y)\big(\zeta(\cdot - 2^{-N}y) - \zeta\big)\, dy$$

y usando continuidad de las traslaciones en cada seminorma de Schwartz, dominada por una potencia de $1 + \|y\|$. Por dualidad, la suma telescópica converge a la identidad en $\mathcal{S}'$. Con la normalización unitaria de Fourier, esto equivale a

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \widehat{\psi}_j(\xi)\widehat{\varphi}_j(\xi) = (2\pi)^{-n}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{6.15}$$

Si $x \in \Omega_\omega$ y $y \in \mathcal{K}_L$, entonces

$$x_n - y_n > \omega(x') + (L+1)\|y'\| \geq \omega(x' - y') + \|y'\|.$$

Así, $x - y \in \Omega_\omega$. Para una prolongación temperada $U$ de $u$, definimos $(\varphi_j * u)(x) := \langle U, \varphi_j(x - \cdot)\rangle$. La función de Schwartz usada en el emparejamiento tiene soporte dentro de $\Omega_\omega$, a distancia positiva de su frontera. Se aproxima en $\mathcal{S}$ mediante cortes compactos cuyos soportes permanecen en ese dominio. Dos prolonga-

ciones que coincidan en $\Omega_\omega$ actúan del mismo modo sobre cada corte y, al pasar al límite, sobre la función completa. Esto prueba la independencia. Las derivadas respecto de $x$ se toman en el núcleo, por lo que la convolución es suave. El mismo argumento se aplica a $\psi_j$, y la identidad global ya demostrada se restringe para dar (6.11).

Demostremos las cotas. Si $\kappa_k$ es el núcleo de $\Delta_k$, la cancelación y el decrecimiento de Schwartz implican, para cualesquiera $N, \lambda > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\kappa_k * \psi_j)(y)|(1 + 2^j\|y\|)^\lambda \, dy \le C_{N,\lambda} 2^{-N|j-k|}. \tag{6.16}$$

Si $j > k$, restamos al núcleo de escala $2^{-k}$ su polinomio de Taylor de grado $M-1$ y usamos los momentos de $\psi_j$. El resto aporta $2^{-M(j-k)}$; el peso de la integral cuesta a lo más $2^{\lambda(j-k)}$. Si $k > j$, los momentos de $\kappa_k$ aportan $2^{-M(k-j)}$. En ambos cálculos se integra primero el factor $\|y\|^M$ a la escala del núcleo que cancela y después el decrecimiento del otro. Elegir $M > N + \lambda$, y potencias de decrecimiento mayores que $M+\lambda+n+1$, prueba la cota. Los índices cero se tratan del mismo modo usando la cancelación del índice positivo; para $j = k = 0$, basta la integrabilidad ponderada de dos funciones de Schwartz.

La misma estimación vale para $\varphi_j * \widetilde{\kappa}_r$. Insertando la reconstrucción de $U$ y comparando los pesos de escalas $j$ y $r$, obtenemos, para cualquier $N > 0$,

$$Q_{j,\lambda} U(x) \le C_N \sum_{r \in \mathbb{N}_0} 2^{-N|j-r|} P_{r,\lambda}(\Delta_r U)(x). \tag{6.17}$$

En detalle, se acota $|\Delta_r U(z)|$ por $P_{r,\lambda}(\Delta_r U)(x)(1+2^r\|x-z\|)^\lambda$. Al dividir por el peso de escala $j$, la desigualdad triangular de los pesos introduce a lo más $2^{\lambda|j-r|}$. Este factor se absorbe tomando un orden de cancelación mayor en (6.16). Los emparejamientos y las sumas convergen primero en $\mathcal{S}'$; la estimación vale con miembros posiblemente infinitos y, cuando la norma de $U$ es finita, controla su convergencia puntual.

Tomamos $N > |s|$. Young para sucesiones y el control de Peetre por $\mathcal{M}_a$ dan (6.12) y (6.13). Para Besov se usa el maximal escalar en cada bloque, y para Triebel–Lizorkin se usan los exponentes $p/a$ y $q/a$, mayores que uno. El caso $q = \infty$ se obtiene mediante el maximal del supremo.

Finalmente,

$$|\varphi_j * U(y)| \le Q_{j,\lambda} U(x)(1 + 2^j\|x - y\|)^\lambda.$$

Insertar esta cota en la convolución con $\kappa_k * \psi_j$, y usar (6.16), prueba (6.14). El indicador del dominio sólo reduce la integral de valores absolutos. □

Esta construcción realiza la reproducción cónica de Rychkov [124, Teorema 4.1]. La distinción entre $\mathcal{S}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$, así como la formulación por doble convolución, se encuentran también en [133, Sección 1.1].

El cálculo anterior da una propiedad que usaremos al diferenciar la extensión. Sean $\eta_j, \theta_j$, $j \in \mathbb{N}$, dilataciones diádicas de funciones de Schwartz con todos sus momentos nulos. Para un conjunto medible $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $m \ge 0$, definimos

$$T_m f := \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-jm} \eta_j * \big(\mathbf{1}_D (\theta_j * f)\big).$$

Las estimaciones (6.16) y (6.17), aplicadas a estas dos familias, prueban

$$\|T_m f\|_{A^{s+m}_{p,q}} \le C \|f\|_{A^s_{p,q}}, \qquad A \in \{B, F\}. \tag{6.18}$$

En efecto, al multiplicar el bloque de salida por $2^{k(s+m)}$, el factor $2^{-jm}$ deja

$$2^{k(s+m)}2^{-jm}2^{-N|j-k|} \le 2^{js}2^{-(N-|s+m|)|j-k|}.$$

Elegir $N > |s+m|$ permite repetir la suma geométrica de la prueba. La serie converge en $\mathcal{S}'$: una distribución temperada produce $|\theta_j * f(x)| \le C2^{jM_0}(1+\|x\|)^{M_0}$ para algún $M_0$, mientras que el emparejamiento con $\eta_j(-\cdot)*\zeta$ decrece más rápidamente que cualquier potencia de $2^{-j}$. Esta última cota es precisamente el cálculo de Taylor anterior, aplicado en seminormas de Schwartz. La misma justificación sirve para la serie del operador de extensión.

**Teorema 6.5.2.** (Extensión en dominios Lipschitz) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio Lipschitz acotado. Existe un solo operador lineal $E$, independiente de los parámetros, con $Eu\restriction_\Omega = u$, que induce operadores continuos

$$E\colon A^s_{p,q}(\Omega) \longrightarrow A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \qquad A \in \{B,F\}, \quad s \in \mathbb{R},$$

en todos los índices definidos en este capítulo. Además,

$$E\colon W^{s,p}(\Omega) \longrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \quad \text{es continuo si } s \ge 0, \quad 1 < p < \infty.$$

Si $s > 0$ no es entero, se tiene

$$W^{s,p}(\Omega) = B^s_{p,p}(\Omega) = F^s_{p,p}(\Omega)$$

con normas equivalentes. Las constantes pueden depender del dominio y de los parámetros, pero el operador es el mismo.

*Demostración.* Comenzamos en $\Omega_\omega$. Para $u \in \mathcal{S}'(\Omega_\omega)$, definimos

$$E_\omega u := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \psi_j * \big(\mathbf{1}_{\Omega_\omega}(\varphi_j * u)\big).$$

El lema anterior prueba que la fórmula depende únicamente de $u$. Para una prolongación temperada $U$, las funciones $\varphi_j * U$ son suaves y de crecimiento polinomial; por ello su producto con el indicador define una distribución temperada. La justificación que sigue a (6.18) prueba la convergencia de la serie. Si el punto de evaluación está en $\Omega_\omega$, el soporte de $\psi_j$ permite quitar el indicador. La reproducción cónica da entonces $E_\omega u = u$ en ese dominio.

Multiplicamos (6.14) por $2^{ks}$, tomamos $N > |s|$ y aplicamos Young y las cotas de las medias locales. Para cualquier prolongación $U$ en la escala considerada obtenemos

$$\|E_\omega u\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le C\|U\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Tomar el ínfimo sobre $U\restriction_{\Omega_\omega} = u$ prueba la cota por la norma cociente.

Relacionemos ahora esa norma con las normas intrínsecas. Sea primero $0 < \sigma < 1$ y $u \in W^{\sigma,p}(\Omega_\omega)$. Su prolongación por cero pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$, así que $u \in \mathcal{S}'(\Omega_\omega)$. Para $j \ge 1$, la cancelación de $\varphi_j$ da

$$\varphi_j * u(x) = \int_{K_L} \varphi_j(y)\big(u(x-y) - u(x)\big)\,dy.$$

Los dos argumentos de $u$ permanecen en el dominio. Hölder respecto de la medida $|\varphi_j(y)|\,dy$ y Tonelli

implican

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{j\sigma p}\|\varphi_j * u\|^p_{L^p(\Omega_\omega)} \le C\int_{\mathcal{K}_L}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{j\sigma p}|\varphi_j(y)|\right)\int_{\Omega_\omega}|u(x-y)-u(x)|^p\,dx\,dy$$
$$\le C[u]^p_{W^{\sigma,p}(\Omega_\omega)}.$$

En la segunda desigualdad se usa

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{j\sigma p}|\varphi_j(y)| \le C\|y\|^{-n-\sigma p}.$$

Esta cota resulta separando $2^j\|y\| \le 1$ y $2^j\|y\| > 1$, con un exponente de decrecimiento mayor que $n+\sigma p$. El bloque cero se controla por Young. Para la síntesis de Besov basta la versión sin peso de (6.16) y Young, por lo que

$$\|E_\omega u\|_{B^\sigma_{p,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|u\|_{L^p(\Omega_\omega)} + [u]_{W^{\sigma,p}(\Omega_\omega)}\right).$$

La identificación global con $W^{\sigma,p}$ prueba la extensión en este primer intervalo.

Para tratar derivadas de orden mayor construiremos primitivas que conserven el cono. Con la función $g$ utilizada arriba, ponemos

$$g_-(t) := \tfrac{1}{2}g(t/2), \qquad d(t) := g(t) - g_-(t).$$

Todos los momentos de $d$ son cero. Para $m \in \mathbb{N}$,

$$h_m(t) := \frac{1}{(m-1)!}\int_{-\infty}^{t}(t-r)^{m-1}d(r)\,dr$$

satisface $D^m h_m = d$, tiene soporte en $[1,\infty)$ y es de Schwartz. En efecto, los momentos nulos permiten escribir la integral como el negativo de la integral desde $t$ hasta $\infty$, lo que prueba el decrecimiento de todas sus derivadas. Integrar por partes $m$ veces da

$$\int_{\mathbb{R}} t^\ell h_m(t)\,dt = (-1)^m\frac{\ell!}{(\ell+m)!}\int_{\mathbb{R}} t^{\ell+m}d(t)\,dt = 0, \qquad \ell \in \mathbb{N}_0.$$

La identidad telescópica para un producto proporciona

$$\prod_{r=1}^{n} g(y_r) - \prod_{r=1}^{n} g_-(y_r) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{r=1}^{i-1} g(y_r)\right) d(y_i)\left(\prod_{r=i+1}^{n} g_-(y_r)\right),$$

con producto vacío igual a uno. Sustituimos $d$ por $D^m h_m$ y hacemos el cambio lineal $x = By$. Resultan funciones $\tau_{i,m} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sostenidas en el mismo cono, con todos sus momentos nulos, tales que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} D^m_{v_i}\tau_{i,m}, \qquad v_i := Be_i.$$

Aquí $D_{v_i}$ es la derivada en la dirección constante $v_i$. Si $\tau_{i,m,j}(x) := 2^{jn}\tau_{i,m}(2^j x)$, entonces

$$\varphi_j * u = 2^{-jm}\sum_{i=1}^{n}\tau_{i,m,j} * D^m_{v_i}u \quad \text{en } \Omega_\omega.$$

La integración por partes es distribucional; los soportes de los núcleos permanecen dentro del dominio, de

modo que no aparecen términos de frontera.

Si $u \in W^{m,p}(\Omega_\omega)$, prolongamos cada $D^m_{v_i} u$ por cero a una función $f_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Para $|\alpha| \le m$, al derivar la serie de $E_\omega u$ obtenemos el bloque cero y las sumas

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{j(|\alpha|-m)} \psi_j^\alpha * \big(\mathbf{1}_{\Omega_\omega}(\tau_{i,m,j} * f_i)\big), \qquad \psi_j^\alpha := 2^{-j|\alpha|} D^\alpha \psi_j.$$

La cota (6.18), con escala $F^0_{p,2} = L^p$, controla estas sumas en $F^{m-|\alpha|}_{p,2} \hookrightarrow L^p$. El bloque cero se controla por Young con $D^\alpha \psi_0$. Como las derivadas direccionales son combinaciones finitas de las derivadas parciales de orden $m$, concluimos

$$\|E_\omega u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \le C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega_\omega)}.$$

El caso $m = 0$ se obtiene directamente de la cota en $F^0_{p,2}$, usando la prolongación por cero de $u$.

Si $s = m + \sigma$, $0 < \sigma < 1$, cada $D^m_{v_i} u$ pertenece a $W^{\sigma,p}(\Omega_\omega)$. El primer caso de la prueba proporciona una prolongación $f_i$ en $B^\sigma_{p,p}(\mathbb{R}^n)$, con norma controlada. La misma representación, ahora sin diferenciar el núcleo de salida, y (6.18) dan

$$\|E_\omega u\|_{B^{m+\sigma}_{p,p}(\mathbb{R}^n)} \le C \left( \|u\|_{L^p(\Omega_\omega)} + \sum_{i=1}^n \|D^m_{v_i} u\|_{W^{\sigma,p}(\Omega_\omega)} \right) \le C \|u\|_{W^{m+\sigma,p}(\Omega_\omega)}.$$

La identificación global $B^{m+\sigma}_{p,p} = W^{m+\sigma,p}$ concluye la cota intrínseca en todos los órdenes no enteros.

Para un dominio Lipschitz acotado elegimos una cubierta finita por cilindros de frontera y una región interior. Después de rotaciones y traslaciones, cada porción de frontera es el gráfico de una función Lipschitz. Esa función se prolonga a todo $\mathbb{R}^{n-1}$ mediante $\inf_{y\in D}(\omega(y) + L\|x' - y\|)$, donde $D$ es el dominio del gráfico; la desigualdad Lipschitz prueba que coincide con $\omega$ en $D$. Obtenemos dominios especiales $\Omega_i$ que coinciden con $\Omega$ en cilindros menores. Elegimos una partición suave $\eta_0, \dots, \eta_N$ en una vecindad de $\overline{\Omega}$, con $\eta_0$ sostenida en $\Omega$, y cortes $\chi_i$ iguales a uno cerca de $\operatorname{supp} \eta_i$, sostenidos en esos cilindros menores. Definimos

$$E_\Omega u := (\eta_0 u)^0 + \sum_{i=1}^N \chi_i E_i(\eta_i u).$$

En cada dominio especial, $\eta_i u$ se pone igual a cero fuera del cilindro; el corte se anula cerca de ese borde artificial. El superíndice 0 indica la prolongación por cero de la parte interior. En $\Omega$, la fórmula vale $\sum_{i=0}^N \eta_i u = u$. Los multiplicadores suaves y la finitud de la cubierta dan las cotas en los espacios de restricción.

Para las normas intrínsecas, Leibniz controla las derivadas de los productos. En los cocientes de Gagliardo, los términos que cruzan un borde artificial se estiman usando la distancia positiva $d$ del soporte del corte a ese borde y

$$\int_{\{h\in\mathbb{R}^n \,|\, \|h\| \ge d\}} \|h\|^{-n-\sigma p}\, dh = C_{n,\sigma,p}\, d^{-\sigma p}.$$

Los términos interiores se controlan por la seminorma de $u$ y por $|\eta_i(x) - \eta_i(y)| \le C \min\{1, \|x - y\|\}$. Para los productos de orden alto, Leibniz produce también derivadas de $u$ de orden menor que $m$. El pegado en los órdenes enteros, que sólo usa Leibniz, ya da un operador continuo de $W^{1,p}(\Omega)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Cada una de esas derivadas menores pertenece a $W^{1,p}(\Omega)$; la prolongamos con ese operador y aplicamos el lema

de incrementos para controlar su norma de $W^{\sigma,p}$. Esto justifica todos los términos fraccionarios de los productos y conserva las cotas intrínsecas al efectuar el pegado.
Finalmente, restringir una función global nunca aumenta sus normas de derivadas ni la integral de Gagliardo. Esta observación da $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \le C\|u\|_{B^s_{p,p}(\Omega)}$. La extensión construida da la desigualdad inversa. La identidad $B^s_{p,p} = F^s_{p,p}$ pasa a los cocientes y completa la prueba. □

**Corolario 6.5.3.** (Comparación $H/W$ en un dominio) Sea $\Omega$ un dominio Lipschitz acotado, $s > 0$ no entero y $1 < p < \infty$. Entonces

$$\begin{cases} W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,p}(\Omega), & 1 < p \le 2, \\ H^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega), & 2 \le p < \infty. \end{cases}$$

Hay igualdad para $p = 2$ y, si $\Omega$ tiene interior no vacío, el encaje es estricto para $p \neq 2$. En un abierto arbitrario sólo está siempre garantizado el encaje del espacio de restricción $B^s_{p,p}(\Omega)$ en el espacio intrínseco de Gagliardo; la igualdad, incluso para $p = 2$, requiere una propiedad de extensión.

*Demostración.* Aplicamos el operador de extensión del Teorema 6.5.2, el encaje global del Corolario 6.3.15 y la restricción al dominio. La identidad para $p = 2$ se obtiene de la misma manera.
Para la estrictez, fijamos una bola $B \Subset \Omega$. La construcción del Corolario 6.3.15 proporciona una función $u$, sostenida en $B$, que pertenece a la escala mayor y no a la menor en $\mathbb{R}^n$. Su restricción pertenece a la escala mayor en $\Omega$. Si perteneciera también a la menor, el operador de extensión daría una prolongación $V$ en esa escala global. Tomemos $\chi \in C^\infty_c(\Omega)$, igual a uno cerca de $\overline{B}$. Como $V = u$ en $\Omega$, se tiene $\chi V = u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La continuidad de la multiplicación por $\chi$ situaría $u$ en la escala menor global, contradicción.
En un abierto arbitrario, restringir una prolongación global disminuye las integrales que definen la norma intrínseca. Esto da $B^s_{p,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$. La prueba de la inclusión recíproca que hemos usado requiere la extensión continua construida para los dominios Lipschitz. □

## 6.6 Encajes de Sobolev de orden real

La cantidad

$$\operatorname{ind}(s,p) := s - \frac{n}{p}$$

se llama índice diferencial. Las desigualdades de Bernstein del Teorema 4.12.4 muestran que al pasar de $p_0$ a un exponente mayor $p_1$ deben perderse $n\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)$ derivadas. La interpolación explica la misma regla a partir de los encajes enteros.

**Teorema 6.6.1.** (Encajes entre escalas) Sean $1 < p_0 \le p_1 < \infty$ y $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$.

(a) Si $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$, entonces

$$B^{s_0}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n)$$

para $1 \le q \le \infty$, y también

$$F^{s_0}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{s_1}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n)$$

para esos mismos índices finos.

(b) Si $s_0 > s_1$ y $p$ es fijo, entonces

$$A^{s_0}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow A^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n), \qquad A \in \{B, F\},$$

para cualesquiera índices finos admisibles $q_0, q_1$.

(c) Si $s_0 = s_1$, el encaje dentro de una misma escala vale cuando $q_0 \le q_1$.

*Demostración.* Para Besov, Bernstein da, para cada $j \in \mathbb{N}_0$,

$$2^{js_1}\|\Delta_j u\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \le C 2^{j(s_1 + n(1/p_0 - 1/p_1))}\|\Delta_j u\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} = C 2^{js_0}\|\Delta_j u\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}.$$

Tomar la norma $\ell^q(\mathbb{N}_0)$ prueba el primer encaje.
En Triebel–Lizorkin hay que estimar conjuntamente los bloques antes de integrar. Si $p_0 = p_1$, también $s_0 = s_1$ y la afirmación es inmediata. Supongamos $p_0 < p_1$ y pongamos

$$d = s_0 - s_1 = n(1/p_0 - 1/p_1), \qquad f_j = 2^{js_0}\Delta_j u, \qquad G(x) = \|(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{\ell^q}.$$

Se tiene $0 < d < n/p_0$. Un núcleo reproductor de banda limitada da $f_j = \widetilde{K}_j * f_j$, donde

$$|\widetilde{K}_j(y)| \le C_N 2^{jn}(1 + 2^j\|y\|)^{-N}.$$

Por Minkowski en $\ell^q$, con el supremo si $q = \infty$,

$$\begin{aligned}\|(2^{-jd} f_j(x))_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{\ell^q} &\le C_N \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\left[2^{j(n-d)}(1 + 2^j\|y\|)^{-N}\right] G(x-y)\,dy \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^n} \|y\|^{d-n} G(x-y)\,dy =: C I_d G(x).\end{aligned}$$

La segunda desigualdad se sigue de que $t^{n-d}(1+t)^{-N}$ está acotada para $t > 0$ si $N > n - d$.
Probemos la cota escalar que necesitamos para $I_d$. Para $R > 0$, dividimos la integral en $\|y\| < R$ y $\|y\| \ge R$. Descomponer la primera región en las coronas $2^{-k-1}R \le \|y\| < 2^{-k}R$, $k \in \mathbb{N}_0$, y usar el maximal de Hardy–Littlewood da

$$\int_{\|y\|<R} \|y\|^{d-n} G(x-y)\,dy \le C R^d \mathcal{M}G(x) \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-kd} \le C' R^d \mathcal{M}G(x).$$

Hölder en la segunda región proporciona

$$\int_{\|y\|\ge R} \|y\|^{d-n} G(x-y)\,dy \le C R^{d-n/p_0}\|G\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)},$$

pues $(n-d)p_0' > n$. Cuando $\mathcal{M}G(x) > 0$, elegimos $R = (\|G\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}/\mathcal{M}G(x))^{p_0/n}$; si el maximal es cero, ambas integrales se anulan. Resulta

$$I_d G(x) \le C\|G\|^{dp_0/n}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \big(\mathcal{M}G(x)\big)^{1 - dp_0/n}.$$

Como $p_1(1 - dp_0/n) = p_0$, la continuidad del maximal en $L^{p_0}$ implica $\|I_d G\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \le C\|G\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}$. Esta desigualdad y la estimación vectorial anterior prueban $F^{s_0}_{p_0,q} \hookrightarrow F^{s_1}_{p_1,q}$, incluido $q = \infty$.

Para (b), escribimos $\delta = s_0 - s_1 > 0$. Si $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión no negativa,

$$\|(2^{-j\delta}b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{\ell^{q_1}} \le \|(2^{-j\delta})_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{\ell^{q_1}} \sup_{j\in\mathbb{N}_0} b_j \le C_{\delta,q_1}\|(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{\ell^{q_0}}.$$

Esta desigualdad se aplica a $b_j = 2^{js_0}\|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para Besov y, punto a punto, a $b_j(x) = 2^{js_0}|\Delta_j u(x)|$ para Triebel–Lizorkin. Por último, (c) es la inclusión $\ell^{q_0} \hookrightarrow \ell^{q_1}$ cuando $q_0 \le q_1$, aplicada en esas mismas dos posiciones. □

**Lema 6.6.2.** (Morrey fraccionario para la seminorma de Gagliardo) Sean $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$ y $sp > n$. Si $\alpha = s - \frac{n}{p}$, todo $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ posee un representante en $C_b^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|u\|_{C_b^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demostración.* Sea $B = B(x,r)$. Por la Proposición B.7.9 y el Teorema B.6.17,

$$\begin{aligned}\int_B |u - u_B|^p &\le \frac{1}{|B|}\int_B\int_B |u(y) - u(z)|^p\,dy\,dz \\ &\le Cr^{-n}(2r)^{n+sp}[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = Cr^{n+p\alpha}[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Explicamos el paso de esta estimación integral a la continuidad puntual. Si $B_k = B(x, 2^{-k}r)$, la Proposición B.7.9 da

$$|u_{B_{k+1}} - u_{B_k}| \le C(2^{-k}r)^\alpha [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

La serie geométrica muestra que $(u_{B_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge. Por el Teorema B.8.12, su límite coincide con $u(x)$ para casi todo $x$ y define un representante en todos los puntos. Si $r = \|x - y\|$, se comparan los promedios sobre $B(x,r)$ y $B(y,r)$ con el promedio sobre una bola que contiene a ambos; la misma estimación y los dos telescopios diádicos dan

$$|u(x) - u(y)| \le C\|x - y\|^\alpha [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Finalmente, el promedio sobre la bola unitaria se controla mediante la Proposición B.7.9 por $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, lo cual controla también la norma uniforme. □

**Teorema 6.6.3.** (Sobolev, Morrey y el caso crítico) Sean $s > 0$ y $1 < p < \infty$.

(a) Si $sp < n$ y $p_s^* = \dfrac{np}{n - sp}$, entonces

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n).$$

Si $s \notin \mathbb{N}$, también

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p_s^*,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n).$$

(b) Si $sp = n$, tanto $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ como $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ se encajan en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \le q < \infty$, pero no en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en general. El encaje límite

$$B^{\frac{n}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

sí es continuo.

(c) Si $sp > n$, los elementos poseen representantes continuos. Más precisamente, si $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$

satisfacen $k+\alpha < s-\frac{n}{p}$, entonces

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n),\ W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Cuando $0<s<1$ y $sp>n$, la escala de Slobodeckij alcanza el exponente $\alpha = s-\frac{n}{p}$.

Los mismos resultados valen en un dominio Lipschitz acotado después de restringir; allí, en el caso crítico, se obtiene $L^q(\Omega)$ para todo $1 \le q < \infty$.

*Demostración.* Explicamos primero el mecanismo de interpolación. Por el Teorema 6.3.10, el encaje de la escala $F$ con índice diferencial constante da

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = F^{s}_{p,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{0}_{p_s^*,2}(\mathbb{R}^n) = L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n).$$

Para obtener el refinamiento de Lorentz sin variar el exponente espacial en la fórmula de interpolación real, elegimos

$$0 \le s_0 < s < s_1 < \frac{n}{p}, \qquad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1,$$

y definimos $q_i$ mediante $q_i^{-1} = p^{-1} - \frac{s_i}{n}$. El encaje recién probado da $H^{s_i,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q_i}(\mathbb{R}^n)$. Interpolamos el operador identidad mediante el Teorema 5.3.1 y usamos los Teoremas 6.3.11 y 5.8.3:

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = (H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,p}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} \hookrightarrow (L^{q_0}(\mathbb{R}^n), L^{q_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = L^{p_s^*,p}(\mathbb{R}^n).$$

En efecto, $(p_s^*)^{-1} = (1-\theta)q_0^{-1} + \theta q_1^{-1}$. Como $p < p_s^*$, la monotonía del segundo índice en los espacios de Lorentz, incluida en el Teorema 5.8.3, implica $L^{p_s^*,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)$. Queda probado (a).
Si $sp = n$, aplicamos (a) con cualquier $s-\varepsilon$ y elegimos $\varepsilon$ para obtener el exponente finito deseado. En $\mathbb{R}^n$ esto cubre $q \ge p$; en un dominio de medida finita, la Proposición B.7.9 cubre también $q < p$.
Mostramos explícitamente que el encaje crítico en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ falla. Elegimos $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\eta(0) > 0$ y

$$\operatorname{supp}(\widehat{\eta}) \subseteq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{3}{4} \le \|\xi\| \le \frac{4}{3} \right\},$$

y definimos

$$u_N(x) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \eta(2^j x).$$

La interacción finita de los bloques y el cambio de variable $y = 2^j x$ dan

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|u_N\|_{B^{\frac{n}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^n)} \le C \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

La norma crítica de Triebel–Lizorkin también está uniformemente acotada. En efecto, sobre el anillo $2^{-k-1} <$

$\|x\| \le 2^{-k}$, el crecimiento geométrico para $j \le k$ y el decrecimiento de Schwartz para $j > k$ dan

$$\left( \sum_{j=1}^{N} \frac{2^{\frac{2jn}{p}}}{j^2} |\eta(2^j x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C \frac{2^{\frac{kn}{p}}}{1+k}.$$

Usamos esta cota para $1 \le k < N$. Elevar a la potencia $p$ e integrar por esos anillos produce $\sum_{k=1}^{N-1} (1+k)^{-p}$. En la bola $\|x\| \le 2^{-N}$, la suma geométrica da una cota $C2^{Nn/p}/N$, cuya integral a la potencia $p$ es a lo más $CN^{-p}$. En $\|x\| > 1$, elegimos $M > n/p$ y usamos $|\eta(2^j x)| \le C_M 2^{-jM} \|x\|^{-M}$; la suma queda acotada por $C_M \|x\|^{-M}$, integrable a la potencia $p$ en esa región. La región $1/2 < \|x\| \le 1$ tiene asimismo una cota uniforme. El Lema 6.3.6 convierte estas estimaciones de la sucesión de sumandos en la norma de $u_N$. Por lo tanto,

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \|u_N\|_{F^{\frac{n}{p}}_{p,2}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Sin embargo, $u_N(0) = \eta(0) \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \to \infty$. El Teorema 6.3.10 identifica siempre $H^{\frac{n}{p},p}(\mathbb{R}^n)$ con $F^{\frac{n}{p}}_{p,2}(\mathbb{R}^n)$. Si $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$, el Corolario 6.3.14 identifica $W^{\frac{n}{p},p}(\mathbb{R}^n)$ con $B^{\frac{n}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^n)$; si $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$, el mismo Teorema 6.3.10 da $W^{\frac{n}{p},p}(\mathbb{R}^n) = H^{\frac{n}{p},p}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, en todos los casos, ni $W^{\frac{n}{p},p}(\mathbb{R}^n)$ ni $H^{\frac{n}{p},p}(\mathbb{R}^n)$ se encajan en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Por otra parte, el Teorema 4.12.4 y la suma absoluta dan

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \|\Delta_j u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{\frac{jn}{p}} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|u\|_{B^{\frac{n}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Si $sp > n$, el Teorema 4.12.4, aplicado bloque por bloque, lleva el espacio de partida a $B^{s-\frac{n}{p}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$, la escala de Hölder–Zygmund. Si $k + \alpha < s - \frac{n}{p}$, la suma uniforme de los bloques y la estimación

$$\|D^k \Delta_j u(\cdot + h) - D^k \Delta_j u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C \min\{1, 2^j \|h\|\} 2^{jk} \|\Delta_j u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

se dividen en $2^j\|h\| \le 1$ y $2^j\|h\| > 1$; las dos series geométricas dan el módulo $\|h\|^\alpha$. Para $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con $0 < s < 1$, el Lema 6.6.2 proporciona directamente el exponente límite $s - \frac{n}{p}$. La extensión del Teorema 6.5.2 transfiere todos los encajes al dominio. □

**Teorema 6.6.4.** (Rellich–Kondrashov de orden real) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio Lipschitz acotado, $1 < p < \infty$ y $s > t \ge 0$. Entonces

$$H^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow H^{t,p}(\Omega)$$

es compacto. Si $s, t$ no son enteros, el mismo resultado vale para $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{t,p}(\Omega)$; con las interpretaciones enteras usuales vale para todos los órdenes no negativos. Además, si $sp < n$ y $1 \le q < p^*_s$, los encajes en $L^q(\Omega)$ son compactos.

*Demostración.* Sea $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en uno de los espacios de orden $s$. La prolongamos mediante el Teorema 6.5.2 y multiplicamos por un corte $\zeta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ que vale uno en una vecindad de $\overline{\Omega}$. Obtenemos una sucesión $(v_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, sostenida en un compacto fijo $K \subset \mathbb{R}^n$ y acotada en el espacio global

correspondiente. Si

$$P_J := \sum_{j=0}^{J} \Delta_j,$$

la definición mediante bloques y la Proposición B.8.4 dan la estimación uniforme de la cola

$$\|(I - P_J)v_\nu\|_{A^t_{p,r}(\mathbb{R}^n)} \le C 2^{-J(s-t)} \|v_\nu\|_{A^s_{p,r}(\mathbb{R}^n)}, \qquad A \in \{B, F\}.$$

Aquí se toma $A = F$, $r = 2$, para la escala de Bessel y $A = B$, $r = p$, para la escala de Slobodeckij no entera. Primero probaremos la compacidad dentro de cada una de estas dos escalas y después trataremos los órdenes enteros o mixtos de $W^{s,p}$.

Fijemos $J$. El operador $P_J$ es convolución con un núcleo $K_J \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La sucesión $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y se anula fuera de $K$. Por el Teorema 4.10.1 y la Proposición B.8.17,

$$\|P_J v_\nu(\cdot + h) - P_J v_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|K_J(\cdot + h) - K_J\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|v_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$$

uniformemente en $\nu$ cuando $\|h\| \to 0$. Además, la desigualdad integral de Minkowski del Teorema B.8.2 da

$$\|P_J v_\nu\|_{L^p(\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|>R\})} \le \|v_\nu\|_{L^1(K)} \sup_{y\in K} \|K_J(\cdot - y)\|_{L^p(\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|>R\})} \longrightarrow 0$$

uniformemente en $\nu$ cuando $R \to \infty$; se usó también $\|v_\nu\|_{L^1(K)} \le |K|^{\frac{1}{p'}} \|v_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. El criterio de Fréchet–Kolmogórov de la Proposición B.7.19 muestra que $(P_J v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacto en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Como $P_J v_\nu$ tiene frecuencia en una bola fija, el Teorema 4.12.4 implica

$$\|P_J(v_\nu - v_\mu)\|_{A^t_{p,r}(\mathbb{R}^n)} \le C_J \|P_J(v_\nu - v_\mu)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Escribamos $M_s := \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \|v_\nu\|_{A^s_{p,r}(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ elegimos $J_k$ de modo que

$$2C 2^{-J_k(s-t)} M_s < 2^{-k}.$$

Partiendo de la sucesión original, extraemos recursivamente subsucesiones anidadas $(v_\nu^{(k)})_\nu$: una vez elegida la de nivel $k-1$, la compacidad de $(P_{J_k} v_\nu^{(k-1)})_\nu$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y la desigualdad de Bernstein permiten escoger $(v_\nu^{(k)})_\nu$ de modo que $(P_{J_k} v_\nu^{(k)})_\nu$ converja en $A^t_{p,r}(\mathbb{R}^n)$. Tomemos la subsucesión diagonal $w_k := v_k^{(k)}$. Para cada $k_0$ fijo, la cola $(w_k)_{k\ge k_0}$ es una subsucesión de $(v_\nu^{(k_0)})_\nu$; por lo tanto, $(P_{J_{k_0}} w_k)_{k\ge k_0}$ es de Cauchy en el espacio de orden $t$. Dados $\varepsilon > 0$, elegimos $k_0$ con $2^{-k_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ y luego $N \ge k_0$ tal que, para $k, \ell \ge N$,

$$\|P_{J_{k_0}}(w_k - w_\ell)\|_{A^t_{p,r}(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La estimación uniforme de las dos colas da entonces

$$\|w_k - w_\ell\|_{A^t_{p,r}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

Así, $(w_k)$ converge en el espacio de orden $t$. La restricción a $\Omega$ es continua, de modo que queda probada la compacidad entre órdenes dentro de cada escala.

Para los casos enteros o mixtos de $W^{s,p}$, elijamos dos números no enteros $a, b$ con $t < b < a < s$. La pérdida estricta de orden permite cambiar el índice fino de los bloques. En efecto, si $A_j := 2^{js}\|\Delta_j v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, la norma de partida domina $\sup_{j\in\mathbb{N}_0} A_j$, tanto para $B^s_{p,p}$ como para $F^s_{p,2}$. Por la convergencia de la serie geométrica,

$$\|v\|_{B^a_{p,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jp(s-a)}A_j^p\right)^{1/p} \le C_{s-a}\|v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Cuando $s$ es entero usamos aquí $W^{s,p} = H^{s,p} = F^s_{p,2}$, con equivalencia de normas. En el extremo de llegada, la desigualdad triangular en $L^p(\ell^2)$ y Hölder para sucesiones dan

$$\|v\|_{F^t_{p,2}(\mathbb{R}^n)} \le C\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jt}\|\Delta_j v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_{b-t}\|v\|_{B^b_{p,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Si $t$ no es entero, la inclusión $B^b_{p,p} \hookrightarrow B^t_{p,p}$ se obtiene directamente de los pesos; si es entero, la última estimación y $F^t_{p,2} = W^{t,p}$ dan la inclusión requerida. Aplicando estas estimaciones a las extensiones con soporte común y usando la compacidad de $B^a_{p,p}$ a $B^b_{p,p}$ recién probada, obtenemos una subsucesión convergente en $W^{t,p}(\Omega)$. Así quedan incluidos todos los órdenes no negativos sin identificar $B^j_{p,p}$ con $W^{j,p}$ en un orden entero.

Para el encaje en $L^q(\Omega)$, elegimos $0 < t < s$ tal que $q < p^*_t < p^*_s$ cuando $q > p$; si $q \le p$, basta cualquier $0 < t < s$ y la Proposición B.7.9 en el dominio de medida finita. En ambos casos usamos

$$A^s_{p,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow A^t_{p,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

El segundo encaje es el Teorema 6.6.3. Esto concluye la prueba. □

## 6.7 Trazas de orden fraccionario

La restricción al hiperplano $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ reduce la dimensión en uno. Una función concentrada en una franja de espesor $2^{-j}$ tiene una norma espacial que contiene el factor $2^{-j/p}$; al evaluarla en el centro de la franja se pierde ese factor. Esto explica la pérdida de $1/p$ derivadas. En Triebel–Lizorkin, la integración en la dirección normal determina además el índice fino $p$ de la norma de llegada.

Supondremos $n \ge 2$. Cuando $n = 1$, se omiten las variables tangenciales y el espacio sobre un punto se interpreta como $\mathbb{K}$, con su valor absoluto; los mismos argumentos dan la evaluación en los extremos de un intervalo.

Para una hipersuperficie compacta suave $\Sigma$, definimos $B^\sigma_{p,q}(\Sigma)$ mediante un atlas finito, una partición de la unidad y las normas euclidianas de las expresiones locales. El Lema 6.4.3, aplicado en dimensión $n-1$, compara dos de estas normas: se inserta una partición dentro de la otra y se aplican los operadores de cambio de coordenadas sobre cada traslape. Como hay un número finito de términos, ambas desigualdades tienen constantes independientes de la distribución. El espacio resultante no depende del atlas.

**Lema 6.7.1.** (Estimación diádica de traza) Sea $1 < p < \infty$, $j \in \mathbb{N}_0$, y sea $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con

$$\operatorname{supp}\widehat{v} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi\| \le A2^j\}.$$

Entonces

$$\|v(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \le C_{A,p}\, 2^{j/p}\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.19}$$

Sean $s > 1/p$, $1 \le q \le \infty$, $u_j = \Delta_j u$, $j \in \mathbb{N}_0$, y $\sigma = s - 1/p > 0$. Si la norma correspondiente del miembro derecho es finita, se tiene

$$\left\| \left( 2^{\ell\sigma} \left\| \Delta'_\ell \sum_{j\in\mathbb{N}_0} u_j(\cdot,0) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \right)_{\ell\in\mathbb{N}_0} \right\|_{\ell^q} \le C \left\| \left(2^{js}\|u_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)_{j\in\mathbb{N}_0} \right\|_{\ell^q}, \tag{6.20}$$

y

$$\left( \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} 2^{\ell\sigma p} \left\| \Delta'_\ell \sum_{j\in\mathbb{N}_0} u_j(\cdot,0) \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{1/p} \le C \left\| \left(2^{js}u_j\right)_{j\in\mathbb{N}_0} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^q(\mathbb{N}_0))}. \tag{6.21}$$

Aquí $\Delta'_\ell$ son bloques en $\mathbb{R}^{n-1}$. Los supremos sustituyen a las normas $\ell^\infty$. La constante de (6.21) puede elegirse independiente de $q \in [1,\infty]$.

*Demostración.* Elegimos un núcleo $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ cuyo multiplicador de convolución $(2\pi)^{1/2}\widehat{\eta}$ valga uno en $[-A, A]$. La reproducción en la variable normal da

$$v(x',0) = \int_{\mathbb{R}} 2^j \eta(-2^j t) v(x',t)\, dt.$$

Hölder en $t$ implica

$$|v(x',0)|^p \le C 2^j \int_{\mathbb{R}} |v(x',t)|^p\, dt.$$

Integrar en $x'$ prueba (6.19). La fórmula se obtiene primero para funciones de Schwartz y después para $v$ mediante su reproducción por un núcleo de frecuencia ampliada. Ese núcleo proporciona el representante suave de $v$ y permite pasar al límite en $L^p$.

Pongamos $g_j = u_j(\cdot,0)$. Su soporte de Fourier tangencial está en una bola de radio $C2^j$, aunque puede contener frecuencias tangenciales bajas. Por ello

$$\Delta'_\ell \sum_{j\in\mathbb{N}_0} g_j = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_0 \\ j\ge \ell - N_0}} \Delta'_\ell g_j. \tag{6.22}$$

Young y (6.19) dan

$$2^{\ell\sigma}\|\Delta'_\ell g_j\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \le C 2^{-(j-\ell)\sigma} 2^{js}\|u_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad j \ge \ell - N_0. \tag{6.23}$$

La sucesión $\left(2^{-m\sigma}\mathbf{1}_{\{m\ge -N_0\}}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ es sumable. Young para sucesiones prueba (6.20).

Para la segunda estimación se integra cada bloque en una franja distinta. Definimos

$$I_j := (2^{-j}, 2^{1-j}], \qquad j \in \mathbb{N}_0.$$

Estos intervalos son disjuntos y tienen longitud $2^{-j}$. Si $t \in I_j$, la definición de Peetre implica

$$|u_j(x',0)| \le 3^\lambda P_{j,\lambda} u_j(x',t).$$

Multiplicamos por $2^{jsp}$, integramos en $I_j$ y después en $x'$. Al sumar en $j$, la disjunción de los intervalos da

$$\sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j(sp-1)}\|g_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\sum_{j\in\mathbb{N}_0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times I_j}\left(2^{js}P_{j,\lambda}u_j(x)\right)^p dx$$
$$\le C\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{j\in\mathbb{N}_0}\left(2^{js}P_{j,\lambda}u_j(x)\right)^p dx.$$

Elegimos $0<a<1$ y $\lambda > n/a$. El control de Peetre y la monotonía del maximal dan

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js}P_{j,\lambda}u_j \le C\left[\mathcal{M}\left(\sup_{j\in\mathbb{N}_0}|2^{js}u_j|^a\right)\right]^{1/a}.$$

Como $p/a>1$, la continuidad del maximal implica

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j\sigma p}\|g_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{1/p} \le C\left\|\sup_{j\in\mathbb{N}_0}|2^{js}u_j|\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\left\|\left(2^{js}u_j\right)_{j\in\mathbb{N}_0}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^q(\mathbb{N}_0))}.$$

Finalmente, (6.22), Young para convoluciones y la misma sucesión geométrica de (6.23) llevan esta norma de los $g_j$ a la norma $B^\sigma_{p,p}$ de su suma. Esto prueba (6.21) con una constante independiente de $q$.
Las series de trazas convergen en $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$: en ambas situaciones la sucesión $(2^{j\sigma}\|g_j\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})})_{j\in\mathbb{N}_0}$ es acotada y $\sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{-j\sigma}<\infty$. Así, todos los pasos para familias finitas pasan al límite. □

**Teorema 6.7.2.** (Traza sobre el hiperplano y corretracción) Sean $1<p<\infty$, $1\le q\le\infty$ y $s>1/p$. La restricción al hiperplano induce operadores continuos y suprayectivos

$$\operatorname{tr}\colon B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow B^{s-1/p}_{p,q}(\mathbb{R}^{n-1}),\qquad \operatorname{tr}\colon F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow B^{s-1/p}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{6.24}$$

Ambos poseen una corretracción lineal continua. En particular,

$$\operatorname{tr}\colon H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow B^{s-1/p}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-1}) \tag{6.25}$$

es una retracción.

*Demostración.* Definimos, para cada elemento de los espacios del enunciado,

$$\operatorname{tr} u := \sum_{j\in\mathbb{N}_0}(\Delta_j u)(\cdot,0).$$

El lema prueba la convergencia y la continuidad. Esta definición coincide con una evaluación canónica en la dirección normal. En efecto, (6.19) vale en cualquier hiperplano de altura $t$, con la misma constante, y

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|(\Delta_j u)(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \le C2^{-j(s-1/p)}\|u\|_{A^s_{p,q}}.$$

Cada bloque es una función continua de $t$ con valores en $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. Esto se deduce de la reproducción unidimensional y la continuidad de las traslaciones de su núcleo. La serie converge uniformemente en ese

espacio de funciones continuas. Su suma representa a $u$ como distribución, por la reconstrucción diádica, y su valor en cero es la traza definida. Por ello la traza no depende de la resolución. Si $u$ se anula en el semiespacio $t > 0$, su representante continuo en $t$ se anula para $t > 0$, y también en $t = 0$. Esta observación dará la independencia respecto de prolongaciones.

Elegimos $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, con $\rho(0) = 1$ y soporte de Fourier compacto. Para un dato $g$ en el espacio de llegada, ponemos

$$(\operatorname{ex} g)(x', t) := \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \rho(2^j t) \Delta'_j g(x'). \tag{6.26}$$

Los sumandos tienen soporte espectral en anillos de $\mathbb{R}^n$ comparables con $2^j$, salvo el bloque cero, que tiene soporte en una bola. Además,

$$\|\rho(2^j \cdot) \Delta'_j g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 2^{-j/p} \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R})} \|\Delta'_j g\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{6.27}$$

El Lema 6.3.6 da la cota de Besov y la convergencia distribucional.

Para Triebel–Lizorkin probaremos la cota más fuerte con índice fino uno; la inclusión $\ell^1 \hookrightarrow \ell^q$ proporcionará los demás índices. Escribimos

$$b_j(x') := 2^{j(s-1/p)} |\Delta'_j g(x')|, \qquad j \in \mathbb{N}_0.$$

La síntesis espectral y el decrecimiento de $\rho$ dan

$$\|\operatorname{ex} g\|_{F^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \le C \left\| \sum_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{j/p} (1 + 2^j |t|)^{-M} b_j(x') \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, dx'\, dt)}.$$

Tomamos $M > 1/p$ y dividimos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en

$$A_m := \{ t \in \mathbb{R} \mid 2^{-m-1} < |t| \le 2^{-m} \}, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Su medida es $2^{-m}$. Para $t \in A_m$, multiplicar la suma por $2^{-m/p}$ la acota por

$$C \sum_{j \in \mathbb{N}_0} c_{j-m} b_j(x'), \qquad c_\ell := \begin{cases} 2^{\ell/p}, & \ell \le 0, \\ 2^{-\ell(M-1/p)}, & \ell > 0. \end{cases}$$

La sucesión $(c_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ pertenece a $\ell^1(\mathbb{Z})$. Young en los índices $j, m$, seguido de Tonelli en $x'$, produce

$$\|\operatorname{ex} g\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{jp(s-1/p)} \|\Delta'_j g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} = C \|g\|^p_{B^{s-1/p}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{6.28}$$

Las constantes no dependen del número de sumandos.

Por último, $s - 1/p > 0$ implica $\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \|\Delta'_j g\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty$. La serie de (6.26) converge uniformemente en $t$ con valores en $L^p$, y en $t = 0$ vale $\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \Delta'_j g = g$. La interpretación canónica de la traza prueba $\operatorname{tr} \operatorname{ex} = I$. □

**Teorema 6.7.3.** (Traza fraccionaria en dominios suaves) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera $C^\infty$, y sean $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ y $s > 1/p$. Existen operadores continuos y suprayectivos

$$\operatorname{Tr}\colon B^s_{p,q}(\Omega) \longrightarrow B^{s-1/p}_{p,q}(\partial\Omega), \qquad \operatorname{Tr}\colon F^s_{p,q}(\Omega) \longrightarrow B^{s-1/p}_{p,p}(\partial\Omega).$$

Cada uno tiene una inversa lineal continua por la derecha. En particular,

$$\operatorname{Tr}\colon H^{s,p}(\Omega) \longrightarrow B^{s-1/p}_{p,p}(\partial\Omega)$$

es una retracción; lo mismo vale con $W^{s,p}(\Omega)$ como espacio de partida cuando $s$ no es entero.

*Demostración.* Elegimos una prolongación $U$ de $u$ a $\mathbb{R}^n$, cartas de frontera $\Phi_i\colon Q \longrightarrow U_i$, $i \in \{1,\dots,N\}$, y cortes suaves $\eta_i$ subordinados, cuya suma vale uno cerca de $\partial\Omega$. Las cartas satisfacen

$$\Phi_i(Q \cap \{t > 0\}) = U_i \cap \Omega, \qquad \Phi_i(Q \cap \{t = 0\}) = U_i \cap \partial\Omega.$$

Los cortes se eligen con soporte compacto dentro de cada carta. Definimos

$$\operatorname{Tr}_\Omega u := \sum_{i=1}^{N} \big[\operatorname{tr}\big((\eta_i U)\circ\Phi_i\big)\big] \circ (\Phi_i \restriction_{\{t=0\}})^{-1}, \tag{6.29}$$

con prolongación por cero de cada expresión localizada. Los lemas de multiplicación y composición y el teorema del hiperplano acotan la suma por $C\|U\|_{A^s_{p,q}}$.
Si $U_1, U_2$ prolongan el mismo $u$, la expresión localizada de $U_1 - U_2$ se anula en $t > 0$. La última observación sobre la traza canónica del teorema anterior muestra que su traza es cero. Por tanto, la fórmula no depende de la prolongación. Tomar el ínfimo sobre todas ellas da la cota por la norma cociente de $u$.
Para comparar dos sistemas de cartas, fijamos $0 < \varepsilon < s - 1/p$. El Corolario 6.3.9 permite aproximar $U$, después de localizarlo, en $B^{s-\varepsilon}_{p,p}$ por funciones suaves. Las dos construcciones de traza coinciden para esas funciones. La multiplicación, la composición y la traza son continuas en ese orden menor, que todavía supera $1/p$. Al pasar al límite, las trazas obtenidas coinciden como distribuciones sobre la frontera. Puesto que ambas pertenecen ya al espacio de llegada de orden $s - 1/p$, esta identidad es también la identidad de sus elementos en ese espacio. El argumento cubre $q = \infty$.
Construimos ahora una inversa por la derecha. Elegimos cortes $\zeta_i \in C^\infty(\partial\Omega)$, sostenidos dentro de las cartas, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \zeta_i^2 = 1$. Para obtenerlos, se parte de cortes cuya suma sea positiva y se divide cada uno por la raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados. Dado $g$, expresamos

$$g_i := (\zeta_i g) \circ (\Phi_i \restriction_{\{t=0\}})$$

en $\mathbb{R}^{n-1}$, prolongándolo por cero. Aplicamos ex de (6.26). Elegimos en $Q$ un corte $\chi_i$ cuya restricción a $t = 0$ sea la expresión de $\zeta_i$, y lo prolongamos suavemente con soporte compacto dentro de $Q$. La suma de las funciones $\chi_i \operatorname{ex} g_i$, transportadas por $\Phi_i^{-1}$ y restringidas a $\Omega$, define un operador continuo. Su traza es

$$\sum_{i=1}^{N} \zeta_i(\zeta_i g) = g.$$

Las identificaciones de Bessel y de Slobodeckij dan las últimas afirmaciones. □

**Observación 6.7.4.** (Fronteras Lipschitz) En una frontera Lipschitz los cambios de coordenadas no poseen las derivadas utilizadas en el teorema anterior. La formulación de la traza en esa regularidad de frontera tiene un desarrollo específico; en el intervalo

$$1/p < s < 1 + 1/p$$

el espacio de llegada tiene orden entre cero y uno y se describe mediante diferencias en las cartas de frontera. El teorema clásico correspondiente puede consultarse en [146, Sección 4.4.2]. Las cartas de frontera de las variedades suaves del libro se tratarán mediante el teorema anterior.

Parte III

# Análisis no lineal en variedades riemannianas

# Preámbulo de la Parte III

Volvemos ahora a las variedades con las herramientas desarrolladas en el caso euclidiano. Éste es uno de los pasos centrales del libro. No basta con sustituir derivadas parciales por derivadas covariantes y repetir las mismas fórmulas: al trabajar sobre una variedad deben intervenir la medida riemanniana, las métricas fibradas, las conexiones, los soportes de las secciones y las transformaciones entre cartas y trivializaciones. Cada una de estas estructuras determina cómo se formula correctamente una noción analítica.

Los primeros capítulos construyen los espacios de Sobolev de funciones y de secciones de haces vectoriales y desarrollan las fórmulas de integración por partes que permiten definir derivadas covariantes débiles y adjuntos formales. Después se introducen los operadores diferenciales en haces y las distribuciones con valores vectoriales. El símbolo principal y la elipticidad permiten recuperar regularidad a partir de la ecuación. Más adelante, el laplaciano de conexión y el semigrupo del calor proporcionan escalas intrínsecas de regularidad fraccionaria.

La última parte de este recorrido obliga a abandonar la comodidad de la compacidad. En una variedad no compacta, una estimación local sólo puede globalizarse si sus constantes permanecen controladas al mover la carta. La geometría acotada proporciona precisamente ese control uniforme. Las coordenadas normales y de Fermi, las particiones de la unidad y las trivializaciones uniformes permiten entonces extender los resultados a subvariedades y a variedades con frontera. A lo largo de estos capítulos se alternarán continuamente dos operaciones: llevar un objeto geométrico a coordenadas para calcular y reconstruir, a partir de estimaciones locales, una afirmación global e intrínseca.

### Aubin y el análisis sobre variedades

El desarrollo de ecuaciones geométricas durante el siglo XX hizo necesario adaptar las herramientas del análisis funcional a espacios cuya geometría no podía ignorarse. Thierry Aubin tuvo un papel central en la sistematización de las desigualdades de Sobolev y de los problemas variacionales sobre variedades, especialmente en el estudio de ecuaciones conformes. Posteriormente, Hebey, Strichartz, Eichhorn, Grigor'yan, Amann y muchos otros extendieron estas ideas a variedades completas, no compactas, de geometría acotada, con frontera o con estructuras más generales. En esta parte seguimos ese mismo movimiento: comenzar con la teoría local y precisar qué hipótesis geométricas permiten convertirla en una teoría global.

# 7

# Espacios de Sobolev en variedades riemannianas

La energía de Dirichlet ofrece el punto de partida intrínseco para trasladar los espacios de Sobolev a una variedad riemanniana $(M, \mathbf{g})$. Si $f$ es un dato escalar, consideramos formalmente

$$\mathcal{E}_{\mathbf{g}}(u) = \frac{1}{2}\int_M |du|_{\mathbf{g}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M f u \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Para $u$ y $\varphi$ suaves, con soporte interior o con condiciones de frontera que anulen el término de borde, la primera variación produce

$$\int_M \langle du, d\varphi \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M f\varphi \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Esta identidad es la formulación débil de $-\Delta_{\mathbf{g}} u = f$ y sigue teniendo sentido cuando $u$ posee sólo una derivada débil cuadrado integrable.

La métrica interviene tanto en la norma de $du$ como en la medida $\lambda_{\mathbf{g}}$, pero la definición debe ser independiente de las coordenadas. Las cartas permiten comparar localmente una función con su representante euclidiano; las particiones de la unidad reúnen esas comparaciones y las derivadas covariantes proporcionan una descripción global de los órdenes superiores. En una variedad compacta, la finitud de la cubierta hace equivalentes las normas obtenidas mediante estas construcciones.

El capítulo definirá los espacios $W^{m,p}(M)$, probará su completitud y establecerá la independencia respecto de los datos auxiliares pertinentes. Después trasladará a la variedad los teoremas de densidad, encaje y Rellich–Kondrashov. El ejemplo siguiente muestra primero cómo un mismo operador geométrico adopta expresiones diferentes en cartas distintas sin dejar de representar el laplaciano de Laplace–Beltrami.

**Ejemplo 7.0.1.** (El operador de Laplace–Beltrami en la esfera en distintas coordenadas) Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria y sea $\iota\colon S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusión canónica. Denotemos por $\overline{\mathbf{g}}$ la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$. La métrica riemanniana de $S^2$ se define como el pullback de $\overline{\mathbf{g}}$ por la inclusión:

$$\mathbf{g} = \iota^* \overline{\mathbf{g}}, \qquad \mathbf{g}_p(X_p, Y_p) = \overline{\mathbf{g}}_{\iota(p)}(d\iota_p(X_p), d\iota_p(Y_p)), \quad X_p, Y_p \in T_p S^2.$$

Si $(x^1, x^2)$ son coordenadas locales inducidas por una carta $\varphi\colon U \subseteq S^2 \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^2$, denotemos por $\Phi := \iota \circ \varphi^{-1}\colon V = \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la composición de la inversa de la carta con la inclusión. Por definición de métrica inducida,

$$\mathbf{g} = \iota^*\overline{\mathbf{g}}, \qquad \mathbf{g}_p(X_p, Y_p) = \overline{\mathbf{g}}_{\iota(p)}\big(d\iota_p(X_p), d\iota_p(Y_p)\big), \quad X_p, Y_p \in T_pS^2.$$

En particular, para los vectores coordenados

$$\partial_i\big|_p = (d\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\partial_i\Big|_{\varphi(p)}\right),$$

se tiene

$$d\iota_p\left(\partial_i\big|_p\right) = d\iota_p \circ \left((d\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\partial_i\Big|_{\varphi(p)}\right)\right) = d(\iota\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\partial_i\Big|_{\varphi(p)}\right) = d\Phi_{\varphi(p)}\left(\partial_i\Big|_{\varphi(p)}\right).$$

Por lo tanto, evaluando la definición de $\mathbf{g}$ en el punto $p$,

$$g_{ij}(p) = \mathbf{g}_p\left(\partial_i\big|_p, \partial_j\big|_p\right) = \overline{\mathbf{g}}_{\iota(p)}\left(d\Phi_{\varphi(p)}\left(\partial_i\Big|_{\varphi(p)}\right), d\Phi_{\varphi(p)}\left(\partial_j\Big|_{\varphi(p)}\right)\right).$$

Finalmente, como $d\Phi_{\varphi(p)}\left(\partial_i\Big|_{\varphi(p)}\right)$ coincide con la derivada parcial $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}(\varphi(p))$ en $\mathbb{R}^3$, se obtiene

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(\varphi(p)), \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}(\varphi(p))\right\rangle_{\mathbb{R}^3},$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$ es el producto escalar euclidiano. Esta identidad muestra que los coeficientes locales de la métrica inducida en $S^2$ se calculan, para cada $p \in U$, como el producto escalar de las derivadas parciales de la parametrización $\Phi = \iota\circ\varphi^{-1}$ evaluadas en $\varphi(p) \in \mathbb{R}^2$.

Usaremos coordenadas esféricas $(\theta, \varphi)$ con la siguiente convención: $\theta$ es el ángulo radial en el plano $xy$, $0 < \theta < 2\pi$, y $\varphi$ es el ángulo azimutal medido respecto del eje positivo $z$, $0 < \varphi < \pi$. La inversa de estas coordenadas define una carta sobre un subconjunto abierto de $S^2$. El mapeo correspondiente es

$$\Phi(\theta, \varphi) = \big(\sin\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi\big).$$

Sus derivadas parciales son

$$\partial_\theta\Phi = \big(-\sin\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ 0\big), \qquad \partial_\varphi\Phi = \big(\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ -\sin\varphi\big).$$

Con $\mathbf{g} = \iota^*\overline{\mathbf{g}}$, se obtiene punto a punto

$$g_{\theta\theta} = \langle\partial_\theta\Phi, \partial_\theta\Phi\rangle_{\mathbb{R}^3} = \sin^2\varphi, \qquad g_{\theta\varphi} = \big\langle\partial_\theta\Phi, \partial_\varphi\Phi\big\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0, \qquad g_{\varphi\varphi} = \big\langle\partial_\varphi\Phi, \partial_\varphi\Phi\big\rangle_{\mathbb{R}^3} = 1.$$

Por lo tanto

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix}\sin^2\varphi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad (g^{ij}) = \begin{pmatrix}\csc^2\varphi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \sqrt{\det(\mathbf{g})} = \sin\varphi,$$

y la fórmula local de Laplace–Beltrami es

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_i\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}g^{ij}\partial_j u\big) = \frac{1}{\sin\varphi}\partial_\varphi\big(\sin\varphi\partial_\varphi u\big) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\partial_{\theta\theta}u.$$

Sea ahora $N = (0,0,1)$ el polo norte y considérese la proyección estereográfica

$$\sigma\colon S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \sigma(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z},\ \frac{y}{1-z}\right).$$

Su inversa

$$\sigma^{-1}(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\ \frac{2y}{1+x^2+y^2},\ \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right)$$

compuesta con la inclusión $\iota\colon S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ produce

$$\widetilde{\Phi} = \iota\circ\sigma^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \widetilde{\Phi}(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\ \frac{2y}{1+x^2+y^2},\ \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right).$$

Derivando y tomando productos internos euclidianos,

$$g_{xx} = \left\langle \partial_x\widetilde{\Phi}, \partial_x\widetilde{\Phi}\right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \frac{4}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}, \qquad g_{yy} = \left\langle \partial_y\widetilde{\Phi}, \partial_y\widetilde{\Phi}\right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \frac{4}{\left(1+x^2+y^2\right)^2},$$

$$g_{xy} = g_{yx} = \left\langle \partial_x\widetilde{\Phi}, \partial_y\widetilde{\Phi}\right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0,$$

de donde

$$(g_{ij}) = \frac{4}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad (g^{ij}) = \frac{\left(1+x^2+y^2\right)^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \sqrt{\det(\mathbf{g})} = \frac{4}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}.$$

En estas coordenadas

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_i\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}g^{ij}\partial_j u\big) = \frac{\left(1+x^2+y^2\right)^2}{4}\big(\partial_{xx}u + \partial_{yy}u\big).$$

Las EDPs sobre variedades riemannianas aparecen de manera inevitable en distintos campos:

- En **geometría diferencial**, problemas como el de Yamabe (existencia de métricas de curvatura escalar constante en una clase conforme) y el estudio de flujos geométricos como el flujo de Ricci (utilizado por Perelman en la resolución de la conjetura de Poincaré) dependen esencialmente de desigualdades y estimaciones de Sobolev en variedades.

- En **física matemática**, las ecuaciones de la relatividad general se formulan en variedades lorentzianas, y el análisis de sus operadores asociados exige trabajar con espacios de Sobolev adaptados. El teorema de la masa positiva constituye un ejemplo paradigmático donde la geometría, la física y las desigualdades de Sobolev se entrelazan.

- En **análisis global y topología**, el *teorema de Hodge* asegura que cada clase de cohomología diferencial tiene un representante armónico, mientras que el *teorema del índice de Atiyah–Singer* relaciona el índice de operadores elípticos con invariantes topológicos de la variedad. Estos resultados muestran cómo el análi-

sis de operadores diferenciales en variedades se convierte en una herramienta central para comprender su estructura global.

**Thierry Aubin y los espacios de Sobolev en variedades**

En 1976, Thierry Aubin publicó un tratamiento sistemático de los espacios de Sobolev sobre variedades riemannianas y de las desigualdades que permiten estudiar ecuaciones geométricas [15]. Su trabajo contribuyó a consolidar un enfoque intrínseco basado en la métrica y la conexión, especialmente fértil en problemas conformes y ecuaciones no lineales. Seeley desarrolló herramientas espectrales y Strichartz extendió varias construcciones a variedades completas. La teoría contemporánea combina estas ideas con localización uniforme, núcleos del calor y geometría acotada.

Los espacios de Sobolev en variedades no son sólo una generalización de las herramientas euclidianas. Constituyen el lenguaje en el que la energía, la regularidad y la geometría pueden estudiarse simultáneamente.

## 7.1 Definición y propiedades básicas

Adoptaremos una definición intrínseca mediante derivadas covariantes. En una carta, esas derivadas se expresan en términos de derivadas parciales y de los símbolos de Christoffel; globalmente, la métrica permite medirlas e integrarlas sin privilegiar coordenadas.

Para una función $u \in C^\infty(M)$, la información de orden $m$ queda codificada por $\nabla^m u$. Los resultados siguientes precisan su expresión local y su relación con la métrica riemanniana:

**Proposición 7.1.1.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Sea $\nabla$ una conexión en $TM$, $(U,\varphi)$ una carta en $M$ y $\{\Gamma_{ij}^k\}$ los símbolos de Christoffel asociados a la conexión respecto a $(U,\varphi)$. Dada $u \in C^\infty(M)$, $\nabla^m u$ tiene la siguiente expresión local:

$$(\nabla^m u)_{i_1\dots i_m} = \frac{\partial (\nabla^{m-1}u)_{i_2\dots i_m}}{\partial x_{i_1}} - \sum_{l=2}^{m} \Gamma_{i_1 i_l}^k (\nabla^{m-1}u)_{i_2\dots i_{l-1} k i_{l+1}\dots i_m}.$$

Es decir, de acuerdo con la convención fijada en la Proposición 2.4.29, el nuevo índice covariante se coloca en la primera entrada.

*Demostración.* Usando la Proposición 2.4.13 y la convención sobre la posición del índice nuevo, tenemos

$$\begin{aligned}
(\nabla^m u)_{i_1\dots i_m} &= (\nabla_{\partial_{i_1}}(\nabla^{m-1}u))(\partial_{i_2},\dots,\partial_{i_m}) \\
&= \partial_{i_1}\Big((\nabla^{m-1}u)(\partial_{i_2},\dots,\partial_{i_m})\Big) \\
&\quad - \sum_{l=2}^{m} (\nabla^{m-1}u)\Big(\partial_{i_2},\dots,\partial_{i_{l-1}},\nabla_{\partial_{i_1}}\partial_{i_l},\partial_{i_{l+1}},\dots,\partial_{i_m}\Big) \\
&= \frac{\partial (\nabla^{m-1}u)_{i_2\dots i_m}}{\partial x_{i_1}} - \sum_{l=2}^{m} \Gamma_{i_1 i_l}^k (\nabla^{m-1}u)_{i_2\dots i_{l-1} k i_{l+1}\dots i_m}.
\end{aligned}$$

□

**Proposición 7.1.2.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera de dimensión $n$ y $\nabla$ una conexión en $TM$. Si $u \in C^\infty(M)$ y $(U, \varphi)$ es una carta suave de $M$, entonces

$$\nabla^m u = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \sum_{0\le|\alpha|\le m} D^\alpha u P_\alpha^{i_1\dots i_m} \mathbf{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}x^{i_m}$$

en $U$, donde $P_\alpha^{i_1\dots i_m}$ es un polinomio en los símbolos de Christoffel de $\nabla$ y sus derivadas hasta orden $m-1$.

*Demostración.* La prueba se hará por inducción sobre $m$. Para $m = 1$, $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x^i}\mathbf{d}x^i$; para $m = 2$,

$$\nabla^2 u = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x^k} \right) \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j.$$

Supongamos que la afirmación se cumple para cierto $m \ge 2$. Por la Proposición 7.1.1,

$$(\nabla^{m+1}u)_{i_1\dots i_{m+1}} = \frac{\partial (\nabla^m u)_{i_2\dots i_{m+1}}}{\partial x_{i_1}} - \sum_{l=2}^{m+1} \Gamma_{i_1 i_l}^k (\nabla^m u)_{i_2\dots i_{l-1} k i_{l+1}\dots i_{m+1}}.$$

La hipótesis de inducción nos dice que

$$(\nabla^m u)_{i_2\dots i_{m+1}} = \sum_{0\le|\alpha|\le m} D^\alpha u P_\alpha^{i_2\dots i_{m+1}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}(\nabla^{m+1}u)_{i_1\dots i_{m+1}} = &\sum_{0\le|\alpha|\le m} \frac{\partial (D^\alpha u)}{\partial x_{i_1}} P_\alpha^{i_2\dots i_{m+1}} \\ &+ \sum_{0\le|\alpha|\le m} D^\alpha u \frac{\partial P_\alpha^{i_2\dots i_{m+1}}}{\partial x_{i_1}} \\ &- \sum_{l=2}^{m+1} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{i_1 i_l}^k \sum_{0\le|\alpha|\le m} D^\alpha u \, P_\alpha^{i_2\dots i_{l-1} k i_{l+1}\dots i_{m+1}}.\end{aligned}$$

En la primera línea aparecen derivadas de $u$ de orden a lo sumo $m+1$. En la segunda, los coeficientes son polinomios en los símbolos de Christoffel y sus derivadas hasta orden $m$, porque se deriva una vez un polinomio que, por hipótesis, sólo contiene derivadas hasta orden $m-1$. En la tercera línea se multiplica dicho polinomio por un símbolo de Christoffel, sin aumentar el orden máximo de las derivadas de sus coeficientes. Al agrupar los términos que multiplican a cada $D^\beta u$, $|\beta| \le m+1$, se obtienen los polinomios $P_\beta^{i_1\dots i_{m+1}}$ requeridos. Esto cierra la inducción. □

Como $(M, \mathcal{L}_M, \lambda_{\mathbf{g}})$ es un espacio de medida y $\lambda_{\mathbf{g}}$ es una medida de Radon, los resultados de teoría de la medida se aplican directamente y permiten considerar los espacios de Lebesgue $L^p(M)$.

Si $u \in C^\infty(M)$, por la Proposición 2.3.3, tenemos que $|\nabla^k u|_{\mathbf{g}} := \sqrt{\mathbf{g}(\nabla^k u, \nabla^k u)}\colon M \longrightarrow [0,\infty)$ está dada en coordenadas locales por

$$|\nabla^k u|_{\mathbf{g}} = \sqrt{g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} (\nabla^k u)_{i_1\dots i_k} (\nabla^k u)_{j_1\dots j_k}}.$$

Además dicha función es al menos continua, por lo que es medible. Podemos considerar

$$\int_M |\nabla^k u|_{\mathbf{g}}^p d\lambda_{\mathbf{g}}$$

para cada $p \in [1,\infty)$. Podemos definir

$$\|u\|_{W^{m,p}(M)} := \left( \sum_{j=0}^{m} \int_M |\nabla^j u|_{\mathbf{g}}^p d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

y preguntarnos por el conjunto de las $u \in C^\infty(M)$ tales que $\|u\|_{W^{m,p}(M)} < \infty$. Esto motiva la siguiente definición

**Definición 7.1.3.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Para $m \geq 0$ entero, $p \in [1,\infty)$, definimos

(a) $C^{m,p}(M) := \{u \in C^\infty(M) \mid \|u\|_{W^{m,p}(M)} < \infty\}$

(b) $W^{m,p}(M)$ como la completación de $C^{m,p}(M)$ bajo la norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(M)}$.

**Observación 7.1.4.** Se cumple que

$$C^{m,p}(M) = \{u \in C^\infty(M) \mid |\nabla^j u|_{\mathbf{g}} \in L^p(M) \text{ para toda } j \in \{0,\dots,m\}\}.$$

Para ver que esta definición es consistente, demostraremos que $\left(C^{m,p}(M), \|\cdot\|_{W^{m,p}(M)}\right)$ es un espacio normado.

**Proposición 7.1.5.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces $\left(C^{m,p}(M), \|\cdot\|_{W^{m,p}(M)}\right)$ es un espacio normado.

*Demostración.* Sea $u \in C^\infty(M)$ tal que $\|u\|_{W^{m,p}(M)} = 0$. Como $0 \leq \|u\|_{L^p(M)} \leq \|u\|_{W^{m,p}(M)} = 0$, entonces $\|u\|_{L^p(M)} = 0$, por lo que $u = 0$ casi en todas partes. Además, como $u$ es continua, concluimos que $u \equiv 0$ en $M$.

Ahora, sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\|\lambda u\|_{W^{m,p}(M)} := \left( \sum_{j=0}^{m} \int_M |\nabla^j(\lambda u)|_{\mathbf{g}}^p d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{j=0}^{m} \int_M |\lambda \nabla^j(u)|_{\mathbf{g}}^p d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{j=0}^{m} \int_M |\lambda|^p |\nabla^j u|_{\mathbf{g}}^p d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\lambda| \left( \sum_{j=0}^{m} \int_M |\nabla^j u|_{\mathbf{g}}^p d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|u\|_{W^{m,p}(M)},$$

donde hemos usado que $|\lambda \nabla^j u|_{\mathbf{g}} = \sqrt{\mathbf{g}(\lambda \nabla^j u, \lambda \nabla^j u)} = \sqrt{\lambda^2 \mathbf{g}(\nabla^j u, \nabla^j u)} = |\lambda| \sqrt{\mathbf{g}(\nabla^j u, \nabla^j u)} = |\lambda| |\nabla^j u|_{\mathbf{g}}$ para cada $j \in \{0,\dots,m\}$.

Sean $u, v \in C^{m,p}(M)$. Para $w \in C^{m,p}(M)$ definamos, sobre el espacio de medida

$$X_m := M \times \{0, \dots, m\}, \qquad \mu_m := \lambda_{\mathbf{g}} \otimes \#,$$

la función $A_w(x, j) := |\nabla^j w(x)|_{\mathbf{g}}$, donde # es la medida de conteo. Entonces

$$\|A_w\|_{L^p(X_m,\mu_m)} = \left( \sum_{j=0}^{m} \int_M |\nabla^j w|_{\mathbf{g}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}} = \|w\|_{W^{m,p}(M)}.$$

Como $|\nabla^j(u+v)|_{\mathbf{g}} \le |\nabla^j u|_{\mathbf{g}} + |\nabla^j v|_{\mathbf{g}}$, se tiene $A_{u+v} \le A_u + A_v$. La monotonía de la norma y la desigualdad de Minkowski en $L^p(X_m, \mu_m)$, contenidas en el Teorema B.7.3, proporcionan

$$\|u+v\|_{W^{m,p}(M)} \le \|A_u + A_v\|_{L^p(X_m,\mu_m)} \le \|u\|_{W^{m,p}(M)} + \|v\|_{W^{m,p}(M)}.$$

En particular, $C^{m,p}(M)$ es cerrado bajo la suma y el producto por escalares de $C^\infty(M)$; por lo tanto, es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_{W^{m,p}(M)}$ es una norma. □

Definiremos también el análogo a $W_0^{m,p}(\Omega)$:

**Definición 7.1.6.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \le p < \infty$. Definimos

$$W_0^{m,p}(M) := \overline{C_c^\infty(\operatorname{Int} M)}^{W^{m,p}(M)}.$$

Las funciones de $C_c^\infty(\operatorname{Int} M)$ se consideran funciones suaves sobre $M$ por extensión por cero; esto es legítimo porque su soporte está compactamente contenido en el interior.

En la literatura se suele usar la norma suma que se define a continuación; véanse, por ejemplo, [79] y [1]. La proposición siguiente cuantifica su comparación con la norma adoptada en este libro.

**Proposición 7.1.7.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \le p < \infty$. Para cada $u \in C^{m,p}(M)$ definimos

$$\|u\|_{\widetilde{W}^{m,p}(M)} := \sum_{j=0}^{m} \left( \int_M |\nabla^j u|_{\mathbf{g}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces, para todo $u \in C^{m,p}(M)$,

$$\|u\|_{W^{m,p}(M)} \le \|u\|_{\widetilde{W}^{m,p}(M)} \le (m+1)^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{m,p}(M)}.$$

*Demostración.* Pongamos $x_j := \left( \int_M |\nabla^j u|_{\mathbf{g}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}$. Las desigualdades $\|x\|_{\ell^p} \le \|x\|_{\ell^1} \le (m+1)^{1-\frac{1}{p}} \|x\|_{\ell^p}$, obtenidas mediante Hölder en $\mathbb{R}^{m+1}$, son exactamente las dos desigualdades afirmadas. □

Las variedades riemannianas compactas tienen un rol bastante importante en el estudio de los espacios de Sobolev, pues permiten dar generalizaciones de los resultados vistos previamente para espacios euclidianos. Si $M$ es cerrada, entonces $\operatorname{Int} M = M$ y $C_c^\infty(M) = C^\infty(M)$; por consiguiente, $W_0^{m,p}(M) = W^{m,p}(M)$ y $C^\infty(M)$ es denso en este espacio. Cuando $M$ tiene frontera, la relación entre $W_0^{m,p}(M)$ y la traza se estudiará en la Sección 9.4, en el

contexto más general de secciones de haces vectoriales.

En ocasiones, podemos tener dos métricas riemannianas en una variedad suave $M$, digamos $\mathbf{g}$ y $\widetilde{\mathbf{g}}$, por lo que es necesario distinguir la métrica empleada en la norma de Sobolev. En ese caso escribimos $\|u\|_{W^{m,p}(M),\mathbf{g}}$ para la norma asociada a $\mathbf{g}$ y $\|u\|_{W^{m,p}(M),\widetilde{\mathbf{g}}}$ para la norma asociada a $\widetilde{\mathbf{g}}$.

En el caso compacto, también se cumplen otras propiedades muy útiles; por ejemplo, los espacios de Sobolev no dependen de la métrica riemanniana. Para demostrar esto, primero probaremos los siguientes resultados:

**Lema 7.1.8.** Sean $k,l \in \mathbb{N}_0$ y $M$ una variedad suave compacta con o sin frontera equipada con dos métricas riemannianas $\mathbf{g}$ y $\widetilde{\mathbf{g}}$. Entonces existen $c_{k,l}, C_{k,l} > 0$ tales que para todo $p \in M$ y $v \in T^{(k,l)}(T_pM)$,

$$c_{k,l}|v|_{\mathbf{g}}^2 \leq |v|_{\widetilde{\mathbf{g}}}^2 \leq C_{k,l}|v|_{\mathbf{g}}^2.$$

Aquí las normas son las inducidas en el haz tensorial. En la demostración escribiremos también $\mathbf{g}_p(v,v)$ y $\widetilde{\mathbf{g}}_p(v,v)$ para los productos internos inducidos evaluados en $(v,v)$. Para $(k,l) = (1,0)$ se trata de las métricas originales en $T_pM$, y la conclusión es precisamente la comparación de la Definición 2.1.5.

*Demostración.* Sea $d$ el rango de $T^{(k,l)}(TM)$. Si $M = \varnothing$ o $d = 0$, la afirmación es inmediata. Por la Proposición 1.2.11, la Observación 1.2.10 y la compacidad de $M$, existen cartas $(U_i, \varphi_i)$ y bolas coordenadas regulares compactas y, si $M$ tiene frontera, medias bolas coordenadas regulares compactas

$$\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_N$$

que cubren $M$ y satisfacen $\overline{B}_i \subseteq U_i$. Para cada $i$, sea

$$\Phi_i \colon T^{(k,l)}(TM) \restriction_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^d$$

la trivialización inducida por el marco tensorial de la carta que contiene a $\overline{B}_i$. Si $p \in \overline{B}_i$ y $w \in \mathbb{R}^d$, ponemos

$$Q_i(p,w) := \mathbf{g}_p\big(\Phi_i^{-1}(p,w), \Phi_i^{-1}(p,w)\big),$$
$$\widetilde{Q}_i(p,w) := \widetilde{\mathbf{g}}_p\big(\Phi_i^{-1}(p,w), \Phi_i^{-1}(p,w)\big).$$

Ambas funciones son continuas y, para cada $p$, son formas cuadráticas positivo definidas respecto de $w$. Por lo tanto,

$$R_i(p,w) := \frac{\widetilde{Q}_i(p,w)}{Q_i(p,w)}$$

es continua y estrictamente positiva en

$$\overline{B}_i \times S^{d-1}, \qquad S^{d-1} := \{w \in \mathbb{R}^d \mid \|w\|_2 = 1\}.$$

Este conjunto es compacto, de modo que existen

$$c_i := \min_{(p,w)\in \overline{B}_i \times S^{d-1}} R_i(p,w) > 0, \qquad C_i := \max_{(p,w)\in \overline{B}_i \times S^{d-1}} R_i(p,w) < \infty.$$

La homogeneidad de las dos formas cuadráticas implica

$$c_i Q_i(p,w) \le \widetilde{Q}_i(p,w) \le C_i Q_i(p,w)$$

para todo $p \in \overline{B}_i$ y todo $w \in \mathbb{R}^d$. Tomando

$$c_{k,l} := \min_{1\le i\le N} c_i > 0, \qquad C_{k,l} := \max_{1\le i\le N} C_i < \infty,$$

y escribiendo $w$ para las componentes de $v \in T^{(k,l)}(T_pM)$ en una carta que contiene a $p$, se obtiene la desigualdad del enunciado. □

El argumento anterior sólo utiliza continuidad y positividad de los productos internos sobre compactos contenidos en trivializaciones. Por ello se aplica también sobre cualquier compacto $K \subseteq M$, con métricas continuas definidas en una vecindad de $K$: basta cubrir $K$ por un número finito de las bolas o medias bolas utilizadas en la prueba. Las constantes pueden depender de $K$ y de las métricas. La siguiente proposición precisa qué cotas se deducen cuando ya se conocen constantes de comparación en el haz tangente.

**Proposición 7.1.9.** (Comparación de normas duales, tensoriales y de volúmenes) Sean $\mathbf{g}$ y $\widetilde{\mathbf{g}}$ dos métricas riemannianas en una variedad $M$ de dimensión $n$, y sea $A \subseteq M$. Supongamos que $0 < c \le C < \infty$ y que

$$c\,\mathbf{g}_p(v,v) \le \widetilde{\mathbf{g}}_p(v,v) \le C\,\mathbf{g}_p(v,v) \qquad (p \in A,\ v \in T_pM).$$

Entonces las métricas duales satisfacen

$$C^{-1}\mathbf{g}_p^{-1}(\xi,\xi) \le \widetilde{\mathbf{g}}_p^{-1}(\xi,\xi) \le c^{-1}\mathbf{g}_p^{-1}(\xi,\xi) \qquad (\xi \in T_p^*M,\ p \in A). \tag{7.1}$$

Además, para $k,l \in \mathbb{N}_0$ y $\mathbf{T} \in T^{(k,l)}(T_pM)$,

$$c^{k/2}C^{-l/2}|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}} \le |\mathbf{T}|_{\widetilde{\mathbf{g}}} \le C^{k/2}c^{-l/2}|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}. \tag{7.2}$$

En particular, una comparación $K^{-1}\mathbf{g} \le \widetilde{\mathbf{g}} \le K\mathbf{g}$, con $K \ge 1$, produce las constantes $K^{-(k+l)/2}$ y $K^{(k+l)/2}$ para las normas de tensores de tipo $(k,l)$.
El cociente de los elementos de volumen es la función positiva

$$\rho(p) = \frac{\sqrt{\det(\widetilde{\mathbf{g}}_p)}}{\sqrt{\det(\mathbf{g}_p)}},$$

donde ambos determinantes se calculan en una misma carta. Esta función es independiente de la carta, satisface $d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} = \rho\, d\lambda_{\mathbf{g}}$ y verifica

$$c^{n/2} \le \rho(p) \le C^{n/2} \qquad (p \in A). \tag{7.3}$$

Por consiguiente, si $A$ es medible y $f : A \to [0,\infty]$ es medible, entonces

$$c^{n/2}\int_A f\, d\lambda_{\mathbf{g}} \le \int_A f\, d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} \le C^{n/2}\int_A f\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

*Demostración.* Fijemos $p \in A$. Existe un único endomorfismo $L_p\colon T_pM \to T_pM$ tal que

$$\widetilde{\mathbf{g}}_p(v,w) = \mathbf{g}_p(L_p v, w) \qquad (v,w \in T_pM).$$

Se obtiene aplicando el inverso del isomorfismo $w \mapsto \mathbf{g}_p(w,\cdot)$ al covector $\widetilde{\mathbf{g}}_p(v,\cdot)$. La simetría de $\widetilde{\mathbf{g}}_p$ implica que $L_p$ es autoadjunto respecto de $\mathbf{g}_p$, y su positividad implica $\mathbf{g}_p(L_p v, v) > 0$ cuando $v \neq 0$. El teorema espectral proporciona una base $e_1,\dots,e_n$ ortonormal para $\mathbf{g}_p$ y números $\lambda_1,\dots,\lambda_n > 0$ tales que

$$L_p e_i = \lambda_i e_i, \qquad \mathbf{g}_p(e_i,e_j) = \delta_{ij}, \qquad \widetilde{\mathbf{g}}_p(e_i,e_j) = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Al aplicar la hipótesis a $v = e_i$ se obtiene $c \le \lambda_i \le C$ para todo $i$. La elección de esta base se hace en la fibra fija $T_pM$; no se requiere que las bases elegidas varíen suavemente con $p$.
Sea $e^1,\dots,e^n$ la base dual. Las matrices de las métricas duales son las inversas de las matrices de las métricas tangentes. Así, para $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$,

$$\mathbf{g}_p^{-1}(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad \widetilde{\mathbf{g}}_p^{-1}(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} \xi_i^2.$$

Las desigualdades $C^{-1} \le \lambda_i^{-1} \le c^{-1}$, multiplicadas por $\xi_i^2$ y sumadas, prueban (7.1). Esto explica por qué se intercambian las constantes inferior y superior al comparar las métricas duales.
Consideremos ahora los tensores básicos

$$E_{I,J} := e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_l},$$

donde $I = (i_1,\dots,i_k)$ y $J = (j_1,\dots,j_l)$ recorren los índices entre 1 y $n$. Son ortogonales para ambos productos internos tensoriales, y

$$|E_{I,J}|_{\mathbf{g}}^2 = 1, \qquad |E_{I,J}|_{\widetilde{\mathbf{g}}}^2 = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \lambda_{j_1}^{-1} \cdots \lambda_{j_l}^{-1}.$$

Un producto sin factores se interpreta como 1. Cada peso de la última expresión está entre $c^k C^{-l}$ y $C^k c^{-l}$. Si $\mathbf{T} = \sum_{\substack{I\in\{1,\dots,n\}^k \\ J\in\{1,\dots,n\}^l}} T_J^I E_{I,J}$, la ortogonalidad da

$$|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}^2 = \sum_{\substack{I\in\{1,\dots,n\}^k \\ J\in\{1,\dots,n\}^l}} |T_J^I|^2, \qquad |\mathbf{T}|_{\widetilde{\mathbf{g}}}^2 = \sum_{\substack{I\in\{1,\dots,n\}^k \\ J\in\{1,\dots,n\}^l}} |T_J^I|^2 \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \lambda_{j_1}^{-1} \cdots \lambda_{j_l}^{-1}.$$

Multiplicar las cotas de cada peso por $|T_J^I|^2$ y sumar produce

$$c^k C^{-l} |\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}^2 \le |\mathbf{T}|_{\widetilde{\mathbf{g}}}^2 \le C^k c^{-l} |\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}^2.$$

Tomar raíces cuadradas prueba (7.2).
En la base $e_1,\dots,e_n$, el cociente de determinantes es $\lambda_1 \cdots \lambda_n$. Un cambio simultáneo de base multiplica ambos determinantes por el mismo cuadrado del determinante de la matriz de cambio, de modo que el

cociente permanece igual. En particular,

$$\frac{\det(\widetilde{\mathbf{g}}_p)}{\det(\mathbf{g}_p)} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad c^n \le \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \le C^n.$$

La fórmula coordenada de la medida riemanniana implica $d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} = \rho\, d\lambda_{\mathbf{g}}$, y las raíces cuadradas de las últimas cotas prueban (7.3). Finalmente,

$$\int_A f\, d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} = \int_A f\rho\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Se multiplica (7.3) por $f \ge 0$ y se usa la monotonía de la integral. El argumento también vale cuando alguna de las integrales es infinita. □

Esta proposición compara dos normas de un mismo tensor. Al estudiar las normas de Sobolev también hay que comparar los tensores $\nabla^j u$ y $\widetilde{\nabla}^j u$ cuando se cambia la conexión. Para funciones, $\nabla u = \widetilde{\nabla} u = du$; desde el orden dos las derivadas covariantes pueden ser distintas. El siguiente lema compara los conjuntos completos de derivadas hasta el orden $m$, incluyendo sus términos de orden inferior.

**Lema 7.1.10.** Sean $m \ge 0$ y $M$ una variedad suave compacta con o sin frontera, con dos métricas riemannianas $\mathbf{g}$ y $\widetilde{\mathbf{g}}$, y sean $\nabla$ y $\widetilde{\nabla}$ dos conexiones en $TM$. Entonces existen $c_m, C_m > 0$ tales que

$$c_m \left( \sum_{j=0}^{m} |\nabla^j u|^2_{\mathbf{g}} \right) \le \sum_{j=0}^{m} |\widetilde{\nabla}^j u|^2_{\widetilde{\mathbf{g}}} \le C_m \left( \sum_{j=0}^{m} |\nabla^j u|^2_{\mathbf{g}} \right)$$

para toda $u \in C^\infty(M)$.

*Demostración.* Si $M = \varnothing$, la afirmación es inmediata. Supongamos que $M \neq \varnothing$. Por la Definición 1.7.10, podemos considerar el haz

$$\mathscr{T}_m := \bigoplus_{j=0}^{m} T^{(0,j)}(TM), \qquad T^{(0,0)}(TM) := M \times \mathbb{R}.$$

Para $u \in C^\infty(M)$ escribimos

$$J^m_\nabla u := (u, \nabla u, \dots, \nabla^m u)$$

y, para cada $p \in M$, definimos

$$\mathscr{D}_{\nabla,p} := \{ J^m_\nabla u(p) \mid u \in C^\infty(M) \} \subseteq (\mathscr{T}_m)_p.$$

La linealidad de $\nabla^j$ implica que $\mathscr{D}_{\nabla,p}$ es un subespacio vectorial de $(\mathscr{T}_m)_p$.
Sea $(U, \varphi)$ una carta suave, sea $p \in U$, pongamos $x := \varphi(p)$ y

$$N := \sum_{j=0}^{m} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+m}{m}.$$

Con la notación de multiíndices de la Definición 1.1.10, definimos el mapeo lineal

$$F^{\varphi}_{\nabla,p} \colon \mathscr{D}_{\nabla,p} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \qquad F^{\varphi}_{\nabla,p}(J^m_\nabla u(p)) := \left( D^\alpha (u \circ \varphi^{-1})(x) \right)_{|\alpha| \le m}.$$

Las Proposiciones 7.1.1 y 7.1.2 proporcionan, para $j \in \{1,\dots,m\}$,

$$(\nabla^j u)_{i_1\dots i_j} = \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_j}(u\circ\varphi^{-1}) + \sum_{|\alpha|<j} A^{\alpha}_{i_1\dots i_j} D^{\alpha}(u\circ\varphi^{-1}), \tag{7.4}$$

donde los coeficientes $A^{\alpha}_{i_1\dots i_j}$ son suaves en $U$. Por inducción sobre $j$, la igualdad $J^m_\nabla u(p) = J^m_\nabla v(p)$ determina primero $u(p) = v(p)$ y después todas las derivadas parciales de $u\circ\varphi^{-1}$ y $v\circ\varphi^{-1}$ hasta orden $m$. Por lo tanto, $F^{\varphi}_{\nabla,p}$ está bien definido y es inyectivo.

Sea $a = (a_\alpha)_{|\alpha|\le m} \in \mathbb{R}^N$. El polinomio

$$P_a(y) := \sum_{|\alpha|\le m} \frac{a_\alpha}{\alpha!}(y-x)^\alpha$$

satisface $D^\alpha P_a(x) = a_\alpha$ para todo $|\alpha| \le m$. El Teorema 1.3.7, aplicado a $P_a\circ\varphi$, proporciona una función $u \in C^\infty(M)$ que coincide con $P_a\circ\varphi$ en una vecindad de $p$. Entonces $F^{\varphi}_{\nabla,p}(J^m_\nabla u(p)) = a$, y $F^{\varphi}_{\nabla,p}$ es un isomorfismo.

Sea $(e_1,\dots,e_N)$ la base canónica de $\mathbb{R}^N$. Al sustituir cada $e_\nu$ como jet parcial prescrito en (7.4), se obtiene que las componentes de

$$\sigma_\nu(q) := (F^{\varphi}_{\nabla,q})^{-1}(e_\nu), \qquad q \in U, \quad \nu \in \{1,\dots,N\},$$

en los marcos tensoriales coordenados son funciones suaves. Además, $\sigma_1(q),\dots,\sigma_N(q)$ forman una base de $\mathscr{D}_{\nabla,q}$ para cada $q \in U$. El Lema 1.7.52 implica que

$$\mathscr{D}_\nabla := \bigcup_{p\in M} \mathscr{D}_{\nabla,p}$$

es un subhaz vectorial suave de $\mathscr{T}_m$ de rango $N$. La misma construcción aplicada a $\widetilde{\nabla}$ produce el subhaz $\mathscr{D}_{\widetilde{\nabla}}$ y los isomorfismos $F^{\varphi}_{\widetilde{\nabla},p} : \mathscr{D}_{\widetilde{\nabla},p} \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

Sea $(\overline{B},\varphi)$ una bola coordenada regular compacta o una media bola coordenada regular compacta cuyo mapeo coordenado es la restricción de la carta anterior. Para $p \in \overline{B}$ y $v \in \mathbb{R}^N$ definimos

$$Q(p,v) := \sum_{j=0}^{m} \left| \left((F^{\varphi}_{\nabla,p})^{-1}(v)\right)_j \right|^2_{\mathbf{g}},$$

$$\widetilde{Q}(p,v) := \sum_{j=0}^{m} \left| \left((F^{\varphi}_{\widetilde{\nabla},p})^{-1}(v)\right)_j \right|^2_{\widetilde{\mathbf{g}}}.$$

Las familias $\sigma_1,\dots,\sigma_N$ construidas arriba y sus análogas para $\widetilde{\nabla}$ muestran que $Q$ y $\widetilde{Q}$ son continuas en $\overline{B}\times\mathbb{R}^N$. Para cada $p$, ambas son formas cuadráticas positivo definidas respecto de $v$. Por ello el cociente

$$R(p,v) := \frac{\widetilde{Q}(p,v)}{Q(p,v)}$$

es continuo y estrictamente positivo en $\overline{B}\times S^{N-1}$, donde $S^{N-1} := \{v \in \mathbb{R}^N \mid \|v\|_2 = 1\}$. La compacidad de $\overline{B}\times S^{N-1}$ proporciona números

$$c_{\overline{B},m} := \min_{(p,v)\in\overline{B}\times S^{N-1}} R(p,v) > 0, \qquad C_{\overline{B},m} := \max_{(p,v)\in\overline{B}\times S^{N-1}} R(p,v) < \infty.$$

Como $Q$ y $\widetilde{Q}$ son homogéneas de grado dos en $v$, se sigue que

$$c_{\overline{B},m} Q(p,v) \leq \widetilde{Q}(p,v) \leq C_{\overline{B},m} Q(p,v) \tag{7.5}$$

para todo $p \in \overline{B}$ y todo $v \in \mathbb{R}^N$; para $v \neq 0$ se aplica la definición de $c_{\overline{B},m}$ y $C_{\overline{B},m}$ a $v/\|v\|_2$, y para $v = 0$ la desigualdad es inmediata.
Para $p \in \overline{B}$ y $u \in C^\infty(M)$, la definición de los dos isomorfismos da

$$F^{\varphi}_{\nabla,p}(J^m_{\nabla} u(p)) = \left(D^\alpha (u \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\right)_{|\alpha|\leq m} = F^{\varphi}_{\widetilde{\nabla},p}(J^m_{\widetilde{\nabla}} u(p)).$$

Al sustituir este vector en (7.5), obtenemos

$$c_{\overline{B},m} \sum_{j=0}^{m} |\nabla^j u(p)|^2_{\mathbf{g}} \leq \sum_{j=0}^{m} |\widetilde{\nabla}^j u(p)|^2_{\widetilde{\mathbf{g}}} \leq C_{\overline{B},m} \sum_{j=0}^{m} |\nabla^j u(p)|^2_{\mathbf{g}}.$$

La compacidad de $M$ permite elegir una cubierta finita $\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_k$ por bolas o medias bolas coordenadas regulares compactas. Tomando

$$c_m := \min_{1\leq i\leq k} c_{\overline{B}_i,m} > 0, \qquad C_m := \max_{1\leq i\leq k} C_{\overline{B}_i,m} < \infty,$$

se obtiene la doble desigualdad en todo $M$. □

Además, nos gustaría tener una forma de relacionar las integrales respecto a dos métricas cuando $M$ es compacta, lo cual se puede obtener usando el Lema 7.1.8.

**Lema 7.1.11.** Sea $M$ una variedad suave compacta con o sin frontera equipada con dos métricas riemannianas $\mathbf{g}$ y $\widetilde{\mathbf{g}}$. Entonces existen $C, c > 0$ tales que para cada $f : M \longrightarrow [0,\infty]$ medible se tiene que

$$c \int_M f \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \int_M f \, d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} \leq C \int_M f \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

*Demostración.* Consideremos una familia finita $(\overline{B}_i, \varphi_i)_{i=1}^k$ de bolas y, cuando corresponda, medias bolas coordenadas regulares compactas cuyos interiores relativos cubren $M$ (es posible pues $M$ es compacto). Tenemos que $\sqrt{\det(\mathbf{g})}, \sqrt{\det(\widetilde{\mathbf{g}})} > 0$ en $\overline{B}_i$ para toda $i \in \{1,\ldots,k\}$, pues las matrices de ambas métricas son simétricas y definidas positivas. Por ello podemos definir $h_i : \overline{B}_i \longrightarrow [0,\infty)$, $h_i(p) = \dfrac{\sqrt{\det(\widetilde{\mathbf{g}}_p)}}{\sqrt{\det(\mathbf{g}_p)}}$. Notemos que $h_i > 0$. Como $\overline{B}_i$ es compacto, existen $c_i = \min\limits_{p\in\overline{B}_i} h_i(p)$ y $C_i = \max\limits_{p\in\overline{B}_i} h_i(p)$ y ambos son positivos. Entonces $c_i\sqrt{\det(\mathbf{g})} \leq \sqrt{\det(\widetilde{\mathbf{g}})} \leq C_i\sqrt{\det(\mathbf{g})}$ en $\overline{B}_i$. Sea $(A_i)_{i=1}^k$ una familia de conjuntos medibles ajenos dos a dos como en la Definición 2.15.5 para $A = M$. Tenemos que $M = \coprod_{i=1}^{k} A_i$. Sean $c := \min\limits_{1\leq i\leq k} c_i$ y $C := \max\limits_{1\leq i\leq k} C_i$. Tenemos que $f = \sum_{i=1}^{k} f\mathbf{1}_{A_i}$. Además,

$$c_i \int_{A_i} f \, d\lambda_{\mathbf{g}} = c_i \int_{\varphi_i(A_i)} (f \circ \varphi_i^{-1}) \sqrt{\det(\mathbf{g}) \circ \varphi_i^{-1}} \, d\lambda_n$$

$$\leq \int_{\varphi_i(A_i)} (f\circ\varphi_i^{-1})\sqrt{\det(\widetilde{\mathbf{g}})\circ\varphi_i^{-1}}\,d\lambda_n = \int_{A_i} f\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}}.$$

Análogamente,

$$\int_{A_i} f\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} \leq C_i \int_{A_i} f\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por lo tanto,

$$c_i \int_M f\mathbf{1}_{A_i}\,d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \int_M f\mathbf{1}_{A_i}\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} \leq C_i \int_M f\mathbf{1}_{A_i}\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Entonces

$$c\int_M f\,d\lambda_{\mathbf{g}} = c\sum_{i=1}^{k}\int_M f\mathbf{1}_{A_i}\,d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \sum_{i=1}^{k} c_i \int_M f\mathbf{1}_{A_i}\,d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \sum_{i=1}^{k}\int_M f\mathbf{1}_{A_i}\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} = \int_M f\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}}.$$

Análogamente,

$$\int_M f\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} \leq C\int_M f\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

□

**Observación 7.1.12.** Si $u, v, w\colon M \longrightarrow [0,\infty]$ son medibles, tales que $u \leq v \leq w$, entonces por el Lema 7.1.11,

$$c\int_M u\,d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \int_M u\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} \leq \int_M v\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} \leq \int_M w\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} \leq C\int_M w\,d\lambda_{\mathbf{g}},$$

es decir,

$$c\int_M u\,d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \int_M v\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} \leq C\int_M w\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

**Teorema 7.1.13.** Sea $M$ una variedad suave compacta con o sin frontera, sea $m \in \mathbb{N}_0$ y sea $1 \leq p < \infty$. Si $\mathbf{g}$ y $\widetilde{\mathbf{g}}$ son dos métricas riemannianas en $M$, entonces las normas $\|\cdot\|_{W^{m,p}(M),\mathbf{g}}$ y $\|\cdot\|_{W^{m,p}(M),\widetilde{\mathbf{g}}}$ son equivalentes. En particular, las dos completaciones definen canónicamente el mismo espacio $W^{m,p}(M)$.

*Demostración.* Sean $\nabla$ y $\widetilde{\nabla}$ las conexiones de Levi–Civita de $\mathbf{g}$ y $\widetilde{\mathbf{g}}$, respectivamente. Para $u \in C^\infty(M)$ y $q \in M$, pongamos

$$x(q) := \big(|u(q)|, |\nabla u(q)|_{\mathbf{g}}, \ldots, |\nabla^m u(q)|_{\mathbf{g}}\big),$$

$$y(q) := \big(|u(q)|, |\widetilde{\nabla} u(q)|_{\widetilde{\mathbf{g}}}, \ldots, |\widetilde{\nabla}^m u(q)|_{\widetilde{\mathbf{g}}}\big).$$

Por el Lema 7.1.10, existen $c_m, C_m > 0$ tales que

$$\sqrt{c_m}\,\|x(q)\|_2 \leq \|y(q)\|_2 \leq \sqrt{C_m}\,\|x(q)\|_2 \qquad (q \in M).$$

Como todas las normas en $\mathbb{R}^{m+1}$ son equivalentes, existen $a_{m,p}, b_{m,p} > 0$ tales que

$$a_{m,p}\|z\|_p \leq \|z\|_2 \leq b_{m,p}\|z\|_p \qquad (z \in \mathbb{R}^{m+1}).$$

Aplicando estas dos desigualdades primero a $x(q)$ y después a $y(q)$, obtenemos, punto a punto,

$$\frac{a_{m,p}\sqrt{c_m}}{b_{m,p}}\|x(q)\|_p \leq \|y(q)\|_p \leq \frac{b_{m,p}\sqrt{C_m}}{a_{m,p}}\|x(q)\|_p.$$

Elevamos a la potencia $p$. El Lema 7.1.11, aplicado a las dos medidas riemannianas, permite integrar los extremos y produce constantes $A, B > 0$, independientes de $u$, para las cuales

$$A\|u\|_{W^{m,p}(M),\mathbf{g}} \le \|u\|_{W^{m,p}(M),\widetilde{\mathbf{g}}} \le B\|u\|_{W^{m,p}(M),\mathbf{g}}.$$

Así, la identidad sobre $C^\infty(M)$ es bicontinua para ambas normas. Por la propiedad universal de la completación, se extiende de manera única a un isomorfismo bicontinuo entre las dos completaciones, que identifica cada función suave consigo misma. □

**Ejemplo 7.1.14.** (Dependencia de las constantes respecto de las derivadas de la métrica) La comparación de las métricas en orden cero no basta para controlar las constantes de equivalencia de todas las normas de Sobolev. Consideremos el compacto con frontera $M = [0, 2\pi]$, con $\mathbf{g}_0 = (\mathbf{d}x)^2$, y, para cada entero $N \ge 1$, la métrica

$$\mathbf{g}_N = e^{2\sin(Nx)}(\mathbf{d}x)^2.$$

Para todo $x \in M$ y todo $v \in T_xM$,

$$e^{-2}\mathbf{g}_0(v,v) \le \mathbf{g}_N(v,v) \le e^2\mathbf{g}_0(v,v).$$

Las constantes son independientes de $N$. Sin embargo, el único coeficiente de la conexión de Levi–Civita de $\mathbf{g}_N$ es

$$\Gamma^1_{11}(\mathbf{g}_N) = \frac{1}{2}e^{-2\sin(Nx)}\frac{d}{dx}\left(e^{2\sin(Nx)}\right) = N\cos(Nx).$$

Para la función suave fija $u(x) = x$ se tiene $u' = 1$, $u'' = 0$ y, por la fórmula coordenada del hessiano,

$$(\nabla^{\mathbf{g}_N})^2 u = \left(u'' - \Gamma^1_{11}(\mathbf{g}_N)u'\right)(\mathbf{d}x)^2 = -N\cos(Nx)(\mathbf{d}x)^2.$$

Como $|(\mathbf{d}x)^2|^2_{\mathbf{g}_N} = e^{-4\sin(Nx)}$ y $d\lambda_{\mathbf{g}_N} = e^{\sin(Nx)}\,dx$, resulta

$$\begin{aligned}\|(\nabla^{\mathbf{g}_N})^2 u\|^2_{L^2(M,\mathbf{g}_N)} &= N^2\int_0^{2\pi}\cos^2(Nx)e^{-3\sin(Nx)}\,dx \\ &\ge e^{-3}N^2\int_0^{2\pi}\cos^2(Nx)\,dx = \pi e^{-3}N^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|u\|_{W^{2,2}(M),\mathbf{g}_N}$ tiende a infinito, mientras que $\|u\|_{W^{2,2}(M),\mathbf{g}_0}$ permanece fija. El Teorema 7.1.13 sí da equivalencia para cada par fijo $(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_N)$. Lo que este ejemplo descarta es una constante común deducida únicamente de las cotas $e^{-2}$ y $e^2$. El control adicional de las conexiones y de sus derivadas aparece en el Lema 7.1.10.

**Observación 7.1.15.** (Comparación en compactos coordenados) Las comparaciones utilizadas en la prueba anterior son puntuales sobre los compactos coordenados: se obtienen acotando el cociente de dos formas cuadráticas positivas sobre una esfera compacta y el cociente de los elementos de volumen. Por ello también valen en una bola o media bola coordenada $U$ cuya clausura esté contenida en una carta ambiente, para métricas y conexiones suaves definidas en esa carta. Basta aplicar las cotas sobre $\overline{U}$ e integrar sobre $U$; no se requiere que $\overline{U}$ sea una variedad suave con frontera. Esto es relevante para las medias bolas, cuya clausura tiene una esquina en la intersección de las partes plana y esférica. En las fórmulas siguientes, las normas sobre $\overline{U}$ de funciones suaves denotan estas mismas integrales: la frontera coordenada tiene medida

de dimensión $n$ nula.

## 7.2 La desigualdad de Kato

Daremos una prueba del Teorema de Rademacher en variedades riemannianas para poder establecer una desigualdad importante conocida como la «*desigualdad de Kato*» para secciones de haces vectoriales, la cual nos será útil para probar los encajes de Sobolev en la siguiente sección.

Recordemos el Teorema de Rademacher en espacios euclidianos:

**Teorema 7.2.1.** (de Rademacher en espacios euclidianos) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz, entonces $f$ es diferenciable casi en todas partes en $U$.

Dicho teorema se prueba en [80] y nos permite demostrar una versión de la desigualdad de Kato. Estableceremos su contraparte en variedades riemannianas para profundizar en el análisis no lineal en variedades riemannianas:

**Teorema 7.2.2.** (de Rademacher en variedades riemannianas) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y $u\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz. Entonces la primera derivada covariante $\nabla u$ existe casi en todas partes en $M$.

*Demostración.* Por la Proposición 1.2.11, $M$ tiene una base numerable de bolas coordenadas regulares (y si $M$ tiene frontera, algunas serán medias bolas coordenadas regulares). Por como están definidas las bolas coordenadas regulares (o medias bolas coordenadas regulares), podemos suponer que existe un atlas numerable $\{(B_j, \varphi_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ de bolas coordenadas regulares (o medias bolas coordenadas regulares) tales que $\{(\overline{B}_j, \varphi_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ es una familia de bolas coordenadas regulares compactas (o medias bolas coordenadas regulares compactas) y $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{B}_j$. Cada $\overline{B}_j$ es un subconjunto compacto contenido en una carta ambiente; no se necesita considerarlo una subvariedad suave con frontera. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $C_j = \varphi_j(\overline{B}_j)$.

Tenemos que $B_j$ admite dos métricas riemannianas, $\mathbf{g}$ y $\boldsymbol{\delta} := \varphi_j^*\overline{\mathbf{g}}$, donde $\overline{\mathbf{g}}$ denota la métrica usual en $\mathbb{R}^n$. Por la comparación puntual del Lema 7.1.8 sobre el compacto $\overline{B_j}$, en el sentido de la Observación 7.1.15, existe $K_j > 0$ tal que para cualesquiera $p \in B_j$ y $v \in T_pM$, $\mathbf{g}_p(v,v) \leq K_j \boldsymbol{\delta}_p(v,v)$.

Demostraremos que $h_j := u \circ \varphi_j^{-1}\colon C_j \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz. Como $u$ es Lipschitz, existe $K > 0$ tal que $|u(p) - u(q)| \leq K d_{\mathbf{g}}(p,q)$ para cualesquiera $p, q \in M$. Sean $x = \varphi_j(p), y = \varphi_j(q) \in C_j$. Como $C_j$ es una bola cerrada (o media bola cerrada) en $\mathbb{R}^n$, sabemos que es un conjunto convexo, por lo cual el segmento que une a $x$ con $y$ se queda contenido en $C_j$. Sea $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow C_j$ dada por $\gamma(t) = (1-t)x + ty$. Tenemos que $\gamma$ es una curva suave tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Entonces $\widetilde{\gamma}_j := \varphi_j^{-1} \circ \gamma\colon [0,1] \longrightarrow \overline{B}_j$ es una curva suave tal que $\widetilde{\gamma}_j(0) = p$ y $\widetilde{\gamma}_j(1) = q$.

Entonces se cumple que

$$|h_j(x) - h_j(y)| = |u(\varphi_j^{-1}(x)) - u(\varphi_j^{-1}(y))| \leq K d_{\mathbf{g}}(p,q) \leq K L_{\mathbf{g}}(\widetilde{\gamma}_j)$$

$$= K\int_0^1 |\widetilde{\gamma}_j'(t)|_{\mathbf{g}}dt = K\int_0^1 \sqrt{\mathbf{g}_{\widetilde{\gamma}_j(t)}(\widetilde{\gamma}_j'(t),\widetilde{\gamma}_j'(t))}dt$$

$$\leq K\sqrt{K_j}\int_0^1 \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{(\varphi_j^{-1}\circ\gamma)(t)}((\varphi_j^{-1}\circ\gamma)'(t),(\varphi_j^{-1}\circ\gamma)'(t))}dt$$

$$= K\sqrt{K_j}\int_0^1 \sqrt{\overline{\mathbf{g}}_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))}dt = K\sqrt{K_j}\int_0^1 \|\gamma'(t)\|dt$$

$$= K\sqrt{K_j}\int_0^1 \|y-x\|dt = K\sqrt{K_j}\|x-y\|,$$

lo cual prueba que $h_j$ es Lipschitz. Por el Teorema de Rademacher (Teorema 7.2.1), la derivada de $h_j$ existe casi en todas partes de $\operatorname{int}(C_j)$. Pero $C_j$ es una bola cerrada o una media bola cerrada, por lo que su frontera euclidiana tiene medida de dimensión $n$ cero. Entonces la derivada de $h_j$ existe casi en todas partes en $C_j$, es decir, existe $N_j \subseteq C_j$ tal que $\lambda_n(N_j) = 0$ y $dh_j$ existe en $C_j \setminus N_j$. Sea $N_j' = \varphi_j^{-1}(N_j)$. Como

$$\lambda_{\mathbf{g}}(N_j') = \int_{\varphi_j(N_j')} (\varphi_j)_*\sqrt{\det(\mathbf{g})}d\lambda_n = \int_{N_j} \sqrt{\det(\mathbf{g})}\circ\varphi_j^{-1}d\lambda_n = 0,$$

concluimos que $N_j'$ tiene medida de Riemann–Lebesgue cero en $M$.

Sea $p \in B_j \setminus N_j'$. Entonces $\varphi_j(p) \in C_j \setminus N_j$, por lo que $dh_j|_{\varphi_j(p)}$ existe. Como $\varphi_j$ es suave, $d\varphi_j|_p$ existe. Puesto que $u|_{B_j} = h_j \circ \varphi_j$, por la regla de la cadena, $du|_p$ existe. Como la primera derivada covariante de una función coincide con su diferencial, $\nabla u(p)$ existe. Por lo tanto, $\nabla u$ existe en $B_j \setminus N_j'$. Pero $N = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j'$ es tal que $\lambda_{\mathbf{g}}(N) = 0$ y además $\nabla u(p)$ existe para toda $p \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j' = M \setminus N$, por lo tanto $\nabla u$ existe casi en todas partes en $M$. □

Ahora veremos que si $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$, entonces $\nabla|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ existe casi en todas partes en $M$. Para ello, demostraremos un par de resultados primero:

**Proposición 7.2.3.** Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto convexo, sea $s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^{s+1}$. Si existe $M > 0$ tal que $\|\nabla^{s+1}f(x)\|_F \leq M$ para todo $x \in U$, entonces

$$\|\nabla^s f(x) - \nabla^s f(y)\|_F \leq M\|x-y\|$$

para cualesquiera $x, y \in U$, donde $\nabla^0 f = f$ y, para $s \geq 1$,

$$\nabla^s f(x) = \left.\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_s}}\right|_x \mathbf{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{d}x^{i_s}.$$

*Demostración.* Si $s = 0$, el argumento que sigue se interpreta con $\nabla^0 f = f$. Sean $x, y \in U$. Definimos $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ dada por $\gamma(t) = x + t(y-x)$. Entonces $\gamma'(t) = y - x$. Tenemos que

$$\nabla^s f(y) - \nabla^s f(x) = \left.\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_s}}\right|_{\gamma(1)} \mathbf{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{d}x^{i_s} - \left.\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_s}}\right|_{\gamma(0)} \mathbf{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{d}x^{i_s}$$

$$= \left( \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(1)) - \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(0)) \right) \mathbf{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}x^{i_s}$$

$$= \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t)) \right) dt \right) \mathbf{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}x^{i_s}$$

$$= \left( \int_0^1 \left\langle \nabla \left( \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}} \right)_{\gamma(t)}, y - x \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \right) \mathbf{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}x^{i_s}$$

$$= \left( \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_j \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t))(y^j - x^j) dt \right) \mathbf{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}x^{i_s}.$$

Entonces

$$\|\nabla^s f(y) - \nabla^s f(x)\|_F = \sqrt{\sum_{i_1,\ldots,i_s=1}^n \left( \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_j \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t))(y^j - x^j) dt \right)^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i_1,\ldots,i_s=1}^n \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_j \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t))(y^j - x^j) \right)^2 dt},$$

donde la última desigualdad se da por la desigualdad de Jensen (Proposición B.7.11) y la convexidad de $\varphi(x) = x^2$. Pero

$$\sqrt{\sum_{i_1,\ldots,i_s=1}^n \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_j \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t))(y^j - x^j) \right)^2 dt}$$

$$= \sqrt{\sum_{i_1,\ldots,i_s=1}^n \int_0^1 \left\langle \left( \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_1 \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t)), \ldots, \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_n \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t)) \right), y - x \right\rangle_{\mathbb{R}^n}^2 dt}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i_1,\ldots,i_s=1}^n \int_0^1 \left\| \left( \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_1 \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t)), \ldots, \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_n \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t)) \right) \right\|^2 \|y - x\|^2 dt}$$

$$= \|x - y\| \sqrt{\sum_{i_1,\ldots,i_s=1}^n \int_0^1 \left\| \left( \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_1 \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t)), \ldots, \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_n \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t)) \right) \right\|^2 dt}$$

$$= \|x - y\| \sqrt{\int_0^1 \sum_{i_1,\ldots,i_s=1}^n \left\| \left( \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_1 \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t)), \ldots, \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_n \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t)) \right) \right\|^2 dt}$$

$$= \|x - y\| \sqrt{\int_0^1 \sum_{i_1,\ldots,i_s=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_j \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(\gamma(t)) \right)^2 dt}$$

$$= \|x - y\| \sqrt{\int_0^1 \|\nabla^{s+1} f(\gamma(t))\|_F^2 dt} \leq \|x - y\| \sqrt{\int_0^1 M^2 dt} = M\|x - y\|.$$

□

**Lema 7.2.4.** Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, tal que $\overline{B}_{\text{euc}}(0,2) \subseteq U$, y $f\colon U \longrightarrow [0,\infty)$ una función de clase $C^2$. Entonces la función $\sqrt{f}$ es Lipschitz en $\overline{B}_{\text{euc}}(0,1)$.

*Demostración.* Como $f$ es de clase $C^2$ en el compacto $\overline{B}_{\text{euc}}(0,2)$, su gradiente y su matriz hessiana están acotados en dicho conjunto. Sea

$$K := 1 + \sup_{z\in\overline{B}_{\text{euc}}(0,2)} \|\nabla f(z)\| + \sup_{z\in\overline{B}_{\text{euc}}(0,2)} \|\nabla^2 f(z)\|_F.$$

Entonces $K > 0$ y $\|\nabla f(z)\| \le K$, $\|\nabla^2 f(z)\|_F \le K$ para todo $z \in \overline{B}_{\text{euc}}(0,2)$.
Para $\varepsilon > 0$, consideremos $f_\varepsilon = f + \varepsilon$. Fijemos $x \in \overline{B}_{\text{euc}}(0,1)$. Si $\nabla f(x) = 0$, entonces $\nabla\sqrt{f_\varepsilon}(x) = 0$. Supongamos, por lo tanto, que $\nabla f(x) \neq 0$ y definamos

$$v := \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}.$$

Entonces $\|v\| = 1$ y, como $x \in \overline{B}_{\text{euc}}(0,1)$, se tiene $x - tv \in \overline{B}_{\text{euc}}(0,2)$ para todo $t \in [0,1]$.
Consideremos la función $g\colon [0,1] \longrightarrow (0,\infty)$ dada por $g(t) := f_\varepsilon(x - tv)$. Entonces

$$g'(0) = -\langle \nabla f(x), v\rangle_{\mathbb{R}^n} = -\|\nabla f(x)\|.$$

Además, para todo $t \in [0,1]$,

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - tv) v_i v_j.$$

La desigualdad de Cauchy–Schwarz del Teorema B.3.2, aplicada en $\mathbb{R}^{n^2}$, proporciona

$$|g''(t)| \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - tv)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} |v_i v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|\nabla^2 f(x - tv)\|_F \|v\|^2 \le K.$$

Por la fórmula de Taylor con resto integral del Teorema 1.4.9, aplicada en dimensión uno, para todo $t \in [0,1]$,

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \int_0^t (t - r) g''(r)\, dr \le g(0) - \|\nabla f(x)\| t + \frac{K}{2} t^2.$$

Sea $t_0 := \frac{\|\nabla f(x)\|}{K}$. Como $\|\nabla f(x)\| \le K$, se tiene $t_0 \in [0,1]$. Además, como $f \ge 0$ y $\varepsilon > 0$, se tiene $g(t_0) = f(x - t_0 v) + \varepsilon \ge \varepsilon > 0$. Por lo tanto,

$$0 < g(t_0) \le g(0) - \frac{\|\nabla f(x)\|^2}{K} + \frac{K}{2}\frac{\|\nabla f(x)\|^2}{K^2} = g(0) - \frac{\|\nabla f(x)\|^2}{2K}.$$

De aquí se sigue que $\|\nabla f(x)\|^2 < 2K g(0) = 2K(f(x) + \varepsilon)$ y, por consiguiente,

$$\|\nabla\sqrt{f_\varepsilon}(x)\| = \frac{\|\nabla f(x)\|}{2\sqrt{f(x) + \varepsilon}} \le \sqrt{\frac{K}{2}}.$$

Esta cota es válida para todo $x \in \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,1)$ y la constante del lado derecho es independiente de $x$ y de $\varepsilon$. Como $\sqrt{f_\varepsilon}$ es de clase $C^1$ en el abierto convexo $B_{\mathrm{euc}}(0,1)$, la Proposición 7.2.3, aplicada con $s=0$, implica que

$$\left|\sqrt{f(x)+\varepsilon}-\sqrt{f(y)+\varepsilon}\right| \leq \sqrt{\frac{K}{2}}\|x-y\|$$

para cualesquiera $x, y \in B_{\mathrm{euc}}(0,1)$. Por continuidad, la desigualdad también es válida para cualesquiera $x, y \in \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,1)$. Finalmente, haciendo $\varepsilon \to 0$, obtenemos

$$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}| \leq \sqrt{\frac{K}{2}}\|x-y\|$$

para cualesquiera $x, y \in \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,1)$, por lo que $\sqrt{f}$ es Lipschitz en $\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,1)$. □

**Lema 7.2.5.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ y de una conexión compatible $\nabla^\mathbf{E}$. Si $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$, entonces, para todo entero $s \geq 0$, la función $|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}$ es localmente Lipschitz en $\mathrm{Int}(M)$. En particular, $\nabla|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}$ existe casi en todas partes en $M$.

*Demostración.* Como $\partial M$ tiene medida cero, basta probar que $\nabla|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}$ existe casi en todas partes en $\mathrm{Int}(M)$.

Sea $(V, \varphi)$ una bola coordenada geodésica normal regular fuertemente convexa, cuya cerradura esté contenida en $\mathrm{Int}(M)$. Tras componer $\varphi$ con una transformación afín de $\mathbb{R}^n$, podemos suponer que $\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,3) \subseteq \varphi(V)$. Definimos $B := \varphi^{-1}(\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,1))$.

En $V$ se tiene

$$|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} = \sqrt{g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_s j_s} h_{ab} (\nabla^s \mathbf{u})^a_{i_1\cdots i_s} (\nabla^s \mathbf{u})^b_{j_1\cdots j_s}} = \sqrt{\langle \nabla^s \mathbf{u}, \nabla^s \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}},$$

donde, si $s=0$, se entiende que no aparecen los factores correspondientes a $\mathbf{g}^{-1}$. Como $\langle \nabla^s \mathbf{u}, \nabla^s \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \circ \varphi^{-1}$ es suave y $\varphi(V)$ contiene a $\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,2)$, el Lema 7.2.4 implica que

$$|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \circ \varphi^{-1} = \sqrt{\langle \nabla^s \mathbf{u}, \nabla^s \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \circ \varphi^{-1}}$$

es Lipschitz en $\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,1)$. Por lo tanto, existe $C>0$ tal que

$$\left|\left(|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \circ \varphi^{-1}\right)(x) - \left(|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \circ \varphi^{-1}\right)(y)\right| \leq C\|x-y\|$$

para cualesquiera $x, y \in \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,1)$.

Sean $p, q \in B$. Sea $\boldsymbol{\delta} := \varphi^* \overline{\mathbf{g}}$ la métrica euclidiana transportada a $V$. Como $\overline{V}$ es compacta, el Lema 7.1.8, aplicado a las métricas $\mathbf{g}$ y $\boldsymbol{\delta}$, proporciona una constante $K>0$ tal que $|X|_\delta \leq K|X|_\mathbf{g}$ para todo $X \in TV$. Como $V$ es fuertemente convexa, existe una geodésica minimizante $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow V$ que une a $p$ con $q$ y satisface $L_\mathbf{g}(\gamma) = d_\mathbf{g}(p,q)$. La curva $\varphi \circ \gamma$ une a $\varphi(p)$ con $\varphi(q)$ y, por lo tanto,

$$\|\varphi(p)-\varphi(q)\| \leq L_{\overline{\mathbf{g}}}(\varphi\circ\gamma) = L_\delta(\gamma) \leq K L_\mathbf{g}(\gamma) = K d_\mathbf{g}(p,q).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\left||\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}(p)-|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}(q)\right| &\leq C\|\varphi(p)-\varphi(q)\|\\ &\leq CK\,d_{\mathbf{g}}(p,q),\end{aligned}$$

por lo que $|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ es Lipschitz en $B$.
Como toda variedad riemanniana admite una cubierta por bolas coordenadas geodésicas normales fuertemente convexas, concluimos que $|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ es localmente Lipschitz en $\mathrm{Int}(M)$.
Por la segunda numerabilidad de $M$, podemos extraer una subcubierta numerable $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ formada por bolas del tipo anterior. El Teorema 7.2.2 implica que $\nabla|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ existe casi en todas partes en cada $B_j$. Como la unión es numerable, existe casi en todas partes en $\mathrm{Int}(M)$ y, puesto que $\partial M$ tiene medida cero, también existe casi en todas partes en $M$. □

Los resultados anteriores permiten demostrar la desigualdad de Kato para secciones de haces vectoriales.

**Teorema 7.2.6.** (desigualdad de Kato) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave real provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Para cualquier entero $s\geq 0$ y cualquier $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$, se tiene que

$$|\nabla|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}|_{\mathbf{g}}\leq|\nabla^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

casi en todas partes en $M$.

*Demostración.* Si $|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\neq 0$ en un punto, entonces existe una carta suave $(U,\varphi)$, con $\varphi=(x^1,\dots,x^n)$, donde dicha función es positiva, por ser continua. Por lo tanto, $|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ es derivable en el sentido clásico en $U$ y la regla de la cadena nos dice que

$$\nabla|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}=\frac{\nabla\langle\nabla^s\mathbf{u},\nabla^s\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}}{2|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}}.$$

Para calcular $\nabla\langle\nabla^s\mathbf{u},\nabla^s\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$, recordemos que

$$\left(\nabla\langle\nabla^s\mathbf{u},\nabla^s\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right)_i=\frac{\partial\langle\nabla^s\mathbf{u},\nabla^s\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}}{\partial x^i}.$$

Como la conexión de Levi–Civita es compatible con $\mathbf{g}$ y $\nabla^{\mathbf{E}}$ es compatible con $\mathbf{h_E}$, la conexión inducida en $T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E}$ es compatible con la métrica producto $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\langle\nabla^s\mathbf{u},\nabla^s\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}}{\partial x^i}&=\left\langle\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}+\left\langle\nabla^s\mathbf{u},\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u})\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\\ &=2\left\langle\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\nabla|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}=\frac{\nabla\langle\nabla^s\mathbf{u},\nabla^s\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}}{2|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}}&=\frac{2\left\langle\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\mathbf{d}x^i}{2|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}}\\ &=\frac{\left\langle\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\mathbf{d}x^i}{|\nabla^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}}.\end{aligned}$$

Consideremos la raíz cuadrada de $\mathbf{g}^{-1}$, dada como en la Proposición C.1.14, la cual es positiva definida y

simétrica, y la denotaremos por $(R^{ij})$.

Entonces,

$$\left|\left\langle \nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\mathbf{d}x^i\right|^2_{\mathbf{g}}=\sum_{1\le i,j\le n}g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\left\langle \nabla_{\partial_j}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

$$=\sum_{1\le i,j\le n}\sum_{m=1}^{n}R^{im}R^{mj}\left\langle \nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\left\langle \nabla_{\partial_j}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\sum_{1\le i,j\le n}R^{im}R^{jm}\left\langle \nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\left\langle \nabla_{\partial_j}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}R^{im}\left\langle \nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right)^2$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left(\left\langle\sum_{i=1}^{n}R^{im}\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right)^2$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}R^{im}\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla^s\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right|^2$$

$$\underset{\text{Cauchy–Schwarz}}{\le}\sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}R^{im}\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u})\right|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}|\nabla^s\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

$$=|\nabla^s\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\sum_{m=1}^{n}\left\langle\sum_{i=1}^{n}R^{im}\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\sum_{i=1}^{n}R^{im}\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u})\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

$$=|\nabla^s\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\sum_{m=1}^{n}\left\langle\sum_{i=1}^{n}R^{im}\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\sum_{j=1}^{n}R^{mj}\nabla_{\partial_j}(\nabla^s\mathbf{u})\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

$$=|\nabla^s\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}R^{im}\sum_{j=1}^{n}R^{mj}\left\langle\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla_{\partial_j}(\nabla^s\mathbf{u})\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right)$$

$$=|\nabla^s\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{1\le i,j\le n}R^{im}R^{mj}\left\langle\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla_{\partial_j}(\nabla^s\mathbf{u})\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right)$$

$$=|\nabla^s\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\sum_{1\le i,j\le n}\sum_{m=1}^{n}R^{im}R^{mj}\left\langle\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla_{\partial_j}(\nabla^s\mathbf{u})\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

$$=|\nabla^s\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\sum_{1\le i,j\le n}g^{ij}\left\langle\nabla_{\partial_i}(\nabla^s\mathbf{u}),\nabla_{\partial_j}(\nabla^s\mathbf{u})\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

$$=|\nabla^s\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}|\nabla(\nabla^s\mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}=|\nabla^s\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}|\nabla^{s+1}\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}},$$

donde hemos usado la bilinealidad de la métrica fibrada inducida y la desigualdad de Cauchy–Schwarz del

Teorema B.3.2 en cada fibra de $T^{(0,s)}(TM)\otimes \mathbf{E}$. Así,

$$|\nabla|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}|_{\mathbf{g}} = \frac{\left|\left\langle \nabla_{\partial_i}(\nabla^s \mathbf{u}), \nabla^s \mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \mathbf{d}x^i\right|_{\mathbf{g}}}{|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}} \leq \frac{|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} |\nabla^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}}{|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}} = |\nabla^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}.$$

Además, por el Lema 7.2.5, $\nabla|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}$ existe casi en todas partes en $M$. Si $|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} = 0$ en un punto de $\mathrm{Int}(M)$ donde $\nabla|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}$ existe, la función no negativa $|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}$ tiene un mínimo global en dicho punto, por lo que su diferencial se anula y, en consecuencia, $\nabla|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} = 0$. Por lo tanto,

$$|\nabla|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}|_{\mathbf{g}} = 0 \leq |\nabla^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}.$$

Así, concluimos que

$$|\nabla|\nabla^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}$$

casi en todas partes en $M$. □

## 7.3 Encajes de Sobolev en variedades riemannianas compactas

La localización en bolas y medias bolas coordenadas permite transportar los encajes euclidianos a una variedad riemanniana compacta. Para pasar del primer orden a órdenes superiores usaremos la desigualdad de Kato.

**Proposición 7.3.1.** (Iteración de encajes de primer orden) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Sean $0 \leq m < k$ enteros, pongamos $d := k - m$ y consideremos exponentes $p_0,\dots,p_d \in [1,\infty)$. Si las inclusiones

$$W^{1,p_i}(M) \hookrightarrow L^{p_{i+1}}(M) \qquad (i \in \{0,\dots,d-1\})$$

son continuas, entonces también lo es

$$W^{k,p_0}(M) \hookrightarrow W^{m,p_d}(M).$$

*Demostración.* Probemos primero que un encaje continuo $W^{1,p}(M) \hookrightarrow L^q(M)$, con $p,q < \infty$, implica

$$W^{s,p}(M) \hookrightarrow W^{s-1,q}(M) \qquad \text{para todo entero } s \geq 1.$$

Sea $u \in C^{s,p}(M)$ y fijemos $0 \leq j \leq s-1$. La desigualdad de Kato, Teorema 7.2.6, da

$$\left|\nabla|\nabla^j u|_{\mathbf{g}}\right|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla^{j+1} u|_{\mathbf{g}} \qquad \text{casi en todas partes.}$$

Para trabajar con la definición por completación, consideremos

$$f_\varepsilon := \sqrt{|\nabla^j u|_{\mathbf{g}}^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

Estas funciones son suaves y satisfacen $0 \le f_\varepsilon \le |\nabla^j u|_{\mathbf{g}}$. Donde $|\nabla^j u|_{\mathbf{g}} > 0$, se tiene

$$\nabla f_\varepsilon = \frac{|\nabla^j u|_{\mathbf{g}}}{\sqrt{|\nabla^j u|_{\mathbf{g}}^2 + \varepsilon^2}} \nabla |\nabla^j u|_{\mathbf{g}}.$$

Donde $\nabla^j u = 0$, el diferencial de su norma al cuadrado es cero, por lo que $\nabla f_\varepsilon = 0$. En consecuencia,

$$|\nabla f_\varepsilon|_{\mathbf{g}} \le |\nabla^{j+1} u|_{\mathbf{g}}.$$

Además, $f_\varepsilon \to |\nabla^j u|_{\mathbf{g}}$ y sus diferenciales convergen casi en todas partes al diferencial de esa norma: en los ceros interiores donde éste existe, se anula por tratarse de un mínimo. La convergencia dominada, aplicada a las potencias $p$ de las cotas anteriores, da convergencia en $L^p$ de las funciones y de sus diferenciales. Así, $(f_\varepsilon)$ es de Cauchy en la norma que define $W^{1,p}(M)$ y representa la función $|\nabla^j u|_{\mathbf{g}}$ en su completación. También obtenemos

$$\left\| |\nabla^j u|_{\mathbf{g}} \right\|_{W^{1,p}(M)} \le \|\nabla^j u\|_{L^p(M, T^{(0,j)}(TM))} + \|\nabla^{j+1} u\|_{L^p(M, T^{(0,j+1)}(TM))}.$$

Aplicamos a esta función el encaje de primer orden supuesto. Existe $C_{p,q} > 0$ tal que

$$\|\nabla^j u\|_{L^q(M, T^{(0,j)}(TM))} \le C_{p,q} \left( \|\nabla^j u\|_{L^p(M, T^{(0,j)}(TM))} + \|\nabla^{j+1} u\|_{L^p(M, T^{(0,j+1)}(TM))} \right).$$

Sumando para $j \in \{0, \dots, s-1\}$ y usando la Proposición 7.1.7, resulta

$$\|u\|_{W^{s-1,q}(M)} \le C_s \|u\|_{W^{s,p}(M)}.$$

La extensión a las completaciones, Corolario B.2.37, proporciona el encaje buscado. Esta extensión coincide con la inclusión canónica: una sucesión suave que converge en $L^p(M)$ a $u$ y en $L^q(M)$ a $v$ converge a ambos en $L^1$ sobre cada compacto, por Hölder, de modo que $u = v$ casi en todas partes.
Para cada $i \in \{0, \dots, d-1\}$ aplicamos lo anterior con $s = k - i$, $p = p_i$ y $q = p_{i+1}$. Obtenemos

$$\|u\|_{W^{k-i-1, p_{i+1}}(M)} \le C_i \|u\|_{W^{k-i, p_i}(M)}.$$

La composición de estos $d$ encajes da

$$\|u\|_{W^{m,p_d}(M)} \le \left( \prod_{i=0}^{d-1} C_i \right) \|u\|_{W^{k,p_0}(M)},$$

como se quería. □

**Teorema 7.3.2.** (Encaje de Sobolev con órdenes y exponentes finitos) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$, con o sin frontera. Sean $0 \le m < k$ enteros y $1 \le p, q < \infty$ tales que

$$k - \frac{n}{p} \ge m - \frac{n}{q}.$$

Entonces la inclusión $W^{k,p}(M) \hookrightarrow W^{m,q}(M)$ es continua.

*Demostración.* Si $n = 0$, la compacidad implica que $M$ es un conjunto finito y la afirmación se sigue de la equivalencia de las normas en dimensión finita. Supongamos $n \geq 1$. Comenzamos con el primer orden. Fijemos $1 \leq p, q < \infty$ con $1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$. Elegimos una cubierta finita $(U_i, \varphi_i)_{i=1}^N$ formada por bolas coordenadas regulares interiores y medias bolas coordenadas regulares centradas en la frontera. Sea $(\psi_i)_{i=1}^N$ una partición suave de la unidad subordinada, con $\operatorname{supp}\psi_i \Subset U_i$, y pongamos

$$\Omega_i := \varphi_i\big(U_i \cap \operatorname{Int}(M)\big), \qquad \delta_i := \varphi_i^* \overline{\mathbf{g}},$$

donde $\overline{\mathbf{g}}$ es la métrica euclidiana.
Sea $u \in C^\infty(M)$ y definamos $v_i := (\psi_i u) \circ \varphi_i^{-1}$ en $\Omega_i$. Si $U_i$ es interior, $v_i \in C_c^\infty(\Omega_i)$ y el Teorema 3.3.16, con órdenes totales uno y cero, da

$$\|v_i\|_{L^q(\Omega_i)} \leq A_i \|v_i\|_{W^{1,p}(\Omega_i)}.$$

Si $U_i$ es una carta de frontera, $\Omega_i$ es una media bola. El soporte de $v_i$ está separado de la parte esférica, de modo que su extensión por cero dentro de $\mathbb{R}^n_+$ es suave hasta $x_n = 0$ y tiene soporte contenido en el compacto fijo

$$K_i := \varphi_i(\operatorname{supp}\psi_i) \subseteq \overline{\mathbb{R}^n_+}.$$

El Teorema 3.6.6, con órdenes totales uno y cero, proporciona la misma estimación al restringir a $\Omega_i$.
El cambio de variables y la definición de la métrica $\delta_i$ dan

$$\int_{\Omega_i} |v_i|^q \, d\lambda_n = \int_{U_i} |\psi_i u|^q \, d\lambda_{\delta_i}, \qquad \int_{\Omega_i} |dv_i|_{\overline{\mathbf{g}}}^p \, d\lambda_n = \int_{U_i} |d(\psi_i u)|_{\delta_i}^p \, d\lambda_{\delta_i}.$$

La equivalencia de las normas en $\mathbb{R}^n$, Proposición B.1.2, compara $|dv_i|_{\overline{\mathbf{g}}}$ con $\big(\sum_{a=1}^n |D_a v_i|^p\big)^{1/p}$. Por otra parte, la Observación 7.1.15 permite comparar las métricas $\delta_i$ y $\mathbf{g}$ y sus medidas sobre $\overline{U_i}$. Por lo tanto, existen $a_i, b_i > 0$, independientes de $u$, tales que

$$\|v_i\|_{W^{1,p}(\Omega_i)} \leq a_i \|\psi_i u\|_{W^{1,p}(U_i),\mathbf{g}}, \qquad \|\psi_i u\|_{L^q(U_i),\mathbf{g}} \leq b_i \|v_i\|_{L^q(\Omega_i)}.$$

La estimación euclidiana implica entonces

$$\|\psi_i u\|_{L^q(M)} \leq a_i b_i A_i \|\psi_i u\|_{W^{1,p}(M)},$$

pues $\psi_i u$ y sus derivadas se anulan fuera de $U_i$.
Para acotar la localización, usamos $d(\psi_i u) = \psi_i \, du + u \, d\psi_i$ y $0 \leq \psi_i \leq 1$. Como $M$ es compacta, $|d\psi_i|_{\mathbf{g}}$ está acotada y

$$\begin{aligned}
\|\psi_i u\|_{W^{1,p}(M)} &\leq \|\psi_i u\|_{L^p(M)} + \|d(\psi_i u)\|_{L^p(M,T^*M)} \\
&\leq \big(1 + \||d\psi_i|_{\mathbf{g}}\|_{L^\infty(M)}\big)\|u\|_{L^p(M)} + \|du\|_{L^p(M,T^*M)} \\
&\leq C_i \|u\|_{W^{1,p}(M)}.
\end{aligned}$$

Sumando sobre la cubierta finita y usando $u = \sum_{i=1}^{N} \psi_i u$, obtenemos

$$\|u\|_{L^q(M)} \le \sum_{i=1}^{N} \|\psi_i u\|_{L^q(M)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(M)}.$$

La densidad que define $W^{1,p}(M)$ y el Teorema B.2.36 extienden esta estimación a todo $W^{1,p}(M)$. El límite en $L^q$ se identifica con el límite en $L^p$ por la unicidad del límite en $L^1(M)$.
Consideremos ahora los órdenes $m < k$ y los exponentes del enunciado. Pongamos $d := k - m$ y definamos

$$\frac{1}{p_i} := \frac{1}{p} - \frac{i}{d}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), \qquad i \in \{0, \dots, d\}.$$

Cada $p_i$ es finito y pertenece a $[1, \infty)$, pues su recíproco es una combinación convexa de $1/p$ y $1/q$. Además, $p_0 = p$, $p_d = q$ y

$$1 - \frac{n}{p_i} + \frac{n}{p_{i+1}} = 1 - \frac{n}{d}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \ge 0.$$

La parte de primer orden proporciona $W^{1,p_i}(M) \hookrightarrow L^{p_{i+1}}(M)$ continuamente para cada $i \in \{0, \dots, d-1\}$. La Proposición 7.3.1 concluye que $W^{k,p}(M) \hookrightarrow W^{m,q}(M)$ continuamente. □

**Corolario 7.3.3.** (Encaje de Sobolev y exponente crítico) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$, con o sin frontera. Sean $j \ge 0$ y $d \ge 1$ enteros y sea $1 \le p < n/d$. Entonces

$$W^{j+d,p}(M) \hookrightarrow W^{j,q}(M) \qquad \text{para todo } 1 \le q \le p_d^* := \frac{np}{n - dp},$$

y estas inclusiones son continuas.

*Demostración.* La condición $q \le p_d^*$ equivale a $j + d - \frac{n}{p} \ge j - \frac{n}{q}$. Aplicamos el Teorema 7.3.2 con $k = j + d$ y $m = j$. □

## 7.4 El Teorema de Rellich-Kondrashov en variedades riemannianas compactas

El teorema de Rellich–Kondrashov proporciona el complemento compacto de los encajes anteriores. La versión euclidiana del Teorema 3.4.2 puede transportarse a una variedad riemanniana compacta $(M, \mathbf{g})$ mediante una cubierta finita de cartas y una partición de la unidad; en las cartas de frontera se usa la versión localizada sobre el semiespacio. El resultado siguiente precisa para qué órdenes y exponentes se obtiene compacidad, incluida la pérdida de una derivada con cualquier exponente finito. En el rango en que existe un exponente crítico finito, recuperaremos como caso particular los encajes subcríticos del Corolario 7.3.3.

**Teorema 7.4.1.** (de Rellich-Kondrashov) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta, con o sin frontera, de dimensión $n$. Para cualesquiera enteros $j \ge 0$ y $m \ge 1$, y cualesquiera $1 \le p, q < \infty$ que satisfagan $j + m - \frac{n}{p} > j - \frac{n}{q}$, la inclusión $W^{j+m,p}(M) \subseteq W^{j,q}(M)$ es compacta.

La demostración utiliza la regla de Leibniz para la conexión tensorial, Proposición 2.4.13, iterada conservando el orden de los índices covariantes.

*Demostración.* Como $M$ es compacta, existe una cubierta abierta finita $\{(U_i,\varphi_i) \mid i \in \{1,\dots,N\}\}$ formada por bolas coordenadas regulares contenidas en $\mathrm{Int}(M)$ y, cuando $\partial M \neq \varnothing$, por medias bolas coordenadas regulares centradas en la frontera. Sea $(\psi_i)_{i=1}^N$ una partición de la unidad subordinada a dicha cubierta abierta. En ambos casos, $\varphi_i$ se extiende a $\overline{U_i}$, que es compacto. Consideremos nuevamente $\boldsymbol{\delta}_i = \varphi_i^*\overline{\mathbf{g}}$.

Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq W^{j+m,p}(M) \cap C^\infty(M)$ una sucesión acotada.

Por la Observación 7.1.15, las estimaciones locales del Teorema 7.1.13 se aplican en cada $\overline{U_i}$, aunque una media bola tenga esquina. Por tanto, para cada $i \in \{1,\dots,N\}$ existen $C_i, c_i > 0$ tales que $c_i\|\psi_i u_k\|_{W^{j+m,p}(\overline{U_i}),\boldsymbol{\delta}_i} \leq \|\psi_i u_k\|_{W^{j+m,p}(\overline{U_i}),\mathbf{g}} \leq C_i\|\psi_i u_k\|_{W^{j+m,p}(\overline{U_i}),\boldsymbol{\delta}_i}$ (donde las constantes no dependen de la función). Pongamos $v_{i,k} := (\psi_i u_k)\circ\varphi_i^{-1}$. El cambio de variables da

$$\|\psi_i u_k\|_{W^{j+m,p}(U_i),\mathbf{g}} \geq c_i\left(\sum_{s=0}^{j+m}\int_{\varphi_i(U_i)} |\nabla^s v_{i,k}|_{\overline{\mathbf{g}}}^p \, d\lambda_n\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para cada $s \in \{0,\dots,j+m\}$, la Proposición B.1.2 proporciona $M_s, m_s > 0$ tales que $m_s\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_2 \leq M_s\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^{n^s}$, donde $n^s$ cuenta los bloques ordenados de $s$ índices. Cada multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| = s$ aparece $s!/\alpha!$ veces entre esos bloques, con $\alpha! := \alpha_1!\cdots\alpha_n!$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|\nabla^s v_{i,k}|_{\overline{\mathbf{g}}}^p &= \left(\sum_{|\alpha|=s}\frac{s!}{\alpha!}|D^\alpha v_{i,k}|^2\right)^{\frac{p}{2}}\\ &\geq m_s^p\sum_{|\alpha|=s}|D^\alpha v_{i,k}|^p.\end{aligned}$$

Al integrar y sumar sobre los órdenes, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{j+m}\int_{\varphi_i(U_i)}|\nabla^s v_{i,k}|_{\overline{\mathbf{g}}}^p\,d\lambda_n &\geq \sum_{s=0}^{j+m}m_s^p\sum_{|\alpha|=s}\int_{\varphi_i(U_i)}|D^\alpha v_{i,k}|^p\,d\lambda_n\\ &\geq (m')^p\sum_{|\alpha|\leq j+m}\int_{\varphi_i(U_i)}|D^\alpha v_{i,k}|^p\,d\lambda_n,\end{aligned}$$

donde $m' := \min_{0\leq s\leq j+m} m_s > 0$. Tomando la raíz $p$-ésima y usando la definición de la norma euclidiana de Sobolev, concluimos que

$$\|\psi_i u_k\|_{W^{j+m,p}(U_i),\mathbf{g}} \geq c_i m'\|v_{i,k}\|_{W^{j+m,p}(\varphi_i(U_i))}.$$

La regla de Leibniz iterada expresa $\nabla^s(\psi_i u_k)$ como una suma de términos obtenidos al distribuir las $s$ derivadas entre $\psi_i$ y $u_k$. Para cada $r \in \{0,\dots,s\}$ aparecen $\binom{s}{r}$ términos con $s-r$ derivadas sobre $\psi_i$ y $r$ sobre $u_k$. Estos términos difieren por permutaciones de los índices covariantes, las cuales preservan la norma tensorial. La Proposición 2.3.4 da

$$|\mathbf{F}\otimes\mathbf{G}|_{\mathbf{g}} = |\mathbf{F}|_{\mathbf{g}}|\mathbf{G}|_{\mathbf{g}} = |\mathbf{G}\otimes\mathbf{F}|_{\mathbf{g}}.$$

Por lo tanto, para $0 \le s \le j+m$,

$$\begin{aligned}|\nabla^s(\psi_i u_k)|_{\mathbf{g}} &\le \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} |\nabla^{s-r}\psi_i|_{\mathbf{g}} |\nabla^r u_k|_{\mathbf{g}} \\ &\le \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} \| |\nabla^{s-r}\psi_i|_{\mathbf{g}} \|_{L^\infty(M)} |\nabla^r u_k|_{\mathbf{g}}.\end{aligned}$$

Sea

$$A_i := \max_{0\le s\le j+m} \| |\nabla^s \psi_i|_{\mathbf{g}} \|_{L^\infty(M)}.$$

La compacidad de $M$ implica que $A_i < \infty$. Integrando la estimación puntual y aplicando Minkowski, obtenemos

$$\|\nabla^s(\psi_i u_k)\|_{L^p(M,T^{(0,s)}(TM))} \le A_i \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} \|\nabla^r u_k\|_{L^p(M,T^{(0,r)}(TM))}.$$

Sumamos ahora sobre $s$ y usamos la Proposición 7.1.7:

$$\begin{aligned}\|\psi_i u_k\|_{W^{j+m,p}(M)} &\le A_i \sum_{s=0}^{j+m} \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} \|\nabla^r u_k\|_{L^p(M,T^{(0,r)}(TM))} \\ &\le C_i' \|u_k\|_{W^{j+m,p}(M)}.\end{aligned}$$

La constante $C_i'$ es independiente de $k$. Junto con la comparación anterior, esto da

$$\frac{c_i m'}{C_i'} \|v_{i,k}\|_{W^{j+m,p}(\varphi_i(U_i))} \le \|u_k\|_{W^{j+m,p}(M)}.$$

Así, $(v_{i,k})_k$ está acotada en el espacio euclidiano correspondiente. Si $U_i$ es interior, el soporte de cada $v_{i,k}$ está contenido en el compacto fijo $\varphi_i(\operatorname{supp}\psi_i) \Subset \varphi_i(U_i)$. El Teorema 3.4.2 proporciona una subsucesión convergente en $W^{j,q}(\varphi_i(U_i))$.

Si $U_i$ es una carta de frontera, extendemos $v_{i,k}$ por cero fuera de la media bola, pero dentro de $\mathbb{R}^n_+$. El Lema 3.6.8 conserva su norma de Sobolev, y las extensiones tienen soporte contenido en el compacto fijo $K_i := \varphi_i(\operatorname{supp}\psi_i) \subseteq \overline{\mathbb{R}^n_+}$. El Teorema 3.6.6 da una subsucesión convergente en $W^{j,q}(\mathbb{R}^n_+)$ y, por restricción, una subsucesión de Cauchy en el espacio de Sobolev de la media bola.

Como el número de cartas es finito, extraemos sucesivamente una subsucesión para $U_1$, después una subsucesión de ésta para $U_2$ y así hasta $U_N$. Tras relabelar la última, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $(\psi_i u_k \circ \varphi_i^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $W^{j,q}(\varphi_i(U_i))$ para todo $i \in \{1,\dots,N\}$. Veremos que $(\psi_i u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $W^{j,q}(U_i)$.

Repitiendo un procedimiento análogo al anterior, si $\widetilde{C_i}, \widetilde{c_i} > 0$ son tales que

$$\widetilde{c_i}\|\psi_i u_k\|_{W^{j,q}(\overline{U_i}),\boldsymbol{\delta}_i} \le \|\psi_i u_k\|_{W^{j,q}(\overline{U_i}),\mathbf{g}} \le \widetilde{C_i}\|\psi_i u_k\|_{W^{j,q}(\overline{U_i}),\boldsymbol{\delta}_i}$$

(donde las constantes no dependen de la función) y $\widetilde{M'} = \max_{0\le s\le j}\left(\widetilde{M_s}(s!)^{1/q}\right)$, donde $\widetilde{M_s}, \widetilde{m_s} > 0$ son tales que $\widetilde{m_s}\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_2 \le \widetilde{M_s}\|\cdot\|_q$ en $\mathbb{R}^{n^s}$ con $s \in \{0,\dots,j\}$, usamos $s!/\alpha! \le s!$ para comparar la suma sobre bloques con

la suma sobre multiíndices. Esto incluye $j = 0$, con $0! = 1$. Entonces

$$\|\psi_i u_k - \psi_i u_l\|_{W^{j,q}(U_i),\mathbf{g}} \leq \widetilde{C}_i \widetilde{M}' \|\psi_i u_k \circ \varphi_i^{-1} - \psi_i u_l \circ \varphi_i^{-1}\|_{W^{j,q}(\varphi_i(U_i)),\bar{\mathbf{g}}}.$$

Por lo tanto, la sucesión $(\psi_i u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $W^{j,q}(U_i)$. Finalmente, si $k, l \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|u_k - u_l\|_{W^{j,q}(M),\mathbf{g}} = \left\| \sum_{i=1}^{N} \psi_i (u_k - u_l) \right\|_{W^{j,q}(M),\mathbf{g}} \leq \sum_{i=1}^{N} \|\psi_i (u_k - u_l)\|_{W^{j,q}(M),\mathbf{g}}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \|\psi_i (u_k - u_l)\|_{W^{j,q}(U_i),\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{N} \|\psi_i u_k - \psi_i u_l\|_{W^{j,q}(U_i),\mathbf{g}}.$$

Así, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $W^{j,q}(M)$. Hemos probado que la inclusión restringida $I_0 \colon C^{j+m,p}(M) \longrightarrow W^{j,q}(M)$, dada por $I_0 u = u$, es compacta. Además, $I_0$ es continua: la compacidad que acabamos de demostrar lleva su bola unidad a un conjunto relativamente compacto y, por tanto, acotado en $W^{j,q}(M)$; la linealidad convierte esa cota en continuidad. Como $C^{j+m,p}(M)$ es denso en $W^{j+m,p}(M)$ por definición y $W^{j,q}(M)$ es un espacio de Banach, el Teorema B.2.36 proporciona una única extensión lineal compacta $I \colon W^{j+m,p}(M) \longrightarrow W^{j,q}(M)$. Esta extensión coincide con la inclusión canónica. Por lo tanto, la inclusión $W^{j+m,p}(M) \subseteq W^{j,q}(M)$ es compacta para todos los órdenes y exponentes del enunciado. □

**Corolario 7.4.2.** (Órdenes totales y descenso de una derivada) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$, con frontera suave posiblemente vacía. Si $m > k \geq 0$ son enteros y $1 \leq p, q < \infty$ satisfacen $m - \frac{n}{p} > k - \frac{n}{q}$, entonces $W^{m,p}(M) \hookrightarrow W^{k,q}(M)$ es compacto. En particular,

$$W^{m,p}(M) \hookrightarrow W^{m-1,p}(M)$$

es compacto para todo $m \geq 1$ y todo $1 \leq p < \infty$.

*Demostración.* Aplicamos el teorema anterior con $j = k$ y ganancia de derivadas $m - k \geq 1$. Para el último encaje tomamos $k = m - 1$ y $q = p$; la desigualdad estricta se reduce a $1 > 0$. Así, este caso incluye $p = 1$ y las dimensiones $n = 1, 2$, sin introducir un exponente crítico. □

**Corolario 7.4.3.** (Formulación subcrítica) Bajo las hipótesis geométricas del corolario anterior, si $j \geq 0$, $a \geq 1$ y $ap < n$, la inclusión $W^{j+a,p}(M) \hookrightarrow W^{j,q}(M)$ es compacta para $1 \leq q < np/(n - ap)$. En el extremo $q = np/(n - ap)$, el Corolario 7.3.3 proporciona continuidad.

*Demostración.* Con $ap < n$, la desigualdad $j + a - \frac{n}{p} > j - \frac{n}{q}$ equivale a $q < np/(n - ap)$, por lo que se aplica el teorema general. La igualdad entre índices corresponde al exponente crítico del teorema continuo citado. □

# 8

# Operadores diferenciales parciales sobre haces vectoriales

Los operadores diferenciales sobre variedades actúan de manera natural entre secciones de haces vectoriales. El gradiente, la derivada exterior, las conexiones, los operadores de Hodge y los laplacianos geométricos son ejemplos de una misma estructura: su valor en un punto depende únicamente de un número finito de derivadas locales de la sección.

La formulación intrínseca permitirá estudiar el orden de un operador diferencial, la composición y los conmutadores con funciones suaves sin privilegiar coordenadas. El adjunto formal proporcionará la identidad de integración por partes necesaria para definir después derivadas covariantes débiles y distribuciones con valores en haces. El símbolo principal y la elipticidad aparecerán una vez construidas esas dos teorías, de modo que sus consecuencias puedan expresarse directamente sobre secciones de Sobolev y distribuciones geométricas.

**Del operador local al lenguaje de haces**

Durante mucho tiempo los operadores diferenciales se presentaron mediante fórmulas en coordenadas. La geometría diferencial mostró que lo esencial no era la lista particular de coeficientes, sino la dependencia local respecto de un número finito de derivadas y la manera en que esas expresiones cambian entre trivializaciones. El lenguaje de haces permite reunir en una misma teoría operadores tan distintos en apariencia como la derivada exterior, las conexiones y los operadores de Dirac. Más adelante, el símbolo principal conservará justamente la parte de orden máximo de esta información local.

## 8.1 Motivación y propiedades básicas

Antes de pasar a la definición intrínseca, conviene recordar el caso euclidiano. Allí los operadores se escriben mediante derivadas parciales de las componentes; al cambiar de coordenadas, esas expresiones se transforman de manera coordinada y determinan un mapeo global entre espacios de secciones. La definición abstracta aislará precisamente esta dependencia local de un número finito de derivadas.

Consideremos el laplaciano

$$\Delta\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Este operador puede interpretarse como

$$\Delta\colon \Gamma(\underline{\mathbb{R}}) \longrightarrow \Gamma(\underline{\mathbb{R}}),$$

donde denotamos por $\underline{\mathbb{R}}$ al haz trivial de rango 1 sobre $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \pi(x, v) = x.$$

Otro ejemplo es la derivada exterior

$$d\colon \Omega^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n),$$

donde una $k$-forma $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ tiene, en las coordenadas canónicas, un representante suave

$$\widetilde{\omega}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}.$$

Así, $d$ puede escribirse como un operador

$$d\colon C^\infty\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}\right) \longrightarrow C^\infty\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\binom{n}{k+1}}\right).$$

**Observación 8.1.1.** En el caso del haz trivial de rango $m$ sobre $\mathbb{R}^n$, denotado por $\underline{\mathbb{R}}^m$,

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

toda sección suave $\sigma$ se describe como $\sigma(x) = (x, f(x))$ para una única función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. De este modo se obtiene una identificación natural

$$\Gamma(\underline{\mathbb{R}}^m) \cong C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Más en general, si $M$ es una variedad suave con o sin frontera y consideramos el haz trivial de rango $m$, nuevamente denotado por $\underline{\mathbb{R}}^m$,

$$\pi\colon M \times \mathbb{R}^m \longrightarrow M,$$

el mapeo que envía una sección $\sigma(p) = (p, f(p))$ en su segunda componente $f$ es lineal y biyectivo, con inversa $f \mapsto [p \mapsto (p, f(p))]$. Por lo tanto,

$$\Gamma(\underline{\mathbb{R}}^m) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^m).$$

En este sentido, la derivada exterior puede considerarse como

$$d\colon \Gamma\left(\underline{\mathbb{R}}^{\binom{n}{k}}\right) \longrightarrow \Gamma\left(\underline{\mathbb{R}}^{\binom{n}{k+1}}\right).$$

Estos ejemplos muestran que muchos operadores diferenciales clásicos pueden describirse naturalmente como operadores entre espacios de secciones de haces vectoriales. Esta situación se puede generalizar del siguiente

modo:

**Definición 8.1.2.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y $\pi_1 : \mathbf{E} \longrightarrow M$, $\pi_2 : \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves (reales o complejos) sobre $M$. Denotamos

$$\mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F}) := \{P : \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{F}) \mid P \text{ es } \mathbb{K}\text{-lineal}\},$$

donde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Los espacios de secciones suaves $\Gamma(\mathbf{E})$ y $\Gamma(\mathbf{F})$ no son solamente $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, también son $C^\infty(M)$-módulos. Los operadores diferenciales parciales son elementos de $\mathbf{Op}$ que interactúan de manera especial con la estructura de $C^\infty(M)$-módulo de los espacios de secciones.

Un elemento $P \in \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es $C^\infty(M)$-lineal si $P(f\mathbf{u}) = f(P\mathbf{u})$ para cualquier $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$. Definimos el conmutador de $P \in \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $f \in C^\infty(M)$ como el elemento $[P,f] \in \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ tal que $[P,f](\mathbf{u}) = P(f\mathbf{u}) - f(P\mathbf{u})$ para toda $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$.

El operador $P$ es $C^\infty(M)$–lineal si y sólo si $[P,f] = 0$ para cualquier $f \in C^\infty(M)$.

Cada función $f \in C^\infty(M)$ define un mapeo

$$\mathrm{ad}(f) : \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \longrightarrow \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F}), \qquad \mathrm{ad}(f)(P) = [P,f].$$

Definiremos un operador diferencial parcial de manera recursiva como sigue:

**Definición 8.1.3.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves sobre $M$.

(a) $\mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) := \{P \in \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \mid [P,f] = 0, \forall f \in C^\infty(M)\}$.

(b) Si $m > 0$,
$$\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) := \{P \in \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \mid [P,f] \in \mathbf{PDO}^{(m-1)}(\mathbf{E},\mathbf{F}), \forall f \in C^\infty(M)\}.$$

(c) $\mathbf{PDO}(\mathbf{E},\mathbf{F}) := \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

En general si $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ decimos que $P$ es un operador diferencial parcial de orden menor o igual a $m$.

En términos de la notación ad, esta definición se puede reescribir de manera más explícita:

**Proposición 8.1.4.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves sobre $M$.

(a) $\mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) = \bigcap_{f \in C^\infty(M)} \ker(\mathrm{ad}(f))$.

(b) Más generalmente, para $m \geq 1$,

$$\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) = \bigcap_{f_0,\ldots,f_m \in C^\infty(M)} \ker\left(\mathrm{ad}(f_0)\cdots\mathrm{ad}(f_m)\right).$$

En particular, $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ si y sólo si

$$\operatorname{ad}(f_0)\cdots\operatorname{ad}(f_m)(P) = 0, \qquad \forall f_0,\dots,f_m \in C^\infty(M).$$

*Demostración.* Para el caso base $m = 0$ usaremos la definición, notemos que $P \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ si y sólo si $[P,f] = 0$ para toda $f \in C^\infty(M)$, es decir, $\operatorname{ad}(f)(P) = 0$ para toda $f \in C^\infty(M)$, lo cual es equivalente a que

$$P \in \bigcap_{f\in C^\infty(M)} \ker(\operatorname{ad}(f)).$$

Supongamos ahora que la caracterización es válida hasta $m-1$, es decir,

$$\mathbf{PDO}^{(m-1)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) = \bigcap_{f_0,\dots,f_{m-1}\in C^\infty(M)} \ker\big(\operatorname{ad}(f_0)\cdots\operatorname{ad}(f_{m-1})\big).$$

Queremos ver que la misma descripción se cumple para $m$.
Por definición,

$$P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \iff [P,f_m] \in \mathbf{PDO}^{(m-1)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \text{ para toda } f_m \in C^\infty(M).$$

Aplicando la hipótesis de inducción, esta condición es equivalente a que

$$\operatorname{ad}(f_0)\cdots\operatorname{ad}(f_{m-1})([P,f_m]) = 0, \qquad \forall f_0,\dots,f_{m-1},f_m \in C^\infty(M).$$

Pero esto ocurre si y sólo si

$$\operatorname{ad}(f_0)\cdots\operatorname{ad}(f_{m-1})\operatorname{ad}(f_m)(P) = 0, \qquad \forall f_0,\dots,f_m \in C^\infty(M),$$

es decir, si y sólo si

$$P \in \bigcap_{f_0,\dots,f_m\in C^\infty(M)} \ker\big(\operatorname{ad}(f_0)\cdots\operatorname{ad}(f_m)\big).$$

Por lo tanto, la equivalencia se mantiene para $m$, y la inducción queda completa. □

**Observación 8.1.5.** En la literatura es común encontrar la abreviatura

$$\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) = \ker \operatorname{ad}^{m+1},$$

que debe entenderse en el sentido anterior: no como la potencia de un único operador, sino como la intersección de los núcleos de *todas* las composiciones posibles de $m+1$ operadores de la forma $\operatorname{ad}(f)$ con $f \in C^\infty(M)$.

**Proposición 8.1.6.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves. Sean $P,Q \in \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, $f,g,h \in C^\infty(M)$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$. El conmutador

$$[P,f](\mathbf{u}) := P(f\mathbf{u}) - fP(\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E}),$$

satisface las siguientes propiedades:

(a) $\mathbb{K}$-linealidad en el operador:

$$[\alpha P + \beta Q, f] = \alpha\,[P, f] + \beta\,[Q, f].$$

(b) $C^\infty(M)$-linealidad en el operador:

$$[hP, f] = h\,[P, f].$$

(c) $\mathbb{K}$-linealidad en la función:

$$[P, \alpha f + \beta g] = \alpha\,[P, f] + \beta\,[P, g].$$

(d) Regla de Leibniz: para toda sección $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$[P, fg](\mathbf{u}) = [P, f](g\mathbf{u}) + f\,[P, g](\mathbf{u}).$$

Si $P \in \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, esta identidad se reduce a

$$[P, fg](\mathbf{u}) = g\,[P, f](\mathbf{u}) + f\,[P, g](\mathbf{u}).$$

(e) Si $c \in \mathbb{K}$ se considera como función constante, entonces

$$[P, c] = 0.$$

(f) El operador $P$ es $C^\infty(M)$-lineal si y sólo si

$$[P, f] = 0 \qquad \forall f \in C^\infty(M).$$

*Demostración.* Sea $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$.
(a) Se tiene

$$[\alpha P + \beta Q, f](\mathbf{u}) = (\alpha P + \beta Q)(f\mathbf{u}) - f(\alpha P + \beta Q)(\mathbf{u}) = \alpha(P(f\mathbf{u}) - fP(\mathbf{u})) + \beta(Q(f\mathbf{u}) - fQ(\mathbf{u})),$$

lo cual es $\alpha[P, f](\mathbf{u}) + \beta[Q, f](\mathbf{u})$.
(b) Por definición,

$$[hP, f](\mathbf{u}) = (hP)(f\mathbf{u}) - f(hP)(\mathbf{u}) = hP(f\mathbf{u}) - fhP(\mathbf{u}) = h\big(P(f\mathbf{u}) - fP(\mathbf{u})\big) = h\,[P, f](\mathbf{u}).$$

(c) Para $\alpha f + \beta g$,

$$[P, \alpha f + \beta g](\mathbf{u}) = P((\alpha f + \beta g)\mathbf{u}) - (\alpha f + \beta g)P(\mathbf{u}) = \alpha(P(f\mathbf{u}) - fP(\mathbf{u})) + \beta(P(g\mathbf{u}) - gP(\mathbf{u})).$$

(d) Para $fg$,

$$[P, fg](\mathbf{u}) = P(fg\,\mathbf{u}) - fgP(\mathbf{u}).$$

Sumamos y restamos $fP(g\mathbf{u})$ para obtener

$$[P, fg](\mathbf{u}) = \big(P(fg\mathbf{u}) - fP(g\mathbf{u})\big) + f\big(P(g\mathbf{u}) - gP(\mathbf{u})\big) = [P, f](g\mathbf{u}) + f\,[P, g](\mathbf{u}).$$

Si $P \in \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces $[P,f] \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ por definición. En particular, $[[P,f],g] = 0$, es decir,

$$[P,f](g\mathbf{u}) = g[P,f](\mathbf{u}).$$

Al sustituir esta igualdad se obtiene la fórmula para el caso de primer orden.
(e) Si $c$ es constante, entonces

$$[P,c](\mathbf{u}) = P(c\mathbf{u}) - cP(\mathbf{u}) = cP(\mathbf{u}) - cP(\mathbf{u}) = 0.$$

(f) Si $P$ es $C^\infty(M)$-lineal, entonces $P(f\mathbf{u}) = fP(\mathbf{u})$ y de aquí $[P,f] = 0$. Recíprocamente, si $[P,f] = 0$ para toda $f$, entonces

$$P(f\mathbf{u}) - fP(\mathbf{u}) = 0,$$

para toda sección $\mathbf{u}$, lo cual implica que $P$ es $C^\infty(M)$-lineal. □

**Proposición 8.1.7.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves. Para cada $f \in C^\infty(M)$ definimos

$$\operatorname{ad}(f)\colon \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \longrightarrow \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F}), \qquad \operatorname{ad}(f)(P) = [P,f].$$

Entonces $\operatorname{ad}(f)$ satisface las siguientes propiedades:

(a) $\mathbb{K}$-linealidad:

$$\operatorname{ad}(f)(\alpha P + \beta Q) = \alpha \operatorname{ad}(f)(P) + \beta \operatorname{ad}(f)(Q).$$

(b) $C^\infty(M)$-linealidad en el operador:

$$\operatorname{ad}(f)(hP + Q) = h \operatorname{ad}(f)(P) + \operatorname{ad}(f)(Q).$$

(c) $\mathbb{K}$-linealidad en la función:

$$\operatorname{ad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{ad}(f) + \beta \operatorname{ad}(g).$$

(d) Si $c$ es constante, entonces

$$\operatorname{ad}(c) = 0.$$

*Demostración.* (a) Se sigue de la propiedad (a) de la Proposición 8.1.6:

$$\operatorname{ad}(f)(\alpha P + \beta Q) = [\alpha P + \beta Q, f] = \alpha[P,f] + \beta[Q,f].$$

(b) Usando la propiedad (b) de la Proposición 8.1.6,

$$\operatorname{ad}(f)(hP + Q) = [hP + Q, f] = [hP,f] + [Q,f] = h[P,f] + \operatorname{ad}(f)(Q).$$

(c) Usando la propiedad (c) de la Proposición 8.1.6,

$$\operatorname{ad}(\alpha f + \beta g)(P) = [P, \alpha f + \beta g] = \alpha[P,f] + \beta[P,g].$$

(d) Si $c$ es constante, la propiedad (e) de la Proposición 8.1.6 implica

$$\mathrm{ad}(c)(P) = [P, c] = 0,$$

para todo $P \in \mathbf{Op}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. □

**Observación 8.1.8.** Las proposiciones anteriores implican que $\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ tiene estructura de $C^\infty(M)$-módulo.

Daremos algunos ejemplos sencillos de operadores diferenciales parciales para el caso euclidiano, para que el lector se familiarice con este concepto.

**Ejemplo 8.1.9.** Consideremos $M = \mathbb{R}^n$ y los haces triviales $\mathbf{E} = \mathbf{F} = \underline{\mathbb{R}}$ de rango 1.

(a) El operador que consiste en multiplicar por una función suave es el ejemplo más elemental de operador diferencial parcial. Sea $M_f$ definido por

$$(M_f u)(x) = f(x)u(x), \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Para cualesquiera $g, u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$[M_f, g](u) = M_f(gu) - g(M_f u) = f \cdot (gu) - g \cdot (fu) = 0.$$

En consecuencia, $[M_f, g] = 0$ para toda $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, y por lo tanto

$$M_f \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E}, \mathbf{F}).$$

(b) Consideremos ahora el operador derivada parcial $P = \partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Para $u, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$[\partial_i, f](u) = \partial_i(fu) - f\,\partial_i u.$$

Aplicando la regla del producto,

$$\partial_i(fu) = (\partial_i f)u + f\,\partial_i u,$$

de donde se obtiene

$$[\partial_i, f](u) = (\partial_i f)u.$$

Es decir, el conmutador con $f$ es simplemente multiplicación por la función $\partial_i f$, un operador de orden 0. Así, $[\partial_i, f] \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, y por definición

$$\partial_i \in \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E}, \mathbf{F}).$$

(c) Analicemos finalmente las derivadas parciales de segundo orden. Sea $P = \partial_i^2$. Para $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$[\partial_i^2, f](u) = \partial_i^2(fu) - f\,\partial_i^2 u.$$

Aplicando dos veces la regla del producto:

$$\partial_i^2(fu) = \partial_i\big((\partial_i f)u + f\partial_i u\big) = (\partial_i^2 f)u + 2(\partial_i f)\partial_i u + f\partial_i^2 u.$$

Al restar $f\partial_i^2 u$ se obtiene

$$[\partial_i^2, f](u) = (\partial_i^2 f)u + 2(\partial_i f)\partial_i u.$$

Si tomamos un segundo conmutador con otra función $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$[[\partial_i^2, f], g](u) = [M_{\partial_i^2 f} + 2(\partial_i f)\partial_i, g](u).$$

El primer término $(\partial_i^2 f)\mathrm{Id}$ conmuta con $g$, al ser una multiplicación por una función suave. Para el segundo,

$$[2(\partial_i f)\partial_i, g](u) = 2(\partial_i f)\big(\partial_i(gu) - g\partial_i u\big) = 2(\partial_i f)(\partial_i g)u,$$

que es multiplicación por una función suave, es decir, un operador de orden 0. De este modo, $[[\partial_i^2, f], g] \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, y $\partial_i^2 \in \mathbf{PDO}^{(2)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

El ejemplo de multiplicar por una función suave se generaliza como sigue:

**Ejemplo 8.1.10.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave (real o complejo). Fijada una función $f \in C^\infty(M)$, consideremos el operador

$$M_f \colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}), \qquad M_f(\mathbf{u}) := f\mathbf{u}.$$

Queremos ver que $M_f \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{E})$. Para toda función $g \in C^\infty(M)$ y toda sección $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$ se cumple

$$[M_f, g](\mathbf{u}) = M_f(g\mathbf{u}) - gM_f(\mathbf{u}) = f(g\mathbf{u}) - g(f\mathbf{u}) = (fg)\mathbf{u} - (gf)\mathbf{u} = (fg)\mathbf{u} - (fg)\mathbf{u} = 0.$$

Por lo tanto, $[M_f, g] = 0$ para toda $g \in C^\infty(M)$, lo que significa que

$$M_f \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{E}).$$

Otro ejemplo de operador diferencial parcial es el operador de Laplace–Beltrami en una variedad riemanniana:

**Ejemplo 8.1.11.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y consideremos el haz trivial $\mathbf{E} = \mathbf{F} = \underline{\mathbb{R}}$. El operador de Laplace–Beltrami se define como

$$\Delta_{\mathbf{g}} u := \operatorname{div}(\operatorname{grad} u), \qquad u \in C^\infty(M).$$

Mostraremos que $\Delta_{\mathbf{g}} \in \mathbf{PDO}^{(2)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ pero que $\Delta_{\mathbf{g}} \notin \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.
Para toda función $f \in C^\infty(M)$, por la Proposición 2.16.11,

$$\Delta_{\mathbf{g}}(fu) = f\Delta_{\mathbf{g}} u + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} + u\Delta_{\mathbf{g}} f,$$

y por lo tanto

$$[\Delta_{\mathbf{g}}, f](u) = \Delta_{\mathbf{g}}(fu) - f\Delta_{\mathbf{g}} u = 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} + (\Delta_{\mathbf{g}} f)u.$$

Sea ahora $h \in C^\infty(M)$. Por definición de conmutador, para toda $u \in C^\infty(M)$ se tiene

$$[[\Delta_{\mathbf{g}}, f], h](u) = [\Delta_{\mathbf{g}}, f](hu) - h[\Delta_{\mathbf{g}}, f](u).$$

Usando la identidad

$$[\Delta_{\mathbf{g}}, f](v) = 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} v\rangle_{\mathbf{g}} + (\Delta_{\mathbf{g}} f)\, v, \qquad v \in C^\infty(M),$$

obtenemos

$$[\Delta_{\mathbf{g}}, f](hu) = 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(hu)\rangle_{\mathbf{g}} + (\Delta_{\mathbf{g}} f) hu$$

y

$$[\Delta_{\mathbf{g}}, f](u) = 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} + (\Delta_{\mathbf{g}} f)\, u.$$

Por lo tanto

$$[[\Delta_{\mathbf{g}}, f], h](u) = \Big(2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(hu)\rangle_{\mathbf{g}} + (\Delta_{\mathbf{g}} f) hu\Big) - h\Big(2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} + (\Delta_{\mathbf{g}} f) u\Big)$$

$$= 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(hu)\rangle_{\mathbf{g}} + (\Delta_{\mathbf{g}} f) hu - 2h\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} - h(\Delta_{\mathbf{g}} f)\, u.$$

Ahora usamos la regla de Leibniz para el gradiente (Proposición 2.16.3):

$$\operatorname{grad}(hu) = h \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} h,$$

de modo que

$$\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(hu)\rangle_{\mathbf{g}} = \big\langle \operatorname{grad} f,\, h \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} h\big\rangle_{\mathbf{g}}$$

$$= h\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} + u\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle_{\mathbf{g}},$$

donde hemos usado la $C^\infty(M)$–bilinealidad del producto interno inducido por $\mathbf{g}$. Por consiguiente,

$$2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(hu)\rangle_{\mathbf{g}} = 2h\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} + 2u\,\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle_{\mathbf{g}}.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula de $[[\Delta_{\mathbf{g}}, f], h](u)$, tenemos

$$[[\Delta_{\mathbf{g}}, f], h](u) = \Big(2h\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} + 2u\,\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle_{\mathbf{g}} + (\Delta_{\mathbf{g}} f) hu\Big)$$

$$-\Big(2h\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} + h(\Delta_{\mathbf{g}} f)\, u\Big).$$

Ahora simplificamos término a término. Primero,

$$2h\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} - 2h\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u\rangle_{\mathbf{g}} = 0.$$

Luego, como la multiplicación de funciones es conmutativa,

$$(\Delta_{\mathbf{g}} f) hu - h(\Delta_{\mathbf{g}} f)\, u = 0.$$

Por lo tanto solo queda

$$[[\Delta_{\mathbf{g}}, f], h](u) = 2u\,\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle_{\mathbf{g}}.$$

E n otras palabras, para toda $u \in C^\infty(M)$ se cumple

$$[[\Delta_{\mathbf{g}}, f], h](u) = 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle_{\mathbf{g}}\, u,$$

es decir,

$$[[\Delta_{\mathbf{g}}, f], h] = M_{2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle_{\mathbf{g}}}.$$

Este resultado corresponde a multiplicación por la función suave $2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle_{\mathbf{g}}$, de modo que

$$[[\Delta_{\mathbf{g}}, f], h] \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \quad \text{para cualesquiera } f, h \in C^\infty(M).$$

Así,

$$[\Delta_{\mathbf{g}}, f] \in \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \quad \text{para toda } f \in C^\infty(M),$$

y en consecuencia

$$\Delta_{\mathbf{g}} \in \mathbf{PDO}^{(2)}(\mathbf{E}, \mathbf{F}).$$

Para ver que $\Delta_{\mathbf{g}} \notin \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, basta notar que si un operador pertenece a $\mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, entonces sus segundos conmutadores con funciones suaves serían nulos. Sin embargo, hemos obtenido

$$[[\Delta_{\mathbf{g}}, f], h] = M_{2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle_{\mathbf{g}}},$$

que no es el operador nulo en general. En consecuencia,

$$\Delta_{\mathbf{g}} \notin \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E}, \mathbf{F}).$$

El ejemplo anterior muestra que llamarles operadores diferenciales parciales de orden menor o igual a $m$ tiene sentido pues, si tenemos uno de orden menor o igual a $m$ no necesariamente implica que es de orden menor o igual a $m-1$. Más aún, si es de orden menor o igual a $m$, se puede demostrar que es de orden menor o igual a $m+1$ como se hace más adelante en el Lema 8.1.18.

La derivada covariante definida en un haz vectorial suave es otro ejemplo de operador diferencial parcial, en este caso de orden $\leq 1$:

**Proposición 8.1.12.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave sobre $M$. Si

$$\nabla\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(T^{(0,1)}(TM) \otimes \mathbf{E})$$

es una conexión en $\mathbf{E}$, entonces $\nabla \in \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E}, T^{(0,1)}(TM) \otimes \mathbf{E})$.

*Demostración.* Sean $f \in C^\infty(M)$ y $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$. Entonces por la Proposición 2.4.25,

$$[\nabla, f](\mathbf{u}) = \nabla(f\mathbf{u}) - f\nabla\mathbf{u} = df \otimes \mathbf{u} + f\nabla\mathbf{u} - f\nabla\mathbf{u} = df \otimes \mathbf{u}.$$

Definimos $M^{\otimes}_{df} \in \mathbf{Op}(\mathbf{E}, T^{(0,1)}(TM) \otimes \mathbf{E})$ dada por $M^{\otimes}_{df}(\mathbf{u}) = df \otimes \mathbf{u}$. Sea $g \in C^\infty(M)$, entonces

$$[M^{\otimes}_{df}, g](\mathbf{u}) = M^{\otimes}_{df}(g\mathbf{u}) - gM^{\otimes}_{df}(\mathbf{u}) = df \otimes (g\mathbf{u}) - g(df \otimes \mathbf{u}) = g(df \otimes \mathbf{u}) - g(df \otimes \mathbf{u}) = 0,$$

por lo que $M_{df}^{\otimes} \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E}, T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ y en consecuencia $\nabla \in \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E}, T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E})$. □

Para familiarizarnos más con este concepto, estudiaremos cómo se ven los operadores diferenciales parciales de orden 1 en $\underline{\mathbb{R}}$ como haz vectorial sobre $\mathbb{R}^n$.

**Ejemplo 8.1.13.** Consideremos nuevamente el haz trivial $\underline{\mathbb{R}}$ sobre $\mathbb{R}^n$. Como vimos anteriormente, las secciones de $\underline{\mathbb{R}}$ son precisamente las funciones de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Queremos encontrar $\mathbf{PDO}^{(1)}(\underline{\mathbb{R}},\underline{\mathbb{R}})$. Sean $P \in \mathbf{PDO}^{(1)}(\underline{\mathbb{R}},\underline{\mathbb{R}})$ y $u, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$[P,f]u = \sigma(f)u \quad \text{para alguna } \sigma(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

pues $[P,f]$ es $C^\infty(M)$-lineal ya que $P \in \mathbf{PDO}^{(1)}(\underline{\mathbb{R}},\underline{\mathbb{R}})$ y podemos tomar $\sigma(f) = [P,f](1)$. Por otro lado, para cualesquiera $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\sigma(fg)u = [P,fg]u = [P,f](gu) + f([P,g]u) = \sigma(f)gu + f\sigma(g)u.$$

Por lo tanto $\sigma(fg) = \sigma(f)g + f\sigma(g)$, por lo que el mapeo $\sigma$ es una derivación en $C^\infty(M)$, así que existe un campo vectorial suave $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\sigma(f) = \mathbf{X}\cdot f, \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Entonces para toda $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$P(u) = P(u\cdot 1) = [P,u]\cdot 1 + u\cdot P(1) = \mathbf{X}\cdot u + P(1)\cdot u,$$

donde $P(1) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Los operadores de orden 0 se pueden caracterizar como muestra el siguiente lema:

**Lema 8.1.14.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves. Si $P \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces existe una sección $\mathbf{A} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}))$ tal que

$$P(\mathbf{u})(p) = \mathbf{A}(p)(\mathbf{u}(p)), \qquad \forall \mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E}), p \in M.$$

*Demostración.* Por la definición de operador diferencial parcial de orden 0, el mapeo $P\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{F})$ es $C^\infty(M)$-lineal. La Proposición 1.7.31 identifica los mapeos con esta propiedad con las secciones de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$: existe una única sección $\mathbf{A}$ tal que $P(\mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{u})$. Evaluando esta igualdad en $p \in M$ se obtiene $P(\mathbf{u})(p) = \mathbf{A}(p)(\mathbf{u}(p))$. □

Como consecuencia de este lema tenemos que los operadores diferenciales parciales son locales.

**Proposición 8.1.15.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves. Cualquier $L \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es un operador local, es decir, $\forall \mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$\mathrm{supp}(L\mathbf{u}) \subseteq \mathrm{supp}(\mathbf{u}).$$

*Demostración.* El caso $m = 0$ se sigue del Lema 8.1.14 pues, si $\mathbf{u}(p) = 0$ entonces $L(\mathbf{u})(p) = \mathbf{A}(p)(\mathbf{u}(p)) = \mathbf{A}(p)(0) = 0$, por lo que

$$\operatorname{supp}(L\mathbf{u}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{u}).$$

Supongamos que se cumple para $m \geq 0$ y sea $L \in \mathbf{PDO}^{(m+1)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.
Para cualquier $f \in C^\infty(M)$ tenemos que

$$L(f\mathbf{u}) = [L, f]\mathbf{u} + fL(\mathbf{u}).$$

Como $[L, f] \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, deducimos por la hipótesis de inducción que

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} L(f\mathbf{u}) &\subseteq \operatorname{supp}([L, f]\mathbf{u}) \cup \operatorname{supp}(fL(\mathbf{u})) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{u}) \cup (\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(L\mathbf{u})) \\ &\subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{u}) \cup \operatorname{supp}(f), \quad \forall f \in C^\infty(M). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Bajo estas hipótesis veremos que $\operatorname{supp}(L\mathbf{u}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{u})$. Procedamos por contradicción y supongamos que existe $p \in M$ tal que $p \in \operatorname{supp}(L\mathbf{u})$ pero $p \notin \operatorname{supp}(\mathbf{u})$. Como $\operatorname{supp}(\mathbf{u})$ es cerrado y $M$ es un espacio topológico regular (en realidad es metrizable), existe $U \subseteq M$ abierto tal que $p \in U$ y $\overline{U} \cap \operatorname{supp}(\mathbf{u}) = \varnothing$, es decir, $\operatorname{supp}(\mathbf{u}) \subseteq M \setminus \overline{U}$, donde $M \setminus \overline{U}$ es abierto. Por la Proposición 1.3.6, existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $f \equiv 0$ en $\overline{U}$ y $f \equiv 1$ en $\operatorname{supp}(\mathbf{u})$. La identidad $f\mathbf{u} = \mathbf{u}$ se cumple en todo $M$, pues $f \equiv 1$ en $\operatorname{supp}(\mathbf{u})$, y si tenemos un punto $x$ fuera de $\operatorname{supp}(\mathbf{u})$, entonces $\mathbf{u}(x) = 0 = f(x)\mathbf{u}(x)$. Por lo tanto

$$\operatorname{supp}(L\mathbf{u}) = \operatorname{supp}(L(f\mathbf{u})),$$

lo cual nos permite concluir que $p \in \operatorname{supp}(L(f\mathbf{u}))$ ya que habíamos tomado $p \in \operatorname{supp}(L\mathbf{u})$, pero esto es imposible pues (8.1) nos diría que $p \in \operatorname{supp}(\mathbf{u}) \cup \operatorname{supp}(f)$, sin embargo $p \notin \operatorname{supp}(\mathbf{u})$ y $p \notin \operatorname{supp}(f)$ (donde esto último se da ya que $f \equiv 0$ en $U \subseteq \overline{U}$, por lo que $U \cap \{x \in M \mid f(x) \neq 0\} = \varnothing$, y así $p \notin \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}} = \operatorname{supp}(f)$). La contradicción viene de suponer que $p \notin \operatorname{supp}(\mathbf{u})$, por lo que $\operatorname{supp}(L\mathbf{u}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{u})$, lo cual completa la prueba. □

**Observación 8.1.16.** Si $L \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$ son tales que existe $U \subseteq M$ abierto tal que $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$ en $U$, si definimos $\mathbf{w} := \mathbf{u} - \mathbf{v}$, entonces esto muestra que $U \cap \operatorname{supp}(\mathbf{w}) = \varnothing$, por lo que la Proposición 8.1.15 implica que $\operatorname{supp}(L\mathbf{w}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{w})$ y por consiguiente $U \cap \operatorname{supp}(L\mathbf{w}) = \varnothing$, de donde concluimos que $L\mathbf{u} - L\mathbf{v} = L\mathbf{w} = 0$ en $U$, es decir, $L\mathbf{u}$ y $L\mathbf{v}$ coinciden en $U$.
Esto justifica el uso de la palabra «local» en dicha proposición, pues nos dice que los valores que toma un operador diferencial parcial están totalmente caracterizados por los valores que toma la sección a la que se le aplica dicho operador en un abierto de $M$.

Mostraremos que la composición de operadores diferenciales parciales es nuevamente un operador diferencial parcial. Para ello necesitamos los siguientes lemas:

**Lema 8.1.17.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Sean $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ haces vectoriales suaves sobre $M$, $f \in C^\infty(M)$ y $P\colon \Gamma(\mathbf{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{G})$, $Q\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{F})$ operadores lineales. Entonces, para todo $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$[P \circ Q, f](\mathbf{u}) = [P, f]\big(Q(\mathbf{u})\big) + P\big([Q, f](\mathbf{u})\big).$$

*Demostración.* Por definición,

$$[P\circ Q, f](\mathbf{u}) = (P\circ Q)(f\mathbf{u}) - f(P\circ Q)(\mathbf{u}) = P\big(Q(f\mathbf{u})\big) - fP\big(Q(\mathbf{u})\big).$$

Sumemos y restemos $P\big(fQ(\mathbf{u})\big)$:

$$\begin{aligned}[P\circ Q, f](\mathbf{u}) &= \Big(P\big(Q(f\mathbf{u})\big) - P\big(fQ(\mathbf{u})\big)\Big) + \Big(P\big(fQ(\mathbf{u})\big) - fP\big(Q(\mathbf{u})\big)\Big)\\ &= P\big(Q(f\mathbf{u}) - fQ(\mathbf{u})\big) + \big(P(fQ(\mathbf{u})) - fP(Q(\mathbf{u}))\big)\\ &= P\big([Q,f](\mathbf{u})\big) + [P,f]\big(Q(\mathbf{u})\big).\end{aligned}$$

□

Además notemos que si $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ esto debería interpretarse como que $P$ es un operador diferencial parcial de orden menor o igual a $m$. Esto nos dice que si un operador diferencial parcial tiene orden menor o igual a $m$, entonces tiene orden menor o igual a $m+1$, lo cual justifica la elección de esta terminología al inicio.

**Lema 8.1.18.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves y sea $m \geq 0$. Entonces

$$\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \subseteq \mathbf{PDO}^{(m+1)}(\mathbf{E},\mathbf{F}).$$

*Demostración.* La prueba se hará por inducción sobre $m$. Si $m = 0$ y $P \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces para toda $f \in C^\infty(M)$ $[P,f] = 0$, por lo que de acuerdo a la definición recursiva de los operadores diferenciales parciales, tenemos que $[P,f] = 0 \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Supongamos por hipótesis de inducción que $\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \subseteq \mathbf{PDO}^{(m+1)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Si $P \in \mathbf{PDO}^{(m+1)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces para toda $f \in C^\infty(M)$, $[P,f] \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \subseteq \mathbf{PDO}^{(m+1)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, por lo que $[P,f] \in \mathbf{PDO}^{(m+1)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ $\forall f \in C^\infty(M)$. Esto nos permite concluir que $P \in \mathbf{PDO}^{(m+2)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. □

Veamos ahora cómo se comportan respecto de la composición.

**Proposición 8.1.19.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{G}$ haces vectoriales suaves reales o complejos sobre $M$. Si $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ y $Q \in \mathbf{PDO}^{(n)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces $P\circ Q \in \mathbf{PDO}^{(m+n)}(\mathbf{E},\mathbf{G})$.

*Demostración.* Sea $k = m+n$. Procedemos por inducción sobre $k$.
Para el caso base $k = 0$ tenemos $m = n = 0$, de modo que $P, Q$ son $C^\infty(M)$–lineales, y su composición también lo es. Por lo tanto $P\circ Q \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E},\mathbf{G})$.
Supongamos ahora como hipótesis de inducción que el resultado se cumple para cualesquiera $m,n \geq 0$ tales que $m+n = k$, es decir, si $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ y $Q \in \mathbf{PDO}^{(n)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ con $m+n = k$, entonces $P\circ Q \in \mathbf{PDO}^{(k)}(\mathbf{E},\mathbf{G})$.
Debemos demostrar que el resultado se cumple para cualesquiera $m,n \geq 0$ con $m+n = k+1$.
Sean entonces $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ y $Q \in \mathbf{PDO}^{(n)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ con $m+n = k+1$. Para $f \in C^\infty(M)$, el Lema 8.1.17 afirma que

$$[P\circ Q, f] = [P,f]\circ Q + P\circ [Q,f].$$

Si $m = 0$, la $C^\infty(M)$–linealidad de $P$ da $[P,f] = 0$; si $m \geq 1$, entonces $[P,f] \in \mathbf{PDO}^{(m-1)}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ y $(m-1)+n = k$, por lo que la hipótesis de inducción da $[P,f]\circ Q \in \mathbf{PDO}^{(k)}(\mathbf{E},\mathbf{G})$. Para el segundo sumando, si $n = 0$ se tiene $[Q,f] = 0$; si $n \geq 1$, entonces $[Q,f] \in \mathbf{PDO}^{(n-1)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $m+(n-1) = k$, de modo que $P\circ[Q,f] \in \mathbf{PDO}^{(k)}(\mathbf{E},\mathbf{G})$

por la misma hipótesis.
En consecuencia $[P \circ Q, f] \in \mathbf{PDO}^{(k)}(\mathbf{E},\mathbf{G})$ para todo $f \in C^\infty(M)$. Por la definición recursiva se concluye que $P \circ Q \in \mathbf{PDO}^{(k+1)}(\mathbf{E},\mathbf{G}) = \mathbf{PDO}^{(m+n)}(\mathbf{E},\mathbf{G})$. □

Como corolario de los resultados anteriores, tenemos que los operadores diferenciales más comunes en $\mathbb{R}^n$ definidos en términos de derivadas parciales son operadores diferenciales parciales en el sentido que hemos definido.

**Corolario 8.1.20.** El operador

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

con $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, es un operador diferencial parcial de orden menor o igual a $m$.

*Demostración.* De acuerdo al Ejemplo 8.1.9, cada derivada parcial $\partial_i$ es un operador diferencial parcial de primer orden, por lo que la Proposición 8.1.19 nos asegura que $L$ es un operador diferencial parcial de orden $\leq m$, ya que multiplicar por una función suave no altera el orden del **PDO**. □

Veamos qué sucede cuando permutamos el operador ad:

**Lema 8.1.21.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves sobre $M$. Entonces para cualesquiera $P \in \mathbf{PDO}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$

$$(\mathrm{ad}(f) \circ \mathrm{ad}(g))P = (\mathrm{ad}(g) \circ \mathrm{ad}(f))P.$$

*Demostración.* Sean $P \in \mathbf{PDO}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, $f, g \in C^\infty(M)$ y $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$. Entonces

$$(\mathrm{ad}(f) \circ \mathrm{ad}(g))(P)(\mathbf{u}) = [[P,g],f](\mathbf{u}) = [P,g](f\mathbf{u}) - f[P,g](\mathbf{u}) = P(gfu) - gP(f\mathbf{u}) - fP(g\mathbf{u}) + fgP(\mathbf{u}).$$

Por otro lado,

$$(\mathrm{ad}(g) \circ \mathrm{ad}(f))(P)(\mathbf{u}) = [[P,f],g](\mathbf{u}) = [P,f](g\mathbf{u}) - g[P,f](\mathbf{u}) = P(fgu) - fP(g\mathbf{u}) - gP(f\mathbf{u}) + gfP(\mathbf{u}).$$

Los términos con el mismo color son iguales, pues podemos permutar $f$ con $g$, por lo que $(\mathrm{ad}(f) \circ \mathrm{ad}(g))P = (\mathrm{ad}(g) \circ \mathrm{ad}(f))P$.

□

**Observación 8.1.22.** El lema anterior nos dice que si $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces para cualesquiera $f_1,\ldots,f_m \in C^\infty(M)$, el homomorfismo de haces

$$\mathrm{ad}(f_1) \circ \mathrm{ad}(f_2) \cdots \circ \mathrm{ad}(f_m)P$$

no cambia al permutar $f_1,\ldots,f_m$.

A continuación caracterizaremos la iteración de los conmutadores a partir de la igualdad de los respectivos

diferenciales de las funciones, para ello demostraremos primero un lema.

**Lema 8.1.23.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Para cada $p \in M$, consideremos los ideales del anillo $C^\infty_p(M)$,

$$\mathbf{m}_p = \{[f] \in C^\infty_p(M) \mid f(p) = 0\}, \qquad \mathcal{I}_p := \{[f] \in C^\infty_p(M) \mid f(p) = 0,\ df(p) = 0\}.$$

Entonces $\mathcal{I}_p = \mathbf{m}_p^2$, es decir, cualquier función suave $f$ que se anule en $p$ junto con su diferencial en $p$ puede escribirse, en una vecindad de $p$, como

$$f = \sum_{j=1}^{k} g_j h_j, \qquad g_j, h_j \in \mathbf{m}_p.$$

*Demostración.* Sea $p \in M$. Primero observemos que $\mathbf{m}_p^2 \subseteq \mathcal{I}_p$. Si $g, h \in \mathbf{m}_p$, entonces $g(p) = h(p) = 0$, y por la regla del producto se tiene

$$d(gh)(p) = g(p)\,dh(p) + h(p)\,dg(p) = 0.$$

Por lo tanto $gh \in \mathcal{I}_p$, y toda combinación finita de tales productos pertenece a $\mathcal{I}_p$.
Sea ahora $f \in \mathcal{I}_p$, de modo que $f(p) = 0$ y $df(p) = 0$. Tomemos una carta suave $(U, \varphi)$ alrededor de $p$, elegida de manera que $\varphi(U)$ es convexo, $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, y escribamos

$$\varphi = (x^1, \ldots, x^n).$$

Consideremos la representación coordenada de $f$ dada por

$$\tilde{f} := f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Las condiciones $f(p) = 0$ y $df(p) = 0$ equivalen a

$$\tilde{f}(0) = 0, \qquad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(0) = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Por el Teorema de Taylor (Teorema 1.4.9) para $k = 1$, aplicado en el punto $a = 0$, se tiene

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(0)\, x^i + \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!}\, x^\alpha \int_0^1 (1-t) D^\alpha \tilde{f}(tx)\, dt.$$

Los dos primeros términos se anulan, por lo que, al pasar de la notación de multiíndices a la notación usual de Leibniz, obtenemos

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j R_{ij}(x),$$

donde

$$R_{ij}(x) := \int_0^1 (1-t)\, \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^i \partial x^j}(tx)\, dt.$$

Cada función $R_{ij}$ es de clase $C^\infty$ en una vecindad de 0 porque $\tilde{f}$ lo es.

Definimos

$$\tilde{g}_i(x) := \sum_{j=1}^{n} x^j R_{ij}(x),$$

de modo que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i \tilde{g}_i(x).$$

Obsérvese que, para cada $i$,

$$\tilde{g}_i(0) = \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot R_{ij}(0) = 0.$$

Sea ahora $g_i := \tilde{g}_i \circ \varphi \in C^\infty(U)$. Entonces, para todo $q \in U$ se cumple

$$f(q) = \sum_{i=1}^{n} x^i(q)\, g_i(q).$$

Podemos extender $x^i, g_i$ suavemente a $M$ usando el Teorema 1.3.7 de forma que se dé esta igualdad en una vecindad $W \subseteq U$ de $p$.
Por lo tanto

$$[f] = \left[\sum_{i=1}^{n} x^i g_i\right] = \sum_{i=1}^{n} [x^i][g_i]$$

como gérmenes de funciones. Dado que $x^i(p) = 0$ y $g_i(p) = \tilde{g}_i(0) = 0$, se tiene $[x^i], [g_i] \in \mathbf{m}_p$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, y por lo tanto

$$[f] \in \mathbf{m}_p^2.$$

Hemos probado que $\mathcal{I}_p \subseteq \mathbf{m}_p^2$, y junto con la inclusión opuesta obtenemos

$$\mathcal{I}_p = \mathbf{m}_p^2.$$

□

**Definición 8.1.24.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Para $p \in M$ y $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(M)$ definimos

$$\mathrm{ad}(f_1) \cdots \mathrm{ad}(f_m)(P)|_p \colon \mathbf{E}_p \longrightarrow \mathbf{F}_p$$

mediante

$$\big(\mathrm{ad}(f_1) \cdots \mathrm{ad}(f_m)(P)|_p\big)(v) := \big(\mathrm{ad}(f_1) \cdots \mathrm{ad}(f_m)(P)\big)(\sigma)(p),$$

donde $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$ satisface $\sigma(p) = v$. Tal sección existe por el Lema 1.7.28, y el valor no depende de la elección de $\sigma$ porque el operador iterado tiene orden cero.

**Proposición 8.1.25.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves y sea $m \geq 1$. Sean además $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, $f_i, g_i \in C^\infty(M)$ con $i \in \{1, \dots, m\}$ tales que para $p \in M$,

$$df_i(p) = dg_i(p) \in T_p^* M \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

entonces

$$\operatorname{ad}(f_1)\circ\operatorname{ad}(f_2)\cdots\circ\operatorname{ad}(f_m)P|_p = \operatorname{ad}(g_1)\circ\operatorname{ad}(g_2)\cdots\circ\operatorname{ad}(g_m)P|_p.$$

*Demostración.* Por la Proposición 8.1.7, $\operatorname{ad}(c)=0$ para toda función constante $c$. Podemos reemplazar cada $g_i$ por

$$\widehat{g_i} := g_i + f_i(p) - g_i(p).$$

Este reemplazo no altera $\operatorname{ad}(g_i)$ y asegura simultáneamente

$$f_i(p) = \widehat{g_i}(p), \qquad df_i(p) = d\widehat{g_i}(p).$$

Volvemos a escribir $g_i$ en lugar de $\widehat{g_i}$ y ponemos $\varphi_i := f_i - g_i$. Entonces

$$\varphi_i(p) = 0, \qquad d\varphi_i(p) = 0.$$

Por el Lema 8.1.23, el germen de $\varphi_i$ pertenece a $\mathbf{m}_p^2$.
Sea $Q \in \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y sea $\varphi \in C^\infty(M)$ con $\varphi(p)=0$ y $d\varphi(p)=0$. El mismo lema proporciona, en una vecindad de $p$, funciones $\alpha_\nu, \beta_\nu$ tales que

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{q} \alpha_\nu\beta_\nu, \qquad \alpha_\nu(p)=\beta_\nu(p)=0.$$

El Teorema 1.3.7 permite elegir representantes globales de esos gérmenes. Por la Observación 8.1.16, la igualdad en una vecindad de $p$ basta para calcular el valor en $p$. La regla de Leibniz de la Proposición 8.1.6 da

$$\operatorname{ad}(\varphi)(Q) = \sum_{\nu=1}^{q} \Big(\operatorname{ad}(\alpha_\nu)(Q)\circ M_{\beta_\nu} + M_{\alpha_\nu}\circ\operatorname{ad}(\beta_\nu)(Q)\Big), \tag{8.2}$$

donde $M_h$ denota multiplicación por $h$. Puesto que $Q$ tiene orden a lo sumo uno, los operadores $\operatorname{ad}(\alpha_\nu)(Q)$ y $\operatorname{ad}(\beta_\nu)(Q)$ tienen orden cero. Si $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$, al evaluar (8.2) en $p$ obtenemos

$$\big(\operatorname{ad}(\alpha_\nu)(Q)\big)(\beta_\nu\sigma)(p) = 0, \qquad \alpha_\nu(p)\big(\operatorname{ad}(\beta_\nu)(Q)\sigma\big)(p) = 0.$$

Por tanto,

$$\operatorname{ad}(\varphi)(Q)|_p = 0.$$

Para $r \in \{0,\dots,m\}$ definimos

$$T_r := \operatorname{ad}(g_1)\cdots\operatorname{ad}(g_r)\operatorname{ad}(f_{r+1})\cdots\operatorname{ad}(f_m)(P),$$

con la convención de que un producto vacío es la identidad, y para $r \in \{1,\dots,m\}$ ponemos

$$Q_r := \operatorname{ad}(g_1)\cdots\operatorname{ad}(g_{r-1})\operatorname{ad}(f_{r+1})\cdots\operatorname{ad}(f_m)(P).$$

Aquí se han aplicado exactamente $m-1$ conmutadores a un operador de orden a lo sumo $m$, de modo que $Q_r$ tiene orden a lo sumo uno. Además, los operadores $\operatorname{ad}(h)$ conmutan entre sí por el Lema 8.1.21. Usando

también la linealidad de la Proposición 8.1.7,

$$T_{r-1} - T_r = \mathrm{ad}(f_r - g_r)(Q_r) = \mathrm{ad}(\varphi_r)(Q_r).$$

La igualdad $\mathrm{ad}(\varphi)(Q)|_p = 0$, aplicada a $\varphi = \varphi_r$ y $Q = Q_r$, muestra que $(T_{r-1} - T_r)|_p = 0$ para todo $r$. Al sumar telescópicamente,

$$(T_0 - T_m)|_p = \sum_{r=1}^{m} (T_{r-1} - T_r)|_p = 0.$$

Como $T_0$ y $T_m$ son, respectivamente, los dos conmutadores iterados del enunciado, queda demostrada la igualdad requerida.

□

Caracterizaremos a los operadores diferenciales parciales entre los haces vectoriales triviales $\underline{\mathbb{K}}^p$ y $\underline{\mathbb{K}}^q$ de manera explícita en términos de sus coordenadas locales, lo cual nos permitirá tener una mejor idea de cómo se ve un operador diferencial parcial en general.

Los ideales del Lema 8.1.23 y el uso del teorema de Taylor en su prueba, nos dan a entender que dichos ideales son importantes a la hora de caracterizar a las funciones en términos de sus derivadas. Al igual que el haz cotangente captura la información de las primeras derivadas de las funciones suaves, existen haces llamados *haces de jets* que guardan la información de las derivadas de orden superior de una función. Introducir estos haces y estudiarlos facilitará caracterizar los operadores diferenciales parciales de manera local y trabajar con conceptos relacionados a ellos de manera tanto intrínseca como local.

**Definición 8.1.26.** (Jets de orden $m$ de funciones suaves) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $p \in M$. Denotemos por $C^\infty_p(M)$ el anillo de germinales de funciones suaves en $p$, y por

$$\mathbf{m}_p = \{[f] \in C^\infty_p(M) \mid f(p) = 0\}$$

que es un ideal maximal.
Para $m \geq 0$ definimos la potencia

$$\mathbf{m}_p^{m+1} := \left\langle [f_1]\cdots[f_{m+1}] \mid [f_i] \in \mathbf{m}_p,\ i = 1,\ldots,m+1 \right\rangle \subset C^\infty_p(M).$$

El *espacio de jets de orden $m$ de funciones suaves en $p$* se define como el espacio vectorial cociente

$$J^m_p(M) = C^\infty_p(M) \big/ \mathbf{m}_p^{m+1}.$$

Para $[f] \in C^\infty_p(M)$, denotamos su clase en $J^m_p(M)$ por

$$j^m_p f,$$

y la llamamos el *jet de orden $m$* de $f$ en $p$.

Esta definición se puede caracterizar en términos de derivadas, lo cual muestra la importancia de los jets.

**Lema 8.1.27.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Para cada $p \in M$, consideremos los subconjuntos del anillo $C_p^\infty(M)$

$$\mathcal{I}_p^{(m)} := \{[f] \in C_p^\infty(M) \mid D^\alpha f(p) = 0 \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}, \qquad \mathbf{m}_p^{m+1} := \langle [f_1]\cdots[f_{m+1}] \mid [f_i] \in \mathbf{m}_p \rangle.$$

Entonces $\mathcal{I}_p^{(m)} = \mathbf{m}_p^{m+1}$.

*Demostración.* Sea $p \in M$. Primero veamos que $\mathbf{m}_p^{m+1} \subseteq \mathcal{I}_p^{(m)}$. Si

$$[f] = [g_1]\cdots[g_{m+1}], \qquad [g_i] \in \mathbf{m}_p,$$

entonces $g_i(p) = 0$ para toda $i \in \{1,\ldots,m+1\}$. Para cualquier derivada de orden $|\alpha| \leq m$, la regla de Leibniz de la Proposición 1.1.18 da

$$D^\alpha(g_1\cdots g_{m+1})(p) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{m+1}=\alpha} \binom{\alpha}{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}} D^{\alpha_1} g_1(p)\cdots D^{\alpha_{m+1}} g_{m+1}(p),$$

donde

$$\binom{\alpha}{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}} = \frac{\alpha!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{m+1}!}$$

es el coeficiente multinomial asociado a los multiíndices $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$. Dado que $|\alpha| \leq m$, en toda tupla $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}$ con suma $\alpha$ al menos uno de los multiíndices es cero. Esto implica que en cada término de la regla de Leibniz queda al menos un factor $g_i(p)$ sin derivar; como $g_i(p) = 0$, todos los sumandos se anulan. Por lo tanto,

$$D^\alpha(g_1\cdots g_{m+1})(p) = 0, \qquad \forall\, |\alpha| \leq m,$$

lo cual muestra que $[f] \in \mathcal{I}_p^{(m)}$.
Sea ahora $[f] \in \mathcal{I}_p^{(m)}$, de modo que

$$D^\alpha f(p) = 0, \qquad \forall |\alpha| \leq m.$$

Tomemos una carta suave $(U, \varphi)$ alrededor de $p$, con $\varphi(U)$ convexo y $\varphi(p) = 0$, y escribamos

$$\varphi = (x^1,\ldots,x^n).$$

Sea

$$\tilde{f} := f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Entonces

$$D^\alpha \tilde{f}(0) = 0, \qquad \forall |\alpha| \leq m.$$

Por el Teorema de Taylor (Teorema 1.4.9) para $k = m$ en el punto 0, se obtiene

$$\tilde{f}(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{D^\alpha \tilde{f}(0)}{\alpha!} x^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{m+1}{\alpha!} x^\alpha \int_0^1 (1-t)^m D^\alpha \tilde{f}(tx)\, dt.$$

El primer sumando se anula por hipótesis, por lo que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{|\alpha|=m+1} x^\alpha \, \tilde{g}_\alpha(x),$$

donde

$$\tilde{g}_\alpha(x) := \frac{m+1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^m \, D^\alpha \tilde{f}(tx)\, dt,$$

y cada $\tilde{g}_\alpha$ es de clase $C^\infty$ en una vecindad de 0.
Sea $g_\alpha := \tilde{g}_\alpha \circ \varphi \in C^\infty(U)$. Entonces, para todo $q \in U$,

$$f(q) = \sum_{|\alpha|=m+1} x^\alpha(q)\, g_\alpha(q).$$

Usando el Teorema 1.3.7, extendemos $x^i$ y $g_\alpha$ a funciones suaves globales sin modificar esta igualdad en una vecindad $W \subseteq U$ de $p$.
Así,

$$[f] = \left[ \sum_{|\alpha|=m+1} x^\alpha g_\alpha \right] = \sum_{|\alpha|=m+1} [x^\alpha][g_\alpha] \quad \text{en } C^\infty_p(M).$$

Obsérvese que si $|\alpha| = m+1$, entonces

$$x^\alpha = (x^1)^{\alpha_1} \cdots (x^n)^{\alpha_n}$$

es un producto de exactamente $m+1$ funciones coordenadas, todas ellas en $\mathbf{m}_p$. Por lo tanto,

$$[x^\alpha] \in \mathbf{m}_p^{m+1}.$$

Finalmente, dado que $\mathbf{m}_p^{m+1}$ es un ideal de $C^\infty_p(M)$, multiplicar un elemento de $\mathbf{m}_p^{m+1}$ por cualquier germinal $[g_\alpha]$ produce nuevamente un elemento de $\mathbf{m}_p^{m+1}$. De aquí se concluye que

$$[f] \in \mathbf{m}_p^{m+1}.$$

Esto prueba que $\mathcal{I}_p^{(m)} \subseteq \mathbf{m}_p^{m+1}$, y junto con la inclusión opuesta obtenemos

$$\mathcal{I}_p^{(m)} = \mathbf{m}_p^{m+1}.$$

□

Esto nos permite caracterizar los jets en un punto dado mediante derivadas y ver de que dimensión son las fibras correspondientes.

**Corolario 8.1.28.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $p \in M$ y sea $m \geq 0$. Fijemos una carta local centrada en $p$ y escribamos $D^\alpha$ para las derivadas en esas coordenadas. Entonces, para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$ se tiene

$$j^m_p f = j^m_p g \iff D^\alpha f(p) = D^\alpha g(p), \qquad \forall\, |\alpha| \leq m.$$

En particular, la carta elegida determina un isomorfismo entre el espacio de jets $J^m_p(M)$ y el espacio vectorial

$$\mathbb{K}^N, \qquad N := \binom{n+m}{m},$$

mediante el mapeo

$$J^m_p(M) \longrightarrow \mathbb{K}^N, \qquad j^m_p f \longmapsto \left(D^\alpha f(p)\right)_{|\alpha|\leq m}.$$

Bajo esta identificación, $\dim J^m_p(M) = \binom{n+m}{m}$.

*Demostración.* Por definición, $j^m_p f = j^m_p g$ si y sólo si los gérmenes $[f]$ y $[g]$ satisfacen

$$[f]-[g] \in \mathbf{m}_p^{m+1}.$$

Por el Lema 8.1.27, $\mathbf{m}_p^{m+1} = \mathcal{I}_p^{(m)}$, es decir,

$$[f]-[g] \in \mathcal{I}_p^{(m)} \quad \Longleftrightarrow \quad D^\alpha(f-g)(p) = 0,\ \forall\, |\alpha| \leq m.$$

Esto equivale a

$$D^\alpha f(p) = D^\alpha g(p), \qquad \forall\, |\alpha| \leq m,$$

lo cual prueba la primera afirmación.
Para ver el isomorfismo, usemos la carta suave $(U,\varphi)$ fijada en el enunciado, con $\varphi(p) = 0$. Definimos

$$\Psi\colon J^m_p(M) \longrightarrow \mathbb{K}^N, \qquad \Psi\left(j^m_p f\right) = \left(D^\alpha f(p)\right)_{|\alpha|\leq m}$$

está bien definido por el criterio anterior: si $j^m_p f = j^m_p g$, entonces $D^\alpha f(p) = D^\alpha g(p)$ para todo $|\alpha| \leq m$. Además es lineal por la linealidad de la derivada.
Para ver que $\Psi$ es inyectiva, tenemos por el Lema 8.1.27:

$$j^m_p f = j^m_p 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [f] \in \mathbf{m}_p^{m+1} \quad \Longleftrightarrow \quad D^\alpha f(p) = 0,\ \forall |\alpha| \leq m \quad \Longleftrightarrow \Psi\left(j^m_p f\right) = 0.$$

Para ver que $\Psi$ es suprayectiva, dada una colección de números $\{a_\alpha\}_{|\alpha|\leq m}$ consideremos el polinomio

$$P(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{a_\alpha}{\alpha!}\, x^\alpha,$$

que satisface $D^\alpha P(0) = a_\alpha$ para todo multiíndice $|\alpha| \leq m$. Definimos $f := P \circ \varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{K}$. Como $p \in U$ y $f \in C^\infty(U)$, por el Teorema 1.3.7 existe $W \subseteq M$ abierto tal que $p \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$ y existe $\widetilde{f} \in C^\infty(M)$ tal que $\widetilde{f}\restriction_W = f$. Como $D^\alpha f(p) = D^\alpha(f\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(p)} = D^\alpha P(0)$ y $D^\alpha \widetilde{f}(p) = D^\alpha f(p)$, entonces

$$\left(D^\alpha \widetilde{f}(p)\right)_{|\alpha|\leq m} = (a_\alpha)_{|\alpha|\leq m}.$$

con $\widetilde{f} \in C^\infty(M)$.
Por lo tanto $\Psi$ es un isomorfismo lineal y la dimensión de $J^m_p(M)$ es el número de multiíndices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con

$|\alpha| \le m$, esto es,

$$\dim J^m_p(M) = \binom{n+m}{m}.$$

□

Para agarrar más práctica con los operadores diferenciales entre haces vectoriales, extenderemos el concepto de derivada parcial a secciones locales de haces vectoriales suaves.

**Lema 8.1.29.** Sean $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $r$ sobre una variedad suave $M$ con o sin frontera, y sea $(U,\varphi)$ una carta con coordenadas locales $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$ tal que $U$ es el dominio de una trivialización local

$$\tau_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E}\restriction_U \longrightarrow U\times\mathbb{K}^r.$$

Para cada multiíndice $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ definimos $D^\beta\colon \Gamma(\mathbf{E}\restriction_U) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}\restriction_U)$ mediante

$$(D^\beta \mathbf{u})(p) := \tau_{\mathbf{E}}^{-1}\Big(p, D^\beta\big((\pi_2\circ\tau_{\mathbf{E}}\circ\mathbf{u})\big)(p)\Big), \qquad \mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E}\restriction_U),\ p\in U,$$

donde $D^\beta$ en el lado derecho es la derivada parcial de orden $|\beta|$ aplicada componente a componente a la función

$$\pi_2\circ\tau_{\mathbf{E}}\circ\mathbf{u}\colon U\longrightarrow\mathbb{K}^r.$$

Entonces, para todo multiíndice $\beta$ con $|\beta|\ge 1$, se cumple

$$[D^\beta, f](\mathbf{u}) = \tau_{\mathbf{E}}^{-1}\left(p, \sum_{0<\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}(D^\gamma f)(p)\, D^{\beta-\gamma}\big((\pi_2\circ\tau_{\mathbf{E}}\circ\mathbf{u})\big)(p)\right),$$

para toda $f\in C^\infty(U)$ y todo $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E}\restriction_U)$.

*Demostración.* Sea $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E}\restriction_U)$. Su representación local viene dada por la función

$$\widetilde{u} := \pi_2\circ\tau_{\mathbf{E}}\circ\mathbf{u}\colon U\longrightarrow\mathbb{K}^r,$$

de modo que

$$\tau_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}(p)) = (p,\widetilde{u}(p)), \qquad p\in U.$$

En estas coordenadas, $D^\beta$ actúa componente a componente sobre $\widetilde{u}$.

El conmutador está definido por

$$[D^\beta, f]\mathbf{u} = D^\beta(f\mathbf{u}) \;-\; f\,D^\beta\mathbf{u}.$$

Aplicando $\pi_2\circ\tau_{\mathbf{E}}$ obtenemos

$$(\pi_2\circ\tau_{\mathbf{E}}\circ[D^\beta,f]\mathbf{u})(p) = D^\beta\big(f\widetilde{u}\big)(p) - f(p)\,D^\beta\widetilde{u}(p). \tag{8.3}$$

Por la regla de Leibniz (Proposición 1.1.17), para todo $p \in U$,

$$D^{\beta}(f\,\widetilde{u})(p) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (D^{\gamma} f)(p)\, D^{\beta-\gamma}\widetilde{u}(p). \tag{8.4}$$

El término con $\gamma = 0$ es

$$(D^{0} f)(p)\, D^{\beta}\widetilde{u}(p) = f(p)\, D^{\beta}\widetilde{u}(p).$$

Sustituyendo (8.4) en (8.3) y restando el término $\gamma = 0$, se obtiene

$$(\pi_2 \circ \tau_{\mathbf{E}} \circ [D^{\beta}, f]\mathbf{u})(p) = \sum_{0 < \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (D^{\gamma} f)(p)\, D^{\beta-\gamma}\widetilde{u}(p). \tag{8.5}$$

Finalmente, para recuperar la sección del haz a partir de su representación en $\mathbb{K}^r$, aplicamos la inversa de la trivialización:

$$[D^{\beta}, f]\mathbf{u}(p) = \tau_{\mathbf{E}}^{-1}\left(p, (\pi_2 \circ \tau_{\mathbf{E}} \circ [D^{\beta}, f]\mathbf{u})(p)\right).$$

Sustituyendo (8.5) se concluye que

$$[D^{\beta}, f]\mathbf{u} = \tau_{\mathbf{E}}^{-1}\left(p, \sum_{0 < \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (D^{\gamma} f)(p)\, D^{\beta-\gamma}\widetilde{u}(p)\right),$$

que es la fórmula buscada. □

Continuaremos con un lema que nos ayudará a caracterizar los PDOs localmente usando lo que ya vimos de los jets.

**Lema 8.1.30.** (Anulación sobre gérmenes de orden $\geq m+1$) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $p \in M$. Consideremos el haz trivial

$$\underline{\mathbb{K}}^r = M \times \mathbb{K}^r, \qquad \underline{\mathbb{K}}^s = M \times \mathbb{K}^s,$$

y sea

$$P \in \mathbf{PDO}^{(m)}\left(\underline{\mathbb{K}}^r, \underline{\mathbb{K}}^s\right).$$

Definimos el mapeo

$$L_p \colon \left(C_p^{\infty}(M)\right)^r \longrightarrow \mathbb{K}^s, \qquad L_p([u]) := (P(u))(p),$$

el cual está bien definido por localidad (Observación 8.1.16).
Denotamos por

$$\mathbf{m}_p^{m+1}\left(C_p^{\infty}(M)\right)^r := \left\{ \sum_{j=1}^{N} [f_j][u_j] \;\middle|\; [f_j] \in \mathbf{m}_p^{m+1},\ [u_j] \in \left(C_p^{\infty}(M)\right)^r,\ N \in \mathbb{N} \right\},$$

donde podemos recordar que $(C_p^{\infty}(M))^r$ tiene estructura de módulo sobre el anillo $C_p^{\infty}(M)$ y podemos notar

que $\mathbf{m}_p^{m+1}\left(C_p^\infty(M)\right)^r$ es un $C_p^\infty(M)$–submódulo de $(C_p^\infty(M))^r$, por lo que el cociente

$$\left(C_p^\infty(M)\right)^r / \mathbf{m}_p^{m+1}\left(C_p^\infty(M)\right)^r$$

tiene estructura de $C_p^\infty(M)$–módulo. Dado que podemos pensar al campo $\mathbb{K}$ como un subconjunto de $C_p^\infty(M)$, tenemos que dicho espacio también hereda una estructura de $\mathbb{K}$–espacio vectorial.
Bajo esta notación e hipótesis,

$$L_p\left(\mathbf{m}_p^{m+1}(C_p^\infty(M))^r\right) = \{0\} \subset \mathbb{K}^s,$$

y por lo tanto $L_p$ induce un mapeo $\mathbb{K}$–lineal bien definido

$$\overline{L}_p : \left(C_p^\infty(M)\right)^r / \mathbf{m}_p^{m+1}\left(C_p^\infty(M)\right)^r \longrightarrow \mathbb{K}^s.$$

*Demostración.* Sea $[u] \in \left(C_p^\infty(M)\right)^r$. Por $\mathbb{K}$–linealidad de $P$, basta demostrar que

$$L_p\left([f][u]\right) = 0 \qquad \text{para todo } [f] \in \mathbf{m}_p^{m+1}.$$

Por el Lema 8.1.27,

$$\mathbf{m}_p^{m+1} = \mathcal{I}_p^{(m)} = \left\{[f] \in C_p^\infty(M) \mid D^\alpha f(p) = 0,\ |\alpha| \le m\right\}.$$

Tomemos una carta suave $(U, \varphi)$ con $p \in U$, $\varphi(U)$ convexo, $\varphi(p) = 0$ y funciones coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. Sea $\tilde{f} := f \circ \varphi^{-1}$. Las condiciones $D^\alpha f(p) = 0$ equivalen a $D^\alpha \tilde{f}(0) = 0$ para todo $|\alpha| \le m$.
El Teorema de Taylor da la identidad

$$\tilde{f}(x) = \sum_{|\alpha|=m+1} x^\alpha \tilde{g}_\alpha(x), \qquad \tilde{g}_\alpha \in C^\infty(\varphi(U)).$$

Sea

$$g_\alpha := \tilde{g}_\alpha \circ \varphi \in C^\infty(U), \qquad |\alpha| = m+1.$$

Entonces sobre $U$

$$f = \sum_{|\alpha|=m+1} x^\alpha g_\alpha.$$

Ahora extendemos simultáneamente todas estas funciones: por el Teorema 1.3.7 existe un abierto

$$p \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$$

y funciones suaves definidas en $M$

$$\tilde{x}^i,\ \tilde{g}_\alpha^M \in C^\infty(M)$$

tales que

$$\tilde{x}^i \restriction_W = x^i \restriction_W, \qquad \tilde{g}_\alpha^M \restriction_W = g_\alpha \restriction_W.$$

Por lo tanto, en $W$,

$$f = \sum_{|\alpha|=m+1} x^\alpha g_\alpha = \sum_{|\alpha|=m+1} \tilde{x}^\alpha \tilde{g}_\alpha^M,$$

y al pasar a gérmenes en $p$ se obtiene

$$[f] = \sum_{|\alpha|=m+1} [\tilde{x}^\alpha][\tilde{g}_\alpha^M] \qquad \text{en } C_p^\infty(M).$$

Sea ahora

$$v_\alpha := \tilde{g}_\alpha^M u \in (C^\infty(M))^r.$$

Por linealidad, basta demostrar que

$$L_p\big([\tilde{x}^\alpha][v_\alpha]\big) = 0.$$

Escribimos

$$\tilde{x}^\alpha = (\tilde{x}^1)^{\alpha_1} \cdots (\tilde{x}^n)^{\alpha_n}.$$

Definimos inductivamente, para $k \geq 1$,

$$\mathrm{ad}(f)^k(P) := \mathrm{ad}(f)\big(\mathrm{ad}(f)^{k-1}(P)\big), \qquad \mathrm{ad}(f)^0(P) := P.$$

Aplicamos sucesivamente la identidad

$$P(fw) = f\,P(w) + [P,f](w), \qquad f \in C^\infty(M),$$

$|\alpha| = m+1$ veces, usando siempre las funciones globales $\tilde{x}^i$. Al evaluar en $p$, todos los términos en los que quede algún factor $\tilde{x}^i$ se anulan porque $\tilde{x}^i(p) = 0$, y sólo sobrevive el término que acumula un conmutador en cada paso.
Así obtenemos

$$P\big(\tilde{x}^\alpha v_\alpha\big)(p) = \Big(\mathrm{ad}(\tilde{x}^1)^{\alpha_1} \cdots \mathrm{ad}(\tilde{x}^n)^{\alpha_n} P\Big)\big(v_\alpha\big)(p).$$

Pero este es un conmutador iterado de longitud

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = |\alpha| = m+1,$$

y por la Proposición 8.1.4 se anula. En particular,

$$L_p\big([\tilde{x}^\alpha][v_\alpha]\big) = P\big(\tilde{x}^\alpha v_\alpha\big)(p) = 0.$$

Por lo tanto,

$$L_p([f][u]) = 0 \qquad \forall\, [f] \in \mathbf{m}_p^{m+1}.$$

Sea ahora

$$L_p\colon \big(C_p^\infty(M)\big)^r \longrightarrow \mathbb{K}^s.$$

Dado que

$$L_p\big(\mathbf{m}_p^{m+1}(C_p^\infty(M))^r\big) = \{0\},$$

si $[u]$ y $[w]$ representan la misma clase en el cociente, entonces $[u]-[w] \in \mathbf{m}_p^{m+1}(C_p^\infty(M))^r$ y por lo tanto

$$L_p([u]) - L_p([w]) = L_p([u]-[w]) = 0.$$

Definimos entonces

$$\overline{L}_p([u]) := L_p([u]) = (P(u))(p).$$

La definición es independiente del representante, y la $\mathbb{K}$–linealidad de $L_p$ muestra que $\overline{L}_p$ es $\mathbb{K}$–lineal. □

**Observación 8.1.31.** El Lema 8.1.30 expresa que un operador diferencial de orden $\leq m$ entre haces triviales sólo depende del $m$-jet del germen evaluado en el punto. En consecuencia, los gérmenes de orden $\geq m+1$ son invisibles para cualquier operador diferencial de orden $\leq m$ a nivel puntual, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 8.1.32.** Sea $M = \mathbb{R}$, $p = 0$ y consideremos el operador

$$P = \frac{d^2}{dx^2} \in \mathbf{PDO}^{(2)}(\underline{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{R}}).$$

Sea $f(x) = x^3$, de modo que

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \text{ por lo que } [f] \in \mathbf{m}_0^3.$$

Sea $u(x) = \sin x$. Entonces

$$P(fu) = \frac{d^2}{dx^2}(x^3 \sin x),$$

y se obtiene

$$(x^3 \sin x)'' = 6x \sin x + 6x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

Al evaluar en $p = 0$ se tiene

$$P(fu)(0) = 0.$$

Por lo tanto,

$$L_0\big([f][u]\big) = (P(fu))(0) = 0,$$

lo cual ilustra el Lema 8.1.30: todo germen que se anula a orden $m+1$ es invisible para un operador diferencial de orden $\leq m$ al evaluarlo en el punto.

**Teorema 8.1.33.** (Caracterización local de los operadores diferenciales parciales en el caso trivial) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y consideremos los haces triviales

$$\mathbf{E} = \underline{\mathbb{K}^r} = M \times \mathbb{K}^r, \qquad \mathbf{F} = \underline{\mathbb{K}^s} = M \times \mathbb{K}^s.$$

Sea

$$P \colon C^\infty(M, \mathbb{K}^r) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{K}^s)$$

un mapeo $\mathbb{K}$–lineal. Fijado $m \geq 0$, son equivalentes:

(a) $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

(b) Para toda carta suave $(U,\varphi)$ con coordenadas locales $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$ existen funciones suaves

$$a_\alpha \colon U \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^r,\mathbb{K}^s), \qquad |\alpha| \le m,$$

tales que, para toda función $u \in C^\infty(M,\mathbb{K}^r)$ y todo $p \in U$,

$$(Pu)(p) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(p)\, D^\alpha u(p),$$

donde $D^\alpha u(p) \in \mathbb{K}^r$ denota el vector de derivadas parciales de orden $|\alpha|$ de las componentes de $u$ en la carta $(U,\varphi)$.

*Demostración.* $(b) \Rightarrow (a)$: Supongamos que se cumple (b). Esto significa que, para cada carta suave $(U,\varphi)$, existe una colección de coeficientes suaves $a_\alpha$ tal que, para toda función $u \in C^\infty(M,\mathbb{K}^r)$, la restricción de $Pu$ a $U$ satisface

$$(Pu)\restriction_U = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha\, D^\alpha (u\restriction_U).$$

Denotemos por $P_U$ al operador diferencial definido en el abierto $U$ mediante dicha expresión local:

$$P_U \colon C^\infty(U,\mathbb{K}^r) \longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{K}^s), \qquad v \longmapsto \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha\, D^\alpha v.$$

Sabemos que, en el dominio $U$, cada término $D^\alpha$ es un operador diferencial de orden $|\alpha|$ (Corolario 8.1.20) y la multiplicación por $a_\alpha$ es de orden 0. Por la Proposición 8.1.19, concluimos que $P_U$ es un operador diferencial parcial de orden $\le m$ en $U$; es decir,

$$P_U \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}\restriction_U, \mathbf{F}\restriction_U).$$

Para demostrar que el operador global $P$ pertenece a $\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, utilizaremos la definición recursiva basada en conmutadores y adjuntos. Debemos verificar que para cualesquiera $m+1$ funciones suaves globales $f_0,\dots,f_m \in C^\infty(M)$, el conmutador iterado se anula:

$$\mathrm{ad}(f_0)\cdots\mathrm{ad}(f_m)(P) = 0.$$

Consideremos $u \in C^\infty(M,\mathbb{K}^r)$. Dado que conocemos como se comporta $Pu$ en $U$ de manera explícita, para cualquier $f \in C^\infty(M)$, se tiene la identidad:

$$(\mathrm{ad}(f)(P)u)\restriction_U = ([P,f]u)\restriction_U = P_U((fu)\restriction_U) - f\restriction_U P_U(u\restriction_U) = (\mathrm{ad}(f\restriction_U)(P_U))(u\restriction_U).$$

Aplicando esto recursivamente a los conmutadores iterados, obtenemos que en cada carta $(U,\varphi)$:

$$\big(\big(\mathrm{ad}(f_0)\cdots\mathrm{ad}(f_m)(P)\big)(u)\big)\restriction_U = \big(\mathrm{ad}(f_0\restriction_U)\cdots\mathrm{ad}(f_m\restriction_U)(P_U)\big)(u\restriction_U).$$

Dado que $P_U$ es un operador diferencial de orden $\le m$ en $U$, su conmutador con $m+1$ funciones se anula

idénticamente en $U$. Por lo tanto,

$$\big(\big(\mathrm{ad}(f_0)\cdots\mathrm{ad}(f_m)(P)\big)(u)\big)\restriction_U = 0.$$

Como podemos escoger una cubierta abierta de $M$ formada por dominios de cartas, y la función

$$\big(\big(\mathrm{ad}(f_0)\cdots\mathrm{ad}(f_m)(P)\big)(u)\big)\restriction_U$$

se anula en cada uno de dichos dominios,

$$\big(\mathrm{ad}(f_0)\cdots\mathrm{ad}(f_m)(P)\big)(u) = 0 \quad \text{en todo } M.$$

Como $u$ fue arbitraria, el operador $\mathrm{ad}(f_0)\ldots\mathrm{ad}(f_m)(P)$ es el operador nulo. Esto demuestra que $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Supongamos ahora que $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. En particular, por la Observación 8.1.16, $P$ es local. Como $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ son haces triviales, una sección de $\mathbf{E}$ puede verse como una función $u\colon M \longrightarrow \mathbb{K}^r$ y una sección de $\mathbf{F}$ como una función $v\colon M \longrightarrow \mathbb{K}^s$. Para cada $p \in M$ consideramos el mapeo

$$L_p\colon\ (C^\infty_p(M))^r \longrightarrow \mathbb{K}^s, \qquad L_p([u]) := (Pu)(p),$$

donde $[u]$ denota el germen de $u$ en $p$. La localidad de $P$ garantiza que $L_p$ está bien definido.
Por el Lema 8.1.30, aplicado a $M$, al punto $p$ y al operador $P$, se tiene

$$L_p\big(\mathbf{m}_p^{m+1}(C^\infty_p(M))^r\big) = \{0\}.$$

Por lo tanto, $L_p$ induce un mapeo $\mathbb{K}$–lineal bien definido

$$\overline{L}_p\colon\ (C^\infty_p(M))^r \big/ \mathbf{m}_p^{m+1}(C^\infty_p(M))^r \longrightarrow \mathbb{K}^s.$$

Justifiquemos ahora con algo de detalle la estructura del cociente

$$(C^\infty_p(M))^r \big/ \mathbf{m}_p^{m+1}(C^\infty_p(M))^r.$$

Por definición del submódulo

$$\mathbf{m}_p^{m+1}(C^\infty_p(M))^r = \left\{ \sum_{j=1}^{N} [f_j][u_j] \;\middle|\; [f_j] \in \mathbf{m}_p^{m+1},\ [u_j] \in (C^\infty_p(M))^r,\ N \in \mathbb{N} \right\},$$

dos gérmenes $[u],[v] \in (C^\infty_p(M))^r$, con coordenadas

$$u = (u^1,\ldots,u^r), \qquad v = (v^1,\ldots,v^r),$$

representan la misma clase en el cociente si y sólo si su diferencia pertenece a dicho submódulo, esto es, si y sólo si

$$[u^j] - [v^j] \in \mathbf{m}_p^{m+1} \qquad \text{para cada } j \in \{1,\ldots,r\}.$$

En otras palabras,

$$[u] = [v] \text{ en } (C_p^\infty(M))^r / \mathbf{m}_p^{m+1}(C_p^\infty(M))^r \iff [u^j] = [v^j] \text{ en } C_p^\infty(M)/\mathbf{m}_p^{m+1},\ \forall j \in \{1,\dots,r\}.$$

De aquí se sigue que el cociente visto como espacio vectorial

$$(C_p^\infty(M))^r / \mathbf{m}_p^{m+1}(C_p^\infty(M))^r$$

es isomorfo al producto de espacios vectoriales

$$\left(C_p^\infty(M)/\mathbf{m}_p^{m+1}\right)^r.$$

Tomemos ahora una carta suave $(U,\varphi)$ con $p \in U$ y coordenadas $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$. Por la Definición 8.1.26, el espacio de jets de orden $m$ en $p$ es

$$J_p^m(M) := C_p^\infty(M)/\mathbf{m}_p^{m+1},$$

y el Corolario 8.1.28 afirma que cada clase $j_p^m f$ se determina exactamente por las derivadas

$$\left(D^\alpha f(p)\right)_{|\alpha|\le m},$$

en coordenadas $x^1,\dots,x^n$, y que el mapeo

$$J_p^m(M) \longrightarrow \mathbb{K}^N, \qquad j_p^m f \longmapsto \left(D^\alpha f(p)\right)_{|\alpha|\le m},$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales, donde $N = \binom{n+m}{m}$.
Combinando estas observaciones, obtenemos una cadena de isomorfismos

$$(C_p^\infty(M))^r / \mathbf{m}_p^{m+1}(C_p^\infty(M))^r \ \cong\ \left(C_p^\infty(M)/\mathbf{m}_p^{m+1}\right)^r \ \cong\ \left(J_p^m(M)\right)^r \ \cong\ \mathbb{K}^{r\binom{n+m}{m}},$$

donde la última identificación envía la clase de

$$u = (u^1,\dots,u^r)$$

a la colección finita de derivadas parciales

$$\left(D^\alpha u^j(p)\right)_{|\alpha|\le m,\ 1\le j\le r}.$$

En particular, el funcional $\overline{L}_p$ corresponde, bajo este isomorfismo, a una transformación lineal

$$\mathbb{K}^{r\binom{n+m}{m}} \longrightarrow \mathbb{K}^s,$$

la cual está determinada de manera única por una colección de transformaciones lineales

$$a_\alpha(p) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^r,\mathbb{K}^s), \qquad |\alpha| \le m,$$

tales que, para todo germen $[u] \in (C^\infty_p(M))^r$,

$$\overline{L}_p([u]) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(p)\, D^\alpha u(p),$$

donde $D^\alpha u(p) \in \mathbb{K}^r$ es el vector de derivadas parciales de orden $|\alpha|$ de las componentes de $u$ en la carta $(U,\varphi)$.
Por definición de $\overline{L}_p$ y $L_p$, si $u \in C^\infty(M,\mathbb{K}^r)$, el germen $[u]$ en $p$ satisface

$$(Pu)(p) = L_p([u]) = \overline{L}_p([u]) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(p)\, D^\alpha u(p).$$

Esto prueba la fórmula local de (b) en la carta $(U,\varphi)$:

$$(Pu)(p) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(p)\, D^\alpha u(p), \qquad p \in U.$$

Falta verificar que los coeficientes $a_\alpha$ dependen suavemente del punto. Esta propiedad es local. Fijemos $p_0 \in U$ y escojamos abiertos $V \Subset W \Subset U$ con $p_0 \in V$, junto con una función $\chi \in C^\infty_c(U)$ que sea igual a uno en $W$. Para cada vector de la base canónica $e_j \in \mathbb{K}^r$ y cada multiíndice $\gamma$ con $|\gamma| \le m$, extendemos globalmente la función

$$u_{\gamma,j}(x) := \chi(x)(x^1)^{\gamma_1}\cdots(x^n)^{\gamma_n} e_j.$$

En $V$ la función de corte no interviene en ninguna derivada. La fórmula ya obtenida, aplicada primero a $u_{0,j}$, muestra que $a_0(\cdot)e_j = P(u_{0,j})$ en $V$ y, por lo tanto, que $a_0$ es suave allí. Supongamos por inducción que $a_\beta$ es suave en $V$ para todo $|\beta| < \ell$. Si $|\gamma| = \ell$, entonces

$$P(u_{\gamma,j}) = \gamma!\, a_\gamma e_j + \sum_{|\beta|<\ell} a_\beta D^\beta u_{\gamma,j} \qquad \text{en } V.$$

En efecto, las derivadas de orden $\ell$ del monomio $x^\gamma$ se anulan salvo la correspondiente a $\gamma$, que vale $\gamma!$. Así,

$$a_\gamma e_j = \frac{1}{\gamma!}\left( P(u_{\gamma,j}) - \sum_{|\beta|<\ell} a_\beta D^\beta u_{\gamma,j} \right) \qquad \text{en } V,$$

y el miembro derecho es suave por la hipótesis de inducción. Recorriendo la base canónica y los órdenes $\ell = 0,\dots,m$, concluimos que todos los $a_\alpha$ son suaves cerca de $p_0$. Como $p_0$ era arbitrario, son suaves en todo $U$. □

Finalmente, dejamos la caracterización local de los operadores diferenciales parciales de un haz vectorial suave real o complejo.

**Teorema 8.1.34.** (Caracterización local de los operadores diferenciales parciales en haces vectoriales) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Sean $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ y $\pi_{\mathbf{F}}\colon \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves de rango $r$ y $s$ (reales o complejos), y sea $m \ge 0$. Para un mapeo $\mathbb{K}$–lineal

$$P\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{F}),$$

son equivalentes:

(a) $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

(b) Para toda carta suave $(U,\varphi)$ con trivializaciones locales

$$\tau_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E}\restriction_U \longrightarrow U\times\mathbb{K}^r, \qquad \tau_{\mathbf{F}}\colon \mathbf{F}\restriction_U \longrightarrow U\times\mathbb{K}^s,$$

existen funciones suaves

$$a_\alpha\colon U \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^r,\mathbb{K}^s), \qquad |\alpha|\leq m,$$

tales que, para toda sección $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$ con representación local en $U$ dada por

$$\widetilde{u} := \pi_2\circ\tau_{\mathbf{E}}\circ(\mathbf{u}\restriction_U) \in C^\infty(U,\mathbb{K}^r),$$

se cumple, para cada $p\in U$,

$$P(\mathbf{u})(p) = \tau_{\mathbf{F}}^{-1}\left(p, \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(p)\, D^\alpha \widetilde{u}(p)\right).$$

*Demostración.* Fijemos una carta suave $(U,\varphi)$ con coordenadas $\varphi=(x^1,\ldots,x^n)$ y trivializaciones locales $\tau_{\mathbf{E}}$ y $\tau_{\mathbf{F}}$ definidas en $U$. Dada una sección global $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$, denotaremos por $\widetilde{u}\in C^\infty(U,\mathbb{K}^r)$ a representación local de $\mathbf{u}$

$$\widetilde{u} := \pi_2\circ\tau_{\mathbf{E}}\circ(\mathbf{u}\restriction_U).$$

Dada una sección global $\mathbf{v}\in\Gamma(\mathbf{F})$, su representación en la trivialización de $\mathbf{F}$ es, por definición, $\widetilde{v} := \pi_2\circ\tau_{\mathbf{F}}\circ(\mathbf{v}\restriction_U)$.

$(b)\Rightarrow(a)$: Supongamos que se cumple (b). Definimos un operador auxiliar $\widetilde{P}_U$ en el espacio de funciones vectoriales del abierto $U$ mediante la expresión explícita dada por la hipótesis:

$$\widetilde{P}_U\colon C^\infty(U,\mathbb{K}^r)\longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{K}^s), \qquad \widetilde{P}_U(w) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\, D^\alpha w.$$

Por el Teorema 8.1.33, $\widetilde{P}_U$ operador es un operador diferencial parcial de orden $\leq m$ entre los haces triviales sobre $U$. Por la hipótesis (b) establece que el operador global $P$ y este operador local $\widetilde{P}_U$ están relacionados mediante las trivializaciones. Concretamente, para toda sección global $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$:

$$P(\mathbf{u})\restriction_U = \tau_{\mathbf{F}}^{-1}\left(\,\cdot\,, \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha \widetilde{u}\right),$$

por lo que al componer con $\tau_{\mathbf{F}}$ y luego proyectar en la segunda coordenada,

$$\pi_2\circ\tau_{\mathbf{F}}\circ(P(\mathbf{u})\restriction_U) = \widetilde{P}_U(\widetilde{u}).$$

Para verificar que $P\in\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, basta con probar que

$$\operatorname{ad}(f_0)\cdots\operatorname{ad}(f_m)(P) = 0, \qquad \forall\, f_0,\ldots,f_m\in C^\infty(M).$$

Sea $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$ y fijemos funciones arbitrarias $f_0, \dots, f_m \in C^\infty(M)$. Trabajaremos en la carta $(U, \varphi)$ con las trivializaciones elegidas.

Dado $f \in C^\infty(M)$ y $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$, observamos primero que la acción puntual de $f$ pasa a la representación local mediante la identidad

$$\widetilde{f\mathbf{u}} = \pi_2 \circ \tau_{\mathbf{E}}\big((f\mathbf{u}) \restriction_U\big) = (f \restriction_U)\,\widetilde{u}. \tag{8.6}$$

Esta igualdad se obtiene directamente de la linealidad de la trivialización $\tau_{\mathbf{E}}$ en cada fibra.

Aplicamos ahora $\pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}$ al conmutador $\mathrm{ad}(f)(P)$:

$$\begin{aligned}
\pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}} \circ \big(\mathrm{ad}(f)(P)(\mathbf{u})\big) \restriction_U &= \pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}\Big(P(f\mathbf{u}) \restriction_U - (fP(\mathbf{u})) \restriction_U\Big) \\
&= \widetilde{P}_U\big(\widetilde{f\mathbf{u}}\big) - (f \restriction_U)\,\widetilde{P}_U(\widetilde{u}) \\
&\overset{(8.6)}{=} \widetilde{P}_U\big((f \restriction_U)\,\widetilde{u}\big) - (f \restriction_U)\,\widetilde{P}_U(\widetilde{u}) \\
&= \big[\widetilde{P}_U, f \restriction_U\big](\widetilde{u}) \\
&= \big(\mathrm{ad}(f \restriction_U)(\widetilde{P}_U)\big)(\widetilde{u}).
\end{aligned}$$

Repitiendo este argumento $m+1$ veces y usando en cada paso la identidad (8.6) junto con la compatibilidad entre $P$ y $\widetilde{P}_U$ dada por las trivializaciones, se obtiene

$$\pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}} \circ \big(\mathrm{ad}(f_0)\cdots\mathrm{ad}(f_m)(P)(\mathbf{u})\big) \restriction_U = \big(\mathrm{ad}(f_0 \restriction_U)\cdots\mathrm{ad}(f_m \restriction_U)(\widetilde{P}_U)\big)(\widetilde{u}).$$

Por el Teorema 8.1.33, el operador $\widetilde{P}_U$ es un operador diferencial parcial de orden $\leq m$ en el haz trivial sobre $U$. Por la Proposición 8.1.4, todo conmutador iterado de longitud $m+1$ con funciones suaves en $U$ se anula:

$$\mathrm{ad}(f_0 \restriction_U)\cdots\mathrm{ad}(f_m \restriction_U)(\widetilde{P}_U) = 0.$$

Por lo tanto, el lado derecho de la igualdad anterior es 0 para toda $\widetilde{u}$, y en consecuencia

$$\mathrm{ad}(f_0)\cdots\mathrm{ad}(f_m)(P)(\mathbf{u}) = 0 \qquad \text{en } U.$$

Dado que $M$ admite una cubierta abierta de cartas que son dominios de trivializaciones de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, y la identidad anterior vale en cada una de ellas, concluimos que

$$\mathrm{ad}(f_0)\cdots\mathrm{ad}(f_m)(P) = 0 \qquad \text{en todo } M.$$

Esto prueba que $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

$(a) \Rightarrow (b)$:
Supongamos ahora que $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. En primer lugar, $P$ es un operador local (Observación 8.1.16). Esto significa que si dos secciones globales coinciden en un abierto, sus imágenes bajo $P$ coinciden en dicho abierto. Esta localidad permite definir la versión del operador en cada trivialización.
Definiremos un operador $\widetilde{P}\colon C^\infty(U, \mathbb{K}^r) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{K}^s)$ que trasladará la estructura de $P$ a $U$ mediante una construcción puntual. Sean $w \in C^\infty(U, \mathbb{K}^r)$ y $p \in U$. Para evaluar $\widetilde{P}(w)$ en $p$, necesitamos trasladar $w$ a una

sección global sobre la cual $P$ pueda actuar. Elegimos un abierto $V \subseteq M$ tal que $p \in V$ y $\overline{V} \subseteq U$. Por la Proposición 1.3.6 (existencia de funciones flan), existe una función suave $\psi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi \equiv 1$ en $\overline{V}$ y $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq U$. Construimos una extensión global $\widehat{\mathbf{w}} \in \Gamma(\mathbf{E})$ definida como:

$$\widehat{\mathbf{w}}(q) := \begin{cases} \tau_{\mathbf{E}}^{-1}(q, \psi(q)w(q)) & \text{si } q \in U, \\ 0 & \text{si } q \in M \setminus U. \end{cases} \tag{8.7}$$

Definimos entonces el valor de $\widetilde{P}(w)$ en el punto $p$ como:

$$\widetilde{P}(w)(p) := \pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}\big(P(\widehat{\mathbf{w}})(p)\big).$$

Gracias a la localidad de $P$, este valor es independiente de la elección de la función de corte $\psi$ y del abierto $V$, pues cualquier otra extensión coincidiría con $\widehat{\mathbf{w}}$ en una vecindad de $p$. Por lo tanto, $\widetilde{P}$ está bien definido como operador lineal entre secciones de los haces triviales.
Para poder aplicar el Teorema 8.1.33, debemos demostrar que $\widetilde{P}$ es un operador diferencial parcial de orden $\leq m$ entre los haces triviales sobre $U$. Es decir, debemos ver que para cualesquiera $g_0, \cdots, g_m \in C^\infty(U)$, se cumple:

$$\operatorname{ad}(g_0)\cdots\operatorname{ad}(g_m)(\widetilde{P}) = 0.$$

Sea $p \in U$ arbitrario. Elegimos un abierto $V \subseteq U$ tal que $\overline{V} \subseteq U$ y una función suave $\psi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\psi \equiv 1$ en $\overline{V}$ y $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq U$. Esta elección fija un procedimiento uniforme para extender funciones escalares y secciones definidas en $U$.

Dada una función $g \in C^\infty(U)$, definimos su extensión global $\widehat{g} \in C^\infty(M, \mathbb{K})$ mediante

$$\widehat{g}(q) = \begin{cases} \psi(q)\, g(q), & q \in U, \\ 0, & q \in M \setminus U. \end{cases}$$

Por construcción, $\widehat{g} \restriction_V = g \restriction_V$ y $\operatorname{supp}(\widehat{g}) \subseteq U$. Asimismo, dada una función vectorial $w \in C^\infty(U, \mathbb{K}^r)$, definimos su extensión global $\widehat{\mathbf{w}} \in \Gamma(\mathbf{E})$ como en (8.7):

$$\widehat{\mathbf{w}}(q) = \begin{cases} \tau_{\mathbf{E}}^{-1}(q, \psi(q)\, w(q)), & q \in U, \\ 0, & q \in M \setminus U. \end{cases}$$

En particular, $\widehat{\mathbf{w}} \restriction_V = \tau_{\mathbf{E}}^{-1}(\cdot, w(\cdot))$.

Con estas extensiones fijadas, relacionamos los conmutadores de $\widetilde{P}$ con los de $P$. Comenzamos con el caso de un solo conmutador. Sea $g \in C^\infty(U)$ y sea $\widehat{g} \in C^\infty(M)$ su extensión global definida arriba. Sea $w \in C^\infty(U, \mathbb{K}^r)$, y sea $\widehat{\mathbf{w}} \in \Gamma(\mathbf{E})$ su extensión global. Por definición de $\widetilde{P}$,

$$\widetilde{P}(w)(q) = \pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}\big(P(\widehat{\mathbf{w}})(q)\big), \qquad q \in V.$$

Fijemos ahora $q \in V$. Como $\psi \equiv 1$ en $V$, se tiene

$$\widehat{g}(q) = g(q), \qquad \widehat{\mathbf{w}}(q) = \tau_{\mathbf{E}}^{-1}(q, w(q)).$$

Sea $\widehat{\mathbf{w}}_g$ la extensión global de la función vectorial $gw$, construida mediante la misma función $\psi$:

$$\widehat{\mathbf{w}}_g(q') = \begin{cases} \tau_{\mathbf{E}}^{-1}\big(q', \psi(q')\, g(q') w(q')\big), & q' \in U, \\ 0, & q' \notin U. \end{cases}$$

Para $q' \in V$,

$$\widehat{\mathbf{w}}_g(q') = \tau_{\mathbf{E}}^{-1}\big(q', g(q') w(q')\big) = \widehat{g}(q')\,\widehat{\mathbf{w}}(q'),$$

donde la última igualdad es multiplicación escalar en la fibra.
Como $\widehat{\mathbf{w}}_g$ y $\widehat{g}\,\widehat{\mathbf{w}}$ coinciden en una vecindad de $q$, la localidad de $P$ implica

$$P(\widehat{\mathbf{w}}_g)(q) = P(\widehat{g}\,\widehat{\mathbf{w}})(q).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{ad}(g)(\widetilde{P})w\big)(q) &= \widetilde{P}(gw)(q) - g(q)\,\widetilde{P}(w)(q) \\ &= \pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}\big(P(\widehat{\mathbf{w}}_g)(q)\big) - \widehat{g}(q)\,\pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}\big(P(\widehat{\mathbf{w}})(q)\big) \\ &= \pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}\big(P(\widehat{g}\,\widehat{\mathbf{w}})(q) - \widehat{g}(q)\,P(\widehat{\mathbf{w}})(q)\big) \\ &= \pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}\big(\mathrm{ad}(\widehat{g})(P)(\widehat{\mathbf{w}})(q)\big). \end{aligned}$$

De este modo, para todo $q \in V$,

$$\big(\mathrm{ad}(g)(\widetilde{P})w\big)(q) = \pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}\big(\mathrm{ad}(\widehat{g})(P)(\widehat{\mathbf{w}})(q)\big).$$

Aplicando el mismo razonamiento inductivamente, se obtiene que para cualesquiera $g_0, \ldots, g_m \in C^\infty(U)$ y sus extensiones $\widehat{g}_0, \ldots, \widehat{g}_m$,

$$\big(\mathrm{ad}(g_0)\cdots\mathrm{ad}(g_m)(\widetilde{P})w\big)(q) = \pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}\big(\mathrm{ad}(\widehat{g}_0)\cdots\mathrm{ad}(\widehat{g}_m)(P)(\widehat{\mathbf{w}})\big)(q), \qquad q \in V.$$

Dado que por hipótesis $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, $\mathrm{ad}(\hat{g}_0)\cdots\mathrm{ad}(\widehat{g}_m)(P)$ es el operador nulo en $M$. En particular, $\big(\mathrm{ad}(\widehat{g}_0)\cdots\mathrm{ad}(\widehat{g}_m)(P)(\widehat{\mathbf{w}})\big)(q) = 0$ y por lo tanto $\big(\big(\mathrm{ad}(g_0)\cdots\mathrm{ad}(g_m)(\widetilde{P})\big)(w)\big)(q) = 0$. Tomando $q = p$, $\big(\big(\mathrm{ad}(g_0)\cdots\mathrm{ad}(g_m)(\widetilde{P})\big)(w)\big)(p) = 0$, y usando que $p$ y $w$ eran arbitrarios, concluimos que

$$\mathrm{ad}(g_0)\cdots\mathrm{ad}(g_m)(\widetilde{P}) = 0 \quad \text{en todo } U.$$

Por lo tanto, $\widetilde{P} \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\underline{\mathbb{K}}^r, \underline{\mathbb{K}}^s)$, donde $\underline{\mathbb{K}}^r$ y $\underline{\mathbb{K}}^s$ son los haces triviales de rangos $r$ y $s$ respectivamente sobre $U$. Aplicando el Teorema 8.1.33 al operador $\widetilde{P}$, garantizamos la existencia de funciones suaves $a_\alpha : U \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s)$ tales que, para todo $w \in C^\infty(U, \mathbb{K}^r)$ y todo $p \in U$:

$$\widetilde{P}(w)(p) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(p)\, D^\alpha w(p).$$

Finalmente, consideramos una sección global $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$. Sea $\widetilde{u} \in C^\infty(U, \mathbb{K}^r)$ su representación local. Para cualquier $p \in U$, la propia $\mathbf{u}$ sirve como extensión global de su comportamiento local. Por la definición de

$\widetilde{P}$, tenemos para todo $p \in U$:

$$\pi_2 \circ \tau_{\mathbf{F}}\big(P(\mathbf{u})(p)\big) = \widetilde{P}(\widetilde{u})(p) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(p)\, D^\alpha \widetilde{u}(p).$$

Aplicando $\tau_{\mathbf{F}}^{-1}(p,\cdot)$ a ambos lados, obtenemos

$$P(\mathbf{u})(p) = \tau_{\mathbf{F}}^{-1}\left(p,\ \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(p)\, D^\alpha \widetilde{u}(p)\right).$$

□

**Corolario 8.1.35.** (Expresión local de un PDO usando marcos locales) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Sean $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ y $\pi_{\mathbf{F}}\colon \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves de rango $r$ y $s$. Bajo las hipótesis del Teorema 8.1.34, para un operador lineal continuo

$$P \in \mathbf{Op}(\mathbf{E},\mathbf{F})$$

y un entero $m \ge 0$, son equivalentes:

(a) $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

(b) Para toda carta suave $(U,\varphi)$ y todo par de marcos locales suaves

$$\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r\} \text{ en } \mathbf{E}\restriction_U, \qquad \{\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_s\} \text{ en } \mathbf{F}\restriction_U,$$

existen funciones suaves

$$(a_\alpha)_{ij}\colon U \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s,\ |\alpha| \le m,$$

tales que toda sección escrita en componentes como

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r} u^i \mathbf{e}_i, \qquad u^i \in C^\infty(U,\mathbb{K}),$$

satisface en $U$ la identidad

$$P(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{i=1}^{r}(a_\alpha)_{ij}\, D^\alpha u^i\right)\mathbf{f}_j.$$

*Demostración.* (a)⇒(b). Fijemos una carta $(U,\varphi)$ y marcos locales $\{\mathbf{e}_i\}$ en $\mathbf{E}\restriction_U$ y $\{\widehat{\mathbf{e}}_j\}$ en $\mathbf{F}\restriction_U$. Recordemos que, por la Proposición 1.7.18, un marco local suave determina una trivialización local suave

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E}\restriction_U \longrightarrow U\times\mathbb{K}^r, \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}\colon \mathbf{F}\restriction_U \longrightarrow U\times\mathbb{K}^s,$$

caracterizadas por

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}}(\mathbf{e}_i(p)) = (p, e_i^0), \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}(\widehat{\mathbf{e}}_j(p)) = (p, \widehat{e}_j^0),$$

donde $\{e_i^0\}$ y $\{\widehat{e}_j^0\}$ son las bases canónicas de $\mathbb{K}^r$ y $\mathbb{K}^s$ respectivamente.
Aplicando el Teorema 8.1.34 a estas trivializaciones, existen mapeos suaves

$$a_\alpha \colon U \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s), \qquad |\alpha| \leq m,$$

tales que, para la representación local

$$\widetilde{u} := \pi_2 \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}} \circ \mathbf{u} \in C^\infty(U, \mathbb{K}^r),$$

se tiene

$$\pi_2 \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}\big(P(\mathbf{u})\big) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \, D^\alpha \widetilde{u}.$$

Para obtener la expresión en componentes, escribimos la acción de $a_\alpha(p)$ sobre la base canónica:

$$a_\alpha(p)(e_i^0) = \sum_{j=1}^{s} (a_\alpha)_{ij}(p)\, \widehat{e}_j^0.$$

Esto define funciones suaves $(a_\alpha)_{ij}$, que son precisamente las entradas matriciales de $a_\alpha(p)$.
Si $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r} u^i \mathbf{e}_i$, entonces, para cada $p \in U$,

$$\mathbf{u}(p) = \sum_{i=1}^{r} u^i(p)\, \mathbf{e}_i(p).$$

La trivialización inducida por el marco local $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ está dada por

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}}(\mathbf{e}_i(p)) = (p, e_i^0),$$

donde $(e_i^0)$ es la base canónica de $\mathbb{K}^r$. Por linealidad en cada fibra,

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}(p)) = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}}\left(\sum_{i=1}^{r} u^i(p)\mathbf{e}_i(p)\right) = \left(p, \sum_{i=1}^{r} u^i(p) e_i^0\right) = \big(p, (u^1(p), \ldots, u^r(p))\big).$$

De este modo, la representación local

$$\widetilde{u} = \pi_2 \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}} \circ \mathbf{u} \colon U \longrightarrow \mathbb{K}^r$$

está dada explícitamente por

$$\widetilde{u}(p) = (u^1(p), \ldots, u^r(p)).$$

Por lo tanto

$$a_\alpha(p)\, D^\alpha \widetilde{u}(p) = \left(\sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{i1}(p) D^\alpha u^i(p), \ldots, \sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{is}(p) D^\alpha u^i(p)\right).$$

La representación local de $P(\mathbf{u})$ es

$$\pi_2 \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}\big(P(\mathbf{u})\big)(p) = \left( \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{i1}(p) D^\alpha u^i(p), \dots, \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{is}(p) D^\alpha u^i(p) \right).$$

Debido a que $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}(\mathbf{f}_j(p)) = (p, f_j^0)$, al revertir $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}$ obtenemos

$$P(\mathbf{u})(p) = \sum_{j=1}^{s} \left( \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{ij}(p) D^\alpha u^i(p) \right) \widehat{\mathbf{e}}_j(p),$$

y por lo tanto en $U$

$$P(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{s} \left( \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{ij} D^\alpha u^i \right) \widehat{\mathbf{e}}_j.$$

(b)⇒(a). Supongamos que vale (b). Debemos probar que $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ en el sentido del Teorema 8.1.34. Sea entonces $(U,\varphi)$ una carta suave arbitraria de $M$ y tomemos trivializaciones locales suaves arbitrarias

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}} \colon \mathbf{E} \restriction_U \longrightarrow U \times \mathbb{K}^r, \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}} \colon \mathbf{F} \restriction_U \longrightarrow U \times \mathbb{K}^s.$$

Por la Proposición 1.7.18, cada una de estas trivializaciones induce un marco local suave sobre $U$. Más precisamente, existe un marco local suave $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r\}$ en $\mathbf{E} \restriction_U$ asociado a $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}}$, caracterizado por

$$\mathbf{e}_i(p) = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}}^{-1}(p, e_i^0), \qquad 1 \le i \le r,$$

donde $\{e_i^0\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^r$. La trivialización $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}$ induce el marco local suave $\{\widehat{\mathbf{e}}_1,\dots,\widehat{\mathbf{e}}_s\}$ en $\mathbf{F} \restriction_U$ dado por

$$\widehat{\mathbf{e}}_j(p) = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}^{-1}(p, \widehat{e}_j^0), \qquad 1 \le j \le s,$$

donde $\{\widehat{e}_j^0\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^s$.
Como por hipótesis se cumple (b) para todo par de marcos locales, en particular para los marcos $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\widehat{\mathbf{e}}_j\}$ asociados a estas trivializaciones, existen funciones suaves

$$(a_\alpha)_{ij} \colon U \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s,\ |\alpha| \le m,$$

tales que, para toda sección

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r} u^i \mathbf{e}_i, \qquad u^i \in C^\infty(U,\mathbb{K}),$$

se tiene en $U$ la identidad

$$P(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{s} \left( \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{ij} D^\alpha u^i \right) \widehat{\mathbf{e}}_j.$$

Definimos ahora, para cada multiíndice $\alpha$, un mapeo

$$a_\alpha \colon U \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s)$$

de la siguiente manera: para cada $p \in U$ y cada vector $v = (v^1, \dots, v^r) \in \mathbb{K}^r$, ponemos

$$a_\alpha(p)(v) := \left( \sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{i1}(p) v^i, \dots, \sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{is}(p) v^i \right) \in \mathbb{K}^s.$$

En otras palabras, la matriz de $a_\alpha(p)$ en las bases canónicas $\{e_i^0\}$ y $\{\widehat{e}_j^0\}$ es precisamente

$$\big((a_\alpha)_{ij}(p)\big)_{1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s}.$$

Como las funciones $(a_\alpha)_{ij}$ son suaves, se sigue que $a_\alpha$ es un mapeo suave con valores en $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s)$. Mostraremos que estos $a_\alpha$ proporcionan la expresión local de $P$ en las trivializaciones $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}}$ y $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}$. Sea $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$ y escribamos en $U$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r} u^i \mathbf{e}_i, \qquad u^i \in C^\infty(U, \mathbb{K}).$$

Por la construcción de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}}$ a partir del marco $\{\mathbf{e}_i\}$, la representación local de $\mathbf{u}$ es

$$\widetilde{u} := \pi_2 \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}} \circ \mathbf{u} \colon U \longrightarrow \mathbb{K}^r, \qquad \widetilde{u}(p) = (u^1(p), \dots, u^r(p)).$$

En particular,

$$D^\alpha \widetilde{u}(p) = \big(D^\alpha u^1(p), \dots, D^\alpha u^r(p)\big).$$

Por otro lado, usando la fórmula de (b) para $P(\mathbf{u})$ y aplicando $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}$, obtenemos

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}\big(P(\mathbf{u})(p)\big) = \left( p,\ \sum_{j=1}^{s} \left( \sum_{|\alpha| \le m} \sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{ij}(p)\, D^\alpha u^i(p) \right) \widehat{e}_j^0 \right).$$

Por definición de $a_\alpha(p)$, el vector en $\mathbb{K}^s$ cuya $j$-ésima componente es

$$\sum_{|\alpha| \le m} \sum_{i=1}^{r} (a_\alpha)_{ij}(p)\, D^\alpha u^i(p)$$

no es otra cosa que

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(p)\, D^\alpha \widetilde{u}(p).$$

Así,

$$\pi_2 \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}\big(P(\mathbf{u})\big)(p) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(p)\, D^\alpha \widetilde{u}(p), \qquad \forall\, p \in U.$$

Como $(U, \varphi)$ y las trivializaciones $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}$ eran arbitrarias, hemos verificado que, en toda carta suave y para toda pareja de trivializaciones locales, existe una familia de mapeos suaves

$$a_\alpha \colon U \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s), \qquad |\alpha| \le m,$$

que proporciona la expresión

$$\pi_2 \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F}}\big(P(\mathbf{u})\big)(p) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(p)\, D^\alpha\big(\pi_2 \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E}} \circ \mathbf{u}\big)(p)$$

para toda $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$ y toda $p \in U$. Por el Teorema 8.1.34 se concluye que

$$P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F}).$$

□

**Proposición 8.1.36.** (Conjugación de operadores diferenciales) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos y sea

$$P\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{F})$$

un operador complejo-lineal. Definimos

$$\overline{P}\colon \Gamma(\overline{\mathbf{E}}) \longrightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{F}}), \qquad \overline{P}(\overline{\mathbf{u}}) := \overline{P\mathbf{u}}.$$

Entonces:

(a) $\overline{P}$ está bien definido y es complejo-lineal;

(b) si $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, entonces $\overline{P} \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\overline{\mathbf{E}}, \overline{\mathbf{F}})$;

(c) si, en una carta y respecto de marcos locales $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r)$ y $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s)$, la expresión de $P$ es

$$(P\mathbf{u})^{\sim} = \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha D^\alpha \widetilde{u}, \qquad A_\alpha\colon U \longrightarrow M_{s\times r}(\mathbb{C}),$$

entonces, respecto de los marcos conjugados $(\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_r)$ y $(\overline{\mathbf{f}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{f}}_s)$,

$$(\overline{P}\mathbf{z})^{\sim} = \sum_{|\alpha|\leq m} \overline{A_\alpha}\, D^\alpha \widetilde{z};$$

(d) la conjugación conmuta con restricciones y satisface

$$\overline{Q \circ P} = \overline{Q} \circ \overline{P}, \qquad \overline{\mathrm{id}_{\mathbf{E}}} = \mathrm{id}_{\overline{\mathbf{E}}}.$$

En particular, si $P$ es invertible, entonces $\overline{P^{-1}} = (\overline{P})^{-1}$.

*Demostración.* La conjugación de secciones es una biyección antilineal, de modo que toda sección de $\overline{\mathbf{E}}$ se escribe de manera única como $\overline{\mathbf{u}}$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, la estructura escalar de $\overline{\mathbf{E}}$ da $\lambda\overline{\mathbf{u}} = \overline{\overline{\lambda}\mathbf{u}}$; por lo tanto,

$$\overline{P}(\lambda\overline{\mathbf{u}}) = \overline{P(\overline{\lambda}\mathbf{u})} = \overline{\overline{\lambda} P\mathbf{u}} = \lambda\overline{P\mathbf{u}}.$$

La aditividad se verifica del mismo modo.

Para la fórmula local, escribamos $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{r} z^j \overline{\mathbf{e}}_j$. Entonces $\mathbf{z} = \overline{\mathbf{u}}$ para $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{r} \overline{z^j}\mathbf{e}_j$. Al conjugar la expresión local de $P\mathbf{u}$ se obtiene

$$(\overline{P}\mathbf{z})^{\sim} = \overline{\sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha D^\alpha(\widetilde{\overline{z}})} = \sum_{|\alpha|\le m} \overline{A_\alpha} D^\alpha \widetilde{z}.$$

La caracterización local de los operadores diferenciales prueba entonces que $\overline{P}$ tiene orden a lo sumo $m$. La compatibilidad con restricciones es inmediata de la misma fórmula. Finalmente, para toda $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$\overline{Q \circ P}(\overline{\mathbf{u}}) = \overline{Q(P\mathbf{u})} = (\overline{Q} \circ \overline{P})(\overline{\mathbf{u}}),$$

y las afirmaciones sobre identidades e inversas se siguen de esta igualdad. □

## 8.2 Adjuntos hermitianos formales

En todo el caso complejo usamos métricas hermitianas lineales en la primera variable y conjugado-lineales en la segunda. Todas las integrales se entienden respecto de la medida de Riemann–Lebesgue $\lambda_{\mathbf{g}}$ construida en la Definición 2.15.5; en particular, no se requiere orientar $M$.

**Definición 8.2.1.** (Adjunto hermitiano formal) Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales reales con métricas fibradas, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o hermitianos, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Para $P \in \mathbf{PDO}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, un operador

$$P_h^* \in \mathbf{PDO}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$$

se llama *adjunto hermitiano formal* de $P$ si

$$\int_M \mathbf{h}_{\mathbf{F}}(P\mathbf{u}, \mathbf{v})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, P_h^*\mathbf{v})\, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

para todo $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$ y todo $\mathbf{v} \in \Gamma_c(\mathbf{F})$. En el caso real ésta es la noción real habitual.

**Lema 8.2.2.** (Unicidad) Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales reales con métricas fibradas o haces hermitianos. Un operador diferencial $P \in \mathbf{PDO}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ admite a lo sumo un adjunto hermitiano formal.

*Demostración.* Sean $S_1, S_2 \in \mathbf{PDO}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ dos adjuntos y fijemos $\mathbf{v} \in \Gamma_c(\mathbf{F})$. La localidad implica que $\mathbf{w} := (S_1 - S_2)\mathbf{v}$ pertenece a $\Gamma_c(\mathbf{E})$. Tomando $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ en la diferencia de las dos identidades de adjunción obtenemos

$$0 = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{w}, \mathbf{w})\, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

y, por positividad, $\mathbf{w} = 0$. Así, $S_1\mathbf{v} = S_2\mathbf{v}$ para toda sección compactamente soportada. Dada ahora $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{F})$ y $x \in M$, elegimos $\chi \in C_c^\infty(M)$ igual a uno en una vecindad de $x$. Por localidad, $(S_1 - S_2)\mathbf{v} = (S_1 - S_2)(\chi\mathbf{v})$ cerca de $x$, y el último miembro es cero. Como $x$ era arbitrario, $S_1 = S_2$. □

**Teorema 8.2.3.** (Existencia y fórmula local del adjunto hermitiano) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales reales con métricas fibradas o haces hermitianos. Sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Entonces existe un único $P_h^* \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{F},\mathbf{E})$.
Más precisamente, sea $\varphi\colon U \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ una carta, con funciones coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$, y elijamos marcos locales ortonormales (unitarios en el caso complejo) $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_s$ de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, respectivamente. Para una función escalar $a \in C^\infty(U,\mathbb{K})$ escribamos

$$D^\alpha_\varphi a := \left[D^\alpha (a \circ \varphi^{-1})\right] \circ \varphi.$$

Si las funciones $a^j_{\alpha i} \in C^\infty(U,\mathbb{K})$ están determinadas por

$$P\left(\sum_{i=1}^{r} u^i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{|\alpha|\le m} a^j_{\alpha i} D^\alpha_\varphi u^i\right)\mathbf{f}_j, \tag{8.8}$$

y $g_{ab} := \mathbf{g}(\partial_a,\partial_b)$ son los coeficientes coordenados de la métrica, entonces la expresión de $P_h^*$ respecto de los mismos marcos es

$$P_h^*\left(\sum_{j=1}^{s} v^j \mathbf{f}_j\right) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{j=1}^{s}\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|} D^\alpha_\varphi\left(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,\overline{a^j_{\alpha i}}\, v^j\right)\right]\mathbf{e}_i. \tag{8.9}$$

En el caso real, la barra no altera el coeficiente. Si los coeficientes se agrupan en el mapeo matricial

$$A_\alpha = (a^j_{\alpha i})\colon U \longrightarrow M_{s\times r}(\mathbb{K}),$$

su transpuesto conjugado punto a punto se denota $A^*_\alpha = \overline{A_\alpha}^{\,T}$.

*Demostración.* Fijemos una carta $\varphi\colon U \to \Omega$ y marcos locales ortonormales $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_s$ de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, respectivamente. La expresión del miembro derecho de (8.9) define un operador

$$Q_U\colon \Gamma(\mathbf{F}|_U) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}|_U).$$

En efecto, $\det(\mathbf{g})$ es suave y estrictamente positivo. Al desarrollar cada término mediante la regla de Leibniz para multiíndices, $Q_U\mathbf{v}$ depende de las derivadas coordenadas de las funciones $v^j$ de orden a lo sumo $m$. La caracterización local del Corolario 8.1.35 implica entonces que $Q_U \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{F}|_U,\mathbf{E}|_U)$.
Probemos la identidad local de adjunción. Sea $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E}|_U)$ y sea $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{F}|_U)$, y escribamos

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r} u^i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{s} v^j \mathbf{f}_j.$$

La imagen $\varphi(\operatorname{supp}\mathbf{u})$ es un compacto contenido en $\Omega$. Puesto que los marcos son ortonormales y la métrica hermitiana es lineal en la primera variable, la fórmula local de la medida de Riemann–Lebesgue y (8.8) dan

$$\int_U \mathbf{h}_\mathbf{F}(P\mathbf{u},\mathbf{v})\, d\lambda_\mathbf{g}$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega \big(a^j_{\alpha i}\circ\varphi^{-1}\big)D^\alpha\big(u^i\circ\varphi^{-1}\big)\overline{\big(v^j\circ\varphi^{-1}\big)}\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\circ\varphi^{-1}\big)\,d\lambda_n.$$

Fijemos $i$, $j$ y $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Podemos integrar $\alpha_a$ veces respecto de $x^a$, para cada $a$, porque $u^i\circ\varphi^{-1}$ tiene soporte compacto en $\Omega$. No aparece ningún término de frontera y cada integración introduce un signo menos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \big(a^j_{\alpha i}\circ\varphi^{-1}\big)D^\alpha\big(u^i\circ\varphi^{-1}\big)\overline{\big(v^j\circ\varphi^{-1}\big)}\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\circ\varphi^{-1}\big)\,d\lambda_n\\ &\quad=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega\big(u^i\circ\varphi^{-1}\big)D^\alpha\Big[\Big(a^j_{\alpha i}\,\overline{v^j}\,\sqrt{\det(\mathbf{g})}\Big)\circ\varphi^{-1}\Big]\,d\lambda_n.\end{aligned}$$

Todas las derivadas coordenadas son reales y $\sqrt{\det(\mathbf{g})}$ es real. En consecuencia,

$$D^\alpha\Big[\Big(a^j_{\alpha i}\,\overline{v^j}\,\sqrt{\det(\mathbf{g})}\Big)\circ\varphi^{-1}\Big]=\overline{D^\alpha\Big[\Big(\overline{a^j_{\alpha i}}\,v^j\,\sqrt{\det(\mathbf{g})}\Big)\circ\varphi^{-1}\Big]}.$$

Esta igualdad incluye el caso real, en el que la conjugación es la identidad. Al sustituirla, sumar en $i$, $j$ y $\alpha$, e insertar el factor $\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\big)^{-1}\sqrt{\det(\mathbf{g})}$, obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_U \mathbf{h}_\mathbf{F}(P\mathbf{u},\mathbf{v})\,d\lambda_\mathbf{g}\\ &\quad=\int_\Omega\sum_{i=1}^{r}\big(u^i\circ\varphi^{-1}\big)\overline{\left[\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\sum_{j=1}^{s}\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha_\varphi\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,\overline{a^j_{\alpha i}}\,v^j\Big)\right]\circ\varphi^{-1}}\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\circ\varphi^{-1}\big)\,d\lambda_n\\ &\quad=\int_U\mathbf{h}_\mathbf{E}(\mathbf{u},Q_U\mathbf{v})\,d\lambda_\mathbf{g}.\end{aligned}$$

Hemos probado una identidad ligeramente más fuerte que la requerida: sólo es necesario que $\mathbf{u}$ tenga soporte compacto en $U$; la sección $\mathbf{v}$ puede ser cualquier sección suave sobre $U$.

Veamos ahora que los operadores locales son compatibles. Sean $U$ y $V$ dos dominios coordenados con marcos ortonormales como los anteriores y sea $W=U\cap V$. Para $\mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E}|_W)$ y $\mathbf{v}\in\Gamma_c(\mathbf{F}|_W)$, las dos fórmulas ya demostradas dan

$$\int_W\mathbf{h}_\mathbf{E}\big(\mathbf{u},(Q_U|_W)\mathbf{v}\big)\,d\lambda_\mathbf{g}=\int_W\mathbf{h}_\mathbf{F}(P\mathbf{u},\mathbf{v})\,d\lambda_\mathbf{g}=\int_W\mathbf{h}_\mathbf{E}\big(\mathbf{u},(Q_V|_W)\mathbf{v}\big)\,d\lambda_\mathbf{g}.$$

Así, $Q_U|_W$ y $Q_V|_W$ son adjuntos formales del mismo operador $P|_W$. El Lema 8.2.2, aplicado a la variedad riemanniana $W$, implica que $Q_U|_W=Q_V|_W$. En particular, la igualdad no se presupone a partir de las expresiones coordenadas, sino que se deduce de la identidad integral que ambas satisfacen.

Podemos cubrir $M$ por una familia localmente finita $\{U_\ell\}_{\ell\in L}$ de dominios coordenados sobre los cuales $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ admiten marcos ortonormales. La compatibilidad en las intersecciones permite definir, para $\mathbf{v}\in\Gamma(\mathbf{F})$, una sección $P_h^*\mathbf{v}$ mediante

$$(P_h^*\mathbf{v})|_{U_\ell}:=Q_{U_\ell}(\mathbf{v}|_{U_\ell}).$$

Las secciones del miembro derecho coinciden en los traslapes, de modo que definen una única sección suave global. Como el orden de un operador diferencial se comprueba localmente, las fórmulas de los $Q_{U_\ell}$

muestran que

$$P_h^* \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{F},\mathbf{E}).$$

Resta verificar la identidad global. Sea $\{\chi_\ell\}_{\ell\in L}$ una partición suave de la unidad subordinada a $\{U_\ell\}_{\ell\in L}$ y sean $\mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E})$ y $\mathbf{v}\in\Gamma_c(\mathbf{F})$. La familia $\{\operatorname{supp}(\chi_\ell)\}_{\ell\in L}$ es localmente finita. Para cada punto del compacto $\operatorname{supp}(\mathbf{u})$ existe, por lo tanto, una vecindad que intersecta sólo un número finito de esos soportes; una subcubierta finita de tales vecindades muestra que el conjunto

$$L_{\mathbf{u}} := \{\ell\in L \mid \operatorname{supp}(\mathbf{u})\cap\operatorname{supp}(\chi_\ell)\neq\varnothing\}$$

es finito. En consecuencia,

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell\in L_{\mathbf{u}}} \chi_\ell \mathbf{u}.$$

Además, $\chi_\ell\mathbf{u}$ tiene soporte compacto contenido en $U_\ell$. La localidad de $P$ implica

$$\operatorname{supp}\big(P(\chi_\ell\mathbf{u})\big)\subseteq\operatorname{supp}(\chi_\ell\mathbf{u})\subseteq U_\ell.$$

Podemos aplicar en $U_\ell$ la identidad local, en la cual la primera sección tiene soporte compacto y la segunda es $\mathbf{v}|_{U_\ell}$. Así,

$$\begin{aligned}\int_M \mathbf{h}_{\mathbf{F}}(P\mathbf{u},\mathbf{v})\,d\lambda_{\mathbf{g}} &= \sum_{\ell\in L_{\mathbf{u}}}\int_{U_\ell}\mathbf{h}_{\mathbf{F}}\big(P(\chi_\ell\mathbf{u}),\mathbf{v}\big)\,d\lambda_{\mathbf{g}}\\ &= \sum_{\ell\in L_{\mathbf{u}}}\int_{U_\ell}\mathbf{h}_{\mathbf{E}}\big(\chi_\ell\mathbf{u},P_h^*\mathbf{v}\big)\,d\lambda_{\mathbf{g}}\\ &= \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},P_h^*\mathbf{v})\,d\lambda_{\mathbf{g}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P_h^*$ es un adjunto hermitiano formal de $P$. Su unicidad es la del Lema 8.2.2. □

**Observación 8.2.4.** (Adjunto formal en presencia de frontera) Si $M$ tiene frontera suave y los coeficientes de $P$, las métricas fibradas y la métrica de la base son suaves hasta ella, la misma fórmula local define un operador diferencial $P_h^*$ suave hasta la frontera. En efecto, en una carta de frontera el determinante de la métrica sigue siendo positivo, y todas las derivadas de los coeficientes de (8.9) son suaves hasta la parte plana. En los traslapes, las expresiones coinciden primero en el interior por la unicidad ya probada y después en la frontera por continuidad. La identidad que caracteriza este adjunto formal se exige para secciones de prueba con soporte compacto contenido en $\operatorname{Int}(M)$.

Cuando las secciones alcanzan la frontera, la integración por partes puede producir términos adicionales, como los que calcularemos para las derivadas covariantes. El operador diferencial formal queda determinado antes de elegir condiciones de frontera. Su realización como operador no acotado en $L^2$, y el dominio de su adjunto de Hilbert, requieren especificar un dominio de secciones; no se identifican sólo mediante la fórmula diferencial.

**Proposición 8.2.5.** (Reglas del adjunto hermitiano formal) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{G}\to M$ haces vectoriales reales con métricas fibradas o haces hermitianos, y sean $P\in\mathbf{PDO}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $Q\in\mathbf{PDO}(\mathbf{F},\mathbf{G})$. Entonces:

(a) $(Q \circ P)_h^* = P_h^* \circ Q_h^*$;

(b) para $R \in \mathbf{PDO}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(P + \lambda R)_h^* = P_h^* + \overline{\lambda}\, R_h^*,$$

donde $\overline{\lambda} = \lambda$ en el caso real;

(c) si $M_f$ denota la multiplicación por $f \in C^\infty(M,\mathbb{K})$, entonces $(M_f)_h^* = M_{\overline{f}}$;

(d) para todo abierto $U \subseteq M$,

$$(P|_U)_{h|_U}^* = (P_h^*)|_U;$$

(e) si $\mathbf{E},\mathbf{F}$ son complejos y se dotan $\overline{\mathbf{E}},\overline{\mathbf{F}}$ de las métricas conjugadas, entonces

$$(\overline{P})_{\overline{h}}^* = \overline{P_h^*}.$$

*Demostración.* La primera identidad se obtiene trasladando sucesivamente $Q$ y $P$ en la integral; los soportes siguen siendo compactos por localidad. Para la segunda, la linealidad en la primera variable y la conjugado-linealidad en la segunda dan

$$\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, \overline{\lambda} R_h^* \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, R_h^* \mathbf{v}).$$

La tercera se prueba de igual modo. La cuarta se sigue aplicando la identidad integral a secciones compactamente soportadas en $U$ y usando unicidad.
Para la última, escribamos las métricas conjugadas como $\mathbf{h}_{\overline{\mathbf{E}}}(\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{w}}) = \overline{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{w})}$ y $\mathbf{h}_{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{\mathbf{v}},\overline{\mathbf{z}}) = \overline{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}(\mathbf{v},\mathbf{z})}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_M \mathbf{h}_{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{P}\,\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{v}})\, d\lambda_{\mathbf{g}} &= \overline{\int_M \mathbf{h}_{\mathbf{F}}(P\mathbf{u},\mathbf{v})\, d\lambda_{\mathbf{g}}} \\
&= \overline{\int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, P_h^*\mathbf{v})\, d\lambda_{\mathbf{g}}} \\
&= \int_M \mathbf{h}_{\overline{\mathbf{E}}}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{P_h^*}\,\overline{\mathbf{v}})\, d\lambda_{\mathbf{g}},
\end{aligned}$$

y la unicidad concluye. □

**Ejercicio 8.2.6.** Verifique directamente la regla $(P + \lambda R)_h^* = P_h^* + \overline{\lambda} R_h^*$ y explique por qué la barra es indispensable cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Definición 8.2.7.** (Operador formalmente autoadjunto) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial real con métrica fibrada o un haz hermitiano. Un operador $P \in \mathbf{PDO}(\mathbf{E},\mathbf{E})$ es *formalmente autoadjunto* si $P = P_h^*$.

Finalizamos esta sección con algunos ejemplos que ilustran el concepto de adjunto hermitiano formal. Comenzamos con la derivada covariante direccional.

**Proposición 8.2.8.** (Adjunto formal de $\nabla_{\mathbf{X}}$) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana (con o sin frontera $\partial M$) y

sea $\nabla$ la conexión de Levi–Civita. Sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial suave fijo. Entonces el operador

$$\nabla_{\mathbf{X}} \colon \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \qquad \mathbf{Y} \longmapsto \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},$$

es un operador diferencial parcial de orden 1, es decir

$$\nabla_{\mathbf{X}} \in \mathbf{PDO}^{(1)}(TM, TM).$$

Además, para cualesquiera campos vectoriales $\mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}_c(M)$ se cumple

$$\int_M \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M \mathbf{g}\big(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\big)\, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M (\operatorname{div}\mathbf{X})\,\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\,\mathbf{g}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\nu})\, d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}}, \tag{8.10}$$

donde, si $\partial M \neq \varnothing$, $\boldsymbol{\nu}$ es la normal unitaria exterior a $\partial M$.

*Demostración.* Primero verificamos que $\nabla_{\mathbf{X}}$ es un operador diferencial parcial de orden 1 en el sentido de los conmutadores.
Sea $f \in C^\infty(M)$ y $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$. Usando la regla de Leibniz para la conexión se obtiene

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = \mathbf{X}(f)\,\mathbf{Y} + f\,\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}.$$

Por lo tanto,

$$[\nabla_{\mathbf{X}}, f]\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) - f\,\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \mathbf{X}(f)\mathbf{Y}.$$

Esto depende únicamente de $\mathbf{Y}$ y no de sus derivadas, por lo que el operador $[\nabla_{\mathbf{X}}, f]$ es $C^\infty(M)$-lineal. En consecuencia, $\nabla_{\mathbf{X}} \in \mathbf{PDO}^{(1)}(TM, TM)$.
Demostraremos ahora la identidad de integración por partes. Sean $\mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}_c(M)$ y definamos

$$f := \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}), \qquad \mathbf{V} := f\mathbf{X}.$$

Por la regla de Leibniz para la divergencia (Proposición 2.16.6),

$$\operatorname{div}(f\mathbf{X}) = \mathbf{X}(f) + f\,\operatorname{div}\mathbf{X}.$$

Como la conexión de Levi–Civita es compatible con la métrica,

$$\mathbf{X}(f) = \mathbf{X}\big(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\big) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}).$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{div}(f\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) + (\operatorname{div}\mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}).$$

Integramos en $M$ y aplicamos el teorema de la divergencia:

$$\int_M \operatorname{div}(f\mathbf{X})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M} \mathbf{g}(f\mathbf{X}, \boldsymbol{\nu})\, d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}} = \int_{\partial M} \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\,\mathbf{g}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\nu})\, d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}}.$$

Reordenando los términos obtenemos (8.10). □

**Observación 8.2.9.** (Adjunto formal de $\nabla_{\mathbf{X}}$) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Para $\mathbf{Y},\mathbf{Z} \in \mathfrak{X}_c(M)$, la identidad (8.10) toma la forma

$$\int_M \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{Z})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \mathbf{g}\big(\mathbf{Y}, -\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - (\operatorname{div}\mathbf{X})\mathbf{Z}\big)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

En este sentido, el adjunto formal del operador diferencial parcial

$$\nabla_{\mathbf{X}} \colon \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

está dado por

$$\nabla^*_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} = -\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - (\operatorname{div}\mathbf{X})\mathbf{Z}.$$

Conviene distinguir este operador del adjunto formal global

$$\nabla^* \colon \Gamma(T^*M \otimes TM) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

correspondiente a la derivada covariante considerada como operador diferencial de primer orden entre haces vectoriales. Más adelante deduciremos una fórmula de integración por partes que permitirá calcular explícitamente $\nabla^*$.

Una vez introducido el adjunto formal de la derivada covariante, podemos definir un operador de segundo orden fundamental en geometría riemanniana.

**Definición 8.2.10.** (Laplaciano de Bochner) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\pi_{\mathbf{E}} \colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Definimos el laplaciano de Bochner de una sección $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$ como

$$\Delta_B \mathbf{u} := \nabla^{\mathbf{E}*}\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u},$$

donde $\nabla^{\mathbf{E}*}$ denota el adjunto formal de

$$\nabla^{\mathbf{E}} \colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes \mathbf{E}).$$

**Observación 8.2.11.** El laplaciano de Bochner es formalmente autoadjunto, como muestra la identidad

$$(\nabla^{\mathbf{E}*}\nabla^{\mathbf{E}})^* = (\nabla^{\mathbf{E}})^*(\nabla^{\mathbf{E}*})^* = \nabla^{\mathbf{E}*}\nabla^{\mathbf{E}},$$

pues $(\nabla^{\mathbf{E}*})^* = \nabla^{\mathbf{E}}$.

Además del laplaciano de Bochner, hay otros laplacianos importantes como el Laplaciano de Hodge–DeRham que se define para espacios de formas diferenciales:

**Definición 8.2.12.** (Espacio de formas diferenciales) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera de dimensión $n$. Recordemos que el espacio de $k$-formas diferenciales está definido por

$$\Omega^k(M) := \Gamma\big(\Lambda^k T^*M\big), \qquad k \in \{0,\dots,n\}.$$

Definimos además el espacio graduado de todas las formas como la suma directa finita de $C^\infty(M)$-módulos

$$\Omega^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M).$$

Sea ahora $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana orientada sin frontera. La métrica riemanniana induce un producto interno puntual en cada haz exterior $\Lambda^k T^*M$, que denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{g}}$, y la medida riemanniana $d\lambda_{\mathbf{g}}$ permite definir el producto interno global

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{L^2(M, \Lambda^k T^*M)} := \int_M \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \Omega^k_c(M).$$

Recordemos que la derivada exterior

$$d \colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

es un operador diferencial parcial de orden 1.

Si $f \in C^\infty(M)$ y $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^k(M)$, por la regla de Leibniz se tiene

$$d(f\boldsymbol{\alpha}) = df \wedge \boldsymbol{\alpha} + f\, d\boldsymbol{\alpha},$$

y por lo tanto

$$[d, f]\boldsymbol{\alpha} = d(f\boldsymbol{\alpha}) - f\, d\boldsymbol{\alpha} = df \wedge \boldsymbol{\alpha}.$$

Esto depende únicamente de $\boldsymbol{\alpha}$ y no de sus derivadas, por lo que el operador $[d, f]$ es $C^\infty(M)$-lineal. En consecuencia,

$$d \in \mathbf{PDO}^{(1)}\big(\Lambda^k T^*M, \Lambda^{k+1} T^*M\big).$$

**Definición 8.2.13.** (Codiferencial) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana orientada sin frontera de dimensión $n$. El adjunto formal de la derivada exterior

$$d \colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

se denota por

$$\delta \colon \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$$

y se llama el codiferencial.

En términos del operador estrella de Hodge $*$, está dado sobre $\Omega^{k+1}(M)$ por

$$\delta = (-1)^{k+1} \, *^{-1} \, d \, *.$$

Este adjunto formal está determinado por la regla

$$\int_M \langle d\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \boldsymbol{\alpha}, \delta\boldsymbol{\beta} \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

para $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^k_c(M)$ y $\boldsymbol{\beta} \in \Omega^{k+1}_c(M)$.

**Definición 8.2.14.** (Laplaciano de Hodge–DeRham) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana orientada sin frontera. Definimos el laplaciano de Hodge–DeRham como el operador de segundo orden

$$\Delta := d\delta + \delta d \colon \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(M).$$

**Proposición 8.2.15.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana orientada sin frontera. El laplaciano de Hodge–DeRham $\Delta$ es formalmente autoadjunto.

*Demostración.* Se tiene

$$(d\delta)^* = \delta^* d^* = d\delta, \qquad (\delta d)^* = d^*\delta^* = \delta d,$$

pues $\delta = d^*$ y $(d^*)^* = d$. Por lo tanto

$$\Delta^* = (d\delta + \delta d)^* = d\delta + \delta d = \Delta.$$

□

El operador diferencial exterior clásico puede extenderse de manera natural al contexto de haces vectoriales.

Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera de dimensión $n$. El espacio de $k$-formas diferenciales suaves se define como

$$\Omega^k(M) := \Gamma\left(\Lambda^k T^*M\right),$$

es decir, el espacio de secciones suaves del haz $\Lambda^k T^*M$. El espacio total de formas se define como la suma directa de $C^\infty(M)$-módulos

$$\Omega^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M).$$

Si $(x^1,\dots,x^n)$ son coordenadas locales, utilizaremos la notación de multiíndices crecientes

$$I = (i_1,\dots,i_k), \qquad 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n,$$

y escribiremos

$$\mathbf{d}x^I := \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_k}.$$

Con esta notación, una $k$-forma localmente puede expresarse como

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \omega_I \, \mathbf{d}x^I,$$

y la derivada exterior clásica toma la forma

$$d\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \omega_I \, \mathbf{d}x^I\right) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} d\omega_I \wedge \mathbf{d}x^I.$$

Sea ahora $\pi_{\mathbf{E}} \colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $r$. Esto permite generalizar el concepto de forma diferencial considerando formas con valores en $\mathbf{E}$.

**Definición 8.2.16.** (Formas diferenciales con valores en un haz) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $k \geq 0$. Definimos

$$\Omega^k(M, \mathbf{E}) := \Gamma\left(\Lambda^k T^*M \otimes \mathbf{E}\right).$$

El espacio total se define como la suma directa de $C^\infty(M)$-módulos

$$\Omega^\bullet(M, \mathbf{E}) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M, \mathbf{E}).$$

Obsérvese que si $\mathbf{E} = M \times \mathbb{R}$ es el haz trivial, se recupera el caso clásico:

$$\Omega^k(M, \mathbf{E}) \cong \Omega^k(M).$$

Para definir una derivada exterior en este contexto es necesario disponer de una conexión en el haz $\mathbf{E}$.

**Definición 8.2.17.** (Conexión inducida) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $\nabla^{\mathbf{E}}$ una conexión en $\mathbf{E}$. Fijemos además una conexión auxiliar $\nabla^M$ en $TM$, y denotemos del mismo modo sus conexiones inducidas en los haces tensoriales construidos a partir de $TM$ y $T^*M$. La conexión producto $\nabla$ en $\Lambda^k T^*M \otimes \mathbf{E}$ se define para cada campo vectorial $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ mediante la regla de Leibniz

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{s}) = \nabla^M_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{s} + \boldsymbol{\alpha} \otimes \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} \mathbf{s},$$

para $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^k(M)$ y $\mathbf{s} \in \Gamma(\mathbf{E})$.

El operador de alternación permitirá relacionar la conexión producto con la derivada exterior que definiremos a continuación.

**Definición 8.2.18.** (Operador de alternación) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea

$$\mathbf{T} \in \Gamma\left(T^{(0,k+1)}(TM) \otimes \mathbf{E}\right).$$

Definimos

$$\mathrm{Alt}(\mathbf{T}) \in \Gamma\left(\Lambda^{k+1} T^*M \otimes \mathbf{E}\right)$$

por

$$\mathrm{Alt}(\mathbf{T})(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k+1}) := \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \mathbf{T}(\mathbf{X}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{X}_{\sigma(k+1)}),$$

para campos vectoriales $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$.

**Definición 8.2.19.** (Derivada exterior con valores en un haz) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave sobre $\mathbb{K}$ y sea $\nabla^{\mathbf{E}}$ una conexión en $\mathbf{E}$. Para cada $k \geq 0$, definimos

$$d^{\mathbf{E}} \colon \Omega^k(M, \mathbf{E}) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M, \mathbf{E})$$

como el operador $\mathbb{K}$-lineal determinado localmente por la regla

$$d^{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{s}) = d\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{s} + (-1)^k\boldsymbol{\alpha}\wedge\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s},$$

para toda $k$-forma escalar suave $\boldsymbol{\alpha}$ y toda sección suave $\mathbf{s}$ de $\mathbf{E}$ definidas en un mismo abierto. Aquí el producto cuña con una forma de valores en $\mathbf{E}$ se obtiene por linealidad a partir de

$$\boldsymbol{\alpha}\wedge(\boldsymbol{\beta}\otimes\mathbf{s}) = (\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})\otimes\mathbf{s}.$$

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, las formas escalares pueden ser complejas y $d$ se extiende por $\mathbb{C}$-linealidad. En grado cero se recupera la conexión, $d^{\mathbf{E}}\mathbf{s}=\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s}$, y en grado $n=\dim M$ el operador toma valores en $\Omega^{n+1}(M,\mathbf{E})=\{0\}$.

Comprobemos que esta regla determina un operador global, sin elegir una conexión en $TM$. Para una función escalar suave $f$, las reglas de Leibniz para $d$ y $\nabla^{\mathbf{E}}$ dan

$$d(f\boldsymbol{\alpha})\otimes\mathbf{s} + (-1)^k(f\boldsymbol{\alpha})\wedge\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s} = f\,d\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{s} + (df\wedge\boldsymbol{\alpha})\otimes\mathbf{s} + (-1)^k f\boldsymbol{\alpha}\wedge\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s},$$

$$d\boldsymbol{\alpha}\otimes(f\mathbf{s}) + (-1)^k\boldsymbol{\alpha}\wedge\nabla^{\mathbf{E}}(f\mathbf{s}) = f\,d\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{s} + (-1)^k(\boldsymbol{\alpha}\wedge df)\otimes\mathbf{s} + (-1)^k f\boldsymbol{\alpha}\wedge\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s}.$$

Como $df\wedge\boldsymbol{\alpha} = (-1)^k\boldsymbol{\alpha}\wedge df$, ambas expresiones coinciden. La regla respeta, por tanto, la relación $(f\boldsymbol{\alpha})\otimes\mathbf{s} = \boldsymbol{\alpha}\otimes(f\mathbf{s})$.

En un abierto $U$ con un marco $(\mathbf{e}_a)_{a=1}^r$, toda forma $\boldsymbol{\omega}\in\Omega^k(U,\mathbf{E})$ se escribe de manera única como $\boldsymbol{\omega}=\sum_{a=1}^r\boldsymbol{\alpha}^a\otimes\mathbf{e}_a$. Definimos su derivada aplicando la regla a cada sumando. Si $\mathbf{s}=\sum_{a=1}^r f^a\mathbf{e}_a$, la identidad anterior y la aditividad muestran que el operador así definido satisface la misma regla sobre $\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{s}$. Al cambiar a otro marco, cada uno de sus elementos es una combinación suave de los $\mathbf{e}_a$; al aplicar esa regla a cada término de la nueva representación se obtiene, por consiguiente, el mismo resultado. La construcción también conmuta con las restricciones, pues $d$ y $\nabla^{\mathbf{E}}$ lo hacen. Los operadores locales coinciden entonces en las intersecciones y definen una única forma suave global $d^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\omega}$. Esta construcción prueba la existencia, la unicidad y la $\mathbb{K}$-linealidad anunciadas, sin suponer que el haz admita un marco global.

En coordenadas locales, si $(\mathbf{e}_a)_{a=1}^r$ es un marco de $\mathbf{E}$ y

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{a=1}^r \omega_I^a\,\mathbf{d}x^I\otimes\mathbf{e}_a,$$

entonces

$$d^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\omega} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{a=1}^r\left(d\omega_I^a + \sum_{b=1}^r\theta_b^a\,\omega_I^b\right)\wedge\mathbf{d}x^I\otimes\mathbf{e}_a,$$

donde las 1-formas de conexión están dadas por

$$\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{e}_b = \sum_{a=1}^r\theta_b^a\otimes\mathbf{e}_a.$$

En efecto, $d(\mathbf{d}x^I)=0$ y $(-1)^k\mathbf{d}x^I\wedge\theta_b^a = \theta_b^a\wedge\mathbf{d}x^I$; al aplicar la definición a cada término de $\boldsymbol{\omega}$ se obtiene exactamente esta expresión.

Relacionemos ahora esta definición con la alternación. Si la conexión auxiliar $\nabla^M$ es libre de torsión y $\nabla$ es la

conexión producto de la Definición 8.2.17, entonces

$$d^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\omega} = (k+1)\,\mathrm{Alt}(\nabla\boldsymbol{\omega}).$$

Para demostrarlo, observemos primero que $\nabla\boldsymbol{\omega}$ es alternante en sus últimas $k$ entradas. En la definición de Alt, agrupar las permutaciones según la primera entrada deja $k!$ sumandos iguales en cada grupo. Por ello,

$$(k+1)\,\mathrm{Alt}(\nabla\boldsymbol{\omega})(\mathbf{X}_0,\dots,\mathbf{X}_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\nabla_{\mathbf{X}_i}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{X}_0,\dots,\widehat{\mathbf{X}_i},\dots,\mathbf{X}_k),$$

donde el acento circunflejo indica que se omite esa entrada.

Para una forma escalar $\boldsymbol{\alpha}$, esta suma es $d\boldsymbol{\alpha}$ cuando $\nabla^M$ es libre de torsión. Hagamos explícita la cancelación que lo justifica. En coordenadas escribimos $\nabla^M_{\partial_\ell}\partial_i = \sum_{j=1}^{n}\Gamma^j_{\ell i}\partial_j$; como $[\partial_\ell,\partial_i]=0$, la torsión nula da $\Gamma^j_{\ell i}=\Gamma^j_{i\ell}$. La conexión dual satisface

$$\nabla^M_{\partial_\ell}\mathbf{d}x^j = -\sum_{i=1}^{n}\Gamma^j_{\ell i}\mathbf{d}x^i.$$

Al derivar $\boldsymbol{\alpha} = \sum_{I\in\mathcal{J}_{n,k}}\alpha_I\mathbf{d}x^I$, donde $\mathcal{J}_{n,k} := \{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,n\}^k \mid i_1<\cdots<i_k\}$, los términos que derivan los coeficientes producen $\sum_{I\in\mathcal{J}_{n,k}} d\alpha_I\wedge\mathbf{d}x^I$. En los términos que derivan uno de los factores $\mathbf{d}x^j$, la alternación reúne, salvo el signo de la posición de ese factor, la suma

$$\sum_{\ell,i=1}^{n}\Gamma^j_{\ell i}\,\mathbf{d}x^\ell\wedge\mathbf{d}x^i = \frac{1}{2}\sum_{\ell,i=1}^{n}(\Gamma^j_{\ell i}-\Gamma^j_{i\ell})\,\mathbf{d}x^\ell\wedge\mathbf{d}x^i = 0.$$

Por tanto,

$$(k+1)\,\mathrm{Alt}(\nabla^M\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{I\in\mathcal{J}_{n,k}} d\alpha_I\wedge\mathbf{d}x^I = d\boldsymbol{\alpha}.$$

En grado cero no hay factores covectoriales que derivar y la misma identidad es simplemente $\nabla^M f = df$.

Apliquemos ahora la conexión producto a $\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{s}$, y escribamos localmente $\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s} = \sum_{a=1}^{r}\boldsymbol{\eta}^a\otimes\mathbf{e}_a$. Los términos que derivan $\boldsymbol{\alpha}$ dan $d\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{s}$ por lo anterior. Los que derivan $\mathbf{s}$ dan, por la fórmula de la suma alternada,

$$\sum_{a=1}^{r}(\boldsymbol{\eta}^a\wedge\boldsymbol{\alpha})\otimes\mathbf{e}_a = (-1)^k\boldsymbol{\alpha}\wedge\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s}.$$

En consecuencia,

$$(k+1)\,\mathrm{Alt}\big(\nabla(\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{s})\big) = d\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{s} + (-1)^k\boldsymbol{\alpha}\wedge\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{s} = d^{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{s}).$$

Toda forma con valores en $\mathbf{E}$ es localmente una suma finita de estos tensores, así que la identidad vale para cualquier $\boldsymbol{\omega}\in\Omega^k(M,\mathbf{E})$. En particular, el resultado de alternar no depende de la conexión auxiliar libre de torsión elegida. Puede tomarse, por ejemplo, la conexión de Levi–Civita de una métrica riemanniana auxiliar, pero esa métrica no forma parte de los datos que definen $d^{\mathbf{E}}$. La condición de torsión nula se impone sólo a $\nabla^M$, no a la conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ del haz.

**Proposición 8.2.20.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con conexión. El operador

$$d^{\mathbf{E}} \colon \Omega^k(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M,\mathbf{E})$$

es un operador diferencial parcial de orden a lo sumo 1.

*Demostración.* La regla que define $d^{\mathbf{E}}$ y la regla de Leibniz para $d$ implican, primero sobre tensores simples y después por linealidad, que

$$d^{\mathbf{E}}(f\omega) = df \wedge \omega + f\, d^{\mathbf{E}}\omega.$$

Así, $[d^{\mathbf{E}}, f](\omega) = df \wedge \omega$. Este conmutador es $C^\infty(M)$-lineal y, por tanto, de orden 0. La definición recursiva de operador diferencial muestra que $d^{\mathbf{E}} \in \mathbf{PDO}^{(1)}$, como se quería. □

La composición de $d^{\mathbf{E}}$ consigo mismo está controlada por la curvatura de la conexión.

**Definición 8.2.21.** (Curvatura de una conexión) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $\nabla^{\mathbf{E}}$ una conexión en $\mathbf{E}$. Definimos su curvatura como el campo tensorial

$$\mathbf{R}^{\mathbf{E}} \in \Gamma\Big(\Lambda^2 T^*M \otimes \operatorname{End}(\mathbf{E})\Big)$$

dado por

$$\mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}} - \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}}\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}} - \nabla^{\mathbf{E}}_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]},$$

para campos vectoriales $\mathbf{X},\mathbf{Y}$.

**Lema 8.2.22.** (Derivada covariante de la curvatura) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. La conexión producto en $\Lambda^2 T^*M \otimes \operatorname{End}(\mathbf{E})$ determina la derivada covariante de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$. Para cualesquiera $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}^{\mathbf{E}})(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \nabla^{\operatorname{End}(\mathbf{E})}_{\mathbf{Z}}\big(\mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\big) - \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\nabla^M_{\mathbf{Z}}\mathbf{X},\mathbf{Y}) - \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\nabla^M_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y}). \tag{8.11}$$

En consecuencia, para toda sección $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$\begin{aligned}\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Z}}\big(\mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{v}\big) = {}& (\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}^{\mathbf{E}})(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{v} + \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\nabla^M_{\mathbf{Z}}\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{v} \\ & + \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\nabla^M_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y})\mathbf{v} + \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{Z}}\mathbf{v}.\end{aligned} \tag{8.12}$$

*Demostración.* La primera identidad es la fórmula de la conexión inducida en un 2-tensor covariante con valores en $\operatorname{End}(\mathbf{E})$. Para la segunda aplicamos la regla de Leibniz a la evaluación paralela

$$\operatorname{End}(\mathbf{E}) \otimes \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}, \qquad (A,\mathbf{v}) \longmapsto A\mathbf{v},$$

y después sustituimos (8.11). □

**Proposición 8.2.23.** (Curvatura de los haces tensoriales e identidad de Ricci) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera con conexión de Levi–Civita $\nabla^M$, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con

conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Para $q \in \mathbb{N}_0$, pongamos

$$\mathbf{F}_q := T^{(0,q)}(TM) \otimes \mathbf{E}$$

y equipemos $\mathbf{F}_q$ con la conexión producto inducida. Si $\mathbf{T} \in \Gamma(\mathbf{F}_q)$, entonces, para cualesquiera $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_q \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{R}^{\mathbf{F}_q}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{T}\big)(\mathbf{Z}_1,\ldots,\mathbf{Z}_q) &= \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\big(\mathbf{T}(\mathbf{Z}_1,\ldots,\mathbf{Z}_q)\big) \\ &\quad - \sum_{a=1}^{q} \mathbf{T}(\mathbf{Z}_1,\ldots,\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}_a,\ldots,\mathbf{Z}_q).\end{aligned} \tag{8.13}$$

Cuando $q = 0$, la suma se interpreta como vacía y $\mathbf{R}^{\mathbf{F}_0} = \mathbf{R}^{\mathbf{E}}$.
Además, las dos primeras entradas de la segunda derivada covariante satisfacen la identidad de Ricci

$$\begin{aligned}&(\nabla^2\mathbf{T})(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}_1,\ldots,\mathbf{Z}_q) - (\nabla^2\mathbf{T})(\mathbf{Y},\mathbf{X},\mathbf{Z}_1,\ldots,\mathbf{Z}_q) \\ &\qquad = \big(\mathbf{R}^{\mathbf{F}_q}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{T}\big)(\mathbf{Z}_1,\ldots,\mathbf{Z}_q).\end{aligned} \tag{8.14}$$

En particular, si $\mathbf{A} \in \Gamma(T^*M \otimes \mathbf{E})$, entonces

$$\big(\mathbf{R}^{T^*M\otimes\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{A}\big)(\mathbf{Z}) = \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{A}(\mathbf{Z}) - \mathbf{A}\big(\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}\big). \tag{8.15}$$

*Demostración.* Comenzamos con la curvatura de un producto tensorial. Si $\mathbf{G}, \mathbf{H} \to M$ son haces con conexión y $\mathbf{s} \in \Gamma(\mathbf{G})$, $\mathbf{t} \in \Gamma(\mathbf{H})$, la regla de Leibniz aplicada dos veces a la definición de curvatura da

$$\mathbf{R}^{\mathbf{G}\otimes\mathbf{H}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})(\mathbf{s}\otimes\mathbf{t}) = \mathbf{R}^{\mathbf{G}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{s}\otimes\mathbf{t} + \mathbf{s}\otimes\mathbf{R}^{\mathbf{H}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{t}.$$

Los términos mixtos se cancelan por pares. Como las secciones tensoriales simples generan localmente $\Gamma(\mathbf{G}\otimes\mathbf{H})$, la identidad vale para toda sección.
Para la conexión inducida en el dual, la definición y la regla de Leibniz para la evaluación implican

$$\big(\mathbf{R}^{\mathbf{G}^*}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\boldsymbol{\alpha}\big)(\mathbf{s}) = -\boldsymbol{\alpha}\big(\mathbf{R}^{\mathbf{G}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{s}\big).$$

Aplicamos estas dos fórmulas a cada factor de $T^{(0,q)}(TM) = (T^*M)^{\otimes q}$. La curvatura $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ actúa en el factor $\mathbf{E}$, mientras que la curvatura de cada factor $T^*M$ actúa con signo negativo sobre la entrada correspondiente. Esto produce exactamente (8.13).
Probemos ahora (8.14). Por la fórmula de la segunda derivada covariante de la Proposición 2.4.29, considerada ahora para la sección $\mathbf{T}$ del haz $\mathbf{F}_q$, se tiene

$$(\nabla^2\mathbf{T})(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \nabla^{\mathbf{F}_q}_{\mathbf{X}}\nabla^{\mathbf{F}_q}_{\mathbf{Y}}\mathbf{T} - \nabla^{\mathbf{F}_q}_{\nabla^M_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}}\mathbf{T}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\nabla^2\mathbf{T})(\mathbf{X},\mathbf{Y}) - (\nabla^2\mathbf{T})(\mathbf{Y},\mathbf{X}) &= \nabla^{\mathbf{F}_q}_{\mathbf{X}}\nabla^{\mathbf{F}_q}_{\mathbf{Y}}\mathbf{T} \\ &\quad - \nabla^{\mathbf{F}_q}_{\mathbf{Y}}\nabla^{\mathbf{F}_q}_{\mathbf{X}}\mathbf{T} \\ &\quad - \nabla^{\mathbf{F}_q}_{\nabla^M_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}-\nabla^M_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}}\mathbf{T}.\end{aligned}$$

La conexión de Levi–Civita es libre de torsión, de modo que $\nabla^M_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla^M_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X},\mathbf{Y}]$. En consecuencia, el miembro derecho es

$$\nabla^{\mathbf{F}_q}_{\mathbf{X}}\nabla^{\mathbf{F}_q}_{\mathbf{Y}}\mathbf{T} - \nabla^{\mathbf{F}_q}_{\mathbf{Y}}\nabla^{\mathbf{F}_q}_{\mathbf{X}}\mathbf{T} - \nabla^{\mathbf{F}_q}_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{T} = \mathbf{R}^{\mathbf{F}_q}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{T}.$$

Evaluar esta igualdad en $\mathbf{Z}_1,\dots,\mathbf{Z}_q$ prueba (8.14). Finalmente, (8.15) es el caso $q = 1$ de (8.13). □

**Proposición 8.2.24.** (Antiautoadjunción de la curvatura de una conexión métrica) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $(\mathbf{E},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}) \to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y sea $\nabla^{\mathbf{E}}$ una conexión compatible con $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Entonces, para cualesquiera $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ y $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$\Big\langle \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{u},\mathbf{v}\Big\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + \Big\langle \mathbf{u},\mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{v}\Big\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = 0. \tag{8.16}$$

En particular, $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\colon \mathbf{E}_x \longrightarrow \mathbf{E}_x$ es antiautoadjunto en cada fibra.

*Demostración.* La compatibilidad métrica da

$$\mathbf{X}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = \langle \nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + \langle \mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Aplicamos esta identidad sucesivamente con $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$, restamos las dos expresiones obtenidas y sustraemos la derivada en la dirección $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$. Los términos mixtos se cancelan y el miembro izquierdo es

$$\big(\mathbf{XY} - \mathbf{YX} - [\mathbf{X},\mathbf{Y}]\big)\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = 0.$$

El miembro derecho es precisamente

$$\langle \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + \langle \mathbf{u},\mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Esto prueba (8.16). □

La expresión de la curvatura en un marco síncrono admite una fórmula integral que será útil al estudiar haces sobre variedades de geometría acotada.

**Proposición 8.2.25.** (Fórmula de curvatura en un marco síncrono) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $p \in M$, sea $U$ una vecindad normal de $p$ y sea $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ un marco síncrono centrado en $p$. En las coordenadas normales $x = (x^1,\dots,x^n)$, escribamos

$$\nabla^{\mathbf{E}} = d + \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu\, \mathbf{d}x^\mu,$$

y representemos la curvatura por

$$\mathbf{R}^{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\sum_{\nu,\mu=1}^{n} F_{\nu\mu}\, \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\mu.$$

Entonces, para cada $\mu \in \{1,\dots,n\}$ y cada $x$ en el dominio de la carta,

$$A_\mu(x) = \int_0^1 t \sum_{\nu=1}^{n} x^\nu F_{\nu\mu}(tx)\, dt. \tag{8.17}$$

*Demostración.* Si $\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u^a \mathbf{e}_a$ y $\widehat{u} = (u^1,\dots,u^r)^T$ es su columna de componentes, entonces

$$(\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_\mu} \mathbf{u})^\wedge = \partial_\mu \widehat{u} + A_\mu \widehat{u}.$$

Al desarrollar la definición de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ sobre campos coordenados se obtiene

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + [A_\nu, A_\mu]. \tag{8.18}$$

Por la Proposición 2.7.17, el marco satisface la condición radial

$$\sum_{\nu=1}^{n} x^\nu A_\nu(x) = 0.$$

Derivarla respecto de $x^\mu$ da

$$\sum_{\nu=1}^{n} x^\nu \partial_\mu A_\nu(x) = -A_\mu(x),$$

y la misma condición anula $\sum_{\nu=1}^{n} x^\nu [A_\nu, A_\mu]$. Al contraer (8.18) con el campo radial resulta

$$\sum_{\nu=1}^{n} x^\nu F_{\nu\mu}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} x^\nu \partial_\nu A_\mu(x) + A_\mu(x).$$

Aplicada en el punto $tx$, esta identidad equivale a

$$\frac{d}{dt}\big[t A_\mu(tx)\big] = t \sum_{\nu=1}^{n} x^\nu F_{\nu\mu}(tx).$$

Como $tA_\mu(tx)$ tiende a cero cuando $t \to 0^+$, integrar entre 0 y 1 prueba (8.17). □

**Proposición 8.2.26.** (Cotas uniformes para familias de marcos síncronos) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera. Sea $r_0 > 0$ y sea

$$(\widehat{U}_i, \varphi_i, p_i)_{i\in I}$$

una familia de vecindades normales centradas en $p_i$ tal que $\varphi_i(\widehat{U}_i) = B_{\mathrm{euc}}(0, 3r_0)$. Pongamos

$$U_i := \varphi_i^{-1}\big(B_{\mathrm{euc}}(0, 2r_0)\big).$$

Supongamos que las matrices de la métrica en estas cartas son uniformemente elípticas y que, para cada multiíndice $\alpha$, sus derivadas de orden $|\alpha|$ están acotadas por una constante independiente de $i$. Supongamos

también que todas las derivadas de los cambios de coordenadas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ y de sus inversas están acotadas uniformemente en los traslapes.

Sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial de rango $r_{\mathbf{E}}$, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. En $\Lambda^2 T^*M \otimes \operatorname{End}(\mathbf{E})$ usamos la conexión producto inducida por la conexión de Levi–Civita y por $\nabla^{\mathbf{E}}$. Supongamos que, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $C_k^{\mathbf{E}} > 0$ tal que

$$\sup_{i \in I} \sup_{x \in \widehat{U}_i} \left| \left(\nabla^{\Lambda^2 T^*M \otimes \operatorname{End}(\mathbf{E})}\right)^k \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(x) \right|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \leq C_k^{\mathbf{E}}.$$

En cada $\widehat{U}_i$, construyamos un marco síncrono $\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_{i,1}, \ldots, \mathbf{e}_{i,r_{\mathbf{E}}})$ a partir de una base ortonormal de $\mathbf{E}_{p_i}$ y escribamos, en las coordenadas $\varphi_i$,

$$\nabla^{\mathbf{E}} = d + \mathbf{A}_i, \qquad \mathbf{A}_i = \sum_{\mu=1}^{n} A_{i,\mu}\, \mathbf{d}x^\mu.$$

Entonces, para todo multiíndice $\alpha$, existe $C_\alpha > 0$, independiente de $i$, tal que

$$\sup_{x \in B_{\mathrm{euc}}(0,2r_0)} \left\| D^\alpha A_{i,\mu}(x) \right\|_{\mathrm{op},\mathbb{K}^{r_{\mathbf{E}}}} \leq C_\alpha, \qquad \mu \in \{1, \ldots, n\}. \tag{8.19}$$

donde se usa la norma de operador euclidiana en las matrices escritas en el marco ortonormal síncrono. Si $G_{ij}$ es la matriz de transición determinada en $U_i \cap U_j$ por $u_i = G_{ij} u_j$, entonces $G_{ij}$, $G_{ij}^{-1}$ y todas sus derivadas, expresadas en cualquiera de las dos cartas, satisfacen cotas independientes de $i$ y $j$.

*Demostración.* Los marcos $\mathbf{e}_i$ son suaves y ortonormales por la Proposición 2.7.17. Representemos la curvatura en el marco $\mathbf{e}_i$ por

$$\mathbf{R}^{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{n} F_{i,\nu\mu}\, \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\mu.$$

La fórmula (8.17) se aplica en cada carta y da

$$A_{i,\mu}(x) = \int_0^1 t \sum_{\nu=1}^{n} x^\nu F_{i,\nu\mu}(tx)\, dt. \tag{8.20}$$

La equivalencia uniforme entre $\mathbf{g}$ y la métrica euclidiana, junto con la cota de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$, controla las componentes $F_{i,\nu\mu}$ en orden cero. La fórmula anterior proporciona entonces la cota uniforme de $\mathbf{A}_i$ en orden cero.

Para obtener los órdenes superiores, sea $\mathbf{T}$ un tensor con valores en $\operatorname{End}(\mathbf{E})$. En las coordenadas $\varphi_i$ y el marco $\mathbf{e}_i$, la conexión producto satisface esquemáticamente

$$\partial \mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} + \Gamma_i * \mathbf{T} + \mathbf{A}_i * \mathbf{T} - \mathbf{T} * \mathbf{A}_i, \tag{8.21}$$

donde $*$ representa una suma finita de productos tensoriales y contracciones. Las hipótesis sobre la métrica acotan uniformemente los símbolos de Christoffel y todas sus derivadas. Supongamos controladas las derivadas ordinarias de las matrices $F_{i,\nu\mu}$ y $A_{i,\mu}$ hasta orden $k-1$. Al diferenciar (8.21) y usar la regla de Leibniz, las derivadas de orden $k$ de $F_{i,\nu\mu}$ se expresan mediante las componentes de $(\nabla^{\mathbf{E}})^j \mathbf{R}^{\mathbf{E}}$, con $j \leq k$, y cantidades ya controladas. Al derivar (8.20) bajo el signo integral se obtienen las cotas de orden $k$ para $A_{i,\mu}$.

La inducción prueba (8.19).
En un traslape, pongamos $y = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x)$. La compatibilidad de las dos expresiones locales de la conexión y la igualdad $u_i = G_{ij} u_j$ implican

$$\partial_{x^\mu} G_{ij}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} G_{ij}(x) A_{j,\nu}(y) \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}(x) - A_{i,\mu}(x) G_{ij}(x). \tag{8.22}$$

Las matrices $G_{ij}$ son ortogonales o unitarias, por lo que $\|G_{ij}\|_{\mathrm{op},\mathbb{K}^{r_{\mathbf{E}}}} = \|G_{ij}^{-1}\|_{\mathrm{op},\mathbb{K}^{r_{\mathbf{E}}}} = 1$. La ecuación anterior y las cotas ya probadas controlan la primera derivada. Después de aplicar $D^\alpha$ a (8.22), la regla de Leibniz expresa las derivadas de orden $|\alpha|+1$ de $G_{ij}$ mediante derivadas de orden a lo más $|\alpha|$ de $G_{ij}$ y cantidades uniformemente acotadas. Una inducción concluye la estimación de todas las derivadas. Para la inversa se usa $G_{ij}^{-1} = G_{ij}^{*}$. □

La curvatura actúa naturalmente sobre formas con valores en el haz mediante producto exterior en la parte diferencial y composición en la parte del haz.

**Proposición 8.2.27.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Para toda $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^k(M, \mathbf{E})$ se cumple

$$(d^{\mathbf{E}})^2 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^{\mathbf{E}} \wedge \boldsymbol{\omega}.$$

En particular, $(d^{\mathbf{E}})^2 = 0$ como operador graduado sobre $\Omega^\bullet(M, \mathbf{E})$ si y sólo si la conexión es plana.

*Demostración.* La identidad es local. Fijemos un marco $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$ de $\mathbf{E}$ y escribamos

$$\nabla^{\mathbf{E}} = d + \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} = (\theta^a{}_b)_{a,b=1}^{r}.$$

Una forma $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^k(M, \mathbf{E})$ se representa en este marco por la columna $\widehat{\omega} = (\omega^1, \dots, \omega^r)^T$ de $k$-formas escalares. La fórmula local de $d^{\mathbf{E}}$ equivale a

$$\widehat{d^{\mathbf{E}} \boldsymbol{\omega}} = d\widehat{\omega} + \mathbf{A} \wedge \widehat{\omega}.$$

Aplicamos de nuevo $d^{\mathbf{E}}$. Como $\mathbf{A}$ tiene grado uno, la regla graduada de Leibniz da

$$\begin{aligned} \widehat{(d^{\mathbf{E}})^2 \boldsymbol{\omega}} &= d\left(d\widehat{\omega} + \mathbf{A} \wedge \widehat{\omega}\right) + \mathbf{A} \wedge \left(d\widehat{\omega} + \mathbf{A} \wedge \widehat{\omega}\right) \\ &= d\mathbf{A} \wedge \widehat{\omega} - \mathbf{A} \wedge d\widehat{\omega} + \mathbf{A} \wedge d\widehat{\omega} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \widehat{\omega} \\ &= \left(d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}\right) \wedge \widehat{\omega}. \end{aligned}$$

Por la fórmula local de la curvatura,

$$\widehat{\mathbf{R}^{\mathbf{E}}} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A};$$

en componentes, esta igualdad es exactamente

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + [A_\nu, A_\mu].$$

Por lo tanto,

$$(d^{\mathbf{E}})^2 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^{\mathbf{E}} \wedge \boldsymbol{\omega}.$$

Si la conexión es plana, el miembro derecho se anula en todos los grados. Recíprocamente, supongamos que $(d^{\mathbf{E}})^2 = 0$ como operador graduado. En particular, se anula sobre $\Omega^0(M,\mathbf{E}) = \Gamma(\mathbf{E})$. Dados $p \in M$, $v \in \mathbf{E}_p$ y $X, Y \in T_pM$, elijamos una sección suave $\mathbf{s}$ con $\mathbf{s}(p) = v$ y extensiones suaves de $X, Y$. Entonces

$$0 = \big((d^{\mathbf{E}})^2\mathbf{s}\big)_p(X,Y) = \mathbf{R}^{\mathbf{E}}_p(X,Y)v.$$

Como $p, v, X, Y$ son arbitrarios, $\mathbf{R}^{\mathbf{E}} = 0$, es decir, la conexión es plana. □

Esta construcción generaliza el operador exterior de Hodge–de Rham a formas con valores en un haz. Sólo constituye un complejo cuando la conexión es plana; si $\mathbf{R}^{\mathbf{E}} \neq 0$, la identidad anterior mide exactamente el defecto. Más adelante, al introducir el adjunto formal de $d^{\mathbf{E}}$, aparecerá el laplaciano de Hodge con valores en $\mathbf{E}$, el cual se relaciona con el laplaciano de Bochner mediante identidades de tipo Weitzenböck.

Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Recordemos que ya hemos definido el operador

$$d^{\mathbf{E}}\colon \Omega^k(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M,\mathbf{E}).$$

La métrica riemanniana y la métrica fibrada inducen de manera natural un producto interno puntual en $\Lambda^k T^*M \otimes \mathbf{E}$. Integrando respecto a la medida riemanniana obtenemos un producto interno global

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{L^2(M,\Lambda^k T^*M\otimes\mathbf{E})} := \int_M \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \Omega^k_c(M,\mathbf{E}).$$

**Definición 8.2.28.** (Adjunto formal de $d^{\mathbf{E}}$) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible. Definimos el adjunto formal de

$$d^{\mathbf{E}}\colon \Omega^k(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M,\mathbf{E})$$

como el operador

$$\delta^{\mathbf{E}}\colon \Omega^{k+1}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \Omega^k(M,\mathbf{E})$$

caracterizado por la identidad

$$\int_M \langle d^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \boldsymbol{\alpha}, \delta^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\beta} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

para todas

$$\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^k_c(M,\mathbf{E}), \qquad \boldsymbol{\beta} \in \Omega^{k+1}_c(M,\mathbf{E}).$$

Obsérvese que este operador existe y es único por el Teorema 8.2.3.

Si además $M$ está orientada, el adjunto formal puede expresarse mediante el operador de Hodge. Recordemos brevemente esta construcción.

**Definición 8.2.29.** (Operador de Hodge) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana orientada con o sin frontera y sea $n = \dim M$. El operador de Hodge es el isomorfismo de haces

$$*\colon \Lambda^k T^*M \longrightarrow \Lambda^{n-k} T^*M$$

caracterizado por la identidad

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbf{g}} \, dV_{\mathbf{g}},$$

para todas $\alpha, \beta \in \Lambda^k T_x^* M$, donde $dV_{\mathbf{g}}$ denota la forma volumen riemanniana. Este operador se extiende naturalmente a formas con valores en $\mathbf{E}$ mediante

$$*(\alpha \otimes s) := (*\alpha) \otimes s.$$

Con esta notación se obtiene la expresión clásica del adjunto formal.

**Proposición 8.2.30.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana orientada sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible. Entonces

$$\delta^{\mathbf{E}} = (-1)^{k+1} \, *^{-1} \, d^{\mathbf{E}} *$$

sobre $\Omega^{k+1}(M, \mathbf{E})$.

*Demostración.* Sean $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega_c^k(M, \mathbf{E})$ y $\boldsymbol{\beta} \in \Omega_c^{k+1}(M, \mathbf{E})$. La métrica fibrada induce un apareamiento entre formas con valores en $\mathbf{E}$: en un marco ortonormal local, si $\eta = \sum_{a=1}^{r} \eta^a \otimes \mathbf{e}_a$ y $\zeta = \sum_{a=1}^{r} \zeta^a \otimes \mathbf{e}_a$, ponemos

$$\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\eta \wedge \zeta) := \sum_{a=1}^{r} \eta^a \wedge \overline{\zeta^a},$$

omitiendo la conjugación en el caso real. La invariancia unitaria de esta expresión muestra que no depende del marco. La compatibilidad de $\nabla^{\mathbf{E}}$ con $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y la regla graduada de Leibniz dan

$$\begin{aligned} d\,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}\big(\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta}\big) &= \mathbf{h}_{\mathbf{E}}\big(d^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta}\big) \\ &\quad + (-1)^k \mathbf{h}_{\mathbf{E}}\big(\boldsymbol{\alpha} \wedge d^{\mathbf{E}}(*\boldsymbol{\beta})\big). \end{aligned}$$

La forma del miembro izquierdo tiene soporte compacto. Como $M$ está orientada y no tiene frontera, el Teorema de Stokes implica

$$\int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}\big(d^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta}\big) = (-1)^{k+1} \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}\big(\boldsymbol{\alpha} \wedge d^{\mathbf{E}}(*\boldsymbol{\beta})\big).$$

Por la definición del operador de Hodge,

$$\mathbf{h}_{\mathbf{E}}\big(d^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta}\big) = \langle d^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, dV_{\mathbf{g}},$$

mientras que

$$\mathbf{h}_{\mathbf{E}}\big(\boldsymbol{\alpha} \wedge d^{\mathbf{E}}(*\boldsymbol{\beta})\big) = \Big\langle \boldsymbol{\alpha}, *^{-1} d^{\mathbf{E}}(*\boldsymbol{\beta}) \Big\rangle_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, dV_{\mathbf{g}}.$$

Por lo tanto,

$$\int_M \langle d^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \Big\langle \boldsymbol{\alpha}, (-1)^{k+1} *^{-1} d^{\mathbf{E}} * \boldsymbol{\beta} \Big\rangle \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La unicidad del adjunto formal concluye que $\delta^{\mathbf{E}} = (-1)^{k+1} *^{-1} d^{\mathbf{E}} *$ sobre $\Omega^{k+1}(M, \mathbf{E})$. □

A partir de estos operadores podemos definir el laplaciano de Hodge con valores en el haz.

**Definición 8.2.31.** (Laplaciano de Hodge con valores en $\mathbf{E}$) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible. Definimos el operador

$$\Delta_{\mathbf{H}}^{\mathbf{E}}\colon \Omega^k(M,\mathbf{E})\longrightarrow \Omega^k(M,\mathbf{E})$$

por

$$\Delta_{\mathbf{H}}^{\mathbf{E}} := d^{\mathbf{E}}\delta^{\mathbf{E}}+\delta^{\mathbf{E}}d^{\mathbf{E}}.$$

Este operador es formalmente autoadjunto y de orden 2.

Por otra parte, recordemos que la conexión induce una derivada covariante en $\Lambda^k T^*M\otimes\mathbf{E}$, lo que permite definir el laplaciano de Bochner sobre formas con valores en el haz.

**Definición 8.2.32.** (Laplaciano de Bochner en formas con valores en un haz) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible. Definimos

$$\Delta_B^{\mathbf{E}} := \nabla^*\nabla,$$

donde

$$\nabla\colon \Omega^k(M,\mathbf{E})\longrightarrow \Gamma(T^*M\otimes\Lambda^k T^*M\otimes\mathbf{E})$$

es la conexión inducida y $\nabla^*$ su adjunto formal.

Estos dos operadores están relacionados por una identidad fundamental que involucra la curvatura de la conexión y la curvatura riemanniana.

**Teorema 8.2.33.** (Identidad de Weitzenböck) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial con conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Entonces, sobre $\Omega^k(M,\mathbf{E})$ se cumple

$$\Delta_{\mathbf{H}}^{\mathbf{E}} = \Delta_B^{\mathbf{E}} - \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon(\mathbf{e}^i)\iota(\mathbf{e}_j)\mathbf{R}^{\Lambda^k T^*M\otimes\mathbf{E}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j), \tag{8.23}$$

donde $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ es cualquier marco ortonormal local y $\varepsilon(\mathbf{e}^i)$ denota producto exterior. El último sumando es un endomorfismo de orden cero e incluye tanto la curvatura riemanniana sobre $\Lambda^k T^*M$ como $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ sobre el factor $\mathbf{E}$.

*Demostración.* Fijemos $p\in M$ y elijamos un marco ortonormal síncrono en $p$; así $\nabla\mathbf{e}_i(p)=0$ y $[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j](p)=0$. En ese punto,

$$d^{\mathbf{E}}=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\mathbf{e}^i)\nabla_{\mathbf{e}_i},\qquad \delta^{\mathbf{E}}=-\sum_{j=1}^{n}\iota(\mathbf{e}_j)\nabla_{\mathbf{e}_j}.$$

Usando $\iota(\mathbf{e}_j)\varepsilon(\mathbf{e}^i)+\varepsilon(\mathbf{e}^i)\iota(\mathbf{e}_j)=\delta_{ij}I$ y agrupando composiciones en el orden en que aparecen, obtenemos

$$d^{\mathbf{E}}\delta^{\mathbf{E}}+\delta^{\mathbf{E}}d^{\mathbf{E}} = -\sum_{i=1}^{n}\nabla_{\mathbf{e}_i}\nabla_{\mathbf{e}_i}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(\mathbf{e}^i)\iota(\mathbf{e}_j)\big(\nabla_{\mathbf{e}_i}\nabla_{\mathbf{e}_j} - \nabla_{\mathbf{e}_j}\nabla_{\mathbf{e}_i}\big).$$

El primer sumando es $\nabla^*\nabla$ en $p$ y el paréntesis es $\mathbf{R}^{\Lambda^k T^*M\otimes\mathbf{E}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$. La identidad obtenida es tensorial; como $p$ era arbitrario, vale globalmente. □

En particular, el laplaciano de Hodge y el laplaciano de Bochner difieren únicamente por el término algebraico de curvatura escrito en (8.23). Para $k=1$ y $\mathbf{E}$ trivial, ese término es $\mathrm{Ric}^\sharp$; para $k=0$ se anula. Si la conexión no es plana debe distinguirse además

$$(d^{\mathbf{E}}+\delta^{\mathbf{E}})^2 = \Delta_{\mathbf{H}}^{\mathbf{E}} + (d^{\mathbf{E}})^2 + (\delta^{\mathbf{E}})^2;$$

por lo tanto, el cuadrado del operador impar coincide con $\Delta_{\mathbf{H}}^{\mathbf{E}}$ sólo en el caso plano.

Esta identidad relaciona las propiedades analíticas de las soluciones de ecuaciones diferenciales con la curvatura de la variedad y del haz.

## 8.3 Operadores asociados a conexiones de Clifford

La Sección 2.17 construyó los módulos de Clifford, la multiplicación $c$ y las conexiones compatibles sin asociarles todavía un operador. Ahora que se ha definido la teoría general de operadores diferenciales sobre haces, podemos efectuar la contracción que produce el operador de Dirac. En esta sección no se emplean símbolos ni operadores pseudodiferenciales.

**Definición 8.3.1.** (Operador de tipo Dirac) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $(\mathbf{S},c,\nabla^{\mathbf{S}})$ un módulo hermitiano de Clifford con conexión de Clifford, en el sentido de la Definición 2.17.14. La contracción de Clifford es el homomorfismo de haces

$$C\colon T^*M\otimes\mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{S},\qquad C(\xi\otimes s)=c(\xi)s.$$

El *operador de tipo Dirac* asociado es

$$D := C\circ\nabla^{\mathbf{S}}\colon \Gamma(\mathbf{S})\longrightarrow\Gamma(\mathbf{S}). \tag{8.24}$$

Cuando $\mathbf{S}=\Sigma M$ es el haz de espinores de una estructura spin, se llama *operador de Dirac spinorial*.

**Teorema 8.3.2.** (Carácter diferencial e identidad de Green) Sea $(\mathbf{S},c,\nabla^{\mathbf{S}})$ como en la definición anterior y sea $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ un marco ortonormal local, con comarco $(\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^n)$. Entonces

$$D\mathbf{s} = \sum_{j=1}^{n} c(\mathbf{e}^j)\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_j}\mathbf{s}. \tag{8.25}$$

La expresión es independiente del marco y define un operador diferencial de orden a lo sumo uno. Más precisamente,

$$[D,f]\mathbf{s} = c(df)\mathbf{s},\qquad f\in C^\infty(M),\quad \mathbf{s}\in\Gamma(\mathbf{S}). \tag{8.26}$$

Si $\dim M > 0$, su orden es exactamente uno. Para $\mathbf{s},\mathbf{t} \in \Gamma_c(\mathbf{S})$ se cumple la identidad de Green

$$\int_M \big(\langle D\mathbf{s},\mathbf{t}\rangle_{\mathbf{S}} - \langle \mathbf{s}, D\mathbf{t}\rangle_{\mathbf{S}}\big)\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M} \langle c(\boldsymbol{\nu}^\flat)\mathbf{s},\mathbf{t}\rangle_{\mathbf{S}}\, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}, \tag{8.27}$$

donde el miembro derecho se interpreta como cero si la frontera es vacía y $\boldsymbol{\nu}$ es la normal unitaria exterior en caso contrario. En particular, sobre una variedad sin frontera, $D_h^* = D$.

*Demostración.* La fórmula local resulta de escribir $\nabla^{\mathbf{S}}\mathbf{s} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}^j \otimes \nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_j}\mathbf{s}$. La conexión es un operador diferencial sobre secciones definido intrínsecamente, mientras que $C$ es un homomorfismo de haces. Por lo tanto, su composición no depende del marco. La regla de Leibniz da

$$D(f\mathbf{s}) = c(df)\mathbf{s} + fD\mathbf{s},$$

que prueba (8.26) y, por la caracterización por conmutadores, que $D \in \mathbf{PDO}^{(1)}(\mathbf{S},\mathbf{S})$. Si $\dim M > 0$, fijados $x \in M$ y $0 \neq \xi \in T_x^*M$, existe localmente $f$ con $df_x = \xi$; como $c(\xi)^2 = -|\xi|^2 I$, el conmutador no se anula en $x$, de modo que $D$ no tiene orden cero.
Para la identidad integral, definamos el campo vectorial complejo $\mathbf{V}$ por

$$\mathbf{g}(\mathbf{V},\mathbf{X}) = \langle c(\mathbf{X}^\flat)\mathbf{s},\mathbf{t}\rangle_{\mathbf{S}}.$$

En un punto elegimos un marco ortonormal síncrono. La compatibilidad de la conexión de Clifford y la identidad $c(\xi)^* = -c(\xi)$, usando la convención de que el producto hermitiano es lineal en la primera variable, dan

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \langle D\mathbf{s},\mathbf{t}\rangle_{\mathbf{S}} - \langle \mathbf{s}, D\mathbf{t}\rangle_{\mathbf{S}}.$$

El teorema de la divergencia produce (8.27). Si $\partial M = \varnothing$, la igualdad es precisamente la simetría formal de $D$. □

**Proposición 8.3.3.** (Graduación y ejemplo de Hodge–de Rham) Si $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$ es un módulo graduado de Clifford, entonces $D$ es impar y se escribe

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^\pm \colon \Gamma(\mathbf{S}^\pm) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{S}^\mp).$$

En ausencia de frontera, $(D^+)_h^* = D^-$. Bajo esa misma hipótesis, para el módulo $\mathbf{S} = \Lambda^\bullet T^*M \otimes \mathbb{C}$ del Ejemplo 2.17.15,

$$D = d + \delta, \qquad D^2 = \Delta_{\mathbf{H}}. \tag{8.28}$$

*Demostración.* La conexión preserva la graduación y la multiplicación por un covector la invierte, por lo que la primera afirmación es inmediata. La relación entre los bloques se sigue de la simetría formal. Para

las formas, en un marco ortonormal síncrono,

$$d = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(\mathbf{e}^j)\nabla_{\mathbf{e}_j}, \qquad \delta = -\sum_{j=1}^{n} \iota_{\mathbf{e}_j}\nabla_{\mathbf{e}_j}.$$

Como $c(\mathbf{e}^j) = \varepsilon(\mathbf{e}^j) - \iota_{\mathbf{e}_j}$, se obtiene $D = d + \delta$; las identidades $d^2 = \delta^2 = 0$ dan la segunda igualdad. □

### 8.3.1 Fórmulas de Bochner y Lichnerowicz

En el resto de la sección suponemos que $M$ no tiene frontera, de acuerdo con la definición global del adjunto formal y del laplaciano de conexión. Las identidades obtenidas son también identidades locales de expresiones diferenciales en el interior de una variedad con frontera.

Recordemos que la curvatura de $\nabla^{\mathbf{S}}$ es

$$\mathbf{R}^{\mathbf{S}}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = [\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}, \nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Y}}] - \nabla^{\mathbf{S}}_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}.$$

**Proposición 8.3.4.** (Fórmula de Bochner para un módulo de Clifford) Para todo módulo de Clifford con conexión,

$$D^2 = (\nabla^{\mathbf{S}})^*\nabla^{\mathbf{S}} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c(\mathbf{e}^i)c(\mathbf{e}^j)\mathbf{R}^{\mathbf{S}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j). \tag{8.29}$$

Aquí el laplaciano de conexión está dado localmente por

$$(\nabla^{\mathbf{S}})^*\nabla^{\mathbf{S}} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i}\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i} - \nabla^{\mathbf{S}}_{\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_i}\right). \tag{8.30}$$

*Demostración.* Fijemos $x \in M$ y elijamos un marco ortonormal síncrono en $x$. La compatibilidad de Clifford implica $\nabla_{\mathbf{e}_i} c(\mathbf{e}^j) = 0$ en ese punto. Por tanto,

$$D^2 = \sum_{i,j=1}^{n} c(\mathbf{e}^i)c(\mathbf{e}^j)\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i}\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_j}.$$

Los términos diagonales son $-\sum_{i=1}^{n}\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i}\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i}$. Al agrupar los términos con $i<j$ y usar $c(\mathbf{e}^i)c(\mathbf{e}^j) = -c(\mathbf{e}^j)c(\mathbf{e}^i)$, queda

$$\sum_{1\le i<j\le n} c(\mathbf{e}^i)c(\mathbf{e}^j)[\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i}, \nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_j}],$$

que es el término de curvatura de (8.29) porque $[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j](x) = 0$. En el mismo marco, (8.30) coincide con el término diagonal. La igualdad es intrínseca y $x$ era arbitrario. □

**Lema 8.3.5.** (Curvatura spinorial y su contracción) Sobre el haz de espinores de una variedad spin se tiene

$$\mathbf{R}^{\Sigma}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \frac{1}{4}\sum_{a,b=1}^{n}\mathbf{g}\big(\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b\big)c(\mathbf{e}^a)c(\mathbf{e}^b), \tag{8.31}$$

y

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c(\mathbf{e}^i)c(\mathbf{e}^j)\mathbf{R}^{\Sigma}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \frac{1}{4}R_{\mathbf{g}}I. \tag{8.32}$$

*Demostración.* La fórmula local (2.115) identifica la forma de conexión spinorial con la imagen de la forma de Levi–Civita bajo $A = (A_{ab}) \mapsto \frac{1}{4}\sum_{a,b=1}^{n} A_{ab}c(\mathbf{e}^a)c(\mathbf{e}^b)$. Al aplicar el mismo homomorfismo a la forma de curvatura se obtiene (8.31).

Pongamos $R_{ijab} = \mathbf{g}(\mathbf{R}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b)$. Al sustituir la primera fórmula en el miembro izquierdo de la segunda aparece

$$\frac{1}{8}\sum_{i,j,a,b=1}^{n} R_{ijab}c(\mathbf{e}^i)c(\mathbf{e}^j)c(\mathbf{e}^a)c(\mathbf{e}^b).$$

Las antisimetrías de $R_{ijab}$, la simetría por intercambio de pares y la primera identidad de Bianchi cancelan los términos con índices distintos. Los términos restantes, usando $c(\mathbf{e}^i)^2 = -I$, se reducen a

$$\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{g}(\mathbf{R}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i)I = \frac{1}{4}R_{\mathbf{g}}I,$$

por la definición de la curvatura escalar. □

**Teorema 8.3.6.** (Fórmula de Lichnerowicz) El operador de Dirac spinorial satisface

$$D^2 = (\nabla^{\Sigma})^*\nabla^{\Sigma} + \frac{1}{4}R_{\mathbf{g}}I. \tag{8.33}$$

Si $M$ es cerrada y $R_{\mathbf{g}} > 0$, entonces $\ker D = \{0\}$.

*Demostración.* La identidad resulta de la Proposición 8.3.4 y del Lema 8.3.5. Si $D\psi = 0$, la simetría formal y (8.33) dan

$$0 = \|D\psi\|^2_{L^2(M,\Sigma)} = \|\nabla^{\Sigma}\psi\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\Sigma)} + \frac{1}{4}\int_M R_{\mathbf{g}}|\psi|^2\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Los dos sumandos son no negativos y el segundo sólo puede anularse si $\psi = 0$. □

### 8.3.2 Operadores torcidos y Spin$^c$

**Definición 8.3.7.** (Operador de Dirac torcido) Sea $M$ spin y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz hermitiano con conexión unitaria $\nabla^{\mathbf{E}}$. En $\mathbf{S} = \Sigma M \otimes \mathbf{E}$ consideramos

$$c_{\mathbf{E}}(\xi) = c(\xi)\otimes I_{\mathbf{E}}, \qquad \nabla^{\mathbf{S}} = \nabla^{\Sigma}\otimes I + I\otimes\nabla^{\mathbf{E}}.$$

Es un módulo de Clifford con conexión. Su operador asociado es el *operador de Dirac torcido*

$$D_{\mathbf{E}} = \sum_{j=1}^{n} c(\mathbf{e}^j)\otimes I_{\mathbf{E}}\nabla^{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_j}. \tag{8.34}$$

En dimensión par es impar y determina los bloques $D_{\mathbf{E}}^{\pm}$.

**Teorema 8.3.8.** (Fórmula de Weitzenböck para el Dirac torcido) Con la notación anterior,

$$D_{\mathbf{E}}^2 = (\nabla^{\mathbf{S}})^*\nabla^{\mathbf{S}} + \frac{1}{4}R_{\mathbf{g}}I + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c(\mathbf{e}^i)c(\mathbf{e}^j)\otimes \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j). \tag{8.35}$$

*Demostración.* La curvatura de la conexión producto es

$$\mathbf{R}^{\mathbf{S}} = \mathbf{R}^{\Sigma}\otimes I + I\otimes \mathbf{R}^{\mathbf{E}}.$$

Se sustituye esta identidad en (8.29); la parte spinorial se contrae mediante (8.32) y la parte de $\mathbf{E}$ produce el último sumando. □

**Proposición 8.3.9.** (Operadores Spin$^c$) Sea $M$ una variedad Spin$^c$ con línea determinante $\mathbf{L}$, como en la Definición 2.17.17, y elijamos una conexión unitaria en $\mathbf{L}$. La conexión de Clifford inducida en $\Sigma^c M$ define un operador $D_{\mathbf{L}} = c\circ\nabla^{\Sigma^c}$. Si $F_{\mathbf{L}}\in\Omega^2(M;i\mathbb{R})$ es la curvatura de la conexión y

$$c(F_{\mathbf{L}}) := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} F_{\mathbf{L}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)c(\mathbf{e}^i)c(\mathbf{e}^j),$$

entonces

$$D_{\mathbf{L}}^2 = (\nabla^{\Sigma^c})^*\nabla^{\Sigma^c} + \frac{1}{4}R_{\mathbf{g}}I + \frac{1}{2}c(F_{\mathbf{L}}). \tag{8.36}$$

En dimensión par, $D_{\mathbf{L}}$ intercambia $\Sigma^{c,+}M$ y $\Sigma^{c,-}M$.

*Demostración.* El homomorfismo infinitesimal de Spin$^c(n)$ sobre los espinores es la representación spin en la componente $\mathfrak{so}(n)$ y la mitad de la representación de la línea determinante en la componente $i\mathbb{R}$. Por ello,

$$\mathbf{R}^{\Sigma^c}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{R}^{\Sigma}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) + \frac{1}{2}F_{\mathbf{L}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})I$$

en cualquier trivialización local spinorial. La fórmula general de Bochner y (8.32) dan (8.36). La afirmación graduada se sigue de que la conexión preserva la quiralidad y la multiplicación de Clifford es impar. □

# 9

# Espacios de Sobolev en haces vectoriales: enfoque intrínseco

**De las funciones a las secciones**

El paso de funciones a secciones no consiste en repetir componente por componente la teoría euclidiana. Las componentes dependen del marco, y una derivada ordinaria de ellas produce términos adicionales al cambiar de trivialización. La conexión organiza esos términos y hace posible definir derivadas débiles que pertenecen a un haz tensorial bien determinado. La fórmula de integración por partes será el punto de equilibrio entre ambas perspectivas: se calcula localmente, pero expresa una identidad intrínseca y permite reconocer la regularidad de una sección sin elegir un marco global.

## 9.1 Derivadas covariantes débiles y espacios de Sobolev en haces vectoriales

La construcción anterior de los espacios de Sobolev sobre variedades partía de secciones suaves y completaba ese espacio respecto de una norma covariante. Existe otra descripción, más cercana al caso euclidiano: exigir que una sección de $L^p$ posea derivadas covariantes débiles hasta el orden considerado. El objetivo de este capítulo es desarrollar esa formulación en un haz vectorial y demostrar su compatibilidad con la construcción por completación.

Para secciones suaves de soporte compacto, la identidad

$$\int_M \langle \nabla^{\mathbf{E}} \mathbf{u}, \mathbf{\Phi} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \, d\lambda_\mathbf{g} = \int_M \langle \mathbf{u}, (\nabla^{\mathbf{E}})^* \mathbf{\Phi} \rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} \, d\lambda_\mathbf{g}$$

traslada la derivada desde $\mathbf{u}$ a una sección de prueba. El miembro derecho sigue teniendo sentido para $\mathbf{u} \in L^p(M, \mathbf{E})$ siempre que $(\nabla^{\mathbf{E}})^* \mathbf{\Phi}$ pertenezca al espacio dual apropiado. Esta observación conduce a la derivada covariante débil y permite formular sistemas elípticos sobre haces sin elegir componentes globales.

Trabajaremos con un haz vectorial suave $\mathbf{E} \longrightarrow M$, provisto de una métrica fibrada y una conexión suave $\nabla^{\mathbf{E}}$. En los factores tensoriales construidos a partir de $TM$ y $T^*M$ usaremos la conexión de Levi–Civita de $\mathbf{g}$. Para

las definiciones de derivada covariante débil y de $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ no exigiremos que $\nabla^{\mathbf{E}}$ sea compatible con la métrica fibrada; cuando la compatibilidad sea necesaria para una fórmula de integración por partes, una identificación del adjunto formal o una estimación posterior, se incluirá expresamente entre las hipótesis. La notación $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ designará el espacio de secciones de $L^p(M,\mathbf{E})$ cuyas derivadas covariantes débiles hasta orden $m$ pertenecen a los correspondientes espacios $L^p$ de tensores con valores en $\mathbf{E}$. Esta elección mantiene la notación utilizada en el caso euclidiano y permite tratar de manera uniforme funciones, formas diferenciales, campos tensoriales y secciones de haces generales.

Para formular la definición necesitamos primero construir las derivadas covariantes iteradas y las métricas fibradas inducidas en $T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E}$. Después probaremos completitud, densidad de secciones suaves y equivalencia con las descripciones locales. Estos resultados proporcionan una versión intrínseca del teorema de Meyers–Serrin y preparan los teoremas de encaje, traza y compacidad.

**Definición 9.1.1.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave con una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ y sea $\nabla^{TM}$ una conexión en $TM$. Para $s\in\mathbb{N}$ definimos la $s$-ésima derivada covariante de $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$ como la sección $\nabla^s\mathbf{u}\in\Gamma\big(T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ definida recursivamente como sigue: $\nabla^0\mathbf{u}:=\mathbf{u}$ y para $s\geq 0$,

$$\nabla^{s+1}\mathbf{u}:=\nabla^{T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E}}(\nabla^s\mathbf{u}),$$

donde identificamos $T^*M\otimes(T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ con $T^{(0,s+1)}(TM)\otimes\mathbf{E}$ colocando el factor $T^*M$ nuevo en primer lugar. La conexión del segundo miembro es la conexión producto inducida por $\nabla^{TM}$ y $\nabla^{\mathbf{E}}$.
De manera esquemática,

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma(\mathbf{E}) & \xrightarrow{\ \nabla^{\mathbf{E}}\ } & \Gamma\big(T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big) & & \\
 & & & \searrow^{\nabla^{T^{(0,1)}(TM)\otimes\mathbf{E}}} & \\
\Gamma\big(T^{(0,3)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big) & \xleftarrow[\ \nabla^{T^{(0,2)}(TM)\otimes\mathbf{E}}\ ]{} & \Gamma\big(T^{(0,2)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big) & & \\
\searrow^{\nabla^{T^{(0,3)}(TM)\otimes\mathbf{E}}} & & & & \\
\cdots & \xrightarrow{\ \nabla^{T^{(0,s-1)}(TM)\otimes\mathbf{E}}\ } & \Gamma\big(T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big) & &
\end{array}$$

De manera equivalente,

$$(\nabla^{s+1}\mathbf{u})(\mathbf{X}_0,\dots,\mathbf{X}_s):=\big(\nabla_{\mathbf{X}_0}(\nabla^s\mathbf{u})\big)(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_s).$$

En una carta $(x^1,\dots,x^n)$, con $\partial_i=\partial/\partial x^i$, escribimos

$$(\nabla^s\mathbf{u})_{i_1\cdots i_s}:=(\nabla^s\mathbf{u})(\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_s}).$$

En particular,

$$(\nabla^2\mathbf{u})_{ij}=\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\big(\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_j}\mathbf{u}\big)-\Gamma^k_{ij}\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_k}\mathbf{u}. \tag{9.1}$$

Ésta es una componente del tensor $\nabla^2\mathbf{u}$, no la mera composición direccional: contiene el término de Christoffel. Para órdenes superiores se emplearán prioritariamente $\nabla^s\mathbf{u}$ y sus componentes $(\nabla^s\mathbf{u})_{i_1\cdots i_s}$, de acuerdo con la misma recurrencia.

La sección $\nabla^s\mathbf{u}$ toma valores en $T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E}$. Para medirla puntualmente necesitamos la métrica fibrada inducida por la métrica riemanniana de $M$ y la métrica de $\mathbf{E}$.

La misma construcción define una métrica fibrada en todo haz $T^{(k,l)}(TM)\otimes\mathbf{E}$.

**Proposición 9.1.2.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana (con o sin frontera) y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Entonces existe una única métrica fibrada suave $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$ en cada haz tensorial con valores en $\mathbf{E}$, $T^{(k,l)}(TM)\otimes\mathbf{E}$, con la propiedad de que si tenemos campos tensoriales simples

$$\boldsymbol{\alpha}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\alpha}_k\otimes\boldsymbol{\omega}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\omega}_l\otimes\mathbf{u},\qquad \boldsymbol{\beta}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\beta}_k\otimes\boldsymbol{\eta}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\eta}_l\otimes\mathbf{v},$$

con $\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_r\in\mathfrak{X}(M)$, $\boldsymbol{\omega}_s,\boldsymbol{\eta}_s\in\Omega^1(M)$ y $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\Gamma(\mathbf{E})$, entonces

$$\left\langle\boldsymbol{\alpha}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\alpha}_k\otimes\boldsymbol{\omega}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\omega}_l\otimes\mathbf{u},\boldsymbol{\beta}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\beta}_k\otimes\boldsymbol{\eta}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\eta}_l\otimes\mathbf{v}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}=\left(\prod_{s=1}^{k}\langle\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_s\rangle_{\mathbf{g}}\right)\left(\prod_{t=1}^{l}\langle\boldsymbol{\omega}_t,\boldsymbol{\eta}_t\rangle_{\mathbf{g}}\right)\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Además, si $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ es un marco local suave de $TM$, con comarco dual $(\boldsymbol{\varepsilon}^1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^n)$, $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ es un marco local de $\mathbf{E}$, todos definidos sobre $U\subseteq M$, y

$$\mathbf{F}=F^{i_1\dots i_k a}_{j_1\dots j_l}\mathbf{E}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{i_k}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{j_l}\otimes\mathbf{e}_a,$$

$$\mathbf{G}=G^{r_1\dots r_k b}_{s_1\dots s_l}\mathbf{E}_{r_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{r_k}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{s_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{s_l}\otimes\mathbf{e}_b,$$

entonces

$$\langle\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}=g_{i_1r_1}\cdots g_{i_kr_k}g^{j_1s_1}\cdots g^{j_ls_l}h_{ab}F^{i_1\dots i_k a}_{j_1\dots j_l}\overline{G^{r_1\dots r_k b}_{s_1\dots s_l}}.$$

En el caso real se omite la barra. En el caso complejo, ésta aparece porque la convención hermitiana fijada en la Definición 2.5.1 es lineal en el primer argumento y antilineal en el segundo. Cuando no haya confusión escribiremos simplemente $\langle\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}=\langle\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$. Denotamos por $|\mathbf{F}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}:=\sqrt{\langle\mathbf{F},\mathbf{F}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}}$.

*Demostración.* En cada punto $p\in M$, la métrica $\mathbf{g}_p$ induce el producto interior dual $\mathbf{g}_p^{-1}$ en $T_p^*M$. El producto tensorial de $k$ copias de $\mathbf{g}_p$, $l$ copias de $\mathbf{g}_p^{-1}$ y una copia de $(\mathbf{h}_{\mathbf{E}})_p$ define una forma positiva definida en

$$T_p^{(k,l)}(T_pM)\otimes\mathbf{E}_p.$$

La fórmula sobre tensores simples es precisamente la definición de este producto tensorial. Como los tensores simples generan la fibra, la sesquilinealidad determina la forma de manera única en toda la fibra.
En los marcos del enunciado, las matrices de los productos interiores de los factores son, respectivamente,

$$(g_{ir}),\qquad (g^{js}),\qquad (h_{ab}).$$

Al desarrollar $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ en la base tensorial y usar que el producto hermitiano es lineal en la primera variable y antilineal en la segunda, se obtiene

$$\langle\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}=g_{i_1r_1}\cdots g_{i_kr_k}g^{j_1s_1}\cdots g^{j_ls_l}h_{ab}F^{i_1\dots i_k a}_{j_1\dots j_l}\overline{G^{r_1\dots r_k b}_{s_1\dots s_l}}.$$

En el caso real el mismo cálculo es bilineal y no hay conjugación. Los coeficientes $g_{ir}$, $g^{js}$ y $h_{ab}$ son suaves en todo marco local; por lo tanto, la familia de formas obtenida varía suavemente con $p$. Su definición mediante productos tensoriales muestra que las expresiones en marcos distintos coinciden en los traslapes. Así se obtiene una métrica fibrada suave global, y la unicidad ya probada fibra a fibra concluye la demostración.

□

Con estas definiciones y convenciones podemos dar la siguiente definición de que una sección sea una $L^p$-sección.

**Definición 9.1.3.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$. Decimos que una función $\mathbf{u}\colon M \longrightarrow \mathbf{E}$ es una $L^p$-sección si

(a) $\mathbf{u}$ es medible, es decir, para todo abierto $U \subseteq \mathbf{E}$ se tiene $\mathbf{u}^{-1}(U) \in \mathcal{L}_M$.

(b) $(\pi \circ \mathbf{u})(x) = x$ para casi toda $x \in M$.

(c) $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \in L^p(M, d\lambda_{\mathbf{g}})$.

Denotamos por

$$\widetilde{L}^p(\mathbf{E}) := \{\mathbf{u}\colon M \longrightarrow \mathbf{E} \mid \mathbf{u} \text{ es una } L^p\text{-sección de } \mathbf{E}\}.$$

Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $\widetilde{L}^p(\mathbf{E})$ dada por

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \iff \mathbf{u}(x) = \mathbf{v}(x) \text{ para casi toda } x \in M.$$

Finalmente, definimos $L^p(M,\mathbf{E}) := \widetilde{L}^p(\mathbf{E})/\sim$. Asimismo, definimos

$$L^p_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E}) := \left\{ \mathbf{u}\colon M \longrightarrow \mathbf{E} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{u} \text{ es medible, } (\pi\circ\mathbf{u})(x) = x \text{ para casi toda } x \in M, \\ \forall K \subseteq M \text{ compacto, } \displaystyle\int_K |\mathbf{u}|^p_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} < \infty \end{array} \right\} \Big/ \sim,$$

donde $\sim$ denota nuevamente la igualdad casi en todas partes en $M$.

Se pueden dar normas y seminormas para estos espacios según corresponda:

**Definición 9.1.4.** (Normas $L^p$ y seminormas locales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave con o sin frontera, sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$.

(a) *Caso global.*

(a) Si $1 \leq p < \infty$ y $\mathbf{u} \in L^p(M,\mathbf{E})$, definimos

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} := \left( \int_M |\mathbf{u}|^p_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(b) Si $p = \infty$ y $\mathbf{u} \in L^\infty(M,\mathbf{E})$, definimos

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} |\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{h_E}}.$$

(b) *Caso local.*

(a) Si $1 \le p < \infty$ y $\mathbf{u} \in L^p_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$, para cada compacto $K \subseteq M$ definimos la seminorma

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(K,\mathbf{E})} := \left(\int_K |\mathbf{u}|^p_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(b) Si $p = \infty$ y $\mathbf{u} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$, para cada compacto $K \subseteq M$ definimos

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(K,\mathbf{E})} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in K} |\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{h_E}}.$$

Los espacios $L^p_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ se consideran dotados de la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{L^p(K,\mathbf{E})}\}_{K\subseteq M \text{ compacto}}$.

Nuestra definición de derivada débil usará el adjunto hermitiano formal desarrollado en el capítulo anterior. En todo este capítulo, $(\nabla^s)^*_h$ denota ese adjunto; cuando una fórmula heredada lo abrevia como $(\nabla^s)^*$, la abreviatura tiene exactamente el mismo significado y nunca denota el transpuesto bilineal $(\nabla^s)'$.

**Definición 9.1.5.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $\mathbf{E}$ un haz vectorial suave sobre $M$ provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y de una conexión suave $\nabla^{\mathbf{E}}$. En la construcción de $\nabla^s$ usamos la conexión producto inducida por la conexión de Levi–Civita de $\mathbf{g}$ y por $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $\mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$. Decimos que $\mathbf{v} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ es la $s$-ésima derivada covariante débil de $\mathbf{u}$ si para toda $\sigma \in \Gamma_c(T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E})$,

$$\int_M \langle \mathbf{v},\sigma\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \mathbf{u}, (\nabla^s)^*_h\sigma\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La derivada débil de una sección $\mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ resultará ser única y esto será consecuencia de un resultado análogo a la Proposición B.6.20.

**Lema 9.1.6.** (Localización) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, $\mathbf{E}$ un haz vectorial suave con métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y $\mathbf{v} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ tal que

$$\int_M \langle \mathbf{v},\sigma\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0, \qquad \forall \sigma \in \Gamma_c(\mathbf{E}).$$

Entonces $\mathbf{v} \equiv 0$ c.t.p. en $M$.

*Demostración.* Consideremos $U \subseteq M$ abierto tal que $(U,\psi)$ es una carta suave de $M$ y además $U$ es el dominio de un marco local suave ortonormal de $\mathbf{E}$ sobre $U$, digamos, $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$.
Dada una sección $\sigma \in \Gamma_c(\mathbf{E}\restriction_U)$, podemos extenderla por cero fuera de $U$ y obtenemos así $\widetilde{\sigma} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$. Aplicando la hipótesis se cumple

$$0 = \int_M \langle \mathbf{v},\widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_U \langle \mathbf{v},\sigma\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $\mathbf{v} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$, podemos escribir $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^r v^i\mathbf{e}_i$ con $v^i \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ y $\sigma = \sum_{j=1}^r \sigma^j\mathbf{e}_j$ con $\sigma^j \in C^\infty_c(U)$. La ortonormalidad del marco y la convención de linealidad en la primera variable dan

$$0 = \int_U \sum_{i=1}^r v^i\overline{\sigma^i}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Si ahora fijamos $j \in \{1,\dots,r\}$ y tomamos $\sigma := f\mathbf{e}_j$ con $f \in C_c^\infty(U)$, obtenemos

$$\int_U v^j \overline{f}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0, \qquad \forall f \in C_c^\infty(U).$$

Al pasar a coordenadas locales, obtenemos

$$\int_{\psi(U)} (v^j \circ \psi^{-1})\overline{(f \circ \psi^{-1})}\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})} \circ \psi^{-1}\big) d\lambda_n = 0, \qquad \forall f \in C_c^\infty(U).$$

Dada $\varphi \in C_c^\infty(\psi(U))$ arbitraria, definimos

$$f := \left(\overline{\frac{\varphi}{\sqrt{\det(\mathbf{g})} \circ \psi^{-1}}}\right) \circ \psi \in C_c^\infty(U).$$

La función está bien definida y es suave porque $\sqrt{\det(\mathbf{g})} \circ \psi^{-1}$ es suave y estrictamente positiva. Además,

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq \psi^{-1}\left(\operatorname{supp}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\det(\mathbf{g})} \circ \psi^{-1}}\right)\right),$$

y el conjunto del lado derecho es compacto: el soporte que aparece dentro de $\psi^{-1}$ es compacto en $\psi(U)$ y $\psi$ es un homeomorfismo. Sustituyendo esta elección, se llega a

$$\int_{\psi(U)} (v^j \circ \psi^{-1})\varphi\, d\lambda_n = 0, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\psi(U)).$$

Por la Proposición B.6.20, concluimos que $v^j \circ \psi^{-1} = 0$ c.t.p. en $\psi(U)$, y por lo tanto $v^j = 0$ c.t.p. en $U$. Como $j \in \{1,\dots,r\}$ fue arbitrario, se deduce que $\mathbf{v} = 0$ c.t.p. en $U$.
Finalmente, como $M$ es Lindelöf, podemos cubrirla con una familia numerable de abiertos de este tipo, en cada uno de los cuales $\mathbf{v} = 0$ casi en todas partes. De aquí se sigue que $\mathbf{v} \equiv 0$ c.t.p. en $M$. □

**Corolario 9.1.7.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada. Si $\mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ tiene $s$-ésima derivada covariante débil, entonces ésta es única, y la denotamos por $\nabla^s_w \mathbf{u}$, donde la $w$ es de «weak».

*Demostración.* Supongamos que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son dos $s$–ésimas derivadas covariantes débiles de $\mathbf{u}$. Para toda $\sigma \in \Gamma_c(T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E})$, las dos identidades que las definen tienen el mismo miembro derecho. Al restarlas, obtenemos

$$\int_M \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \sigma \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0.$$

El Lema 9.1.6, aplicado al haz $T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E}$ con su métrica fibrada inducida, implica que $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 0$ casi en todas partes. Por lo tanto, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ casi en todas partes. □

La derivada covariante débil resulta ser un operador local, igual que su contraparte clásica:

**Proposición 9.1.8.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Sea $\mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}$ tiene $s$-ésima derivada covariante débil $\nabla^s_w \mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E})$. Sea $U \subseteq M$ abierto. Si $\mathbf{u} \equiv 0$ c.t.p. en $U$, entonces $\nabla^s_w \mathbf{u} \equiv 0$ c.t.p. en $U$.

*Demostración.* Sea $\sigma \in \Gamma_c(T^{(0,s)}(TU)\otimes \mathbf{E}\restriction_U)$. Podemos definir $\widetilde{\sigma} \in \Gamma_c(T^{(0,s)}(TM)\otimes \mathbf{E})$ dada por

$$\widetilde{\sigma}(p) = \begin{cases} \sigma(p) & \text{si } p \in U \\ 0_{\mathbf{E}_p} & \text{si } p \notin U \end{cases}.$$

Como $U$ es abierto y $\operatorname{supp}(\sigma) \subseteq U$, entonces $\widetilde{\sigma}$ es suave, por lo que $\widetilde{\sigma} \in \Gamma_c(T^{(0,s)}(TM)\otimes \mathbf{E})$. Por definición de derivada covariante débil, tenemos que

$$\int_M \langle \nabla^s_w \mathbf{u}, \widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \mathbf{u}, (\nabla^s)^* \widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $\operatorname{supp}(\widetilde{\sigma}) = \operatorname{supp}(\sigma) \subseteq U$ y por la Proposición 8.1.15 ($(\nabla^s)^*$ es un operador local), entonces $\operatorname{supp}((\nabla^s)^*\widetilde{\sigma}) \subseteq \operatorname{supp}(\widetilde{\sigma}) \subseteq U$. Entonces

$$\int_U \langle \nabla^s_w \mathbf{u}, \widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \nabla^s_w \mathbf{u}, \widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \mathbf{u}, (\nabla^s)^* \widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_U \langle \mathbf{u}, (\nabla^s)^* \widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}} = 0,$$

donde la última igualdad se da pues $\mathbf{u} \equiv 0$ en $U$. Por lo tanto, por el Lema 9.1.6, concluimos que $\nabla^s_w \mathbf{u} \equiv 0$ en $U$. □

Con estas definiciones, podemos definir los espacios de Sobolev mediante derivadas covariantes débiles en cualquier haz vectorial suave.

**Definición 9.1.9.** (Espacios de Sobolev globales y locales) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión suave $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p \leq \infty$.

(a) *Espacios de Sobolev globales.* Definimos

$$W^{m,p}(M,\mathbf{E}) := \left\{ \mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E}) \;\middle|\; \nabla^s_w \mathbf{u} \in L^p\left(M, T^{(0,s)}(TM)\otimes \mathbf{E}\right) \text{ para toda } s \in \{0,\dots,m\} \right\}.$$

El espacio $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} := \begin{cases} \left( \displaystyle\sum_{s=0}^{m} \int_M |\nabla^s_w \mathbf{u}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{0\leq s\leq m} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} |\nabla^s_w \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}, & p = \infty. \end{cases}$$

(b) *Espacios de Sobolev locales.* Definimos

$$W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E}) := \left\{ \mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E}) \;\middle|\; \nabla^s_w \mathbf{u} \in L^p_{\mathrm{loc}}\left(M, T^{(0,s)}(TM)\otimes \mathbf{E}\right) \text{ para toda } s \in \{0,\dots,m\} \right\}.$$

Para cada compacto $K \subseteq M$, dotamos a $W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ de la *seminorma* local

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E};K)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{s=0}^{m}\int_K |\nabla^s_w \mathbf{u}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g}\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\max_{0\le s\le m} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in K} |\nabla^s_w \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}, & p = \infty. \end{cases}$$

El espacio $W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ se considera dotado de la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E};K)}\}_{K\subseteq M \text{ compacto}}$.

**Ejercicio 9.1.10.** Bajo las hipótesis de la definición anterior, donde $M$ es una variedad suave con o sin frontera, pruebe que $(W^{m,p}(M,\mathbf{E}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})})$ es un espacio normado.

**Observación 9.1.11.** En el caso trivial $\mathbf{E} = M\times\mathbb{R}$, se tiene un isomorfismo natural de haces

$$T^{(0,s)}(TM)\otimes(M\times\mathbb{R}) \cong T^{(0,s)}(TM),$$

dado fibra a fibra por $v\otimes\alpha \mapsto \alpha v$. (Más en concreto, considerando $v_p \in T^{(0,s)}(T_pM)$, $(p,\alpha)\in\{p\}\times\mathbb{R}$, la asignación está dada por: $v_p\otimes(p,\alpha)\mapsto \alpha v_p \in T^{(0,s)}(T_pM)$.) Bajo esta identificación, los espacios de Sobolev se reducen a los usuales para funciones

$$W^{m,p}(M) := \left\{ u\in L^1_{\mathrm{loc}}(M) \mid \nabla^s_w u \in L^p\big(M, T^{(0,s)}(TM)\big) \text{para toda } s\in\{0,\dots,m\}\right\}.$$

### 9.1.1 Propiedades fundamentales: convexidad uniforme, reflexividad y separabilidad

A continuación demostraremos las propiedades fundamentales de los espacios de Sobolev en haces vectoriales, las cuales resultarán ser análogas a sus contrapartes euclidianas. Primero veamos que $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es un espacio de Banach. Para ello resulta sumamente útil el siguiente lema:

**Lema 9.1.12.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ y una conexión $\nabla^\mathbf{E}$. Sea $1\le p\le\infty$. Si $(\mathbf{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es tal que $\mathbf{u}_k\to\mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$ y $\nabla^j_w\mathbf{u}_k\to\mathbf{v}_j$ en $L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ cuando $k\to\infty$ para toda $j\in\{1,\dots,m\}$, entonces $\mathbf{u}\in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ y $\nabla^j_w\mathbf{u}=\mathbf{v}_j$ para toda $j\in\{1,\dots,m\}$.

*Demostración.* Sea $j\in\{1,\dots,m\}$ arbitrario y sea $\sigma\in\Gamma_c\big(T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$. Como $\mathbf{u}_k\in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$, por la definición de derivada covariante débil de orden $j$ se cumple

$$\int_M \langle\nabla^j_w\mathbf{u}_k,\sigma\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} = \int_M \langle\mathbf{u}_k,(\nabla^j)^*\sigma\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g}.$$

Por la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9), con $p'$ conjugado de $p$, se tiene

$$\left|\int_M \langle\mathbf{u}_k-\mathbf{u},(\nabla^j)^*\sigma\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g}\right| \le \|\mathbf{u}_k-\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}\,\|(\nabla^j)^*\sigma\|_{L^{p'}(M,\mathbf{E})},$$

y como $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$, se deduce que

$$\int_M \langle \mathbf{u}_k, (\nabla^j)^*\sigma\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow \int_M \langle \mathbf{u}, (\nabla^j)^*\sigma\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Asimismo, por la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9),

$$\left|\int_M \langle \nabla^j_w \mathbf{u}_k - \mathbf{v}_j, \sigma\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\right| \leq \|\nabla^j_w \mathbf{u}_k - \mathbf{v}_j\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\, \|\sigma\|_{L^{p'}(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})},$$

y como $\nabla^j_w \mathbf{u}_k \to \mathbf{v}_j$ en $L^p(M, T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})$, se obtiene

$$\int_M \langle \nabla^j_w \mathbf{u}_k, \sigma\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow \int_M \langle \mathbf{v}_j, \sigma\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Pasando al límite en la identidad inicial concluimos que

$$\int_M \langle \mathbf{v}_j, \sigma\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \mathbf{u}, (\nabla^j)^*\sigma\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \qquad \forall\, \sigma \in \Gamma_c\big(T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big).$$

Por la definición de derivada covariante débil de orden $j$, esto implica que $\mathbf{u}$ admite derivada covariante débil de orden $j$ y que $\nabla^j_w \mathbf{u} = \mathbf{v}_j$.
Como $j \in \{1,\dots,m\}$ fue arbitrario, se concluye que $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ y que $\nabla^j_w \mathbf{u} = \mathbf{v}_j$ para toda $j \in \{1,\dots,m\}$. □

Para ver que los espacios $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ son de Banach, como el lector puede intuir nos apoyaremos del lema anterior, pero para ello primero necesitamos ver que $L^p(M,\mathbf{E})$ es un espacio de Banach.

**Teorema 9.1.13.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$. Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces $L^p(M,\mathbf{E})$ es un espacio de Banach.

*Demostración.* Sea $(\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(M,\mathbf{E})$.
Primero consideramos el caso $1 \leq p < \infty$. Existe una subsucesión $(\mathbf{s}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|\mathbf{s}_{n_{k+1}} - \mathbf{s}_{n_k}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} < \frac{1}{2^k} \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Definimos

$$G_K(x) := \sum_{k=1}^{K} |\mathbf{s}_{n_{k+1}}(x) - \mathbf{s}_{n_k}(x)|_{\mathbf{h_E}}.$$

Entonces $(G_K)$ es creciente y, por la desigualdad de Minkowski en $L^p(M)$ (Teorema B.7.3),

$$\|G_K\|_{L^p(M)} \leq \sum_{k=1}^{K} \|\mathbf{s}_{n_{k+1}} - \mathbf{s}_{n_k}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} < 1.$$

Por el Teorema B.6.11, existe $G \in L^p(M)$ tal que $G_K \to G$ puntualmente y $G(x) < \infty$ c.t.p.

Para cada $k$ existe un conjunto de medida nula $Z_k \subset M$ tal que $\pi_{\mathbf{E}}(\mathbf{s}_{n_k}(x)) = x$ para todo $x \in M \setminus Z_k$. Definimos

$$Z := \{x \in M \mid G(x) = \infty\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k.$$

Entonces $Z$ tiene medida nula y para todo $x \in M \setminus Z$ se cumple que $G(x) < \infty$ y $\pi_{\mathbf{E}}(\mathbf{s}_{n_k}(x)) = x$ para todo $k$.
Para $x \in M \setminus Z$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{s}_{n_{k+1}}(x) - \mathbf{s}_{n_k}(x))$$

converge absolutamente en la fibra $\mathbf{E}_x$, pues la suma de normas es $G(x) < \infty$. Como $\mathbf{E}_x$ es finito-dimensional, es completo, y la serie converge a un vector bien definido en $\mathbf{E}_x$.
Definimos

$$\mathbf{s}(x) := \begin{cases} \mathbf{s}_{n_1}(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{s}_{n_{k+1}}(x) - \mathbf{s}_{n_k}(x)), & x \in M \setminus Z, \\ 0_x, & x \in Z, \end{cases}$$

donde $0_x$ denota el vector nulo de la fibra $\mathbf{E}_x$.
Para $x \in M \setminus Z$ la suma es telescópica y se obtiene

$$\mathbf{s}_{n_{k+1}}(x) \to \mathbf{s}(x) \qquad \text{c.t.p. en } M.$$

Cada $\mathbf{s}_{n_k}$ es medible, por lo tanto $\mathbf{s}$ es medible como límite puntual c.t.p. de funciones medibles. Además, por construcción $\pi_{\mathbf{E}}(\mathbf{s}(x)) = x$ para todo $x \in M$, por lo que $\mathbf{s}$ es una sección medible de $\mathbf{E}$.
Sea $\varepsilon > 0$. Como $(\mathbf{s}_n)$ es de Cauchy, existe $N$ tal que

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|_{L^p(M,\mathbf{E})} < \varepsilon \qquad \text{para todo } n, m \geq N.$$

Fijado $n \geq N$, se tiene

$$|\mathbf{s}_n(x) - \mathbf{s}_{n_k}(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}^p \to |\mathbf{s}_n(x) - \mathbf{s}(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}^p \qquad \text{c.t.p.}$$

Como $n_k \longrightarrow \infty$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N$ para todo $k \geq k_0$. Aplicando el Lema de Fatou (Lema B.6.12), pues las funciones son no negativas y medibles,

$$\int_M |\mathbf{s}_n - \mathbf{s}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_M |\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{n_k}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \varepsilon^p.$$

Por lo tanto $\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$, y se concluye que $\mathbf{s}_n \to \mathbf{s}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$. Tomando un índice fijo $n_0$,

$$\|\mathbf{s}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{s}_{n_0}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} + \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_{n_0}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} < \infty,$$

por lo que $\mathbf{s} \in L^p(M,\mathbf{E})$.
Ahora consideramos el caso $p = \infty$. Por la definición de la norma del supremo esencial, para cada par $n, m \in \mathbb{N}$ existe un conjunto de medida nula $Z_{n,m} \subset M$ tal que

$$|\mathbf{s}_n(x) - \mathbf{s}_m(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \leq \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} \qquad \text{para todo } x \in M \setminus Z_{n,m}.$$

Adicionalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto de medida nula $W_n \subset M$ tal que $\pi_{\mathbf{E}}(\mathbf{s}_n(x)) = x$ para todo

$x \in M \setminus W_n$. Definimos

$$Z := \left( \bigcup_{n,m=1}^{\infty} Z_{n,m} \right) \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n \right).$$

Entonces $Z$ tiene medida nula y, para todo $x \in M \setminus Z$ y todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbf{s}_n(x) - \mathbf{s}_m(x)|_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} \leq \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}.$$

Como $(\mathbf{s}_n)$ es de Cauchy en $L^\infty(M,\mathbf{E})$, la desigualdad anterior implica que, para cada $x \in M \setminus Z$, la sucesión $(\mathbf{s}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbf{E}_x$. Como $\mathbf{E}_x$ es finito-dimensional, es completo, y existe $\mathbf{s}(x) \in \mathbf{E}_x$ tal que

$$\mathbf{s}_n(x) \longrightarrow \mathbf{s}(x) \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Definimos

$$\mathbf{s}(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{s}_n(x), & x \in M \setminus Z, \\ 0_x, & x \in Z, \end{cases}$$

donde $0_x$ denota el vector nulo de la fibra $\mathbf{E}_x$. Por construcción, $\pi_\mathbf{E}(\mathbf{s}(x)) = x$ para todo $x \in M \setminus Z$, y también para $x \in Z$ porque $\pi_\mathbf{E}(0_x) = x$. Además, $\mathbf{s}$ es medible por ser el límite puntual c.t.p. de las secciones medibles $\mathbf{s}_n$.
Sea $\varepsilon > 0$. Como $(\mathbf{s}_n)$ es de Cauchy en $L^\infty(M,\mathbf{E})$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} < \varepsilon \qquad \text{para todo } n, m \geq N.$$

Por la construcción de $Z$, para todo $x \in M \setminus Z$ y todo $n, m \geq N$ se tiene

$$|\mathbf{s}_n(x) - \mathbf{s}_m(x)|_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} \leq \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} < \varepsilon.$$

Fijado $n \geq N$, tomando el límite cuando $m \to \infty$ y usando $\mathbf{s}_m(x) \to \mathbf{s}(x)$ para $x \in M \setminus Z$, se obtiene

$$|\mathbf{s}_n(x) - \mathbf{s}(x)|_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} \leq \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in M \setminus Z.$$

Por lo tanto,

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} \leq \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq N,$$

y se concluye que $\mathbf{s}_n \to \mathbf{s}$ en $L^\infty(M,\mathbf{E})$. En particular, tomando $n = N$ se tiene $\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_N\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} \leq \varepsilon$, y como $\mathbf{s}_N \in L^\infty(M,\mathbf{E})$ se deduce que $\mathbf{s} \in L^\infty(M,\mathbf{E})$.

Concluimos que toda sucesión de Cauchy en $L^p(M,\mathbf{E})$ converge a un elemento en $L^p(M,\mathbf{E})$. Por lo tanto, $L^p(M,\mathbf{E})$ es completo para todo $1 \leq p \leq \infty$. □

La colección de una sección y de sus derivadas covariantes débiles permite verla como un elemento de un producto de espacios $L^p$. El encaje resultante es isométrico y transfiere al espacio de Sobolev propiedades funcionales del producto.

**Teorema 9.1.14.** (Encaje isométrico en $L^p$) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y conexión suave $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $m\in\mathbb{N}_0$ y $1\leq p\leq\infty$. Entonces el operador $J_m\colon W^{m,p}(M,\mathbf{E})\subseteq L^p(M,\mathbf{E})\longrightarrow\prod_{j=0}^{m}L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ dado por $J_m(\mathbf{u})=\left(\nabla_w^j\mathbf{u}\right)_{j=0}^m$ es una isometría en su imagen. Además $J_m(W^{m,p}(M,\mathbf{E}))$ es cerrado y por lo tanto $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es un espacio de Banach.

*Demostración.* Por definición de la norma de Sobolev, si $1\leq p<\infty$ se tiene

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}=\left(\sum_{j=0}^{m}\|\nabla_w^j\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right)^{\frac{1}{p}},$$

mientras que para $p=\infty$ se tiene

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,\infty}(M,\mathbf{E})}=\max_{0\leq j\leq m}\|\nabla_w^j\mathbf{u}\|_{L^\infty(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})}.$$

Dotamos al producto $\prod_{j=0}^{m}L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ con la norma $\ell^p$ si $1\leq p<\infty$, y con la norma del máximo si $p=\infty$. Entonces, para toda $\mathbf{u}\in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$,

$$\|J_m(\mathbf{u})\|_{\ell^p}=\left\|(\nabla_w^j\mathbf{u})_{j=0}^m\right\|_{\ell^p}=\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})},$$

lo cual muestra que $J_m$ es una isometría en su imagen.
Probemos ahora que $J_m(W^{m,p}(M,\mathbf{E}))$ es cerrado. Sea

$$J_m(\mathbf{u}_k)=\left(\nabla_w^j\mathbf{u}_k\right)_{j=0}^m\in J_m(W^{m,p}(M,\mathbf{E}))$$

una sucesión tal que

$$J_m(\mathbf{u}_k)\longrightarrow(\mathbf{w}_j)_{j=0}^m\quad\text{en}\quad\prod_{j=0}^{m}L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E}).$$

En particular,

$$\mathbf{u}_k\to\mathbf{w}_0\text{ en }L^p(M,\mathbf{E}),\qquad\nabla_w^j\mathbf{u}_k\to\mathbf{w}_j\text{ en }L^p\left(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E}\right),\quad j=1,\dots,m.$$

Aplicando el Lema 9.1.12 se concluye que $\mathbf{w}_0\in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ y que

$$\nabla_w^j\mathbf{w}_0=\mathbf{w}_j,\qquad j=1,\dots,m.$$

Por lo tanto,

$$(\mathbf{w}_j)_{j=0}^m=J_m(\mathbf{w}_0)\in J_m(W^{m,p}(M,\mathbf{E})),$$

lo cual prueba que $J_m(W^{m,p}(M,\mathbf{E}))$ es cerrado.
Finalmente, como $\prod_{j=0}^{m}L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ es un espacio de Banach y $J_m(W^{m,p}(M,\mathbf{E}))$ es un subespacio ce-

rrado, se deduce que $J_m(W^{m,p}(M,\mathbf{E}))$ es un espacio de Banach. Dado que $J_m\colon W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow J_m(W^{m,p}(M,\mathbf{E}))$ es una isometría sobre su imagen, concluimos que $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es un espacio de Banach. □

Entre las propiedades que tienen los espacios de Sobolev, tenemos que en algunos casos son uniformemente convexos, reflexivos y separables. La propiedad de convexidad uniforme la dejamos plasmada en la siguiente definición:

**Definición 9.1.15.** (Convexidad uniforme) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Decimos que $X$ es *uniformemente convexo* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cualesquiera $x, y \in X$ con

$$\|x\| = \|y\| = 1 \quad \text{y} \quad \|x - y\| \geq \varepsilon,$$

se cumple

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

Para ver la convexidad uniforme, primero recordaremos un teorema importante del análisis funcional, el teorema de Milman–Pettis:

**Teorema 9.1.16.** (Milman–Pettis) Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

Las desigualdades que presentamos a continuación reciben su nombre en honor a James A. Clarkson [39], quien estudió este tipo de cotas para las normas de los espacios $L^p$. En el caso particular de un espacio de Hilbert, la estructura geométrica simplifica notablemente el argumento, permitiendo deducir estas desigualdades como consecuencia directa de la ley del paralelogramo.

**Lema 9.1.17.** (Desigualdades de tipo Clarkson en espacios de Hilbert) Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $\|\cdot\|$ la norma inducida.

(a) Si $2 \leq p < \infty$, entonces para cualesquiera $u, v \in H$,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^p \leq \frac{\|u\|^p + \|v\|^p}{2}.$$

(b) Si $1 < p \leq 2$ y $q$ es el exponente conjugado de $p$, entonces para cualesquiera $u, v \in H$,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^q + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^q \leq \left(\frac{\|u\|^p + \|v\|^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}}.$$

La desigualdad escalar utilizada a continuación es [39, Teorema 2].

*Demostración.* Para cualesquiera $u, v \in H$, la ley del paralelogramo implica

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2}{2}.$$

Definimos

$$A = \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2, \qquad B = \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2,$$

de modo que

$$A+B=\frac{\|u\|^2+\|v\|^2}{2}.$$

Primero veamos que se cumple (a). Como $p\geq 2$, se tiene $\frac{p}{2}\geq 1$. Para $A,B\geq 0$ resulta

$$A^{\frac{p}{2}}+B^{\frac{p}{2}}\leq (A+B)^{\frac{p}{2}}.$$

Por otra parte, usando la convexidad de la función $t\mapsto t^{\frac{p}{2}}$ en $[0,\infty)$,

$$(A+B)^{\frac{p}{2}}=\left(\frac{\|u\|^2+\|v\|^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\leq \frac{\left(\|u\|^2\right)^{\frac{p}{2}}+\left(\|v\|^2\right)^{\frac{p}{2}}}{2}=\frac{\|u\|^p+\|v\|^p}{2}.$$

Sustituyendo $A$ y $B$ se obtiene el resultado.

Finalmente veamos que se cumple (b). Sean $x=\|u\|$ e $y=\|v\|$. Por la ley del paralelogramo, la suma de nuestras constantes es

$$A+B=\frac{x^2+y^2}{2}.$$

Por la desigualdad del triángulo, se tienen las siguientes cotas superior e inferior para $A$:

$$\left|\frac{x-y}{2}\right|=\frac{|\|u\|-\|v\||}{2}\leq\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\leq\frac{\|u\|+\|v\|}{2}=\frac{x+y}{2}.$$

Elevando al cuadrado, deducimos que $A$ pertenece al intervalo cerrado

$$I=\left[\left(\frac{x-y}{2}\right)^2,\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right].$$

Para acotar la cantidad $A^{\frac{q}{2}}+B^{\frac{q}{2}}$, consideramos la función de variable real $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(t)=t^{\frac{q}{2}}+\left(\frac{x^2+y^2}{2}-t\right)^{\frac{q}{2}}.$$

Como $1<p\leq 2$, el exponente conjugado cumple $q\geq 2$, por lo que $r=\frac{q}{2}\geq 1$. Calculando las derivadas de $f$, obtenemos:

$$f'(t)=rt^{r-1}-r\left(\frac{x^2+y^2}{2}-t\right)^{r-1},$$
$$f''(t)=r(r-1)t^{r-2}+r(r-1)\left(\frac{x^2+y^2}{2}-t\right)^{r-2}.$$

Dado que $r\geq 1$, se sigue que $r(r-1)\geq 0$. Además, en el dominio considerado, tanto $t$ como $\left(\frac{x^2+y^2}{2}-t\right)$ son no negativos, de modo que $f''(t)\geq 0$ para todo $t\in I$. Por lo tanto, $f$ es una función convexa.
El máximo de una función convexa en un intervalo cerrado siempre se alcanza en al menos uno de sus

extremos. Evaluando $f$ en los extremos de $I$, observamos que en ambos casos se obtiene el mismo valor:

$$f\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right) = f\left(\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^q + \left|\frac{x-y}{2}\right|^q.$$

Como la constante $A \in I$, evaluando en $t = A$ concluimos que

$$A^{\frac{q}{2}} + B^{\frac{q}{2}} = f(A) \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^q + \left|\frac{x-y}{2}\right|^q.$$

Este paso reduce geométricamente el problema vectorial a un problema de escalares reales no negativos. Aplicando la desigualdad escalar citada para los números reales $x, y \geq 0$ y $1 < p \leq 2$, se tiene que

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^q + \left|\frac{x-y}{2}\right|^q \leq \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Uniendo las desigualdades, obtenemos el resultado deseado. □

**Proposición 9.1.18.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada $\mathbf{h_E}$. Si $1 < p < \infty$, entonces $L^p(M, \mathbf{E})$ es uniformemente convexo.

*Demostración.* Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^p(M, \mathbf{E})$ tales que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} = \|\mathbf{v}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} = 1, \qquad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \geq \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in M$, la fibra $(\mathbf{E}_x, \mathbf{h_E}(x))$ es un espacio de Hilbert, por lo que es posible aplicar el Lema 9.1.17 punto a punto y así tendremos dos casos:

*Caso* $2 \leq p < \infty$. Aplicando el Lema 9.1.17 (a) a $\mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \in \mathbf{E}_x$ y luego integrando respecto de $\lambda_\mathbf{g}$, se obtiene

$$\int_M \left|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right|_{\mathbf{h_E}}^p d\lambda_\mathbf{g} + \int_M \left|\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{2}\right|_{\mathbf{h_E}}^p d\lambda_\mathbf{g} \leq \frac{1}{2}\int_M \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}^p + |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_E}}^p\right) d\lambda_\mathbf{g}.$$

Por definición de la norma en $L^p(M, \mathbf{E})$, esto equivale a

$$\left\|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^p + \left\|\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{2}\right\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^p \leq \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^p + \|\mathbf{v}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^p}{2} = 1.$$

Además,

$$\left\|\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{2}\right\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^p = \frac{1}{2^p}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^p \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Sustituyendo en la desigualdad anterior,

$$\left\|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Tomando raíces $p$-ésimas,

$$\left\|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si definimos

$$\delta(\varepsilon) := 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0,$$

obtendremos el resultado.

*Caso* $1 < p < 2$. Sea $q$ el exponente conjugado de $p$. Aplicando el Lema 9.1.17 (b) a $\mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \in \mathbf{E}_x$, se tiene la desigualdad puntual

$$\left|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right|_{\mathbf{h_E}}^q + \left|\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{2}\right|_{\mathbf{h_E}}^q \leq \left(\frac{|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}^p + |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_E}}^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Elevando ambos lados a la potencia $\frac{p}{q}$ e integrando respecto de $\lambda_{\mathbf{g}}$, resulta

$$\int_M \left(\left|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right|_{\mathbf{h_E}}^q + \left|\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{2}\right|_{\mathbf{h_E}}^q\right)^{\frac{p}{q}} d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \frac{1}{2}\int_M \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}^p + |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_E}}^p\right) d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} = \|\mathbf{v}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} = 1$, el lado derecho es exactamente 1. Por otra parte, dado que $p < 2$, se cumple que el exponente $\dfrac{p}{q} = p - 1 < 1$. Aplicando la desigualdad inversa de Minkowski de la Proposición B.7.4, con $r = \dfrac{p}{q}$, el lado izquierdo se acota inferiormente, obteniendo:

$$\left(\int_M \left|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right|_{\mathbf{h_E}}^p d\lambda_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{q}{p}} + \left(\int_M \left|\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{2}\right|_{\mathbf{h_E}}^p d\lambda_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{q}{p}} \leq \left(\int_M \left(\left|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right|_{\mathbf{h_E}}^q + \left|\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{2}\right|_{\mathbf{h_E}}^q\right)^{\frac{p}{q}} d\lambda_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Como la integral de la derecha está acotada por 1 y $1^{\frac{q}{p}} = 1$, esto se traduce en términos de la norma en $L^p(M,\mathbf{E})$ como

$$\left\|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^q + \left\|\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{2}\right\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^q \leq 1.$$

De forma análoga al caso anterior, se tiene

$$\left\|\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{2}\right\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^q \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q,$$

lo cual implica

$$\left\|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^q \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q.$$

Tomando raíces $q$-ésimas, concluimos

$$\left\|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = 1 - \delta(\varepsilon),$$

con la elección explícita

$$\delta(\varepsilon) := 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} > 0.$$

En ambos casos se ha encontrado $\delta(\varepsilon) > 0$ que depende únicamente de $\varepsilon$ y de $p$. Esto prueba que $L^p(M,\mathbf{E})$ es uniformemente convexo. □

Tenemos pues el siguiente:

**Corolario 9.1.19.** (Convexidad uniforme y reflexividad de $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $1<p<\infty$, entonces el espacio de Sobolev $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es uniformemente convexo. En particular, por el Teorema 9.1.16, $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es reflexivo.

La estabilidad de la convexidad uniforme bajo productos $\ell^p$ es [39, Teorema 1].

*Demostración.* Por la Proposición 9.1.18, tenemos que para cada $j\in\{0,\dots,m\}$, $L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ es uniformemente convexo. Por lo que el producto $\prod_{j=0}^{m} L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ dotado con la norma $\ell^p$ es uniformemente convexo. La convexidad uniforme se hereda a subespacios y se preserva bajo isometrías, por lo que por el Teorema 9.1.14 concluimos que $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es uniformemente convexo. □

La separabilidad será una propiedad importante y los espacios $L^p$ la heredan a partir de una propiedad de los espacios de medida que recibe el mismo nombre:

**Definición 9.1.20.** (Espacio de medida separable) Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida. Decimos que $(X,\mathcal{A},\mu)$ es un *espacio de medida separable* si existe una familia numerable de conjuntos $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}$ tal que la $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ está contenida en la completación de la $\sigma$-álgebra generada por $\mathcal{C}$ (denotada $\overline{\sigma(\mathcal{C})}^{\mu}$). Es decir:

$$\mathcal{A}\subseteq\overline{\sigma(\mathcal{C})}^{\mu}.$$

En el caso particular donde $\mathcal{A}$ ya es completa, esto se convierte en la igualdad:

$$\mathcal{A}=\overline{\sigma(\mathcal{C})}^{\mu}.$$

Para establecer el siguiente lema se sugiere consultar [22].

**Lema 9.1.21.** (Separabilidad de $L^p(X,\mu)$) Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida $\sigma$-finito y sea $1\leq p<\infty$. Si el espacio de medida $(X,\mathcal{A},\mu)$ es separable, entonces $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ es separable.

Esto nos dice que el espacio $L^p(M)$ es separable para $1\leq p<\infty$ pues $(M,\mathcal{L}_M,\lambda_g)$ es un espacio de medida separable:

**Proposición 9.1.22.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\lambda_{\mathbf{g}}$ la medida de Riemann–Lebesgue asociada. Entonces el espacio de medida $(M,\mathcal{L}_M,\lambda_{\mathbf{g}})$ es separable y $\sigma$-finito.

*Demostración.* Como $M$ es una variedad suave, es un espacio topológico segundo numerable. En particular, existe una base numerable de abiertos $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la topología de $M$.
Sea $\mathcal{B}$ la $\sigma$-álgebra de Borel de $M$. Entonces

$$\mathcal{B}=\sigma\big(\{U_k\mid k\in\mathbb{N}\}\big).$$

Además, por el Lema 2.15.11, $\mathcal{L}_M$ coincide con la completación de $\mathcal{B}$ respecto a $\lambda_{\mathbf{g}}$, es decir, $\mathcal{L}_M=\overline{\mathcal{B}}^{\lambda_{\mathbf{g}}}$, y $\lambda_{\mathbf{g}}$ es $\sigma$-finita.

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_M = \overline{\sigma(\{U_k \mid k \in \mathbb{N}\})}^{\lambda_{\mathbf{g}}},$$

lo cual muestra que $(M, \mathcal{L}_M, \lambda_{\mathbf{g}})$ es un espacio de medida separable. □

A partir de esto demostraremos la separabilidad de $L^p(M, \mathbf{E})$:

**Teorema 9.1.23.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Si $1 \leq p < \infty$, entonces $L^p(M, \mathbf{E})$ es separable.

*Demostración.* Sea $(U_k, \varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un atlas numerable de $M$. Refinándolo mediante dominios de trivialización del haz, podemos suponer que para cada $k$ existe un marco local $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$-ortonormal $(\mathbf{e}_{1,k}, \dots, \mathbf{e}_{r,k})$ de $\mathbf{E}$ sobre $U_k$. Sea $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una partición de la unidad suave subordinada a $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, como $L^p(U_k)$ es separable, fijamos un subconjunto denso numerable $\mathcal{D}_k \subseteq L^p(U_k)$. Definimos

$$\mathcal{D} := \left\{ \sum_{k=1}^{N} \psi_k \left( \sum_{j=1}^{r} f_{j,k}\, \widetilde{\mathbf{e}}_{j,k} \right) \,\middle|\, N \in \mathbb{N},\ \ f_{j,k} \in \mathcal{D}_k \right\},$$

donde $\widetilde{\mathbf{e}}_{j,k}$ denota la extensión por cero de $\mathbf{e}_{j,k}$ fuera de $U_k$. Entonces $\mathcal{D}$ es numerable y $\mathcal{D} \subseteq L^p(M, \mathbf{E})$.
Veamos que $\mathcal{D}$ es denso en $L^p(M, \mathbf{E})$. Sea $\mathbf{s} \in L^p(M, \mathbf{E})$ y sea $\varepsilon > 0$. Para $N \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathbf{s}_N := \sum_{k=1}^{N} \psi_k \mathbf{s}.$$

Escribiendo $w_N := \sum_{k>N} \psi_k$, se tiene $0 \leq w_N \leq 1$ y $w_N(x) \to 0$ para todo $x \in M$ (ya que $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = 1$). Además,

$$|\mathbf{s} - \mathbf{s}_N|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = |w_N \mathbf{s}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = w_N\, |\mathbf{s}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \leq |\mathbf{s}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Por lo tanto,

$$\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_N\|^p_{L^p(M,\mathbf{E})} = \int_M |\mathbf{s} - \mathbf{s}_N|^p_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M w_N^p\, |\mathbf{s}|^p_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow 0,$$

por el Teorema B.6.14, ya que $w_N^p |\mathbf{s}|^p_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \to 0$ puntualmente y

$$0 \leq w_N^p |\mathbf{s}|^p_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \leq |\mathbf{s}|^p_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \in L^1(M).$$

En particular, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_N\|_{L^p(M,\mathbf{E})} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora fijemos $k \in \{1, \dots, N\}$. En $U_k$ escribimos

$$\mathbf{s} \restriction_{U_k} = \sum_{j=1}^{r} a_{j,k}\, \mathbf{e}_{j,k}, \qquad a_{j,k} \text{ medible en } U_k.$$

Como el marco es $\mathbf{h_E}$-ortonormal, para casi todo $x \in U_k$ se cumple

$$|\mathbf{s}(x)|^2_{\mathbf{h_E}} = \sum_{j=1}^{r} |a_{j,k}(x)|^2,$$

y en particular $|a_{j,k}(x)| \leq |\mathbf{s}(x)|_{\mathbf{h_E}}$. De aquí,

$$\|a_{j,k}\|^p_{L^p(U_k)} = \int_{U_k} |a_{j,k}|^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \int_{U_k} |\mathbf{s}|^p_{\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \int_M |\mathbf{s}|^p_{\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \|\mathbf{s}\|^p_{L^p(M,\mathbf{E})} < \infty,$$

y por lo tanto $a_{j,k} \in L^p(U_k)$ para toda $j \in \{1,\dots,r\}$.
Como $\mathcal{D}_k$ es denso en $L^p(U_k)$, elegimos $f_{j,k} \in \mathcal{D}_k$ tales que

$$\|a_{j,k} - f_{j,k}\|_{L^p(U_k)} < \frac{\varepsilon}{2Nr}, \qquad j \in \{1,\dots,r\}.$$

Definimos

$$u := \sum_{k=1}^{N} \psi_k \left( \sum_{j=1}^{r} f_{j,k} \widetilde{\mathbf{e}}_{j,k} \right) \in \mathcal{D}.$$

Para cada $k \in \{1,\dots,N\}$, usando que $\psi_k \leq 1$ y que el marco es ortonormal, para casi todo $x \in U_k$ se tiene

$$\left| \psi_k(x) \sum_{j=1}^{r} (a_{j,k}(x) - f_{j,k}(x)) \mathbf{e}_{j,k}(x) \right|^p_{\mathbf{h_E}} = |\psi_k(x)|^p \left( \sum_{j=1}^{r} |a_{j,k}(x) - f_{j,k}(x)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \left( \sum_{j=1}^{r} |a_{j,k}(x) - f_{j,k}(x)| \right)^p.$$

Aplicando la desigualdad

$$\left( \sum_{j=1}^{r} b_j \right)^p \leq r^{p-1} \sum_{j=1}^{r} b_j^p, \qquad b_j \geq 0,$$

deducimos

$$\left| \psi_k \sum_{j=1}^{r} (a_{j,k} - f_{j,k}) \mathbf{e}_{j,k} \right|^p_{\mathbf{h_E}} \leq r^{p-1} \sum_{j=1}^{r} |a_{j,k} - f_{j,k}|^p \quad \text{en } U_k.$$

Integrando y usando $\operatorname{supp}(\psi_k) \subset U_k$, obtenemos

$$\left\| \psi_k \sum_{j=1}^{r} (a_{j,k} - f_{j,k}) \widetilde{\mathbf{e}}_{j,k} \right\|^p_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq r^{p-1} \sum_{j=1}^{r} \|a_{j,k} - f_{j,k}\|^p_{L^p(U_k)}.$$

En particular,

$$\left\| \psi_k \sum_{j=1}^{r} (a_{j,k} - f_{j,k}) \widetilde{\mathbf{e}}_{j,k} \right\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq r^{1-\frac{1}{p}} \left( \sum_{j=1}^{r} \|a_{j,k} - f_{j,k}\|^p_{L^p(U_k)} \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Sumando sobre $k \in \{1,\dots,N\}$,

$$\|\mathbf{s}_N - u\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq \sum_{k=1}^{N} \left\| \psi_k \sum_{j=1}^{r} (a_{j,k} - f_{j,k}) \widetilde{\mathbf{e}}_{j,k} \right\|_{L^p(M,\mathbf{E})} < \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente,

$$\|\mathbf{s}-u\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{s}-\mathbf{s}_N\|_{L^p(M,\mathbf{E})} + \|\mathbf{s}_N-u\|_{L^p(M,\mathbf{E})} < \varepsilon.$$

Como $\mathbf{s}$ y $\varepsilon$ fueron arbitrarios, $\mathcal{D}$ es denso en $L^p(M,\mathbf{E})$. En consecuencia, $L^p(M,\mathbf{E})$ es separable. □

**Corolario 9.1.24.** (Separabilidad de $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $1\le p<\infty$, entonces el espacio de Sobolev $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es separable.

*Demostración.* Por el Teorema 9.1.14, el operador

$$J_m\colon W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m} L^p\big(M, T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big), \qquad J_m(u) = \big((\nabla^{\mathbf{E}})^j u\big)_{j=0}^{m},$$

es una isometría en su imagen y $J_m\big(W^{m,p}(M,\mathbf{E})\big)$ es un subespacio cerrado.
Por el Teorema 9.1.23, para cada $j\in\{0,\dots,m\}$ el espacio $L^p\big(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ es separable. En consecuencia, el producto finito $\prod_{j=0}^{m} L^p\big(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ es separable.
Como todo subespacio de un espacio métrico separable es separable, se deduce que $J_m\big(W^{m,p}(M,\mathbf{E})\big)$ es separable. Finalmente, puesto que $J_m$ es una isometría sobre su imagen (y por lo tanto un homeomorfismo sobre su imagen), concluimos que $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es separable. □

Estudiemos ahora el dual de $L^1(M,\mathbf{E})$. Además de extender la dualidad clásica $L^1$–$L^\infty$ al contexto de secciones, esta identificación proporciona una descripción concreta de la topología débil de $L^1(M,\mathbf{E})$ mediante el producto interno fibrado y la integración.

**Proposición 9.1.25.** (Dual de $L^1(M,\mathbf{E})$) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave real de rango finito provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Entonces el mapeo

$$J_{\mathbf{E}}\colon L^\infty(M,\mathbf{E}) \longrightarrow (L^1(M,\mathbf{E}))', \qquad J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})(\mathbf{u}) := \int_M \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

es un isomorfismo isométrico. En particular, $(L^1(M,\mathbf{E}))' \cong L^\infty(M,\mathbf{E})$ y $\sigma(L^1(M,\mathbf{E}),L^\infty(M,\mathbf{E}))$ coincide con $\sigma(L^1(M,\mathbf{E}),(L^1(M,\mathbf{E}))')$.

*Demostración.* La medida de Riemann–Lebesgue es $\sigma$–finita. Para $\mathbf{v}\in L^\infty(M,\mathbf{E})$, la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9) implica $|J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})(\mathbf{u})| \le \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{u}\|_{L^1(M,\mathbf{E})}$ para todo $\mathbf{u}\in L^1(M,\mathbf{E})$, por lo que $J_{\mathbf{E}}$ está bien definido y $\|J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})\| \le \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}$.
Veamos que $J_{\mathbf{E}}$ es sobreyectivo. Sea $\Lambda\in(L^1(M,\mathbf{E}))'$. Tomemos una cubierta abierta numerable $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $M$ con una trivialización local de $\mathbf{E}$ definida sobre cada $U_j$ y fijemos en cada uno de estos abiertos un marco local suave y ortonormal $(\mathbf{e}_{j,1},\dots,\mathbf{e}_{j,r})$. Definimos los conjuntos borelianos disjuntos $A_1 := U_1$ y

$$A_j := U_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} U_i, \qquad j\ge 2.$$

Entonces $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Para $j \in \mathbb{N}$ y $a \in \{1,\dots,r\}$, definimos

$$\Lambda_{j,a}\colon L^1(A_j) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Lambda_{j,a}(f) := \Lambda(\widetilde{f e_{j,a}}),$$

donde la tilde denota la extensión por cero fuera de $A_j$. Como $\Lambda$ es continuo,

$$|\Lambda_{j,a}(f)| = |\Lambda(\widetilde{f e_{j,a}})| \le \|\Lambda\| \|\widetilde{f e_{j,a}}\|_{L^1(M,\mathbf{E})}.$$

Además, como el marco es ortonormal, $|\mathbf{e}_{j,a}|_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} = 1$ sobre $A_j$, luego

$$\|\widetilde{f e_{j,a}}\|_{L^1(M,\mathbf{E})} = \int_{A_j} |f e_{j,a}|_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} = \int_{A_j} |f|\, d\lambda_\mathbf{g} = \|f\|_{L^1(A_j)}.$$

En consecuencia, $|\Lambda_{j,a}(f)| \le \|\Lambda\|\|f\|_{L^1(A_j)}$, por lo que $\|\Lambda_{j,a}\| \le \|\Lambda\|$. Por el Teorema B.7.7, aplicado a $L^1(A_j)$, existe un único $v_j^a \in L^\infty(A_j)$ tal que

$$\Lambda_{j,a}(f) = \int_{A_j} f v_j^a\, d\lambda_\mathbf{g}, \qquad \|v_j^a\|_{L^\infty(A_j)} = \|\Lambda_{j,a}\| \le \|\Lambda\|.$$

Definimos una sección medible $\mathbf{v}$ mediante $\mathbf{v}\restriction_{A_j} := \sum_{a=1}^r v_j^a \mathbf{e}_{j,a}$. Como los marcos son ortonormales, $|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} = \sum_{a=1}^r |v_j^a|^2 \le r\|\Lambda\|^2$ casi en todas partes sobre $A_j$, de donde $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} \le \sqrt{r}\|\Lambda\|$ casi en todas partes y, por lo tanto, $\mathbf{v} \in L^\infty(M,\mathbf{E})$.

Para $\mathbf{u} \in L^1(M,\mathbf{E})$, escribimos $u_j^a := \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_{j,a}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}$ sobre $A_j$ y definimos $\mathbf{u}_N := \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{A_j}\mathbf{u}$. Como

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{L^1(M,\mathbf{E})} = \sum_{j>N} \int_{A_j} |\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} \longrightarrow 0,$$

se tiene $\mathbf{u}_N \to \mathbf{u}$ en $L^1(M,\mathbf{E})$. Además, $\mathbf{u}_N = \sum_{j=1}^N \sum_{a=1}^r \widetilde{u_j^a e_{j,a}}$.

Por la linealidad de $\Lambda$ y la definición de $\Lambda_{j,a}$,

$$\Lambda(\mathbf{u}_N) = \sum_{j=1}^N \sum_{a=1}^r \Lambda\big(\widetilde{u_j^a e_{j,a}}\big) = \sum_{j=1}^N \sum_{a=1}^r \Lambda_{j,a}(u_j^a) = \sum_{j=1}^N \sum_{a=1}^r \int_{A_j} u_j^a v_j^a\, d\lambda_\mathbf{g}.$$

Como los marcos son ortonormales, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} = \sum_{a=1}^r u_j^a v_j^a$ sobre cada $A_j$, luego

$$\sum_{j=1}^N \sum_{a=1}^r \int_{A_j} u_j^a v_j^a\, d\lambda_\mathbf{g} = \int_M \mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^N A_j} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g}.$$

Además,

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{N} A_j}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h_E}} \longrightarrow \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h_E}} \quad \text{casi en todas partes,}$$

y

$$\left|\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{N} A_j}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h_E}}\right| \leq |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_E}} \in L^1(M),$$

pues $\mathbf{u} \in L^1(M,\mathbf{E})$ y $\mathbf{v} \in L^\infty(M,\mathbf{E})$. Por el Teorema B.6.14 y la continuidad de $\Lambda$,

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \lim_{N\to\infty} \Lambda(\mathbf{u}_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N}\sum_{a=1}^{r} \int_{A_j} u_j^a v_j^a \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por consiguiente, $\Lambda = J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})$.

Finalmente, probemos que $J_{\mathbf{E}}$ es isométrico. Ya sabemos que $\|J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}$. Supongamos que $\mathbf{v} \neq 0$ y sea $0 < \varepsilon < \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}$. Por la definición del supremo esencial, el conjunto

$$A_\varepsilon := \left\{ x \in M \;\middle|\; |\mathbf{v}(x)|_{\mathbf{h_E}} > \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} - \varepsilon \right\}$$

tiene medida positiva, pues de lo contrario se tendría $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_E}} \leq \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} - \varepsilon$ casi en todas partes, en contradicción con la definición de $\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}$. Como $\lambda_{\mathbf{g}}$ es $\sigma$–finita, existen conjuntos medibles $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ y $\lambda_{\mathbf{g}}(C_k) < \infty$. Puesto que $A_\varepsilon = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_\varepsilon \cap C_k)$ tiene medida positiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon := A_\varepsilon \cap C_k$ satisface $0 < \lambda_{\mathbf{g}}(B_\varepsilon) < \infty$.

Definimos

$$\mathbf{u}_\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{\mathbf{v}(x)}{\lambda_{\mathbf{g}}(B_\varepsilon)|\mathbf{v}(x)|_{\mathbf{h_E}}}, & x \in B_\varepsilon, \\ 0_x, & x \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Como $B_\varepsilon \subseteq A_\varepsilon$ y $\varepsilon < \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}$, se tiene $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_E}} > 0$ sobre $B_\varepsilon$. Además,

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^1(M,\mathbf{E})} = \frac{1}{\lambda_{\mathbf{g}}(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} 1 \, d\lambda_{\mathbf{g}} = 1,$$

y

$$J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})(\mathbf{u}_\varepsilon) = \frac{1}{\lambda_{\mathbf{g}}(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} > \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} - \varepsilon.$$

Por la definición de la norma de operador,

$$\|J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})\| = \sup_{\substack{\mathbf{u}\in L^1(M,\mathbf{E}) \\ \|\mathbf{u}\|_{L^1(M,\mathbf{E})}\leq 1}} |J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})(\mathbf{u})| \geq |J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})(\mathbf{u}_\varepsilon)| > \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} - \varepsilon.$$

Como esta desigualdad vale para todo $0 < \varepsilon < \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}$, haciendo $\varepsilon \to 0$ obtenemos $\|J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})\| \geq \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}$. Por consiguiente, $\|J_{\mathbf{E}}(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}$ y $J_{\mathbf{E}}$ es un isomorfismo isométrico. □

Para un haz vectorial suave *real* $\mathbf{E} \to M$ de rango finito provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$, consideramos sobre $L^1(M,\mathbf{E}) \times L^\infty(M,\mathbf{E})$ la dualidad

$$\mathfrak{b}_{\mathbf{E}}(u,\mathbf{v}) := \int_M \langle u,\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por la Proposición 9.1.25, el apareamiento $\mathfrak{b}_{\mathbf{E}}$ identifica isométricamente a $L^\infty(M,\mathbf{E})$ con $(L^1(M,\mathbf{E}))'$. En consecuencia,

$$\sigma(L^1(M,\mathbf{E}),L^\infty(M,\mathbf{E})) = \sigma(L^1(M,\mathbf{E}),(L^1(M,\mathbf{E}))'),$$

es decir, $\sigma(L^1(M,\mathbf{E}),L^\infty(M,\mathbf{E}))$ coincide con la topología débil de $L^1(M,\mathbf{E})$. En consecuencia, una red $(u_\gamma)_\gamma$ converge a $u$ respecto a esta topología si y sólo si

$$\int_M \langle u_\gamma, \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow \int_M \langle u, \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

para todo $\mathbf{v} \in L^\infty(M,\mathbf{E})$.

Si $\mathbf{E}$ es hermitiano complejo, la formulación complejo–lineal sustituye el segundo factor por $L^\infty(M,\overline{\mathbf{E}})$ y usa $\mathfrak{b}_{\mathbf{E}}(u,\overline{v}) = \displaystyle\int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(u,v)\, d\lambda_{\mathbf{g}}$; esta versión, para todo $1 \leq p < \infty$, se demuestra en el Corolario B.7.8 del Apéndice B.

### 9.1.2 Compatibilidad con restricciones y expresiones locales de las derivadas covariantes en haces vectoriales

Otra propiedad importante de las secciones de Sobolev es que cuando se restringen a abiertos nos da una sección de Sobolev definida en dicho abierto.

**Proposición 9.1.26.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ y de una conexión suave $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $U \subseteq M$ es abierto, $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ y $s \in \{0,\dots,m\}$, entonces $\mathbf{u}\restriction_U \in W^{m,p}(U,\mathbf{E}\restriction_U)$ y $\nabla^s_w(\mathbf{u}\restriction_U) = (\nabla^s_w\mathbf{u})\restriction_U$ casi en todas partes en $U$.

*Demostración.* Sea $s \leq m$. Tenemos que demostrar que $\mathbf{u}\restriction_U$ tiene derivadas covariante débil de orden $s$ en $L^p(U, T^{(0,s)}(TU)\otimes \mathbf{E}\restriction_U)$. Para ello, tomemos $\sigma \in \Gamma_c(T^{(0,s)}(TU)\otimes\mathbf{E}\restriction_U)$. Podemos extender $\sigma$ a $\widetilde{\sigma} \in \Gamma_c(T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ como en el Lema 9.1.6. Por otro lado, como $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$, existe $\nabla^s_w\mathbf{u}$, la $s$-ésima derivada covariante débil de $\mathbf{u}$. Esta cumple que

$$\int_M \langle \nabla^s_w\mathbf{u}, \widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \mathbf{u}, (\nabla^s)^*\widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $\sigma \equiv \widetilde{\sigma}$ en $U$, el cual es abierto, por la Observación 8.1.16, tenemos que $(\nabla^s)^*\widetilde{\sigma} \equiv (\nabla^s)^*\sigma$ en $U$. Entonces

$$\int_U \langle (\nabla^s_w\mathbf{u})\restriction_U, \sigma\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \nabla^s_w\mathbf{u}, \widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \mathbf{u}, (\nabla^s)^*\widetilde{\sigma}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_U \langle \mathbf{u}\restriction_U, (\nabla^s)^*\sigma\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} d\lambda_{\mathbf{g}},$$

donde la última igualdad se da pues por la Proposición 8.1.15, $\operatorname{supp}((\nabla^s)^*\widetilde{\sigma}) \subseteq \operatorname{supp}(\widetilde{\sigma}) = \operatorname{supp}(\sigma) \subseteq U$ y $(\nabla^s)^*\widetilde{\sigma} \equiv (\nabla^s)^*\sigma$ en $U$. Por lo tanto, $(\nabla^s_w\mathbf{u})\restriction_U$ satisface la identidad que caracteriza a la $s$-ésima derivada covariante débil de $\mathbf{u}\restriction_U$. Por la unicidad de la derivada covariante débil, $\nabla^s_w(\mathbf{u}\restriction_U) = (\nabla^s_w\mathbf{u})\restriction_U$ casi en todas partes en $U$. Como $s \leq m$ fue arbitrario, $\mathbf{u}\restriction_U \in W^{m,p}(U,\mathbf{E}\restriction_U)$. □

Estudiar las propiedades locales de los espacios de Sobolev es importante pues nos da una forma de trabajar con ellos computacionalmente. Para llegar a este objetivo, primero es importante que el lector se familiarice totalmente con las expresiones coordenadas de las derivadas covariantes de orden superior en haces vectoriales suaves. Este tipo de expresiones son comunes en la literatura para algunos casos, pero el caso de orden superior no se suele tratar comúnmente por su complejidad. En esta sección nos dedicaremos a calcular detalladamente

dichas expresiones locales.

**Lema 9.1.27.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera con una conexión $\nabla$ definida en $TM$ y sea $\mathbf{E}$ un haz vectorial suave con una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Denotemos por $\nabla$ también a la conexión inducida en el haz tensorial $T^{(k,l)}(TM)\otimes\mathbf{E}$, caracterizada por la Proposición 2.4.27. Sea $U\subseteq M$ abierto tal que tenemos $(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_n)$ un marco local de $TM$ sobre $U$, $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ su comarco dual asociado y $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ un marco local de $\mathbf{E}$ sobre $U$. Si $\mathbf{F}\in\Gamma(T^{(k,l)}(TM)\otimes\mathbf{E})$ está expresado localmente como

$$\mathbf{F}=F^{i_1\dots i_k a}_{j_1\dots j_l}\,\mathbf{E}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{E}_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l}\otimes\mathbf{e}_a,$$

entonces las componentes de $\nabla\mathbf{F}$ respecto a estos marcos son

$$(\nabla_{\mathbf{E}_c}\mathbf{F})^{i_1\dots i_k a}_{j_1\dots j_l}=\mathbf{E}_c\big(F^{i_1\dots i_k a}_{j_1\dots j_l}\big)+\sum_{t=1}^{k}\Gamma^{i_t}_{cs}F^{i_1\dots s\dots i_k a}_{j_1\dots j_l}-\sum_{t=1}^{l}\Gamma^{s}_{cj_t}F^{i_1\dots i_k a}_{j_1\dots s\dots j_l}+\sum_{b=1}^{r}(A_c)^a_b F^{i_1\dots i_k b}_{j_1\dots j_l},$$

donde los coeficientes de la conexión están dados por $\nabla_{\mathbf{E}_c}\mathbf{E}_j=\Gamma^s_{cj}\mathbf{E}_s$ y $\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{E}_c}\mathbf{e}_b=(A_c)^a_b\mathbf{e}_a$.

*Demostración.* La derivada covariante de $\mathbf{F}$ en la dirección $\mathbf{E}_c$ es

$$\nabla_{\mathbf{E}_c}\mathbf{F}=\nabla_{\mathbf{E}_c}\left(\sum_{a=1}^{r}\mathbf{F}^{(a)}\otimes\mathbf{e}_a\right),$$

donde $\mathbf{F}^{(a)}\in\Gamma(T^{(k,l)}(TM))$ es el campo tensorial con componentes $(\mathbf{F}^{(a)})^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}=F^{i_1\dots i_k a}_{j_1\dots j_l}$. Por la Proposición 2.4.27, aplicando la regla de Leibniz obtenemos

$$\nabla_{\mathbf{E}_c}\mathbf{F}=\sum_{a=1}^{r}\Big((\nabla_{\mathbf{E}_c}\mathbf{F}^{(a)})\otimes\mathbf{e}_a+\mathbf{F}^{(a)}\otimes\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{E}_c}\mathbf{e}_a\Big).\tag{9.2}$$

Por la Proposición 2.4.15, los coeficientes del primer término en (9.2) son

$$(\nabla_{\mathbf{E}_c}\mathbf{F}^{(a)})^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}=\mathbf{E}_c(F^{i_1\dots i_k a}_{j_1\dots j_l})+\sum_{t=1}^{k}\Gamma^{i_t}_{cs}F^{i_1\dots s\dots i_k a}_{j_1\dots j_l}-\sum_{t=1}^{l}\Gamma^{s}_{cj_t}F^{i_1\dots i_k a}_{j_1\dots s\dots j_l}.$$

Para el segundo término en (9.2), sustituimos $\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{E}_c}\mathbf{e}_b=(A_c)^a_b\mathbf{e}_a$. Cambiando el índice de suma para el marco local $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ por $b$ en (9.2), obtenemos

$$\sum_{b=1}^{r}\mathbf{F}^{(b)}\otimes\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{E}_c}\mathbf{e}_b=\sum_{b=1}^{r}\mathbf{F}^{(b)}\otimes\left(\sum_{a=1}^{r}(A_c)^a_b\mathbf{e}_a\right)=\sum_{a=1}^{r}\left(\sum_{b=1}^{r}(A_c)^a_b\mathbf{F}^{(b)}\right)\otimes\mathbf{e}_a.$$

La componente de este término que corresponde a $\mathbf{e}_a$ es $\displaystyle\sum_{b=1}^{r}(A_c)^a_b F^{i_1\dots i_k b}_{j_1\dots j_l}$, lo cual concluye la prueba. □

Esto nos permite dar la siguiente expresión local de las derivadas de orden superior:

**Lema 9.1.28.** (Expresión local de la $s$-ésima derivada covariante) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera equipada con una conexión $\nabla$ en $TM$, y sea $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $r$ equipado con una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $(U, x^1, \dots, x^n)$ una carta suave de $M$ y $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$ un marco local de $\mathbf{E}$ sobre $U$. Denotamos los coeficientes de conexión como

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k, \qquad \nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i} \mathbf{e}_b = \sum_{a=1}^{r} (A_i)_b^a \mathbf{e}_a.$$

Si $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$ tiene expresión coordenada en $U$ dada por $\mathbf{u} = \sum_{b=1}^{r} u^b \mathbf{e}_b$, entonces para todo entero $s \geq 1$, las componentes de la $s$-ésima derivada covariante $\nabla^s \mathbf{u} \in \Gamma(T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E})$ están dadas por

$$(\nabla^s \mathbf{u})^a_{i_1 \dots i_s} = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_s} u^a + \sum_{b=1}^{r} \sum_{|\beta| \leq s-1} \left(B_\beta\right)^a_{b\, i_1 \dots i_s} \partial^\beta u^b, \tag{9.3}$$

donde los coeficientes $\left(B_\beta\right)^a_{b\, i_1 \dots i_s}$ son funciones suaves en $U$ que dependen únicamente de los coeficientes de conexión $\Gamma_{ij}^k$, $(A_i)_b^a$ y sus derivadas parciales de orden hasta $s-1$.

*Demostración.* Demostraremos la afirmación por inducción sobre $s$. Para $s = 1$, la expresión de la conexión de $\mathbf{E}$ en el marco elegido da

$$(\nabla \mathbf{u})^a_i = \partial_i u^a + \sum_{b=1}^{r} (A_i)^a{}_b u^b.$$

Esta es (9.3) con $\left(B_0^{(1)}\right)^a_{b,i} = (A_i)^a{}_b$.

Supongamos ahora que, para cierto $s \geq 1$, existen coeficientes suaves $B_\beta^{(s)}$, con $|\beta| \leq s-1$, para los cuales

$$(\nabla^s \mathbf{u})^a_{i_2 \dots i_{s+1}} = \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{s+1}} u^a + \sum_{b=1}^{r} \sum_{|\beta| \leq s-1} \left(B_\beta^{(s)}\right)^a_{b, i_2 \dots i_{s+1}} \partial^\beta u^b. \tag{9.4}$$

Además, como parte de la hipótesis inductiva, suponemos que estos coeficientes dependen únicamente de $\Gamma_{ij}^k$, $(A_i)^a{}_b$ y de sus derivadas parciales de orden a lo sumo $s-1$.

Pongamos $\mathbf{G} := \nabla^s \mathbf{u}$ y abreviemos $I = (i_2, \dots, i_{s+1})$. Para $t \in \{2, \dots, s+1\}$, denotemos por $I_t(d)$ la lista que se obtiene de $I$ al sustituir $i_t$ por $d$. La fórmula de la conexión inducida en $T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E}$ proporciona

$$(\nabla \mathbf{G})^a_{i_1 I} = \partial_{i_1} G^a_I - \sum_{t=2}^{s+1} \sum_{d=1}^{n} \Gamma^d_{i_1 i_t} G^a_{I_t(d)} + \sum_{c=1}^{r} (A_{i_1})^a{}_c G^c_I. \tag{9.5}$$

Sustituimos (9.4) en cada uno de los tres términos de (9.5). En el primero, la regla de Leibniz da

$$\partial_{i_1} G^a_I = \partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{s+1}} u^a + \sum_{b=1}^{r} \sum_{|\beta| \leq s-1} \partial_{i_1} \left( \left(B_\beta^{(s)}\right)^a_{b,I} \right) \partial^\beta u^b + \sum_{b=1}^{r} \sum_{|\beta| \leq s-1} \left(B_\beta^{(s)}\right)^a_{b,I} \partial^{\beta + e_{i_1}} u^b,$$

donde $e_{i_1}$ es el multiíndice cuya única componente no nula es la $i_1$-ésima. El segundo término se convierte

en

$$-\sum_{t=2}^{s+1}\sum_{d=1}^{n}\Gamma^{d}_{i_1 i_t}G^{a}_{I_t(d)} = -\sum_{t=2}^{s+1}\sum_{d=1}^{n}\Gamma^{d}_{i_1 i_t}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_{t-1}}\partial_d\partial_{i_{t+1}}\cdots\partial_{i_{s+1}}u^a - \sum_{t=2}^{s+1}\sum_{d=1}^{n}\sum_{b=1}^{r}\sum_{|\beta|\leq s-1}\Gamma^{d}_{i_1 i_t}\big(B^{(s)}_{\beta}\big)^{a}_{b,I_t(d)}\partial^{\beta}u^b.$$

Por último, el término correspondiente a la conexión de $\mathbf{E}$ es

$$\sum_{c=1}^{r}(A_{i_1})^{a}{}_{c}G^{c}_{I} = \sum_{c=1}^{r}(A_{i_1})^{a}{}_{c}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_{s+1}}u^c + \sum_{c=1}^{r}\sum_{b=1}^{r}\sum_{|\beta|\leq s-1}(A_{i_1})^{a}{}_{c}\big(B^{(s)}_{\beta}\big)^{c}_{b,I}\partial^{\beta}u^b.$$

En estas tres igualdades aparece exactamente un término con $s+1$ derivadas de una componente de $\mathbf{u}$, a saber,

$$\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_{s+1}}u^a.$$

Los términos de la tercera línea de la primera expansión contienen derivadas de orden $|\beta|+1\leq s$; el primer sumando de la segunda expansión y el primero de la tercera contienen derivadas de orden $s$; y todos los sumandos restantes contienen derivadas de orden a lo sumo $s-1$.
Fijados $a,b,i_1,\ldots,i_{s+1}$ y un multiíndice $\gamma$ con $|\gamma|\leq s$, definimos $\big(B^{(s+1)}_{\gamma}\big)^{a}_{b,i_1\ldots i_{s+1}}$ como la suma de los coeficientes que multiplican a $\partial^{\gamma}u^b$ en las tres expansiones anteriores. Se trata de una suma finita de productos de $\Gamma^{k}_{ij}$, $(A_i)^{a}{}_{b}$, $B^{(s)}_{\beta}$ y $\partial_{i_1}B^{(s)}_{\beta}$. Por la hipótesis inductiva, $B^{(s)}_{\beta}$ depende de los coeficientes de las conexiones y de sus derivadas hasta orden $s-1$, mientras que $\partial_{i_1}B^{(s)}_{\beta}$ depende de ellas hasta orden $s$. En consecuencia, $B^{(s+1)}_{\gamma}$ es suave y depende únicamente de $\Gamma^{k}_{ij}$, $(A_i)^{a}{}_{b}$ y de sus derivadas parciales de orden a lo sumo $s$. Con esta definición obtenemos

$$(\nabla^{s+1}\mathbf{u})^{a}_{i_1\ldots i_{s+1}} = \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_{s+1}}u^a + \sum_{b=1}^{r}\sum_{|\gamma|\leq s}\big(B^{(s+1)}_{\gamma}\big)^{a}_{b,i_1\ldots i_{s+1}}\partial^{\gamma}u^b,$$

que es la afirmación para $s+1$ y concluye la inducción. □

### 9.1.3 La fórmula de integración por partes para haces vectoriales y el adjunto formal

Uno de los ejemplos más importantes de adjunto formal es el correspondiente a la $s$-ésima derivada covariante. Dicho adjunto puede calcularse de manera global y explícita a partir de una fórmula de integración por partes. Esto es natural, ya que el concepto de adjunto formal se motiva precisamente por las fórmulas de integración por partes que dieron origen al concepto de derivada débil en el caso euclidiano.

En esta sección, demostraremos un resultado original que se puede encontrar en [41], el cual permitió dar un tratamiento intrínseco y unificado de los espacios de Sobolev. La obtención de este resultado se motivó inicialmente por el trabajo [33], donde se buscaba establecer el teorema de Meyers–Serrin en variedades para ciertos casos, proporcionando expresiones explícitas de las derivadas covariantes débiles en los casos de primer y segundo orden. Tras un análisis posterior, estas ideas culminaron en el trabajo previamente mencionado. El resultado es el siguiente:

**Teorema 9.1.29.** (Fórmula de integración por partes para derivadas covariantes de orden superior en haces vectoriales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y conexión de Levi–Civita $\nabla$. Sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$.

Denotemos por $\nabla$ también a la conexión inducida en el haz tensorial $T^{(k,l)}(TM)\otimes\mathbf{E}$, caracterizada por la Proposición 2.4.27. Si $s\geq 1$, $\mathbf{F}\in\Gamma_c\big(T^{(k,l)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ y $\mathbf{G}\in\Gamma_c\big(T^{(k,l+s)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$, entonces

$$\int_M \langle\nabla^s\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\,d\lambda_{\mathbf{g}} = (-1)^s\int_M \big\langle\mathbf{F},(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^s\mathbf{G}\big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}$$

$$+\sum_{j=0}^{s-1}(-1)^{s-1-j}\int_{\partial M}\Big\langle\nabla^j\mathbf{F},\,\iota_{\boldsymbol{\nu}}\big((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s-1-j}\mathbf{G}\big)\Big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\,d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}},$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es la normal unitaria exterior a $\partial M$ y $\iota_{\boldsymbol{\nu}}$ denota la contracción de $\boldsymbol{\nu}$ en el primer índice covariante. Más precisamente: si

$$\mathbf{H}\in\Gamma\big(T^{(k,m+1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big),$$

entonces $\iota_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{H}\in\Gamma\big((T^{(k,m)}(TM)\otimes\mathbf{E})\restriction_{\partial M}\big)$ y, en coordenadas locales sobre la frontera,

$$\big(\iota_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{H}\big)^{i_1\ldots i_k a}_{j_1\ldots j_m} := \nu^q\,H^{i_1\ldots i_k a}_{qj_1\ldots j_m},$$

donde $\boldsymbol{\nu}=\nu^q\partial_q$ en dichas coordenadas. Si $\partial M=\varnothing$, la suma de integrales sobre $\partial M$ se interpreta como cero y no interviene ninguna elección de normal.

Aquí $\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}$ denota la contracción, mediante $\mathbf{g}$, de los dos primeros índices covariantes de $\nabla\mathbf{H}$. Más precisamente: si $m\geq 1$ y $\mathbf{H}\in\Gamma\big(T^{(k,m)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$, entonces $\nabla\mathbf{H}\in\Gamma\big(T^{(k,m+1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ y, en coordenadas locales,

$$\big(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla\mathbf{H})\big)^{i_1\ldots i_k a}_{j_1\ldots j_{m-1}} := g^{pq}\,(\nabla\mathbf{H})^{i_1\ldots i_k a}_{pqj_1\ldots j_{m-1}},$$

esto es, se contrae el índice derivativo nuevo con el primer índice covariante heredado de $\mathbf{H}$.

Antes de probar la fórmula de integración por partes, recuperaremos varias identidades clásicas como casos particulares del Teorema 9.1.29. Estos ejemplos permitirán reconocer el significado de cada contracción y de cada término de frontera.

**Ejemplo 9.1.30.** (Fórmulas clásicas de integración por partes como casos particulares del Teorema 9.1.29) Mostraremos cómo varias fórmulas clásicas de integración por partes se obtienen como casos particulares del Teorema 9.1.29. En todos los incisos tomamos $s=1$ y $k=l=0$, de modo que

$$\mathbf{F}\in\Gamma_c(\mathbf{E}),\qquad \mathbf{G}\in\Gamma_c(T^*M\otimes\mathbf{E}).$$

Cuando $\mathbf{E}$ es trivial de rango 1, identificamos $\Gamma_c(\mathbf{E})$ con $C_c^\infty(M)$ y $\Gamma_c(T^*M\otimes\mathbf{E})$ con $\Gamma_c(T^*M)$.

Recordemos que, si $(M,\mathbf{g})$ es una variedad riemanniana, el isomorfismo musical $\flat\colon T_xM\longrightarrow T_x^*M$ definido por $X^\flat=\mathbf{g}(\mathbf{X},\cdot)$ es un isomorfismo lineal cuyo inverso es $\sharp\colon T_x^*M\longrightarrow T_xM$. Además, estos isomorfismos preservan el producto interior en el sentido de que, para $\alpha,\beta\in T_x^*M$ y $\mathbf{X},Y\in T_xM$, se tiene

$$\langle\alpha,\beta\rangle_{\mathbf{g}}=\mathbf{g}(\alpha^\sharp,\beta^\sharp),\qquad \mathbf{g}(\mathbf{X},Y)=\langle X^\flat,Y^\flat\rangle_{\mathbf{g}}.$$

Si $\mathbf{E}$ es un haz vectorial provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$, recordemos que el producto interior inducido en $T^*M\otimes\mathbf{E}$ por $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h_E}$ se denota como $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$.

Para campos tensoriales simples se define por

$$\langle \alpha \otimes s, \beta \otimes t \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} = \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbf{g}} \, \mathbf{h_E}(s,t).$$

En el caso en que $\mathbf{E} = M \times \mathbb{R}$ sea trivial de rango 1 con la métrica usual $\mathbf{h_E}(a,b) = ab$, existe una identificación canónica

$$T^*M \otimes \mathbf{E} \cong T^*M, \qquad \alpha \otimes a \longleftrightarrow a\,\alpha.$$

Bajo esta identificación se tiene

$$\langle \alpha \otimes a, \beta \otimes b \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} = ab \, \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbf{g}} = \langle a\alpha, b\beta \rangle_{\mathbf{g}},$$

por lo que el producto inducido $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ coincide con el producto interior riemanniano usual en $T^*M$. En consecuencia, cuando $\mathbf{E}$ es trivial de rango 1 omitiremos la distinción entre ambas métricas.

a) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera suave. Consideramos $M = \overline{\Omega}$ con la métrica euclidiana

$$\overline{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^i, \qquad (\overline{g}_{ij}) = \delta_{ij}, \quad (\overline{g}^{ij}) = \delta^{ij}.$$

Tomamos el haz trivial $\mathbf{E} = M \times \mathbb{R}$ con la métrica fibrada usual $\mathbf{h_E}(a,b) = ab$ y la conexión plana inducida por la conexión de Levi–Civita euclidiana.

Aplicamos el Teorema 9.1.29. La identidad correspondiente es

$$\int_M \langle \nabla \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{\overline{\mathbf{g}},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_n = -\int_M \langle \mathbf{F}, (\mathrm{tr}_{\overline{\mathbf{g}}} \circ \nabla)\mathbf{G} \rangle_{\mathbf{h_E}} \, d\lambda_n + \int_{\partial M} \langle \mathbf{F}, \iota_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{G} \rangle_{\mathbf{h_E}} \, dS.$$

Como $\mathbf{E}$ es trivial de rango 1, esta identidad se reduce a

$$\int_M \langle \nabla \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{\overline{\mathbf{g}}} \, d\lambda_n = -\int_M \mathbf{F} \, (\mathrm{tr}_{\overline{\mathbf{g}}} \circ \nabla)\mathbf{G} \, d\lambda_n + \int_{\partial M} \mathbf{F} \, \iota_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{G} \, dS.$$

Tomamos $u, v \in C^\infty(M)$ y elegimos

$$\mathbf{F} = u, \qquad \mathbf{G} = \nabla v.$$

En general, para una función suave $v$ en una variedad riemanniana, la derivada covariante coincide con la diferencial:

$$\nabla v = dv = (\partial_i v)\, \mathbf{d}x^i.$$

Por lo tanto, en coordenadas cartesianas

$$(\nabla v)_i = \partial_i v.$$

Además,

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\overline{\mathbf{g}}} = \overline{g}^{ij} (\partial_i u)(\partial_j v) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)(\partial_i v).$$

La expresión general de la derivada covariante de una 1-forma es

$$(\nabla H)_{ij} = \partial_i H_j - \Gamma_{ij}^k H_k.$$

Aplicando esto a $H = \nabla v$:

$$(\nabla(\nabla v))_{ij} = \partial_i \partial_j v - \Gamma_{ij}^k \partial_k v.$$

Como la conexión de Levi–Civita euclidiana satisface $\Gamma_{ij}^k = 0$, obtenemos

$$(\mathrm{tr}_{\bar{\mathbf{g}}} \circ \nabla)(\nabla v) = \delta^{ij} \partial_i \partial_j v = \Delta v.$$

Además,

$$\iota_{\boldsymbol{\nu}}(\nabla v) = \partial_{\boldsymbol{\nu}} v.$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\lambda_n = -\int_\Omega u \, \Delta v \, d\lambda_n + \int_{\partial\Omega} u \, \partial_{\boldsymbol{\nu}} v \, dS.$$

b) Bajo las hipótesis anteriores, restando las identidades obtenidas para $(u, v)$ y $(v, u)$ se obtiene

$$\int_\Omega \left(u \, \Delta v - v \, \Delta u\right) d\lambda_n = \int_{\partial\Omega} \left(u \, \partial_{\boldsymbol{\nu}} v - v \, \partial_{\boldsymbol{\nu}} u\right) dS,$$

que se conoce como segunda fórmula de Green.

c) Sea ahora $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con frontera. Tomamos nuevamente $\mathbf{E} = M \times \mathbb{R}$. Para $u, v \in C_c^\infty(M)$ tomamos $\mathbf{F} = u$ y $\mathbf{G} = \nabla v$. Con $\nabla$ la conexión de Levi-Civita.

La identidad abstracta es

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_\mathbf{E}} \, d\lambda_\mathbf{g} = -\int_M \langle u, (\mathrm{tr}_\mathbf{g} \circ \nabla)(\nabla v) \rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} \, d\lambda_\mathbf{g} + \int_{\partial M} \langle u, \iota_{\boldsymbol{\nu}}(\nabla v) \rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} \, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Como $\mathbf{E}$ es trivial de rango 1, se reduce a

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_\mathbf{g} \, d\lambda_\mathbf{g} = -\int_M u \, (\mathrm{tr}_\mathbf{g} \circ \nabla)(\nabla v) \, d\lambda_\mathbf{g} + \int_{\partial M} u \, \iota_{\boldsymbol{\nu}}(\nabla v) \, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

En coordenadas locales,

$$(\nabla v)_j = \partial_j v, \qquad (\nabla(\nabla v))_{ij} = \partial_i \partial_j v - \Gamma_{ij}^k \partial_k v.$$

Por lo tanto,

$$(\mathrm{tr}_\mathbf{g} \circ \nabla)(\nabla v) = g^{ij} \left(\partial_i \partial_j v - \Gamma_{ij}^k \partial_k v\right).$$

Verifiquemos que esta expresión coincide con el laplaciano de Laplace–Beltrami en coordenadas,

$$\Delta_\mathbf{g} v = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \, \partial_i \left(\sqrt{\det(\mathbf{g})} \, g^{ij} \partial_j v\right).$$

Por definición de la traza métrica,

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)(\nabla v) = g^{ij}(\nabla(\nabla v))_{ij},$$

y como $(\nabla v)_j = \partial_j v$, se tiene

$$(\nabla(\nabla v))_{ij} = \partial_i \partial_j v - \Gamma_{ij}^k \partial_k v.$$

Por lo tanto,

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)(\nabla v) = g^{ij}\partial_i \partial_j v - g^{ij}\Gamma_{ij}^k \partial_k v. \tag{9.6}$$

Por otra parte,

$$\Delta_{\mathbf{g}} v = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_i\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\, g^{ij}\partial_j v\big).$$

Aplicando la regla de Leibniz,

$$\Delta_{\mathbf{g}} v = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\Big(\partial_i(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\, g^{ij})\,\partial_j v + \sqrt{\det(\mathbf{g})}\, g^{ij}\partial_i\partial_j v\Big)$$

$$= g^{ij}\partial_i\partial_j v + \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_i(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\, g^{ij})\,\partial_j v.$$

Desarrollamos ahora el término restante usando nuevamente la regla de Leibniz:

$$\partial_i\left(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\, g^{ij}\right) = \left(\partial_i\sqrt{\det(\mathbf{g})}\right) g^{ij} + \sqrt{\det(\mathbf{g})}\,\partial_i g^{ij}.$$

Dividiendo entre $\sqrt{\det(\mathbf{g})}$ obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_i\left(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\, g^{ij}\right) = g^{ij}\frac{\partial_i\sqrt{\det(\mathbf{g})}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} + \partial_i g^{ij}.$$

Por la Observación 2.14.7,

$$\frac{\partial_i\sqrt{\det(\mathbf{g})}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} = \Gamma_{ik}^k,$$

y además, por la compatibilidad de la conexión con la métrica (véase 2.4.17)

$$\partial_i g^{ij} + \Gamma_{ik}^k g^{ij} = -g^{ik}\Gamma_{ik}^j,$$

concluimos que

$$\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_i\left(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\, g^{ij}\right) = -g^{ik}\Gamma_{ik}^j.$$

Sustituyendo en la expresión de $\Delta_{\mathbf{g}} v$ se obtiene

$$\Delta_{\mathbf{g}} v = g^{ij}\partial_i\partial_j v - g^{ik}\Gamma_{ik}^j \partial_j v.$$

Renombrando el índice mudo $j \mapsto k$ llegamos a

$$\Delta_{\mathbf{g}} v = g^{ij}\partial_i\partial_j v - g^{ij}\Gamma_{ij}^k \partial_k v,$$

que coincide con (9.6). Por lo tanto,

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)(\nabla v) = \Delta_{\mathbf{g}} v.$$

Además,

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbf{g}} = g^{ij}(\partial_i u)(\partial_j v) = \mathbf{g}(\mathrm{grad}_{\mathbf{g}}\, u, \mathrm{grad}_{\mathbf{g}}\, v).$$

Finalmente,

$$\iota_{\boldsymbol{\nu}}(\nabla v) = \nu^j \partial_j v = \mathbf{g}(\mathrm{grad}_{\mathbf{g}}\, v, \boldsymbol{\nu}) = \partial_{\boldsymbol{\nu}} v.$$

Sustituyendo en el teorema:

$$\int_M \mathbf{g}(\mathrm{grad}_{\mathbf{g}}\, u, \mathrm{grad}_{\mathbf{g}}\, v)\, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M u\, \Delta_{\mathbf{g}} v\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} u\, \partial_{\boldsymbol{\nu}} v\, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

d) Sea $\mathbf{X} \in \Gamma_c(TM)$ y sea $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{X}^\flat$. Aplicamos el Teorema 9.1.29 con $\mathbf{F} \equiv 1$ y $\mathbf{G} = \boldsymbol{\alpha}$. Como $\nabla(1) = 0$, se obtiene

$$0 = -\int_M (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)\boldsymbol{\alpha}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} \iota_{\boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{\alpha}\, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

En coordenadas locales se tiene $(\nabla \boldsymbol{\alpha})_{ij} = \partial_i \alpha_j - \Gamma_{ij}^k \alpha_k$, y por lo tanto

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)\boldsymbol{\alpha} = g^{ij}(\partial_i \alpha_j - \Gamma_{ij}^k \alpha_k).$$

Escribiendo $\alpha_j = g_{jk} X^k$ y aplicando la regla de Leibniz,

$$\partial_i \alpha_j = \partial_i (g_{jk} X^k) = (\partial_i g_{jk}) X^k + g_{jk} \partial_i X^k.$$

Sustituyendo en la expresión anterior obtenemos

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)\boldsymbol{\alpha} = g^{ij}(\partial_i g_{jk}) X^k + g^{ij} g_{jk} \partial_i X^k - g^{ij} \Gamma_{ij}^m g_{mk} X^k.$$

Como $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$, el segundo término es $\partial_i X^i$.

Para simplificar los términos restantes usamos el Corolario 2.4.16, que en coordenadas dice

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij}^s g_{sk} + \Gamma_{ik}^s g_{js}.$$

Multiplicando por $g^{ij}$ se obtiene

$$g^{ij} \partial_i g_{jk} = g^{ij} \Gamma_{ij}^s g_{sk} + g^{ij} \Gamma_{ik}^s g_{js}.$$

El segundo término satisface $g^{ij} \Gamma_{ik}^s g_{js} = \Gamma_{ik}^s \delta_s^i = \Gamma_{ik}^i$, y por lo tanto

$$g^{ij}(\partial_i g_{jk}) - g^{ij} \Gamma_{ij}^s g_{sk} = \Gamma_{ik}^i.$$

Sustituyendo en la expresión de $(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)\boldsymbol{\alpha}$ concluimos que

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)\boldsymbol{\alpha} = \partial_i X^i + \Gamma_{ik}^i X^k = \mathrm{div}_{\mathbf{g}}\, \mathbf{X}.$$

Por otra parte, $\iota_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\nu})$. Sustituyendo en la identidad inicial obtenemos finalmente

$$\int_M \operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M} \mathbf{g}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\nu})\, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Los ejemplos anteriores muestran la estructura que debe conservar la fórmula general. Pasamos ahora a su demostración.

*Demostración del Teorema 9.1.29.* Procederemos por inducción sobre $s$. La idea general es ir "pasando" derivadas de $\mathbf{F}$ a $\mathbf{G}$ mediante integración por partes covariante, y ver qué términos de frontera aparecen en cada paso.

*Caso $s = 1$.* Fijemos un punto $p \in \operatorname{Int}(M)$ y tomemos un sistema de coordenadas normales centrado en $p$, con marco coordenado asociado $(\partial_1, \dots, \partial_n)$. En estas coordenadas se cumple

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \qquad \Gamma_{ij}^{k}(p) = 0,$$

y, en particular, $\nabla_{\partial_i}\partial_j(p) = 0$ para todos los índices $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
Sean ahora $\mathbf{F} \in \Gamma_c\big(T^{(k,l)}(TM) \otimes \mathbf{E}\big)$ y $\mathbf{G} \in \Gamma_c\big(T^{(k,l+1)}(TM) \otimes \mathbf{E}\big)$. Definimos un mapeo

$$\Phi \colon \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{K}), \qquad \Phi(\mathbf{Y}) := \big\langle \mathbf{F}, \iota_{\mathbf{Y}}\mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

El mapeo $\mathbf{Y} \mapsto \iota_{\mathbf{Y}}\mathbf{G}$ es $C^\infty(M, \mathbb{R})$–lineal en $\mathbf{Y}$, por la multilinealidad del campo tensorial $\mathbf{G}$ en sus argumentos. Por consiguiente, $\Phi$ define una 1–forma suave real si $\mathbf{E}$ es real y una 1–forma suave compleja si $\mathbf{E}$ es compleja. En el segundo caso, todos los argumentos siguientes se realizan en los haces complejificados y el teorema de la divergencia se aplica por separado a las partes real e imaginaria. Consideremos entonces $\mathbf{X} := \Phi^\sharp$, el cual define un campo vectorial suave —complejificado en el caso complejo— caracterizado (de acuerdo a la Definición 2.1.10) por

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{\mathbf{g}} = \Phi(\mathbf{Y}) = \big\langle \mathbf{F}, \iota_{\mathbf{Y}}\mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}, \qquad \forall\, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M).$$

En particular, para cada $c \in \{1, \dots, n\}$,

$$\langle \mathbf{X}, \partial_c \rangle_{\mathbf{g}} = \big\langle \mathbf{F}, \iota_{\partial_c}\mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}. \tag{9.7}$$

En el punto $p$ la divergencia de $\mathbf{X}$ se escribe como

$$\operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X}(p) = \sum_{c=1}^{n} \big\langle \nabla_{\partial_c}\mathbf{X}, \partial_c \big\rangle_{\mathbf{g}}(p).$$

La compatibilidad de $\nabla$ con $\mathbf{g}$ nos dice que

$$\big\langle \nabla_{\partial_c}\mathbf{X}, \partial_c \big\rangle_{\mathbf{g}} = \partial_c\big(\langle \mathbf{X}, \partial_c \rangle_{\mathbf{g}}\big) - \big\langle \mathbf{X}, \nabla_{\partial_c}\partial_c \big\rangle_{\mathbf{g}}.$$

Evaluando en $p$ y usando que $\nabla_{\partial_c}\partial_c(p) = 0$ (pues $\Gamma_{cc}^{k}(p) = 0$), se sigue que

$$\operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X}(p) = \sum_{c=1}^{n} \partial_c\big(\langle \mathbf{X}, \partial_c \rangle_{\mathbf{g}}\big)(p). \tag{9.8}$$

Sustituyendo (9.7) en (9.8), obtenemos

$$\operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X}(p) = \sum_{c=1}^{n} \partial_c \Big( \big\langle \mathbf{F}, \iota_{\partial_c} \mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \Big)(p). \tag{9.9}$$

La conexión inducida en $T^{(k,l)}(TM) \otimes \mathbf{E}$ (que seguimos denotando por $\nabla$) es compatible con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$. En consecuencia, para cada $c$,

$$\partial_c \Big( \big\langle \mathbf{F}, \iota_{\partial_c} \mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \Big) = \Big\langle \nabla_{\partial_c} \mathbf{F}, \iota_{\partial_c} \mathbf{G} \Big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + \Big\langle \mathbf{F}, \nabla_{\partial_c} \big( \iota_{\partial_c} \mathbf{G} \big) \Big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}. \tag{9.10}$$

Evaluando (9.10) en $p$ y sustituyendo en (9.9), obtenemos

$$\operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X}(p) = \sum_{c=1}^{n} \Big( \big\langle \nabla_{\partial_c} \mathbf{F}, \iota_{\partial_c} \mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}(p) + \big\langle \mathbf{F}, \nabla_{\partial_c} \big( \iota_{\partial_c} \mathbf{G} \big) \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}(p) \Big). \tag{9.11}$$

Para el segundo término usamos la identidad (regla de Leibniz para contracción)

$$\nabla_{\partial_c} \big( \iota_{\partial_c} \mathbf{G} \big) = \iota_{\partial_c} \big( \nabla_{\partial_c} \mathbf{G} \big) + \iota_{\nabla_{\partial_c} \partial_c} \mathbf{G},$$

la cual es consecuencia de la Proposición 2.4.23. Evaluando en $p$ y usando $\nabla_{\partial_c} \partial_c(p) = 0$, se obtiene

$$\nabla_{\partial_c} \big( \iota_{\partial_c} \mathbf{G} \big)(p) = \iota_{\partial_c} \big( \nabla_{\partial_c} \mathbf{G} \big)(p).$$

Sustituyendo esto en (9.11) llegamos a

$$\operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X}(p) = \sum_{c=1}^{n} \Big( \big\langle \nabla_{\partial_c} \mathbf{F}, \iota_{\partial_c} \mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}(p) + \big\langle \mathbf{F}, \iota_{\partial_c} (\nabla_{\partial_c} \mathbf{G}) \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}(p) \Big). \tag{9.12}$$

En las coordenadas normales elegidas se tiene

$$\nabla \mathbf{F} = \sum_{c=1}^{n} \mathbf{d}x^c \otimes \nabla_{\partial_c} \mathbf{F}, \qquad \iota_{\partial_c} \mathbf{G} = \mathbf{G}(\partial_c, \cdot),$$

porque el índice derivativo y el índice que se inserta ocupan el primer lugar. La definición de la métrica tensorial producto implica entonces

$$\sum_{c=1}^{n} \big\langle \nabla_{\partial_c} \mathbf{F}, \iota_{\partial_c} \mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = \langle \nabla \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \quad \text{en } p.$$

Asimismo,

$$\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla \mathbf{G}) = \sum_{c=1}^{n} (\nabla_{\partial_c} \mathbf{G})(\partial_c, \cdot) = \sum_{c=1}^{n} \iota_{\partial_c} (\nabla_{\partial_c} \mathbf{G}) \quad \text{en } p,$$

y la segunda suma de (9.12) es $\langle \mathbf{F}, \operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla \mathbf{G}) \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}(p)$.

Combinando las dos identificaciones obtenemos

$$\operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X}(p) = \big\langle \nabla \mathbf{F}, \mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}(p) + \big\langle \mathbf{F}, \operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla \mathbf{G}) \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}(p).$$

Como $p \in \mathrm{Int}(M)$ es arbitrario, la identidad puntual se cumple en $\mathrm{Int}(M)$. Ambos miembros son funciones suaves hasta la frontera y $\mathrm{Int}(M)$ es denso en $M$; por continuidad, la identidad también vale en $\partial M$. Por lo tanto, se cumple en todo $M$:

$$\mathrm{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X} = \langle \nabla \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + \langle \mathbf{F}, \mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla \mathbf{G}) \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Integrando sobre $M$ y aplicando el Teorema 2.14.21 (de la divergencia), obtenemos

$$\int_M \mathrm{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M} \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

El campo $\mathbf{X}$ tiene soporte compacto, pues se anula donde se anula $\mathbf{F}$ o $\mathbf{G}$; por ello el teorema de la divergencia es aplicable también cuando $M$ no es compacta. Si $\partial M = \varnothing$, el miembro derecho es cero por la convención del enunciado. Sobre la frontera, por definición de $\mathbf{X}$ (y de $\Phi$),

$$\langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} \rangle_{\mathbf{g}} = (\mathbf{X}^{\flat})(\boldsymbol{\nu}) = \Phi(\boldsymbol{\nu}) = \big\langle \mathbf{F}, \iota_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Combinando con la identidad puntual anterior llegamos a

$$\int_M \big\langle \nabla \mathbf{F}, \mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M \big\langle \mathbf{F}, \mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla \mathbf{G}) \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} \big\langle \mathbf{F}, \iota_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Esto demuestra el caso $s = 1$.

Ahora veamos que se cumple el paso inductivo. Supongamos ahora que la identidad del enunciado vale para algún entero $s \geq 1$, es decir, que para todo

$$\mathbf{F} \in \Gamma_c\big(T^{(k,l)}(TM) \otimes \mathbf{E}\big), \quad \mathbf{H} \in \Gamma_c\big(T^{(k,l+s)}(TM) \otimes \mathbf{E}\big),$$

se cumple

$$\int_M \langle \nabla^s \mathbf{F}, \mathbf{H} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = (-1)^s \int_M \big\langle \mathbf{F}, (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)^s \mathbf{H} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$
$$+ \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{s-1-j} \int_{\partial M} \Big\langle \nabla^j \mathbf{F}, \iota_{\boldsymbol{\nu}} \big( (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)^{s-1-j} \mathbf{H} \big) \Big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Nuestro objetivo es mostrar que la misma identidad vale para $s+1$. Sea entonces

$$\mathbf{G} \in \Gamma_c\big(T^{(k,l+s+1)}(TM) \otimes \mathbf{E}\big).$$

Aplicamos el caso $s = 1$ a la pareja de campos $\nabla^s \mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$. Obtenemos

$$\int_M \langle \nabla^{s+1} \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M \big\langle \nabla^s \mathbf{F}, \mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla \mathbf{G}) \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} \big\langle \nabla^s \mathbf{F}, \iota_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{G} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Definimos ahora

$$\mathbf{H} := \mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla \mathbf{G}) \in \Gamma_c\big(T^{(k,l+s)}(TM) \otimes \mathbf{E}\big).$$

Aplicando la hipótesis de inducción al par $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ obtenemos

$$\int_M \langle \nabla^s \mathbf{F}, \mathbf{H} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = (-1)^s \int_M \big\langle \mathbf{F}, (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)^s \mathbf{H} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

$$+\sum_{j=0}^{s-1}(-1)^{s-1-j}\int_{\partial M}\left\langle \nabla^j\mathbf{F},\, \iota_{\boldsymbol{\nu}}\big((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s-1-j}\mathbf{H}\big)\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Como $\mathbf{H}=\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla\mathbf{G})$, se tiene

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^s\mathbf{H}=(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s+1}\mathbf{G},\qquad (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s-1-j}\mathbf{H}=(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s-j}\mathbf{G},$$

y por lo tanto

$$\int_M\left\langle\nabla^s\mathbf{F},\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla\mathbf{G})\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\mathbf{g}}=(-1)^s\int_M\left\langle\mathbf{F},(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s+1}\mathbf{G}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\mathbf{g}}$$
$$+\sum_{j=0}^{s-1}(-1)^{s-1-j}\int_{\partial M}\left\langle\nabla^j\mathbf{F},\,\iota_{\boldsymbol{\nu}}\big((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s-j}\mathbf{G}\big)\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Sustituyendo esta identidad en la expresión de $\int_M\langle\nabla^{s+1}\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}$, obtenemos

$$\int_M\langle\nabla^{s+1}\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}=(-1)^{s+1}\int_M\left\langle\mathbf{F},(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s+1}\mathbf{G}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\mathbf{g}}$$
$$+\sum_{j=0}^{s-1}(-1)^{s-j}\int_{\partial M}\left\langle\nabla^j\mathbf{F},\,\iota_{\boldsymbol{\nu}}\big((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s-j}\mathbf{G}\big)\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}+\int_{\partial M}\left\langle\nabla^s\mathbf{F},\,\iota_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{G}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

El último término de frontera ya tiene la forma deseada si interpretamos $(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^0$ como la identidad:

$$\int_{\partial M}\left\langle\nabla^s\mathbf{F},\,\iota_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{G}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}=(-1)^{s-s}\int_{\partial M}\left\langle\nabla^s\mathbf{F},\,\iota_{\boldsymbol{\nu}}\big((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s-s}\mathbf{G}\big)\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

De este modo, podemos incorporar este término a la suma anterior tomando $j=s$, y se obtiene

$$\int_M\langle\nabla^{s+1}\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}=(-1)^{s+1}\int_M\left\langle\mathbf{F},(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s+1}\mathbf{G}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\mathbf{g}}$$
$$+\sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\int_{\partial M}\left\langle\nabla^j\mathbf{F},\,\iota_{\boldsymbol{\nu}}\big((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s-j}\mathbf{G}\big)\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}},$$

que es precisamente la fórmula del enunciado para $s+1$. El resultado se sigue entonces por inducción sobre $s$. □

Como corolario podemos extender la fórmula de Green usual al caso del laplaciano de Bochner:

**Corolario 9.1.31.** (Fórmula de Green para el laplaciano de Bochner) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\pi_{\mathbf{E}}\colon\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $\boldsymbol{\nu}$ la normal unitaria exterior a $\partial M$.
Entonces, para cualesquiera $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\Gamma_c(\mathbf{E})$, se cumple

$$\int_M\langle\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}=\int_M\langle\mathbf{u},\Delta_B\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}+\int_{\partial M}\left\langle\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}\right\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}},$$

donde, por definición,

$$\Delta_B := (\nabla^{\mathbf{E}})_h^* \nabla^{\mathbf{E}}.$$

Cuando $\partial M \neq \varnothing$, usamos el adjunto diferencial formal hasta la frontera de la Observación 8.2.4; no se ha escogido todavía un dominio de $L^2$ con condiciones de frontera.

*Demostración.* Aplicamos el Teorema 9.1.29 con $s = 1$ y $k = l = 0$, tomando

$$\mathbf{F} = \mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E}), \qquad \mathbf{G} = \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v} \in \Gamma_c(T^*M \otimes \mathbf{E}).$$

La identidad del teorema toma la forma

$$\int_M \langle \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}, \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M \big\langle \mathbf{u}, (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v})\big\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} \Big\langle \mathbf{u}, \iota_{\boldsymbol{\nu}}(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v})\Big\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\widetilde{\mathbf{g}}}.$$

Por la convención adoptada en la definición del laplaciano de Bochner,

$$\Delta_B = -(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla) \circ \nabla^{\mathbf{E}},$$

y por lo tanto el término interior se reescribe como

$$-\big\langle \mathbf{u}, (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v})\big\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = \langle \mathbf{u}, \Delta_B \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Sólo resta identificar el término de frontera. En coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$ escribimos $\boldsymbol{\nu} = \nu^i \partial_i$. Por definición de la multiplicación interior $\iota_{\boldsymbol{\nu}}$ en el primer índice covariante, $\iota_{\boldsymbol{\nu}}(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}) = \nu^i (\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v})_i$. Además, $(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v})_i = \nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{v}$. Sustituyendo esto obtenemos que $\iota_{\boldsymbol{\nu}}(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}) = \nu^i \nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{v}$. Finalmente, usando la $C^\infty(M)$-linealidad de la conexión en el campo vectorial,

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v} = \nabla^{\mathbf{E}}_{\nu^i \partial_i}\mathbf{v} = \nu^i \nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{v},$$

y concluimos que $\iota_{\boldsymbol{\nu}}(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}$. Sustituyendo en la fórmula anterior obtenemos la identidad del enunciado. □

Esta fórmula de integración por partes también tiene como corolario el siguiente resultado:

**Corolario 9.1.32.** (Expresión local del adjunto formal de $\nabla^s$) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial con métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Para $s \geq 1$, el adjunto formal de

$$\nabla^s \colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma\big(T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E}\big)$$

está dado por

$$(\nabla^s)^* = (-1)^s (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)^s.$$

Más aún, en una carta $(U, x^1, \ldots, x^n)$, si $\mathbf{G} \in \Gamma\big(T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E}\big)$ tiene componentes $G^a_{j_1 \ldots j_s}$, entonces

$$\big((\nabla^s)^* \mathbf{G}\big)^a = (-1)^s \left[ \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\, \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_s} \Big( \sqrt{\det(\mathbf{g})}\, g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_s j_s}\, G^a_{j_1 \ldots j_s} \Big) + \sum_{b=1}^{r} \sum_{|\beta| \leq s-1} \big(C_\beta\big)_b^{a\, j_1 \ldots j_s}\, \partial^\beta \big(G^b_{j_1 \ldots j_s}\big) \right], \quad (9.13)$$

donde los coeficientes $\big(C_\beta\big)_b^{a\, j_1 \ldots j_s}$ son funciones suaves en $U$ que dependen únicamente de $g_{ij}$, de los coefi-

cientes de conexión $\Gamma_{ij}^k$ y $(A_i)_b^a$, y de sus derivadas parciales de orden hasta $s-1$.

*Demostración.* Como $M$ no tiene frontera, en el Teorema 9.1.29 los términos de frontera se anulan y, por lo tanto,

$$\int_M \langle \nabla^s \mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = (-1)^s \int_M \big\langle \mathbf{F}, (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^s \mathbf{G}\big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \forall\, \mathbf{F}\in\Gamma_c(\mathbf{E}),\ \forall\, \mathbf{G}\in\Gamma_c\big(T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big).$$

Por el Corolario 8.2.3 (existencia y unicidad del adjunto formal),

$$(\nabla^s)^* = (-1)^s(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^s.$$

Resta verificar la fórmula local (9.13). Fijemos una carta $(U, x^1,\dots,x^n)$ y un marco local $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ de $\mathbf{E}\restriction_U$. Sea $m\geq 0$ y $\mathbf{H}\in\Gamma\big(T^{(0,m+1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ con componentes $H^a_{qj_1\dots j_m}$. Por definición,

$$((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)\mathbf{H})^a_{j_1\dots j_m} = g^{pq}\,(\nabla_{\partial_p}\mathbf{H})^a_{qj_1\dots j_m}.$$

Aplicando el Lema 9.1.27 (con $k=0$, $l=m+1$) se obtiene

$$\begin{aligned}((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)\mathbf{H})^a_{j_1\dots j_m} &= g^{pq}\partial_p\big(H^a_{qj_1\dots j_m}\big) - \Gamma^\alpha_{pq}\, g^{pq}\, H^a_{\alpha j_1\dots j_m}\\ &\quad - \sum_{\ell=1}^{m}\Gamma^\alpha_{pj_\ell}\, g^{pq}\, H^a_{qj_1\dots j_{\ell-1}\alpha j_{\ell+1}\dots j_m} + \sum_{b=1}^{r}(A_p)^a_b\, g^{pq} H^b_{qj_1\dots j_m}.\end{aligned} \tag{9.14}$$

Usando la Observación 2.14.7 que nos dice que $\Gamma^\alpha_{\alpha p} = \dfrac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_p\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\Big)$ y la identidad del Corolario 2.4.17 que se puede escribir como $\partial_p(g^{pq}) = -\Gamma^p_{p\alpha}g^{\alpha q} - \Gamma^q_{p\alpha}g^{p\alpha}$, se obtiene la igualdad

$$g^{pq}\partial_p\big(Y_q\big) - \Gamma^\alpha_{pq}g^{pq}Y_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_p\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}Y_q\Big), \qquad \forall (Y_q)_{q=1}^n. \tag{9.15}$$

Para verificarla, desarrollamos el miembro derecho:

$$\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_p\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}g^{pq}Y_q\Big) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\Big(\partial_p\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\Big)g^{pq}Y_q + \cancel{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\partial_p(g^{pq})Y_q + \cancel{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}g^{pq}\partial_p(Y_q)\Big)$$

$$\begin{aligned}&= \Gamma^\alpha_{\alpha p}g^{pq}Y_q + \partial_p(g^{pq})Y_q + g^{pq}\partial_p(Y_q)\\ &= \underbrace{\Gamma^p_{p\alpha}g^{\alpha q}Y_q}_{p\leftrightarrow\alpha} - \Gamma^p_{p\alpha}g^{\alpha q}Y_q - \Gamma^q_{p\alpha}g^{p\alpha}Y_q + g^{pq}\partial_p(Y_q)\\ &= g^{pq}\partial_p(Y_q) - \underbrace{\Gamma^q_{p\alpha}g^{p\alpha}Y_q}_{\alpha\leftrightarrow q}\\ &= g^{pq}\partial_p(Y_q) - \Gamma^\alpha_{pq}g^{pq}Y_\alpha.\end{aligned}$$

Aplicando (9.15) con $Y_q = H^a_{qj_1\dots j_m}$, la ecuación (9.14) se reescribe como

$$((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)\mathbf{H})^a_{j_1\dots j_m} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_p\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}H^a_{qj_1\dots j_m}\Big) - \sum_{\ell=1}^{m}\Gamma^{\alpha}_{pj_\ell}\,g^{pq}\,H^a_{qj_1\dots j_{\ell-1}\alpha j_{\ell+1}\dots j_m} + \sum_{b=1}^{r}(A_p)^a_b\,g^{pq}H^b_{qj_1\dots j_m}. \tag{9.16}$$

Demostraremos por inducción sobre $s\geq 1$ que para todo $\mathbf{G}\in\Gamma\big(T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ con componentes $G^a_{j_1\dots j_s}$ se cumple

$$\big((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^s\mathbf{G}\big)^a = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\,G^a_{j_1\dots j_s}\Big) + \sum_{b=1}^{r}\sum_{|\beta|\leq s-1}\big(C_\beta\big)^{aj_1\dots j_s}_b\,\partial^\beta\big(G^b_{j_1\dots j_s}\big). \tag{9.17}$$

Para $s=1$, tomando $m=0$ en (9.16) se obtiene

$$((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)\mathbf{G})^a = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_p\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}G^a_q\Big) + \sum_{b=1}^{r}(A_p)^a_b\,g^{pq}G^b_q,$$

lo cual es de la forma (9.17) con $|\beta|=0$. Supongamos ahora válida (9.17) para algún $s\geq 1$ y probemos el caso $s+1$. Sea $\mathbf{G}\in\Gamma\big(T^{(0,s+1)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ y definamos

$$\mathbf{H} := (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)\mathbf{G}\in\Gamma\big(T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big).$$

Por la hipótesis de inducción aplicada a $\mathbf{H}$ se tiene

$$\big((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^s\mathbf{H}\big)^a = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\,H^a_{j_1\dots j_s}\Big) + \sum_{b=1}^{r}\sum_{|\beta|\leq s-1}\big(C_\beta\big)^{aj_1\dots j_s}_b\,\partial^\beta\big(H^b_{j_1\dots j_s}\big). \tag{9.18}$$

Como por definición

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^s\mathbf{H} = (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s+1}\mathbf{G},$$

basta expandir explícitamente las componentes $H^a_{j_1\dots j_s}$ en términos de $\mathbf{G}$. Usando (9.16) con $m=s$ se obtiene

$$\begin{aligned} H^a_{j_1\dots j_s} = {}& \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_p\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}G^a_{qj_1\dots j_s}\Big) - \sum_{\ell=1}^{s}\Gamma^{\alpha}_{pj_\ell}\,g^{pq}\,G^a_{qj_1\dots j_{\ell-1}\alpha j_{\ell+1}\dots j_s} \\ & + \sum_{b=1}^{r}(A_p)^a_b\,g^{pq}G^b_{qj_1\dots j_s}. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Sustituyendo (9.19) en el término principal de (9.18) y separando los sumandos, resulta

$$\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\,H^a_{j_1\dots j_s}\Big) = \mathrm{(I)}+\mathrm{(II)}+\mathrm{(III)}. \tag{9.20}$$

donde

$$\mathrm{(I)} := \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\Big(g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\partial_p\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}G^a_{qj_1\dots j_s}\big)\Big),$$

$$\mathrm{(II)} := -\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\sum_{\ell=1}^{s}\Gamma^{\alpha}_{pj_\ell}\,g^{pq}\,G^a_{qj_1\dots j_{\ell-1}\alpha j_{\ell+1}\dots j_s}\Big),$$

$$\text{(III)} := \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\sum_{b=1}^{r}(A_p)^a_b\,g^{pq}G^b_{qj_1\dots j_s}\Big).$$

Para el término (I), escribimos

$$\text{(I)} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\Big(\big(g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\big)\,\partial_p\big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}G^a_{qj_1\dots j_s}\big)\Big).$$

Introducimos el factor $g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}$ dentro de $\partial_p$ mediante la identidad

$$\big(g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\big)\,\partial_p(f) = \partial_p\Big(\big(g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\big)f\Big) - \partial_p\big(g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\big)\,f, \qquad \forall\, f\in C^\infty(U).$$

Aplicándola a $f = \sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}G^a_{qj_1\dots j_s}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\text{(I)} = {}& \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\partial_p\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\,G^a_{qj_1\dots j_s}\Big)\\ & - \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\Big(\partial_p\big(g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\big)\,\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}G^a_{qj_1\dots j_s}\Big).\end{aligned} \tag{9.21}$$

El primer término de (9.21) constituye el término principal de orden $s+1$. En el segundo término, el factor $\partial_p(g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s})$ ya contiene la derivada que se ha separado del término principal. Sólo quedan las $s$ derivadas exteriores $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}$ para distribuir por Leibniz entre los coeficientes y $\mathbf{G}$; incluso cuando todas actúan sobre $\mathbf{G}$, el orden sobre sus componentes es a lo más $s$. En consecuencia, existen coeficientes suaves $\big(B_\beta\big)^{a\,j_1\dots j_sq}_c$ con $|\beta|\le s$ tales que

$$\text{(I)} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\partial_p\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\,G^a_{qj_1\dots j_s}\Big) + \sum_{c=1}^{r}\sum_{|\beta|\le s}\big(B_\beta\big)^{a\,j_1\dots j_sq}_c\,\partial^\beta\big(G^c_{qj_1\dots j_s}\big). \tag{9.22}$$

Consideremos ahora (II). Aquí no aparece ninguna derivada adicional $\partial_p$ actuando sobre $\mathbf{G}$. Por lo tanto, al expandir por Leibniz el operador $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}$ actuando sobre el producto

$$\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\,\Gamma^\alpha_{pj_\ell}\,g^{pq}\,G^a_{qj_1\dots j_{\ell-1}\alpha j_{\ell+1}\dots j_s},$$

se obtienen únicamente términos en los que actúan a lo más $s$ derivadas sobre las componentes de $\mathbf{G}$. En consecuencia, existen coeficientes suaves $\big(\widetilde{B}_\beta\big)^{a\,j_1\dots j_sq}_c$ con $|\beta|\le s$ tales que

$$\text{(II)} = \sum_{c=1}^{r}\sum_{|\beta|\le s}\big(\widetilde{B}_\beta\big)^{a\,j_1\dots j_sq}_c\,\partial^\beta\big(G^c_{qj_1\dots j_s}\big). \tag{9.23}$$

En (III) la dependencia en $\mathbf{G}$ es lineal y no contiene derivadas adicionales de $\mathbf{G}$. Por la fórmula de Leibniz, cada una de las $s$ derivadas exteriores puede actuar a lo sumo una vez más sobre ese factor; por ello sólo aparecen derivadas $\partial^\beta\mathbf{G}$ con $|\beta|\le s$. Por lo tanto, existen coeficientes suaves $\big(\widehat{B}_\beta\big)^{a\,j_1\dots j_sq}_c$ con $|\beta|\le s$ tales que

$$\text{(III)} = \sum_{c=1}^{r}\sum_{|\beta|\le s}\big(\widehat{B}_\beta\big)^{a\,j_1\dots j_sq}_c\,\partial^\beta\big(G^c_{qj_1\dots j_s}\big). \tag{9.24}$$

Sustituyendo (9.22), (9.23) y (9.24) en (9.20) se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\,H^{a}_{j_1\dots j_s}\Big)=\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_p\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\,G^{a}_{qj_1\dots j_s}\Big)$$
$$+\sum_{c=1}^{r}\sum_{|\beta|\le s}\big(D_\beta\big)_c^{a\,j_1\dots j_sq}\,\partial^\beta\big(G^{c}_{qj_1\dots j_s}\big),\tag{9.25}$$

donde

$$\big(D_\beta\big)_c^{a\,j_1\dots j_sq}:=\big(B_\beta\big)_c^{a\,j_1\dots j_sq}+\big(\widetilde{B}_\beta\big)_c^{a\,j_1\dots j_sq}+\big(\widehat{B}_\beta\big)_c^{a\,j_1\dots j_sq},\qquad |\beta|\le s.$$

Por otra parte, para el término de orden bajo de (9.18),

$$\sum_{b=1}^{r}\sum_{|\beta|\le s-1}\big(C_\beta\big)_b^{a\,j_1\dots j_s}\,\partial^\beta\big(H^{b}_{j_1\dots j_s}\big),$$

al sustituir (9.19) en $H^{b}_{j_1\dots j_s}$ se ve que cada $\partial^\beta(H^{b}_{j_1\dots j_s})$ es combinación lineal (con coeficientes suaves) de términos $\partial^\gamma(G^{c}_{qj_1\dots j_s})$ con $|\gamma|\le|\beta|+1\le s$. En consecuencia, existen coeficientes suaves $\big(\overline{D}_\beta\big)_c^{a\,j_1\dots j_sq}$ con $|\beta|\le s$ tales que

$$\sum_{b=1}^{r}\sum_{|\beta|\le s-1}\big(C_\beta\big)_b^{a\,j_1\dots j_s}\,\partial^\beta\big(H^{b}_{j_1\dots j_s}\big)=\sum_{c=1}^{r}\sum_{|\beta|\le s}\big(\overline{D}_\beta\big)_c^{a\,j_1\dots j_sq}\,\partial^\beta\big(G^{c}_{qj_1\dots j_s}\big).\tag{9.26}$$

Combinando (9.18), (9.25) y (9.26) concluimos que existen coeficientes suaves $\big(C_\beta\big)_c^{a\,j_1\dots j_sq}$ con $|\beta|\le s$ tales que

$$\big((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s+1}\mathbf{G}\big)^a=\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}\partial_p\Big(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\,g^{pq}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_sj_s}\,G^{a}_{qj_1\dots j_s}\Big)+\sum_{c=1}^{r}\sum_{|\beta|\le s}\big(C_\beta\big)_c^{a\,j_1\dots j_sq}\,\partial^\beta\big(G^{c}_{qj_1\dots j_s}\big).$$

Finalmente, renombramos $p=i_1$ y $q=j_1$ y sustituimos simultáneamente los índices anteriores $(i_\ell,j_\ell)$ por $(i_{\ell+1},j_{\ell+1})$ para $\ell\in\{1,\dots,s\}$. Las derivadas parciales conmutan, así que su orden exterior se puede reordenar, mientras que los índices de $\mathbf{G}$ permanecen en su orden original. Se obtiene exactamente la forma de (9.17) para $s+1$, lo que completa la inducción.

□

Veamos algunos ejemplos que ilustren el resultado previo.

**Ejemplo 9.1.33.** Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto y consideremos $M:=\Omega$ como variedad suave sin frontera, provista de la métrica euclidiana $\overline{\mathbf{g}}$. En el haz lineal trivial

$$\mathbf{E}:=M\times\mathbb{R}\longrightarrow M$$

sea $\mathbf{e}(p):=(p,1)$ la sección unitaria constante. Toda sección se escribe de manera única como $\mathbf{u}=u\mathbf{e}$, con $u\in C^\infty(\Omega)$; la métrica y la conexión triviales satisfacen

$$\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(u\mathbf{e},v\mathbf{e})=uv,\qquad \nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}(u\mathbf{e})=(\partial_i u)\mathbf{e}.$$

Para cada $s \geq 0$, el isomorfismo fibrado

$$I_s \colon T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E} \longrightarrow T^{(0,s)}(TM), \qquad I_s\big(\xi \otimes \lambda \mathbf{e}(p)\big) := \lambda \xi,$$

identifica $\nabla^s \mathbf{u}$ con la derivada euclidiana $D^s u$. En particular,

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} = \left( \sum_{s=0}^{m} \|D^s u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

si $1 \leq p < \infty$, con la modificación usual mediante máximos cuando $p = \infty$. La misma identificación en la identidad de derivada débil muestra que

$$\mathbf{u} \in W^{m,p}(M, \mathbf{E}) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Así, la definición para haces recupera exactamente el espacio de Sobolev escalar en el haz trivial de rango uno.

El adjunto formal nos permite definir ciertos operadores no lineales que resultan importantes en el estudio de EDPs, como el $p$–laplaciano, en el contexto de haces vectoriales.

**Definición 9.1.34.** ($p$-laplaciano escalar y en haces vectoriales) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $p > 1$.

(a) Si $u \in C^2(M)$, el *$p$-laplaciano escalar* de $u$ se define por

$$\Delta_p u := \operatorname{div}\big(|\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2} \nabla u\big).$$

Equivalentemente, usando el adjunto formal de la derivada covariante,

$$\Delta_p u = -\nabla^*\big(|\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2} \nabla u\big).$$

Cuando $p = 2$, se recupera el laplaciano de Laplace–Beltrami $\Delta_2 u = \Delta_{\mathbf{g}} u$.

(b) Sea ahora $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $\mathbf{u} \in \Gamma^2(\mathbf{E})$, el *$p$-laplaciano asociado a $\nabla^{\mathbf{E}}$* se define por

$$\Delta_p^{\mathbf{E}} \mathbf{u} := -\left(\nabla^{\mathbf{E}}\right)^* \left( |\nabla^{\mathbf{E}} \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}^{p-2} \nabla^{\mathbf{E}} \mathbf{u} \right).$$

En ambas definiciones adoptamos $|\xi|^{p-2}\xi = 0$ cuando $\xi = 0$. Si $1 < p < 2$, aun para datos de clase $C^2$, este flujo puede no ser de clase $C^1$ en sus ceros. En ese caso, la divergencia y el adjunto de las fórmulas anteriores se interpretan débilmente: para una sección de prueba $\boldsymbol{\varphi}$ con soporte interior, el valor de $\Delta_p^{\mathbf{E}} \mathbf{u}$ está determinado por

$$\big\langle \Delta_p^{\mathbf{E}} \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \big\rangle = -\int_M \big\langle |\nabla^{\mathbf{E}} \mathbf{u}|^{p-2} \nabla^{\mathbf{E}} \mathbf{u}, \nabla^{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varphi} \big\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

El caso escalar se obtiene con el haz trivial. El flujo es continuo y, por tanto, localmente integrable, de modo que esta identidad siempre está definida. Cuando el flujo es de clase $C^1$, recupera la expresión clásica y

se aplica la fórmula de frontera siguiente. Para $p \geq 2$, los datos de clase $C^2$ garantizan esa regularidad del flujo.

Nuestra fórmula de integración por partes también nos permite dar otras fórmulas de integración por partes, como la que presentamos a continuación:

**Proposición 9.1.35.** (Fórmula de integración por partes para el $p$-laplaciano) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $p > 1$.
En el caso escalar, sea $u \in C^2(M)$ tal que $|\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2}\nabla u$ es de clase $C^1$. Entonces, para toda $\varphi \in C_c^\infty(M)$,

$$\int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2}\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M \varphi\, \Delta_p u\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} \varphi\, |\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2}\partial_{\boldsymbol{\nu}} u\, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Más generalmente, sea $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $\mathbf{u} \in \Gamma^2(\mathbf{E})$ es tal que $|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}^{p-2}\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ es de clase $C^1$, entonces, para toda $\boldsymbol{\varphi} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$,

$$\int_M |\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}^{p-2}\langle \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}, \nabla^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\varphi}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M \langle \Delta_p^{\mathbf{E}}\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} \left\langle \iota_{\boldsymbol{\nu}}\left(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}^{p-2}\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\right), \boldsymbol{\varphi}\right\rangle_{\mathbf{h_E}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

En particular, si $\boldsymbol{\varphi}$ tiene soporte compacto contenido en $\mathrm{Int}(M)$, entonces el término de frontera desaparece.

*Demostración.* Probamos primero la identidad en haces. Definimos $\mathbf{A_u} := |\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}^{p-2}\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$, de modo que $\mathbf{A_u} \in \Gamma^1(T^*M \otimes \mathbf{E})$ por la hipótesis de regularidad. El cálculo del caso $s = 1$ de la fórmula de Green usa sólo primeras derivadas continuas, así que sigue siendo válido con esta regularidad. Además, multiplicamos $\mathbf{A_u}$ por una función suave de soporte compacto igual a uno en una vecindad de $\operatorname{supp}\boldsymbol{\varphi}$; esto no cambia ninguna de las integrales y satisface la condición de soporte. Aplicamos el Teorema 9.1.29 con $s = 1$, $k = l = 0$, $\mathbf{F} = \boldsymbol{\varphi}$ y $\mathbf{G} = \mathbf{A_u}$. Entonces

$$\int_M \langle \nabla^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{A_u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M \left\langle \boldsymbol{\varphi}, (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)\mathbf{A_u}\right\rangle_{\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} \langle \boldsymbol{\varphi}, \iota_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{A_u}\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Como $(\nabla^{\mathbf{E}})^*\mathbf{A_u} = -(\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)\mathbf{A_u}$ y, por definición, $\Delta_p^{\mathbf{E}}\mathbf{u} = -(\nabla^{\mathbf{E}})^*\mathbf{A_u}$, conjugamos la identidad anterior en el caso complejo, o usamos la simetría en el caso real. El término interior queda entonces $-\langle \Delta_p^{\mathbf{E}}\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{\mathbf{h_E}}$. Además, con la barra trivial en el caso real, $\overline{\langle \nabla^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{A_u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}} = |\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}^{p-2}\langle \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}, \nabla^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\varphi}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$. Sustituyendo estas dos identidades se obtiene la fórmula en haces.
El caso escalar se obtiene tomando $\mathbf{E} = M \times \mathbb{R}$ con su métrica y conexión triviales e identificando una sección con su función componente $u$. En este caso $\mathbf{A}_u = |\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2}\nabla u$ y

$$\iota_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{A}_u = \langle \mathbf{A}_u, \boldsymbol{\nu}\rangle_{\mathbf{g}} = |\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2}\langle \nabla u, \boldsymbol{\nu}\rangle_{\mathbf{g}} = |\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2}\partial_{\boldsymbol{\nu}} u.$$

Por lo tanto la identidad anterior queda exactamente como la fórmula escalar. □

La fórmula de integración por partes también permite comparar la norma covariante usual de $H^m$ con una norma definida mediante potencias del laplaciano. Esta equivalencia es una herramienta recurrente del análisis geométrico, pues traduce el control de derivadas en control espectral. La sección siguiente establece el resultado con las hipótesis y las constantes necesarias en el contexto de haces vectoriales.

### 9.1.4 Equivalencia de normas: una aplicación de la fórmula de integración por partes en haces vectoriales

En el caso euclidiano, la fórmula de integración por partes es fundamental en la teoría de espacios de Sobolev y en el análisis no lineal. En esta sección la utilizaremos para demostrar, sobre una variedad cerrada $M$, la equivalencia entre la norma usual de $H^m(M) := W^{m,2}(M)$ y una norma definida mediante potencias del laplaciano. Comenzaremos con la identidad correspondiente en dominios euclidianos:

**Teorema 9.1.36.** (Norma equivalente en $H_0^m(\Omega)$ en términos del laplaciano) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $m \in \mathbb{N}$. Para toda función $u \in H_0^m(\Omega)$, la norma de Sobolev estándar de orden $m$, definida mediante el operador de derivadas parciales,

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} := \sum_{j=0}^{m} \int_\Omega |\nabla^j u|^2 \, d\lambda_n,$$

es estrictamente igual a la norma estructurada en potencias del operador laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$, dada por

$$\|u\|^2_\Delta := \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^{m} \int_\Omega |\Delta^{\frac{j}{2}} u|^2 \, d\lambda_n + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impar}}}^{m} \int_\Omega \left|\nabla \Delta^{\frac{j-1}{2}} u\right|^2 d\lambda_n.$$

Más aún, la igualdad se cumple término a término para cada orden de derivación $j \in \{0, \dots, m\}$.

*Demostración.* Sea primero $u \in H_0^m(\Omega)$. Por definición de este espacio, existe una sucesión $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_\nu \to u$ en $H^m(\Omega)$. En particular, para todo multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| \le m$,

$$D^\alpha u_\nu \longrightarrow D^\alpha u \qquad \text{en } L^2(\Omega).$$

Si $j = 2k \le m$, el operador $\Delta^k$ es una combinación lineal finita, con coeficientes constantes, de derivadas parciales de orden $j$. Si $j = 2k+1 \le m$, cada componente de $\nabla\Delta^k$ es igualmente una combinación lineal finita de derivadas parciales de orden $j$. Por lo tanto,

$$\Delta^k u_\nu \longrightarrow \Delta^k u \quad \text{y} \quad \nabla\Delta^k u_\nu \longrightarrow \nabla\Delta^k u$$

en $L^2$ siempre que el orden correspondiente no exceda $m$. Así, una vez probadas para $u_\nu$ las igualdades término a término, podremos pasar al límite en cada una de ellas. Basta, pues, establecerlas para una función $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Para tal función todas las integraciones por partes se realizan sin términos de frontera. Además, las derivadas parciales conmutan y todas las normas se entienden respecto a la métrica euclidiana, mediante contracción de índices.

Procedemos por inducción sobre $j$ y probamos, para toda $u \in C_c^\infty(\Omega)$, la igualdad correspondiente al orden $j$.

Para $j = 0$ y $j = 1$ la afirmación es inmediata por definición.

Consideremos ahora el caso fundamental $j = 2$. Observemos que

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \, d\lambda_n = \int_\Omega \sum_{p,q=1}^{n} (\partial_p \partial_q u)^2 \, d\lambda_n.$$

Integramos primero por partes respecto a la variable $x^q$ y después respecto a $x^p$. Como $u$ tiene soporte compacto en $\Omega$ y las derivadas parciales conmutan, obtenemos

$$\int_\Omega (\partial_p \partial_q u)^2 \, d\lambda_n = -\int_\Omega (\partial_p u)\, \partial_p \partial_q^2 u \, d\lambda_n = \int_\Omega (\partial_p^2 u)(\partial_q^2 u)\, d\lambda_n.$$

Sumando sobre $p, q$ se deduce

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \, d\lambda_n = \int_\Omega \left( \sum_{p=1}^{n} \partial_p^2 u \right) \left( \sum_{q=1}^{n} \partial_q^2 u \right) d\lambda_n = \int_\Omega |\Delta u|^2 \, d\lambda_n.$$

Supongamos ahora que la afirmación es cierta para todos los órdenes menores que $j \geq 3$. Para cada lista $(i_1, \ldots, i_{j-2})$, la función $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{j-2}} u$ pertenece a $C_c^\infty(\Omega)$. Aplicando a cada una de estas funciones la identidad ya demostrada para dos derivadas y sumando sobre todos los índices, obtenemos, en notación tensorial,

$$\int_\Omega |\nabla^j u|^2 \, d\lambda_n = \int_\Omega |\Delta(\nabla^{j-2} u)|^2 \, d\lambda_n.$$

Como el laplaciano conmuta con derivadas parciales en $\mathbb{R}^n$, se tiene

$$\Delta(\nabla^{j-2} u) = \nabla^{j-2}(\Delta u),$$

y por lo tanto

$$\int_\Omega |\nabla^j u|^2 \, d\lambda_n = \int_\Omega |\nabla^{j-2}(\Delta u)|^2 \, d\lambda_n.$$

La función $v := \Delta u$ también pertenece a $C_c^\infty(\Omega)$. Podemos, por lo tanto, aplicarle la hipótesis de inducción en el orden $j - 2$.

Si $j$ es par, entonces $j - 2$ es par, y se obtiene

$$\int_\Omega |\nabla^{j-2}(\Delta u)|^2 = \int_\Omega |\Delta^{\frac{j-2}{2}}(\Delta u)|^2 = \int_\Omega |\Delta^{\frac{j}{2}} u|^2.$$

Si $j$ es impar, entonces $j - 2$ es impar, y se obtiene

$$\int_\Omega |\nabla^{j-2}(\Delta u)|^2 = \int_\Omega \left|\nabla \Delta^{\frac{j-3}{2}}(\Delta u)\right|^2 = \int_\Omega \left|\nabla \Delta^{\frac{j-1}{2}} u\right|^2.$$

En ambos casos se recupera exactamente el término correspondiente de la norma estructurada. Esto prueba las identidades término a término para funciones de $C_c^\infty(\Omega)$. Aplicándolas a la sucesión $(u_\nu)$ elegida al comienzo y usando las convergencias en $L^2$ allí establecidas, pasamos al límite en ambos miembros de cada identidad. De este modo se obtienen las mismas igualdades para todo $u \in H_0^m(\Omega)$; al sumarlas para $0 \leq j \leq m$ se obtiene la igualdad de las dos normas. □

Para extender este resultado a variedades riemannianas, introduciremos primero una notación que simplificará el manejo de las contracciones tensoriales, así como un resultado analítico auxiliar.

**Notación 9.1.37.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sean

$$\pi_{\mathbf{E}} \colon \mathbf{E} \longrightarrow M, \qquad \pi_{\mathbf{F}} \colon \mathbf{F} \longrightarrow M$$

haces vectoriales suaves de rango finito, equipados con métricas fibradas suaves $\mathbf{h_E}$ y $\mathbf{h_F}$.
Sean $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_r, \mathbf{H}$ haces vectoriales obtenidos a partir de $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, sus duales y los haces tangente y cotangente de $M$, mediante un número finito de productos tensoriales. Sean además

$$\mathbf{u}_1 \in \Gamma(\mathbf{G}_1), \dots, \mathbf{u}_r \in \Gamma(\mathbf{G}_r).$$

Diremos que una sección $\mathbf{T} \in \Gamma(\mathbf{H})$ es de la forma

$$\mathbf{u}_1 * \cdots * \mathbf{u}_r$$

si existe un homomorfismo de haces suave

$$\Phi \colon \mathbf{G}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{G}_r \longrightarrow \mathbf{H}$$

que se obtiene mediante composición y combinación lineal finita de las siguientes operaciones naturales:

(a) productos tensoriales;

(b) permutaciones de factores tensoriales;

(c) contracciones entre un haz y su dual;

(d) los isomorfismos de haces inducidos por las métricas fibradas $\mathbf{h_E}$, $\mathbf{h_F}$ y la métrica riemanniana $\mathbf{g}$, así como sus inversos.

y tal que

$$\mathbf{T} = \Phi(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r).$$

En particular, si $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{G})$ y $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{K})$, la expresión

$$\mathbf{u} * \mathbf{v}$$

denota cualquier sección obtenida a partir de $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ mediante una combinación finita de las operaciones anteriores. Distintas apariciones del símbolo $*$ pueden corresponder a homomorfismos de haces distintos.

Veamos un ejemplo que ilustra como opera esta notación.

**Ejemplo 9.1.38.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Consideremos

$$\mathbf{R} \in \Gamma(T^{(0,4)}(TM)), \qquad \boldsymbol{\omega} \in \Gamma(T^{(0,1)}(TM)).$$

Existe un isomorfismo canónico de haces

$$T^{(0,4)}(TM) \otimes T^{(0,1)}(TM) \cong T^{(0,5)}(TM).$$

Definimos un homomorfismo de haces

$$\Phi\colon T^{(0,5)}(TM) \longrightarrow T^{(0,1)}(TM)$$

mediante contracciones métricas con $\mathbf{g}^{-1} \in \Gamma(T^{(2,0)}(TM))$. Más explícitamente, en coordenadas locales, si

$$\mathbf{A} \in \Gamma(T^{(0,5)}(TM)),$$

y consideramos que $A_{abcde}$ son sus componentes, entonces, las componentes de $\Phi(\mathbf{A})$ son

$$\Phi(\mathbf{A})_b = g^{ae} g^{cd} A_{abcde}.$$

Este homomorfismo se obtiene a partir de productos tensoriales, permutaciones y contracciones, por lo que es de los admitidos en la Notación 9.1.37.
Evaluando en $\mathbf{A} = \mathbf{R} \otimes \boldsymbol{\omega}$, se obtiene

$$\Phi(\mathbf{R} \otimes \boldsymbol{\omega})_i = g^{jk} g^{lm} R_{jilm}\, \omega_k.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{T} = \Phi(\mathbf{R} \otimes \boldsymbol{\omega})$$

es un término del tipo $\mathbf{R} * \boldsymbol{\omega}$.

**Lema 9.1.39.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sean

$$\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_r, \mathbf{H} \longrightarrow M$$

haces vectoriales suaves de rango finito, equipados con métricas fibradas suaves.
Sea

$$\Phi\colon \mathbf{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_r \longrightarrow \mathbf{H}$$

un homomorfismo de haces suave obtenido mediante composición y combinación lineal finita de productos tensoriales, permutaciones de factores, contracciones y los isomorfismos inducidos por las métricas fibradas y la métrica riemanniana $\mathbf{g}$, así como sus inversos.
Entonces, para todo compacto $K \subseteq M$, existe una constante $C_K > 0$ tal que para todo $x \in K$ y todos

$$v_i \in (\mathbf{E}_i)_x, \qquad i = 1, \dots, r,$$

se cumple

$$\left|\Phi_x(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)\right|_{\mathbf{h}_\mathbf{H}} \leq C_K\, |v_1|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_1}} \cdots |v_r|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_r}}.$$

En particular, si $\mathbf{u}_i \in \Gamma(\mathbf{E}_i)$ para $i = 1,\dots,r$, entonces

$$|\Phi(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r)(x)|_{\mathbf{h}_\mathbf{H}} \leq C_K\, |\mathbf{u}_1(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_1}} \cdots |\mathbf{u}_r(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_r}}, \qquad \forall x \in K.$$

Por consiguiente, si $T = \mathbf{u}_1 * \cdots * \mathbf{u}_r$, entonces

$$|T(x)|_{\mathbf{h}_\mathbf{H}} \leq C_K\, |\mathbf{u}_1(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_1}} \cdots |\mathbf{u}_r(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_r}}, \qquad \forall x \in K.$$

*Demostración.* Fijemos $x \in M$. Consideremos el mapeo

$$\widetilde{\Phi}_x \colon (\mathbf{E}_1)_x \times \cdots \times (\mathbf{E}_r)_x \longrightarrow \mathbf{H}_x, \qquad \widetilde{\Phi}_x(v_1,\dots,v_r) := \Phi_x(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r).$$

Sea

$$\theta_x : (\mathbf{E}_1)_x \times \cdots \times (\mathbf{E}_r)_x \longrightarrow (\mathbf{E}_1)_x \otimes \cdots \otimes (\mathbf{E}_r)_x, \qquad \theta_x(v_1,\dots,v_r) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r.$$

El mapeo $\theta_x$ es multilineal. Por otra parte, como $\Phi$ es un homomorfismo de haces,

$$\Phi_x \colon (\mathbf{E}_1)_x \otimes \cdots \otimes (\mathbf{E}_r)_x \longrightarrow \mathbf{H}_x$$

es lineal. En consecuencia,

$$\widetilde{\Phi}_x = \Phi_x \circ \theta_x$$

es multilineal.

Denotemos por $|\cdot|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_i,x}}$ la norma en $(\mathbf{E}_i)_x$ inducida por la métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}_i}$, y por $|\cdot|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}}$ la norma en $\mathbf{H}_x$ inducida por la métrica fibrada de $\mathbf{H}$. Como los espacios que intervienen son de dimensión finita, toda función multilineal entre ellos es continua. Por consiguiente, existe una constante $C(x) > 0$ tal que

$$|\Phi_x(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}} \leq C(x)\, |v_1|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_1,x}} \cdots |v_r|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_r,x}}$$

para cualesquiera $v_i \in (\mathbf{E}_i)_x$, con $i \in \{1,\dots,r\}$.

Resta ver que esta constante puede elegirse uniformemente sobre compactos. Sea $p \in K$. Elegimos abiertos $U_p, V_p \subseteq M$ tales que

$$p \in U_p, \qquad \overline{U_p} \subseteq V_p, \qquad \overline{U_p} \text{ es compacto,}$$

y de modo que todos los haces

$$\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_r,\mathbf{H}$$

admitan marcos locales suaves sobre $V_p$. Fijemos en $V_p$ marcos locales

$$e_1^{(i)},\dots,e_{m_i}^{(i)} \quad \text{para } \mathbf{E}_i, \qquad \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\ell \quad \text{para } \mathbf{H}.$$

En estos marcos existen funciones suaves

$$\Phi^b_{a_1\cdots a_r} \colon V_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

tales que

$$\Phi_x\big(e^{(1)}_{a_1}(x)\otimes\cdots\otimes e^{(r)}_{a_r}(x)\big)=\sum_{b=1}^{\ell}\Phi^{b}_{a_1\cdots a_r}(x)\,\varepsilon_b(x).$$

Como los marcos y estas funciones están definidos en una vecindad de $\overline{U_p}$, su continuidad y la compacidad de $\overline{U_p}$ proporcionan $A_p>0$ tal que

$$|\Phi^{b}_{a_1\cdots a_r}(x)|\le A_p\qquad\forall x\in\overline{U_p}.$$

Sea ahora $x\in\overline{U_p}$ y, para cada $i\in\{1,\dots,r\}$, escribamos

$$v_i=\sum_{a_i=1}^{m_i}v_i^{a_i}\,e^{(i)}_{a_i}(x).$$

Entonces

$$\Phi_x(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)=\sum_{\substack{1\le b\le\ell\\1\le a_i\le m_i}}\Phi^{b}_{a_1\cdots a_r}(x)\,v_1^{a_1}\cdots v_r^{a_r}\,\varepsilon_b(x).$$

Por la desigualdad del triángulo,

$$|\Phi_x(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}}\le\sum_{\substack{1\le b\le\ell\\1\le a_i\le m_i}}|\Phi^{b}_{a_1\cdots a_r}(x)||v_1^{a_1}|\cdots|v_r^{a_r}||\varepsilon_b(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}}.$$

Usando la cota $|\Phi^{b}_{a_1\cdots a_r}(x)|\le A_p$, obtenemos

$$|\Phi_x(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}}\le A_p\sum_{\substack{1\le b\le\ell\\1\le a_i\le m_i}}|v_1^{a_1}|\cdots|v_r^{a_r}||\varepsilon_b(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}}.$$

Como $\overline{U_p}$ es compacto y las secciones $\varepsilon_b$ son suaves, existe $B_p>0$ tal que

$$|\varepsilon_b(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}}\le B_p\qquad\forall x\in\overline{U_p},\ \forall b.$$

Por lo tanto,

$$|\Phi_x(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}}\le A_pB_p\sum_{\substack{1\le b\le\ell\\1\le a_i\le m_i}}|v_1^{a_1}|\cdots|v_r^{a_r}|.$$

Ahora bien,

$$\sum_{\substack{1\le b\le\ell\\1\le a_i\le m_i}}|v_1^{a_1}|\cdots|v_r^{a_r}|=\sum_{b=1}^{\ell}\sum_{a_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{a_r=1}^{m_r}|v_1^{a_1}|\cdots|v_r^{a_r}|.$$

Como la expresión interior no depende de $b$, resulta

$$\sum_{\substack{1\le b\le\ell\\1\le a_i\le m_i}}|v_1^{a_1}|\cdots|v_r^{a_r}|=\ell\sum_{a_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{a_r=1}^{m_r}|v_1^{a_1}|\cdots|v_r^{a_r}|.$$

Además, por distributividad,

$$\sum_{a_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{a_r=1}^{m_r}|v_1^{a_1}|\cdots|v_r^{a_r}| = \left(\sum_{a_1=1}^{m_1}|v_1^{a_1}|\right)\cdots\left(\sum_{a_r=1}^{m_r}|v_r^{a_r}|\right).$$

En consecuencia,

$$|\Phi_x(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}} \le A_p B_p\,\ell\prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{a_i=1}^{m_i}|v_i^{a_i}|\right).$$

Para cada $i\in\{1,\dots,r\}$, el marco local $\mathbf{e}_1^{(i)},\dots,\mathbf{e}_{m_i}^{(i)}$ induce en cada fibra $(\mathbf{E}_i)_x$, con $x\in\overline{U_p}$, la norma

$$\|v_i\|_{(i),x} := \sum_{a_i=1}^{m_i}|v_i^{a_i}|.$$

La matriz de $\mathbf{h}_{\mathbf{E}_i}$ en este marco y su inversa dependen suavemente de $x$. Sus coeficientes están acotados en $\overline{U_p}$ y sus menores positivos están separados de cero. La compacidad de $\overline{U_p}$ y de la esfera unitaria en cada espacio de componentes proporciona constantes $0<d_{p,i}\le D_{p,i}<+\infty$, independientes de $x$, tales que

$$d_{p,i}|v_i|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_i},x} \le \|v_i\|_{(i),x} \le D_{p,i}|v_i|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_i},x} \qquad \forall x\in\overline{U_p},\ \forall v_i\in(\mathbf{E}_i)_x.$$

Sustituyendo estas estimaciones en la desigualdad anterior, obtenemos

$$|\Phi_x(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}} \le A_pB_p\,\ell\,D_{p,1}\cdots D_{p,r}\,|v_1|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_1,x}}\cdots|v_r|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_r,x}}$$

para todo $x\in\overline{U_p}$. Si definimos

$$C_p := A_pB_p\,\ell\,D_{p,1}\cdots D_{p,r},$$

resulta

$$|\Phi_x(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}} \le C_p\,|v_1|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_1,x}}\cdots|v_r|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_r,x}} \qquad \forall x\in\overline{U_p}.$$

Los abiertos $U_p$, con $p\in K$, cubren $K$. Por compacidad, existe una subcubierta finita

$$U_{p_1},\dots,U_{p_N}.$$

Definiendo

$$C_K := \max\{C_{p_1},\dots,C_{p_N}\},$$

se obtiene

$$|\Phi_x(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{H},x}} \le C_K\,|v_1|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_1,x}}\cdots|v_r|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_r,x}} \qquad \forall x\in K.$$

La afirmación para secciones se obtiene tomando $v_i=\mathbf{u}_i(x)$. □

**Proposición 9.1.40.** (Regla de Leibniz para el operador $*$) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera. Sean $\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_r,\mathbf{F}\longrightarrow M$ haces vectoriales suaves con métricas fibradas (hermitianas en el caso complejo) y conexiones compatibles con ellas. En los factores tangentes y cotangentes se usa la conexión de Levi–Civita y en todos los productos, duales y haces de homomorfismos se usan las conexiones inducidas.

Sea

$$\mathbf{\Phi}\colon \mathbf{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_r \longrightarrow \mathbf{F}$$

un homomorfismo de haces suave obtenido mediante productos tensoriales, permutaciones, contracciones y los isomorfismos inducidos por las métricas fibradas y la métrica riemanniana.
Si $\mathbf{u}_i \in \Gamma(\mathbf{E}_i)$ para $i = 1, \dots, r$, definimos

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r) = \mathbf{u}_1 * \cdots * \mathbf{u}_r.$$

Entonces, para todo $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{T} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{u}_1 * \cdots * (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_i) * \cdots * \mathbf{u}_r.$$

*Demostración.* Por definición, $\mathbf{T} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r)$. Consideramos $\mathbf{\Phi}$ como sección de $\operatorname{Hom}(\mathbf{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_r, \mathbf{F})$, con la conexión inducida por las de $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_r$ y $\mathbf{F}$.
Por definición de esta conexión, para todo $\mathbf{S} \in \Gamma(\mathbf{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_r)$ se tiene

$$(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{\Phi})(\mathbf{S}) = \nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{\Phi}(\mathbf{S})) - \mathbf{\Phi}(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{S}).$$

Aplicando esto a $\mathbf{S} = \mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r$, se obtiene

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{T} = (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{\Phi})(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r) + \mathbf{\Phi}\big(\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r)\big).$$

Por construcción, $\mathbf{\Phi}$ es combinación de productos tensoriales, permutaciones, contracciones e isomorfismos inducidos por las métricas. La compatibilidad de las conexiones garantiza que las identificaciones musicales son paralelas; las contracciones, permutaciones y productos tensoriales también lo son para las conexiones inducidas. Cada operación conmuta, por lo tanto, con la conexión en el sentido de la Definición 2.4.33. De aquí se deduce que $\mathbf{\Phi}$ es paralelo, es decir, $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{\Phi} = 0$.
En consecuencia,

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{T} = \mathbf{\Phi}\big(\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r)\big).$$

Aplicando la regla de Leibniz para el producto tensorial,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_i) \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r,$$

y sustituyendo, se obtiene

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{T} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{\Phi}\big(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_i) \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r\big).$$

Esto equivale a

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{T} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{u}_1 * \cdots * (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_i) * \cdots * \mathbf{u}_r,$$

como se quería demostrar. □

Para estudiar la equivalencia de normas necesitamos controlar el conmutador de las derivadas covariantes

con el laplaciano. Recordemos la curvatura $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ de la conexión, introducida en la Definición 8.2.21. La conexión producto sobre los haces tensoriales combina $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ con la curvatura riemanniana; por ello ambas aparecen en el conmutador siguiente.

**Lema 9.1.41.** (Conmutador del laplaciano de Bochner con derivadas covariantes) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Para $\ell\in\mathbb{N}_0$, pongamos

$$\mathbf{E}_\ell := T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E},$$

con la métrica y la conexión producto inducidas, y denotemos por $\nabla_\ell\colon \Gamma(\mathbf{E}_\ell)\to\Gamma(\mathbf{E}_{\ell+1})$ la derivada covariante. Para $m\in\mathbb{N}$ escribimos

$$\nabla^m := \nabla_{\ell+m-1}\circ\cdots\circ\nabla_\ell,$$

de modo que cada nuevo índice derivativo ocupa el primer factor covariante. Sea

$$\Delta_{B,\ell} := (\nabla_\ell)^*_h\nabla_\ell = -\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla_\ell^2)$$

el laplaciano de Bochner en $\mathbf{E}_\ell$. Entonces, para toda $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E}_\ell)$,

$$\Delta_{B,\ell+m}(\nabla^m\mathbf{u}) - \nabla^m(\Delta_{B,\ell}\mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{m}\nabla^k\operatorname{Rm}*\nabla^{m-k}\mathbf{u}. \tag{9.27}$$

Aquí Rm representa, según el sumando, a $\mathbf{R}^M$ o a $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$, con sus conexiones inducidas, y $*$ denota una suma finita de productos tensoriales, permutaciones y contracciones universales. Los coeficientes y el número de términos dependen únicamente de $m$, $\ell$, $\dim M$ y el rango de $\mathbf{E}$.

*Demostración.* Primero probaremos la identidad correspondiente a una sola derivada. Sea $\mathbf{F}\to M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$ y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{F}}$, curvatura $\mathbf{R}^{\mathbf{F}}$ y laplaciano de Bochner

$$\Delta_B^{\mathbf{F}} := (\nabla^{\mathbf{F}})^*\nabla^{\mathbf{F}} = -\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}\big((\nabla^{\mathbf{F}})^2\big).$$

Afirmamos que, para cada $\mathbf{v}\in\Gamma(\mathbf{F})$, cada $x\in M$, cada $\mathbf{X}\in T_xM$ y cualquier base ortonormal $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ de $T_xM$, se cumple

$$\big(\nabla^{\mathbf{F}}\Delta_B^{\mathbf{F}}\mathbf{v} - \Delta_B^{T^*M\otimes\mathbf{F}}(\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v})\big)(\mathbf{X}) = \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathrm{Ric}^\sharp\mathbf{X}}\mathbf{v} + 2\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{X})\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{v} + \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{R}^{\mathbf{F}})(\mathbf{e}_i,\mathbf{X})\mathbf{v}. \tag{9.28}$$

Todos los términos del miembro derecho se evalúan en $x$. Las sumas son contracciones tensoriales, por lo que no dependen de la base ortonormal elegida.

Supongamos primero que $x\in\operatorname{Int}M$. Los dos miembros de (9.28) pertenecen a $T^*_xM\otimes\mathbf{F}_x$; por ello fijamos un vector arbitrario $\mathbf{X}\in T_xM$ y comparamos sus valores en $\mathbf{X}$. Extendemos $\mathbf{X},\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ a campos locales, denotados de la misma manera, tales que

$$\nabla^M_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}(x) = 0, \qquad \nabla^M_{\mathbf{Y}}\mathbf{e}_i(x) = 0$$

para todo $\mathbf{Y} \in T_xM$ y todo $i$. Estas extensiones se obtienen tomando componentes constantes en coordenadas normales centradas en $x$.

Pongamos $\mathbf{A} := \nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v} \in \Gamma(T^*M \otimes \mathbf{F})$. Conforme a la convención de la Proposición 2.4.29, los dos primeros argumentos de $\nabla^3\mathbf{v} = \nabla^2\mathbf{A}$ son los índices derivativos añadidos y el tercero es la entrada original de $\mathbf{A}$. Como la conexión de Levi–Civita conmuta con las contracciones métricas por la Proposición 2.4.37, en el punto $x$ se tiene

$$\begin{aligned}(\nabla^{\mathbf{F}}\Delta_B^{\mathbf{F}}\mathbf{v})(\mathbf{X}) &= -\sum_{i=1}^{n}(\nabla^3\mathbf{v})(\mathbf{X},\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i),\\ \big(\Delta_B^{T^*M\otimes\mathbf{F}}\mathbf{A}\big)(\mathbf{X}) &= -\sum_{i=1}^{n}(\nabla^3\mathbf{v})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i,\mathbf{X}).\end{aligned} \tag{9.29}$$

La primera igualdad se obtiene derivando el tensor $-\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}\nabla^2\mathbf{v}$, no derivando una fórmula que sólo sea válida en $x$. Al restar las dos igualdades de (9.29), resulta

$$\big(\nabla^{\mathbf{F}}\Delta_B^{\mathbf{F}}\mathbf{v} - \Delta_B^{T^*M\otimes\mathbf{F}}\mathbf{A}\big)(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\big[(\nabla^3\mathbf{v})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i,\mathbf{X}) - (\nabla^3\mathbf{v})(\mathbf{X},\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)\big]. \tag{9.30}$$

Intercambiaremos los índices en dos pasos. La identidad de Ricci de la Proposición 8.2.23, aplicada primero a $\mathbf{v}$ y derivada covariantemente en la dirección $\mathbf{e}_i$, da

$$(\nabla^3\mathbf{v})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i,\mathbf{X}) - (\nabla^3\mathbf{v})(\mathbf{e}_i,\mathbf{X},\mathbf{e}_i) = (\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{R}^{\mathbf{F}})(\mathbf{e}_i,\mathbf{X})\mathbf{v} + \mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{X})\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{v}. \tag{9.31}$$

En efecto, los términos en los que la derivada recae sobre $\mathbf{e}_i$ o $\mathbf{X}$ se anulan en $x$ por la elección de las extensiones.

Aplicamos ahora la misma identidad de Ricci a la sección $\mathbf{A} = \nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v}$ del haz $T^*M \otimes \mathbf{F}$. Por la fórmula de la curvatura producto (8.15),

$$(\nabla^3\mathbf{v})(\mathbf{e}_i,\mathbf{X},\mathbf{e}_i) - (\nabla^3\mathbf{v})(\mathbf{X},\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i) = \mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{X})\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{v} - \nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}^M(\mathbf{e}_i,\mathbf{X})\mathbf{e}_i}\mathbf{v}. \tag{9.32}$$

Sumando (9.31) y (9.32), sumando después respecto de $i$ y usando (9.30), obtenemos

$$\big(\nabla^{\mathbf{F}}\Delta_B^{\mathbf{F}}\mathbf{v} - \Delta_B^{T^*M\otimes\mathbf{F}}(\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v})\big)(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{R}^{\mathbf{F}})(\mathbf{e}_i,\mathbf{X})\mathbf{v} + 2\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{X})\nabla^{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{v} - \nabla^{\mathbf{F}}_{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}^M(\mathbf{e}_i,\mathbf{X})\mathbf{e}_i}\mathbf{v}.$$

La Proposición 2.10.9 afirma que $-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}^M(\mathbf{e}_i,\mathbf{X})\mathbf{e}_i = \operatorname{Ric}^\sharp\mathbf{X}$, y por ello obtenemos (9.28). Como $x$ y $\mathbf{X}$ eran arbitrarios, la identidad vale en $\operatorname{Int}M$. Si $M$ tiene frontera, ambos miembros son secciones suaves hasta $\partial M$ y $\operatorname{Int}M$ es denso en $M$; por continuidad, la identidad vale también sobre la frontera.

Como comprobación del signo, si $\mathbf{F} = M \times \mathbb{R}$ tiene la conexión trivial, la fórmula anterior se reduce a

$$d\Delta_B f - \Delta_B^{T^*M}(df) = df \circ \operatorname{Ric}^\sharp.$$

Apliquemos ahora la identidad a $\mathbf{F} = \mathbf{E}_\ell = T^{(0,\ell)}(TM) \otimes \mathbf{E}$. Por (8.13), la curvatura de $\mathbf{E}_\ell$ es la suma de la acción de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ sobre el factor $\mathbf{E}$ y de las acciones de $\mathbf{R}^M$ sobre los factores covariantes. Al pasar (9.28) al

miembro opuesto y absorber los signos y las contracciones universales en el símbolo $*$, se obtiene

$$\Delta_{B,\ell+1}(\nabla \mathbf{u}) - \nabla(\Delta_{B,\ell}\mathbf{u}) = \mathrm{Rm} * \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathrm{Rm} * \mathbf{u}. \tag{9.33}$$

Éste es el caso $m = 1$.
Supongamos que (9.27) vale para cierto $m \geq 1$. Entonces

$$\Delta_{B,\ell+m+1}(\nabla^{m+1}\mathbf{u}) - \nabla^{m+1}(\Delta_{B,\ell}\mathbf{u}) = \big(\Delta_{B,\ell+m+1}\nabla - \nabla\Delta_{B,\ell+m}\big)(\nabla^m \mathbf{u}) + \nabla\big(\Delta_{B,\ell+m}(\nabla^m\mathbf{u}) - \nabla^m(\Delta_{B,\ell}\mathbf{u})\big).$$

Por (9.33), el primer término es una suma universal de términos de los tipos $\mathrm{Rm} * \nabla^{m+1}\mathbf{u}$ y $\nabla \mathrm{Rm} * \nabla^m \mathbf{u}$. Para el segundo usamos la hipótesis inductiva y la regla de Leibniz de la Proposición 9.1.40:

$$\nabla\big(\Delta_{B,\ell+m}(\nabla^m\mathbf{u}) - \nabla^m(\Delta_{B,\ell}\mathbf{u})\big) = \sum_{k=0}^{m}\Big(\nabla^{k+1}\,\mathrm{Rm} * \nabla^{m-k}\mathbf{u} + \nabla^k \mathrm{Rm} * \nabla^{m+1-k}\mathbf{u}\Big).$$

Todos los términos obtenidos tienen la forma $\nabla^q \mathrm{Rm} * \nabla^{m+1-q}\mathbf{u}$ con $0 \leq q \leq m+1$. Reagrupando, para cada $q$, las contracciones universales que aparecen, concluimos que

$$\Delta_{B,\ell+m+1}(\nabla^{m+1}\mathbf{u}) - \nabla^{m+1}(\Delta_{B,\ell}\mathbf{u}) = \sum_{q=0}^{m+1}\nabla^q \mathrm{Rm} * \nabla^{m+1-q}\mathbf{u}.$$

Esto completa la inducción. □

**Teorema 9.1.42.** (Equivalencia de normas en $H^m(M,\mathbf{E})$ en términos del laplaciano de Bochner) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Para $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$ definimos

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H^m(M,\mathbf{E})} := \sum_{j=0}^{m}\int_M |\nabla^j \mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

y

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\Delta_B} := \sum_{\substack{j=0\\ j\text{ par}}}^{m}\int_M |\Delta_B^{\frac{j}{2}}\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\text{ impar}}}^{m}\int_M \big|\nabla\Delta_B^{\frac{j-1}{2}}\mathbf{u}\big|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Denotemos por $H^m(M,\mathbf{E})$ la completación de $\Gamma(\mathbf{E})$ respecto de la primera norma. Entonces existen constantes $c, C > 0$ tales que

$$c\|\mathbf{u}\|^2_{H^m(M,\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{u}\|^2_{\Delta_B} \leq C\|\mathbf{u}\|^2_{H^m(M,\mathbf{E})}, \qquad \forall \mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E}).$$

En consecuencia, la segunda norma determina la misma completación. Para un elemento de $H^m(M,\mathbf{E})$, cada término que contiene una potencia de $\Delta_B$ se entiende como el límite en $L^2$ del término correspondiente de una sucesión suave de Cauchy.

*Demostración.* Como $M$ es cerrada, es compacta y $\partial M = \varnothing$. Demostraremos las desigualdades en $\Gamma(\mathbf{E})$; la afirmación sobre las completaciones se seguirá después por continuidad.
En lo que sigue, todas las integraciones por partes se realizan sin términos de frontera.

Demostremos primero que

$$\|\mathbf{u}\|_{\Delta_B}^2 \le C\|\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})}^2.$$

Por definición,

$$\Delta_B = \nabla^*\nabla = -\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2).$$

Como la conexión es compatible con la métrica, la derivada covariante conmuta con la contracción. Definimos las contracciones

$$C_k^{\mathrm{par}}(T) := g^{i_1 i_2}\cdots g^{i_{2k-1}i_{2k}} T_{i_1\cdots i_{2k}},$$
$$\big(C_k^{\mathrm{impar}}(S)\big)_a := g^{i_1 i_2}\cdots g^{i_{2k-1}i_{2k}} S_{a i_1\cdots i_{2k}}.$$

La primera contrae los pares $(1,2),(3,4),\ldots$; la segunda deja libre el primer índice y contrae $(2,3),(4,5),\ldots$. La inducción sobre $k$ da

$$\Delta_B^k \mathbf{u} = (-1)^k C_k^{\mathrm{par}}(\nabla^{2k}\mathbf{u}).$$

Pongamos $\Phi_k := (-1)^k C_k^{\mathrm{par}}$. Como $\Phi_k$ se obtiene mediante contracciones y combinaciones lineales, el Lema 9.1.39 implica que existe una constante $C_k > 0$ tal que

$$|\Delta_B^k \mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \le C_k |\nabla^{2k}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}.$$

Elevando al cuadrado e integrando,

$$\int_M |\Delta_B^k \mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} \le C_k^2 \int_M |\nabla^{2k}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $\nabla \mathbf{g} = 0$, derivar cada factor $\mathbf{g}^{-1}$ empleado en la contracción produce cero; por la regla de Leibniz,

$$\nabla \Delta_B^k \mathbf{u} = (-1)^k \nabla\big(C_k^{\mathrm{par}}(\nabla^{2k}\mathbf{u})\big) = (-1)^k C_k^{\mathrm{impar}}(\nabla^{2k+1}\mathbf{u}).$$

Definimos entonces

$$\Psi_k \colon T^{(0,2k+1)}(TM)\otimes \mathbf{E} \longrightarrow T^*M \otimes \mathbf{E}, \qquad \Psi_k(S) := (-1)^k C_k^{\mathrm{impar}}(S).$$

Así,

$$\nabla \Delta_B^k \mathbf{u} = \Psi_k(\nabla^{2k+1}\mathbf{u}),$$

y nuevamente por el Lema 9.1.39 existe $C_k' > 0$ tal que

$$|\nabla \Delta_B^k \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \le C_k' |\nabla^{2k+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}.$$

Elevando al cuadrado e integrando,

$$\int_M |\nabla \Delta_B^k \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} \le (C_k')^2 \int_M |\nabla^{2k+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por consiguiente, cada sumando par de $\|\mathbf{u}\|_{\Delta_B}^2$ queda acotado por el correspondiente sumando de orden par de $\|\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})}^2$, y cada sumando impar de $\|\mathbf{u}\|_{\Delta_B}^2$ queda acotado por el correspondiente sumando de orden

impar de $\|\mathbf{u}\|^2_{H^m(M,\mathbf{E})}$. Sumando todos los términos, concluimos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\Delta_B} \leq C\|\mathbf{u}\|^2_{H^m(M,\mathbf{E})}.$$

Demostremos ahora que

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H^m(M,\mathbf{E})} \leq C\|\mathbf{u}\|^2_{\Delta_B}.$$

Formularemos la estimación inductiva para todas las secciones suaves. Para $0 \leq j \leq m$ y $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$, introducimos la cantidad truncada

$$\mathcal{N}_j(\mathbf{v})^2 := \sum_{\substack{0\leq r\leq j\\ r \text{ par}}} \|\Delta_B^{\frac{r}{2}}\mathbf{v}\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} + \sum_{\substack{1\leq r\leq j\\ r \text{ impar}}} \|\nabla^{\mathbf{E}}\Delta_B^{\frac{r-1}{2}}\mathbf{v}\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}. \tag{9.34}$$

Así, $\mathcal{N}_m(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_{\Delta_B}$. Probaremos por inducción la afirmación cuantificada siguiente: para cada $j \in \{0,\dots,m\}$ existe $C_j > 0$ tal que, para toda sección suave $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$\int_M |\nabla^j\mathbf{v}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} \leq C_j\mathcal{N}_j(\mathbf{v})^2.$$

Como la estimación se formula para toda sección suave, en el paso de orden $j-2$ podremos tomar $\mathbf{v} = \Delta_B\mathbf{u}$.
Para $j = 0$ y toda $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$ se tiene

$$\int_M |\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} = \mathcal{N}_0(\mathbf{v})^2,$$

pues la suma truncada sólo contiene el término de orden cero.
Para $j = 1$ y toda $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$ se tiene

$$\int_M |\nabla\mathbf{v}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} \leq \mathcal{N}_1(\mathbf{v})^2,$$

pues éste es el término impar de orden uno.
Consideremos ahora el caso $j = 2$. Aplicando el Corolario 9.1.31 al haz $T^*M \otimes \mathbf{E}$, obtenemos

$$\int_M |\nabla^2\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} = \int_M \langle\nabla\mathbf{u}, \Delta_{B,1}(\nabla\mathbf{u})\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g}.$$

Por el Lema 9.1.41 con $m = 1$,

$$\Delta_{B,1}(\nabla\mathbf{u}) = \nabla(\Delta_{B,0}\mathbf{u}) + \mathrm{Rm}*\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathrm{Rm}*\mathbf{u}.$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla^2\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} = \int_M \langle\nabla\mathbf{u}, \nabla(\Delta_B\mathbf{u})\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} + \int_M \langle\nabla\mathbf{u}, \mathrm{Rm}*\nabla\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g}\\ + \int_M \langle\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathrm{Rm}*\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g}.\end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el Corolario 9.1.31, ahora al haz $\mathbf{E}$, se obtiene

$$\int_M \langle\nabla\mathbf{u}, \nabla(\Delta_B\mathbf{u})\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} = \int_M |\Delta_B\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g}.$$

Además, como $M$ es compacta, el tensor de curvatura está uniformemente acotado y, por el Lema 9.1.39,

existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\mathrm{Rm} * \nabla \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \leq C |\nabla \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Por consiguiente,

$$\left| \int_M \langle \nabla \mathbf{u}, \mathrm{Rm} * \nabla \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right| \leq C \int_M |\nabla \mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Asimismo, la compacidad de $M$ acota uniformemente $\nabla \mathrm{Rm}$, de modo que

$$|\nabla \mathrm{Rm} * \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \leq C |\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Por la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$\left| \int_M \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathrm{Rm} * \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right| \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(M, T^*M \otimes \mathbf{E})} \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}.$$

Los dos factores corresponden a términos de orden inferior que aparecen en $\|\mathbf{u}\|_{\Delta_B}$. La desigualdad elemental $2ab \leq a^2 + b^2$, aplicada con $a = \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$ y $b = \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}$, da

$$\left| \int_M \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathrm{Rm} * \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right| \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} + C \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})}.$$

Por consiguiente,

$$\int_M |\nabla^2 \mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \int_M |\Delta_B \mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} + C \int_M |\nabla \mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} + C \int_M |\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Los tres términos del lado derecho aparecen, respectivamente, en $\mathcal{N}_2(\mathbf{u})^2$. Por lo tanto,

$$\int_M |\nabla^2 \mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq C_2 \mathcal{N}_2(\mathbf{u})^2.$$

Sea ahora $j \geq 3$ y supongamos que para todo entero $l < j$ y toda $\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E})$ ya se ha demostrado que

$$\int_M |\nabla^l \mathbf{v}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq C_l \mathcal{N}_l(\mathbf{v})^2.$$

Queremos probar la misma estimación para $j$.
Escribimos $\nabla^j \mathbf{u} = \nabla^2(\nabla^{j-2}\mathbf{u})$. El argumento del caso $j = 2$ depende únicamente de la compatibilidad de la conexión y de las cotas uniformes de la curvatura y de su primera derivada. Por lo tanto, se aplica al haz $T^{(0,j-2)}(TM) \otimes \mathbf{E}$ y a la sección $\nabla^{j-2}\mathbf{u}$. La curvatura de este haz producto y su primera derivada son sumas de contracciones de $\mathbf{R}^M$, $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ y sus derivadas; todas están acotadas porque $M$ es compacta. Se obtiene así

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla^j \mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq{}& \int_M |\Delta_{B,j-2}(\nabla^{j-2}\mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} + C \int_M |\nabla^{j-1}\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \\ &+ C \int_M |\nabla^{j-2}\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}. \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción, los dos últimos términos están acotados por $C\mathcal{N}_j(\mathbf{u})^2$, pues $\mathcal{N}_l(\mathbf{u}) \leq \mathcal{N}_j(\mathbf{u})$ para $l < j$. Basta entonces estimar el primero.

Aplicando el Lema 9.1.41 con $m = j-2$, se tiene

$$\Delta_{B,j-2}(\nabla^{j-2}\mathbf{u}) = \nabla^{j-2}(\Delta_B\mathbf{u}) + \sum_{k=0}^{j-2} \nabla^k \operatorname{Rm} * \nabla^{j-2-k}\mathbf{u}.$$

Elevando al cuadrado, usando la desigualdad

$$|A_0 + \cdots + A_N|^2 \leq C \sum_{r=0}^{N} |A_r|^2,$$

e integrando, obtenemos

$$\int_M |\Delta_{B,j-2}(\nabla^{j-2}\mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq C \int_M |\nabla^{j-2}(\Delta_B\mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + C \sum_{k=0}^{j-2} \int_M |\nabla^k \operatorname{Rm} * \nabla^{j-2-k}\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $M$ es compacta, todas las derivadas covariantes de Rm están uniformemente acotadas. Por el Lema 9.1.39, para cada $k$ existe una constante $C_k > 0$ tal que

$$|\nabla^k \operatorname{Rm} * \nabla^{j-2-k}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \leq C_k |\nabla^{j-2-k}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}.$$

Por lo tanto,

$$\int_M |\Delta_{B,j-2}(\nabla^{j-2}\mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq C \int_M |\nabla^{j-2}(\Delta_B\mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + C \sum_{l=0}^{j-2} \int_M |\nabla^l \mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por hipótesis de inducción, la suma de orden inferior queda controlada por $\mathcal{N}_j(\mathbf{u})^2$. En consecuencia,

$$\int_M |\nabla^j \mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq C \int_M |\nabla^{j-2}(\Delta_B\mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + C\mathcal{N}_j(\mathbf{u})^2.$$

Aplicamos ahora la afirmación inductiva, que vale para toda sección suave, a $\mathbf{v} = \Delta_B\mathbf{u}$ y al orden $j-2$. Como $j-2 < j$, se obtiene

$$\int_M |\nabla^{j-2}(\Delta_B\mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq C \left( \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ par}}}^{j-2} \int_M \left|\Delta_B^{\frac{\ell}{2}}(\Delta_B\mathbf{u})\right|^2_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impar}}}^{j-2} \int_M \left|\nabla \Delta_B^{\frac{\ell-1}{2}}(\Delta_B\mathbf{u})\right|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \right).$$

Reescribimos ahora cada una de estas sumas.
Para la suma par,

$$\Delta_B^{\frac{\ell}{2}}(\Delta_B\mathbf{u}) = \Delta_B^{\frac{\ell}{2}+1}\mathbf{u}.$$

Si $\ell$ recorre los enteros pares entre 0 y $j-2$, entonces $r = \ell + 2$ recorre los enteros pares entre 2 y $j$. Por lo tanto,

$$\sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ par}}}^{j-2} \int_M \left|\Delta_B^{\frac{\ell}{2}}(\Delta_B\mathbf{u})\right|^2_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \sum_{\substack{r=2 \\ r \text{ par}}}^{j} \int_M \left|\Delta_B^{\frac{r}{2}}\mathbf{u}\right|^2_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Para la suma impar,

$$\nabla\Delta_B^{\frac{\ell-1}{2}}(\Delta_B\mathbf{u}) = \nabla\Delta_B^{\frac{\ell+1}{2}}\mathbf{u}.$$

Si $\ell$ recorre los enteros impares entre 1 y $j-2$, entonces $s=\ell+2$ recorre los enteros impares entre 3 y $j$. Así,

$$\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impar}}}^{j-2}\int_M \left|\nabla\Delta_B^{\frac{\ell-1}{2}}(\Delta_B\mathbf{u})\right|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}} = \sum_{\substack{s=3\\ s \text{ impar}}}^{j}\int_M \left|\nabla\Delta_B^{\frac{s-1}{2}}\mathbf{u}\right|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Sustituyendo estas identidades en la estimación anterior, obtenemos

$$\int_M |\nabla^{j-2}(\Delta_B\mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \le C\left(\sum_{\substack{r=2\\ r \text{ par}}}^{j}\int_M \left|\Delta_B^{\frac{r}{2}}\mathbf{u}\right|^2_{\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}} + \sum_{\substack{s=3\\ s \text{ impar}}}^{j}\int_M \left|\nabla\Delta_B^{\frac{s-1}{2}}\mathbf{u}\right|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}}\right).$$

Cada uno de estos términos aparece en la definición de $\mathcal{N}_j(\mathbf{u})^2$. Equivalentemente, $\mathcal{N}_{j-2}(\Delta_B\mathbf{u}) \le \mathcal{N}_j(\mathbf{u})$: las potencias pares y los términos impares se desplazan exactamente dos órdenes. Por consiguiente,

$$\int_M |\nabla^{j-2}(\Delta_B\mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \le C\mathcal{N}_j(\mathbf{u})^2.$$

Volviendo a la estimación previa para $\displaystyle\int_M |\nabla^j\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$, concluimos que

$$\int_M |\nabla^j\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \le C_j\mathcal{N}_j(\mathbf{u})^2.$$

Esto completa el paso inductivo. Finalmente, $\mathcal{N}_j(\mathbf{u}) \le \mathcal{N}_m(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_{\Delta_B}$ para $j \le m$. Sumando sobre $j \in \{0,\dots,m\}$, se obtiene

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H^m(M,\mathbf{E})} = \sum_{j=0}^{m}\int_M |\nabla^j\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \le C\|\mathbf{u}\|^2_{\Delta_B}.$$

Junto con la desigualdad demostrada al inicio,

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\Delta_B} \le C\|\mathbf{u}\|^2_{H^m(M,\mathbf{E})},$$

obtenemos las dos desigualdades con constantes positivas del enunciado. Si $(\mathbf{u}_\nu)$ es de Cauchy para la norma de $H^m$, la desigualdad directa muestra que cada sucesión $\Delta_B^k\mathbf{u}_\nu$ y $\nabla\Delta_B^k\mathbf{u}_\nu$ que aparece en la norma estructurada es de Cauchy en el espacio $L^2$ correspondiente. Definimos esos términos en la completación por sus límites. La desigualdad inversa prueba que el procedimiento no añade elementos nuevos y que no depende de la sucesión representante. Esto justifica la última afirmación del enunciado. □

### 9.1.5 Caracterización local de los espacios de Sobolev en haces vectoriales

En esta subsección, mostraremos cómo caracterizar las secciones de Sobolev a partir de sus funciones componentes. Para ello demostraremos primero un lema análogo al Lema 7.1.8 para haces vectoriales arbitrarios:

**Lema 9.1.43.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $K \subseteq M$ compacto y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango finito. Sean $\mathbf{h}$ y $\widetilde{\mathbf{h}}$ dos métricas fibradas suaves en $\mathbf{E}$. Entonces existen constantes $c, C > 0$ tales que para todo $p \in K$ y toda $v \in \mathbf{E}_p$,

$$c\,\mathbf{h}_p(v,v) \leq \widetilde{\mathbf{h}}_p(v,v) \leq C\,\mathbf{h}_p(v,v).$$

Equivalentemente, $\sqrt{c}\,|v|_{\mathbf{h}} \leq |v|_{\widetilde{\mathbf{h}}} \leq \sqrt{C}\,|v|_{\mathbf{h}}$ en las mismas fibras. En particular, si $M$ es compacta se puede tomar $K = M$.

*Demostración.* Si $K = \varnothing$ o el rango del haz es cero, basta tomar $c = C = 1$. Supongamos que $K \neq \varnothing$ y que el rango es $r \geq 1$. Sea $p \in M$. Consideremos

$$S_p := \{v \in \mathbf{E}_p \mid \mathbf{h}_p(v,v) = 1\}.$$

Dicho conjunto es cerrado y acotado en un espacio vectorial normado de dimensión finita, por lo que es compacto. Además, la función $f_p \colon S_p \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f_p(v) = \widetilde{\mathbf{h}}_p(v,v)$, es continua, por lo que alcanza su máximo. Entonces, la función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(p) := \max_{v \in S_p} f_p(v)$$

está bien definida. Probemos su continuidad identificando las esferas de fibras cercanas con una esfera fija. En una vecindad $U$ de cualquier punto $p_* \in M$, el proceso de Gram–Schmidt aplicado a un marco suave proporciona un marco $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ ortonormal para $\mathbf{h}$. Si el haz es real ponemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y si es complejo con métricas hermitianas ponemos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Definimos

$$S := \left\{ w \in \mathbb{K}^r \;\middle|\; \sum_{a=1}^{r} |w^a|^2 = 1 \right\}, \qquad F(q,w) := \widetilde{\mathbf{h}}_q \left( \sum_{a=1}^{r} w^a \mathbf{e}_a(q), \sum_{a=1}^{r} w^a \mathbf{e}_a(q) \right).$$

Para $q \in U$, el mapeo $w \mapsto \sum_{a=1}^{r} w^a \mathbf{e}_a(q)$ identifica $S$ con $S_q$. Por ello $f(q) = \max_{w \in S} F(q,w)$. Sean $H_{ab}(q) = \widetilde{\mathbf{h}}_q(\mathbf{e}_a(q), \mathbf{e}_b(q))$ los coeficientes continuos de la segunda métrica en ese marco. La desigualdad de Cauchy–Schwarz da $\sum_{a=1}^{r} |w^a| \leq \sqrt{r}$ para $w \in S$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \sup_{w \in S} |F(q,w) - F(p_*,w)| &\leq \max_{1 \leq a,b \leq r} |H_{ab}(q) - H_{ab}(p_*)| \sup_{w \in S} \left( \sum_{a=1}^{r} |w^a| \right)^2 \\ &\leq r \max_{1 \leq a,b \leq r} |H_{ab}(q) - H_{ab}(p_*)| \longrightarrow 0 \qquad (q \to p_*). \end{aligned}$$

Si dos funciones sobre $S$ difieren a lo sumo en $\varepsilon$ en cada punto, sus máximos difieren a lo sumo en $\varepsilon$: se usa primero $F(q,w) \leq F(p_*,w) + \varepsilon$ y después la desigualdad con los dos puntos intercambiados. Así,

$$|f(q) - f(p_*)| \leq \sup_{w \in S} |F(q,w) - F(p_*,w)|,$$

lo que prueba la continuidad de $f$ en $p_*$. Como el punto era arbitrario, $f$ es continua en $M$. La compacidad

de $K$ proporciona $p_0 \in K$ tal que $f(p) \leq f(p_0) =: C$ para todo $p \in K$.
Además,

$$C = f(p_0) = \max_{v \in S_{p_0}} \widetilde{\mathbf{h}}_{p_0}(v, v) > 0,$$

pues $v \neq 0$ para toda $v \in S_{p_0}$. Entonces, para todo $p \in K$ y todo $v \in S_p$ se tiene

$$\widetilde{\mathbf{h}}_p(v, v) \leq C.$$

Definamos $m(p) := \min_{v \in S_p} \widetilde{\mathbf{h}}_p(v, v)$. En el marco anterior, $m(q) = \min_{w \in S} F(q, w)$. Las mismas desigualdades entre $F(q, w)$ y $F(p_*, w)$, tomando ahora mínimos, dan

$$|m(q) - m(p_*)| \leq \sup_{w \in S} |F(q, w) - F(p_*, w)| \longrightarrow 0.$$

Así, $m$ también es continua. Cada $m(p)$ es positivo porque el mínimo se alcanza en un vector no nulo y $\widetilde{\mathbf{h}}_p$ es definida positiva. La compacidad de $K$ implica que $m$ alcanza allí un mínimo, que sigue siendo positivo: $c := \min_{p \in K} m(p) > 0$. Por lo tanto, para todo $p \in K$ y todo $v \in S_p$ se cumple

$$c \leq \widetilde{\mathbf{h}}_p(v, v).$$

Sean ahora $p \in K$ y $v \in \mathbf{E}_p \setminus \{0\}$. Entonces $\dfrac{v}{|v|_{\mathbf{h}_p}} \in S_p$, por lo que

$$c \leq \widetilde{\mathbf{h}}_p\left(\frac{v}{|v|_{\mathbf{h}_p}}, \frac{v}{|v|_{\mathbf{h}_p}}\right) \leq C.$$

Esto implica que

$$c\,|v|^2_{\mathbf{h}_p} \leq \widetilde{\mathbf{h}}_p(v, v) \leq C\,|v|^2_{\mathbf{h}_p},$$

es decir,

$$c\,\mathbf{h}_p(v, v) \leq \widetilde{\mathbf{h}}_p(v, v) \leq C\,\mathbf{h}_p(v, v).$$

El caso $v = 0$ es inmediato, pues todas las cantidades anteriores valen 0. □

Con esto en mente ya estamos listos para demostrar el siguiente lema que nos permitirá trabajar de manera local con estos espacios de Sobolev definidos de manera global e intrínseca. A diferencia de la definición abstracta de $W^{m,p}$, en este lema suponemos que la conexión es compatible con la métrica fibrada, porque la demostración utiliza la forma explícita del adjunto formal obtenida de la fórmula de integración por partes.

**Lema 9.1.44.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera. Sean $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p < \infty$, sea $(U, \varphi)$ una bola coordenada regular en $M$, y sea $\pi_{\mathbf{E}} \colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave real de rango $r$ equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $\mathbf{F} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$ y sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ un marco local de $\mathbf{E}$ definido en una vecindad de $\overline{U}$. Supongamos que $\mathbf{F} = \sum_{a=1}^{r} F^a \mathbf{e}_a$ en $U$. Entonces

$$\mathbf{F} \restriction_U \in W^{m,p}(U, \mathbf{E} \restriction_U) \quad \text{si y sólo si} \quad F^a \circ \varphi^{-1} \in W^{m,p}(\varphi(U))$$

para todo $1 \le a \le r$.
Además, existen constantes $C_m, c_m > 0$ (independientes de $\mathbf{F}$) tales que

$$c_m \sum_{a=1}^{r} \left\| F^a \circ \varphi^{-1} \right\|_{W^{m,p}(\varphi(U))} \le \|\mathbf{F}\|_{W^{m,p}(U,\mathbf{E}\restriction_U)} \le C_m \sum_{a=1}^{r} \left\| F^a \circ \varphi^{-1} \right\|_{W^{m,p}(\varphi(U))}$$

para todo $\mathbf{F} \in W^{m,p}(U, \mathbf{E}\restriction_U)$.

*Demostración.* El caso $m = 0$ se sigue directamente de la equivalencia uniforme de las normas en las fibras sobre el compacto $\overline{U}$ y de la equivalencia de los elementos de volumen. Supongamos, pues, que $m \ge 1$. Fijemos $s \ge 1$ y denotemos por $I_s = (i_1, \dots, i_s)$, $J_s = (j_1, \dots, j_s)$, etc., las tuplas ordenadas o bloques de índices en $\{1, \dots, n\}$. Adoptamos la convención de suma de Einstein para estos bloques. Definimos

$$\partial_{I_s} := \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_s}, \quad g^{I_s J_s} := \prod_{l=1}^{s} g^{i_l j_l}, \quad g_{J_s T_s} := \prod_{l=1}^{s} g_{j_l t_l}.$$

Además, sea $\beta_{I_s} \in \mathbb{N}_0^n$ el multiíndice asociado al bloque $I_s$ tal que $\partial^{\beta_{I_s}} \equiv \partial_{I_s}$.
Como $\nabla^{\mathbf{E}}$ es compatible con $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, podemos usar la expresión del adjunto obtenida en el Corolario 9.1.32. Pongamos $h_{ab} := \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)$ y $(h^{ab}) := (h_{ab})^{-1}$. Escrita en el marco elegido y separando el término principal de los términos de orden inferior, esa fórmula da

$$\left((\nabla^s)^* \mathbf{\Psi}\right)^a = (-1)^s \frac{h^{ab}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_{I_s} \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} h_{bc} g^{I_s J_s} \Psi^c_{J_s} \right) + \sum_{|\beta| \le s-1} (Q_\beta)_c^{a J_s} \partial^\beta \Psi^c_{J_s},$$

con coeficientes suaves $Q_\beta$; los índices de fibra $b, c$ recorren $\{1, \dots, r\}$. Los factores métricos aparecen al escribir ambos productos internos en componentes antes de integrar por partes. Al desarrollar por Leibniz y usar $h^{ab} h_{bc} = \delta^a_c$, el término de orden $s$ es $(-1)^s g^{I_s J_s} \partial_{I_s} \Psi^a_{J_s}$. Todos los restantes tienen orden a lo más $s-1$. Introducir $\sqrt{\det(\mathbf{g})}$ dentro de la derivada principal sólo modifica términos de ese orden inferior. Así, la expresión local usada a continuación tiene el término principal indicado y coeficientes suaves $D_\beta$ de orden inferior; la compatibilidad métrica es precisamente la hipótesis que permite identificar el adjunto formal con la fórmula del Corolario 9.1.32.

*(⇒)* Supongamos primero que $\mathbf{F}\restriction_U \in W^{m,p}(U, \mathbf{E}\restriction_U)$. Entonces, para cada $s \le m$, existe la $s$-ésima derivada covariante débil de $\mathbf{F}\restriction_U$, digamos $\mathbf{G} \in L^p\left(U, T^{(0,s)}(TU) \otimes \mathbf{E}\restriction_U\right)$. Por definición, para todo $\mathbf{\Psi} \in \Gamma_c\left(T^{(0,s)}(TU) \otimes \mathbf{E}\restriction_U\right)$ se cumple

$$\int_U \langle \mathbf{F}, (\nabla^s)^* \mathbf{\Psi} \rangle_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_U \langle \mathbf{G}, \mathbf{\Psi} \rangle_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

En coordenadas locales, escribiendo $\mathbf{F} = F^a \mathbf{e}_a$ y $\mathbf{\Psi} = \Psi^c_{J_s} \mathbf{d}x^{J_s} \otimes \mathbf{e}_c$, esta identidad se lee

$$\int_U h_{bc} F^b \left((\nabla^s)^* \mathbf{\Psi}\right)^c d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_U g^{I_s J_s} h_{bc} G^b_{I_s} \Psi^c_{J_s} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Fijemos ahora un bloque objetivo $T_s = (t_1, \dots, t_s)$ y un índice de fibra $a$ fijo. Dada $\psi \in C_c^\infty(\varphi(U))$, definimos

el campo tensorial de prueba $\boldsymbol{\Psi}$ por sus componentes:

$$\Psi^c_{J_s} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}\, h^{ca}\, g_{J_s T_s}\, (\psi \circ \varphi). \tag{9.35}$$

El abierto coordenado $U$, considerado como variedad, no tiene frontera, y las secciones de prueba poseen soporte compacto en él. Por lo tanto, el Teorema 8.2.3, en la forma local descrita al comienzo de esta prueba, se aplica en $U$ y el adjunto formal actúa sobre $\boldsymbol{\Psi}$ como

$$\left((\nabla^s)^*\boldsymbol{\Psi}\right)^c = (-1)^s \left[ \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_{I_s} \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} g^{I_s J_s} \Psi^c_{J_s} \right) + \sum_{|\beta| \le s-1} \left(D_\beta\right)^{cJ_s}_{d} \partial^\beta \Psi^d_{J_s} \right].$$

Sustituyendo (9.35) en esta expresión y usando que $\dfrac{\sqrt{\det(\mathbf{g})}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} = 1$, $g^{I_s J_s} g_{J_s T_s} = \delta^{I_s}_{T_s}$, obtenemos

$$\left((\nabla^s)^*\boldsymbol{\Psi}\right)^c = (-1)^s \left[ \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_{T_s} \left( h^{ca} (\psi \circ \varphi) \right) + \sum_{|\beta| \le s-1} \left(D_\beta\right)^{cJ_s}_{d} \partial^\beta \left( \frac{h^{da} g_{J_s T_s}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} (\psi \circ \varphi) \right) \right].$$

Sean $I_1 := \displaystyle\int_U \langle \mathbf{F}, (\nabla^s)^*\boldsymbol{\Psi} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$ e $I_2 := \displaystyle\int_U \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\Psi} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$. Al sustituir (9.35) en $I_2$ y notar que $g^{I_s J_s} g_{J_s T_s} = \delta^{I_s}_{T_s}$, obtenemos

$$I_2 = \int_U \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \delta^{I_s}_{T_s} \delta^a_b G^b_{I_s} (\psi \circ \varphi)\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\varphi(U)} (G^a_{T_s} \circ \varphi^{-1}) \psi\, d\lambda_n. \tag{9.36}$$

Para $I_1$, usamos la fórmula de Leibniz en $\partial_{T_s}$:

$$\partial_{T_s} \left( h^{ca} (\psi \circ \varphi) \right) = h^{ca} \partial_{T_s} (\psi \circ \varphi) + \sum_{\alpha < \beta_{T_s}} \binom{\beta_{T_s}}{\alpha} \partial^\alpha (\psi \circ \varphi) \partial^{\beta_{T_s} - \alpha} \left( h^{ca} \right).$$

Al sustituir de nuevo en la integral $I_1$ se obtiene

$$I_1 = (-1)^s \int_U \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} F^a \partial_{T_s} (\psi \circ \varphi)\, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

$$+ (-1)^s \sum_{\alpha < \beta_{T_s}} \int_U \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} h_{bc} F^b \binom{\beta_{T_s}}{\alpha} \partial^\alpha (\psi \circ \varphi) \partial^{\beta_{T_s} - \alpha} \left( h^{ca} \right) d\lambda_{\mathbf{g}}$$

$$+ \sum_{|\beta| \le s-1} (-1)^s \int_U h_{bc} F^b \left(D_\beta\right)^{cJ_s}_{d} \partial^\beta \left( \frac{h^{da} g_{J_s T_s}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} (\psi \circ \varphi) \right) d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Procedemos ahora por inducción sobre $s$. Para $s = 1$, tenemos $T_1 = (t_1)$, $J_1 = (j_1)$, por lo que la expresión se reduce a

$$I_1 = -\int_{\varphi(U)} (F^a \circ \varphi^{-1}) \partial_{t_1} \psi\, d\lambda_n - \int_{\varphi(U)} ((h_{bc} F^b) \circ \varphi^{-1}) \partial_{t_1} \left( h^{ca} \circ \varphi^{-1} \right) \psi\, d\lambda_n$$

$$- \int_{\varphi(U)} \left( \left( h_{bc} F^b (D_0)^{cj_1}_{d} h^{da} g_{j_1 t_1} \right) \circ \varphi^{-1} \right) \psi\, d\lambda_n.$$

Definimos

$$H^a_{t_1} := h_{bc} F^b \partial_{t_1} \left( h^{ca} \right) + h_{bc} F^b (D_0)^{cj_1}_{d} h^{da} g_{j_1 t_1}.$$

Como $\mathbf{F}\restriction_U \in W^{m,p}(U, \mathbf{E}\restriction_U)$ implica que $F^b \circ \varphi^{-1} \in L^p(\varphi(U))$, y los coeficientes de la métrica son suaves en el compacto $\overline{\varphi(U)}$, se sigue que $H^a_{t_1} \circ \varphi^{-1} \in L^p(\varphi(U))$. Como $I_1 = I_2$, obtenemos

$$-\int_{\varphi(U)} (F^a \circ \varphi^{-1}) \partial_{t_1} \psi \, d\lambda_n = \int_{\varphi(U)} \left( (G^a_{t_1} \circ \varphi^{-1}) + (H^a_{t_1} \circ \varphi^{-1}) \right) \psi \, d\lambda_n,$$

lo cual muestra que $F^a \circ \varphi^{-1} \in W^{1,p}(\varphi(U))$.

Supongamos ahora que la afirmación es válida hasta orden $s-1$ para $s \leq m$. La hipótesis de inducción garantiza que las componentes de $\mathbf{F}$ en $U$ tienen derivadas débiles de orden $\leq s-1$, de modo que podemos integrar por partes en el sentido débil en los términos de orden inferior.

Primero, consideremos los términos que provienen del desarrollo de Leibniz en $I_1$:

$$(-1)^s \sum_{\alpha < \beta_{T_s}} \int_U \frac{h_{bc} F^b}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \binom{\beta_{T_s}}{\alpha} \partial^\alpha (\psi \circ \varphi) \partial^{\beta_{T_s} - \alpha} (h^{ca}) \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

$$= (-1)^s \sum_{\alpha < \beta_{T_s}} \int_{\varphi(U)} \left[ \left( h_{bc} F^b \binom{\beta_{T_s}}{\alpha} \partial^{\beta_{T_s} - \alpha} (h^{ca}) \right) \circ \varphi^{-1} \right] \partial^\alpha \psi \, d\lambda_n.$$

Como $|\alpha| < |\beta_{I_s}| = s$, tenemos $|\alpha| \leq s-1$. Al integrar por partes (en el sentido débil) $|\alpha|$ veces, trasladamos las derivadas de $\psi$ al coeficiente (que involucra a $F^b$), por lo que el término anterior es igual a

$$\sum_{\alpha < \beta_{T_s}} (-1)^{s+|\alpha|} \int_{\varphi(U)} \partial^\alpha \left[ \left( h_{bc} F^b \binom{\beta_{T_s}}{\alpha} \partial^{\beta_{T_s} - \alpha} (h^{ca}) \right) \circ \varphi^{-1} \right] \psi \, d\lambda_n.$$

En segundo lugar, consideremos los términos en $I_1$ que involucran los coeficientes de conexión $(D_\beta)$. Usando el mismo cambio de variables y recordando que $|\beta| \leq s-1$, obtenemos

$$\sum_{|\beta| \leq s-1} (-1)^s \int_U h_{bc} F^b (D_\beta)^{cJ_s}_d \partial^\beta \left( \frac{h^{da} g_{J_s T_s}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} (\psi \circ \varphi) \right) d\lambda_{\mathbf{g}}$$

$$= (-1)^s \sum_{|\beta| \leq s-1} \int_{\varphi(U)} \left[ \left( h_{bc} F^b (D_\beta)^{cJ_s}_d \sqrt{\det(\mathbf{g})} \right) \circ \varphi^{-1} \right] \partial^\beta \left( \left( \frac{h^{da} g_{J_s T_s}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \circ \varphi^{-1} \right) \psi \right) d\lambda_n.$$

Al integrar por partes $|\beta|$ veces, obtenemos

$$= (-1)^s \sum_{|\beta| \leq s-1} (-1)^{|\beta|} \int_{\varphi(U)} \partial^\beta \left[ \left( h_{bc} F^b (D_\beta)^{cJ_s}_d \sqrt{\det(\mathbf{g})} \right) \circ \varphi^{-1} \right] \left( \frac{h^{da} g_{J_s T_s}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \circ \varphi^{-1} \right) \psi \, d\lambda_n.$$

Definimos ahora $\widetilde{G}^a_{T_s}$ en $\varphi(U)$ agrupando $G^a_{T_s} \circ \varphi^{-1}$ (que proviene de la integral $I_2$) y desplazando al segundo miembro los términos calculados arriba a partir de $I_1$ (lo cual introduce un factor extra $-1$, que pasa a $(-1)^{s+1}$):

$$\widetilde{G}^a_{T_s} := G^a_{T_s} \circ \varphi^{-1} + \sum_{\alpha < \beta_{T_s}} (-1)^{s+1+|\alpha|} \partial^\alpha \left[ \left( h_{bc} F^b \binom{\beta_{T_s}}{\alpha} \partial^{\beta_{T_s} - \alpha} (h^{ca}) \right) \circ \varphi^{-1} \right]$$

$$+ \sum_{|\beta| \leq s-1} (-1)^{s+1+|\beta|} \partial^\beta \left[ \left( h_{bc} F^b (D_\beta)^{cJ_s}_d \sqrt{\det(\mathbf{g})} \right) \circ \varphi^{-1} \right] \left( \frac{h^{da} g_{J_s T_s}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \circ \varphi^{-1} \right).$$

La hipótesis de inducción afirma que $F^b \circ \varphi^{-1} \in W^{s-1,p}(\varphi(U))$ para todo $b \in \{1,\dots,r\}$. Como $\widetilde{G}^a_{T_s}$ está formada por funciones suaves y acotadas (definidas en $\overline{\varphi(U)}$) y derivadas débiles de $F^b \circ \varphi^{-1}$ de orden a lo sumo $s-1$, concluimos que $\widetilde{G}^a_{T_s} \in L^p(\varphi(U))$. Usando la igualdad $I_1 = I_2$ y la definición de $\widetilde{G}$, obtenemos

$$(-1)^s \int_{\varphi(U)} (F^a \circ \varphi^{-1}) \partial_{T_s} \psi \, d\lambda_n = \int_{\varphi(U)} \widetilde{G}^a_{T_s} \psi \, d\lambda_n.$$

Esto muestra que $F^a \circ \varphi^{-1}$ posee una derivada débil $\partial_{T_s}(F^a \circ \varphi^{-1}) = \widetilde{G}^a_{T_s} \in L^p(\varphi(U))$. Por lo tanto, $F^a \circ \varphi^{-1} \in W^{s,p}(\varphi(U))$.
Como $s \le m$ era arbitrario, concluimos que $F^a \circ \varphi^{-1} \in W^{m,p}(\varphi(U))$ para todo $a \in \{1,\dots,r\}$.

*($\Leftarrow$)* Supongamos ahora que $F^a \circ \varphi^{-1} \in W^{m,p}(\varphi(U))$ para todo $a \in \{1,\dots,r\}$. Fijemos un $s \le m$ y tomemos $\boldsymbol{\Psi} \in \Gamma_c\big(T^{(0,s)}(TU) \otimes \mathbf{E} \restriction_U\big)$. Tenemos que

$$\int_U \langle \mathbf{F}, (\nabla^s)^* \boldsymbol{\Psi} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_U h_{ab} F^a \big((\nabla^s)^* \boldsymbol{\Psi}\big)^b \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por la expresión local del adjunto formal justificada al comienzo de esta prueba, en coordenadas el adjunto tiene la forma

$$\big((\nabla^s)^* \boldsymbol{\Psi}\big)^b = (-1)^s \left[ \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_{I_s} \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} g^{I_s J_s} \Psi^b_{J_s} \right) + \sum_{|\beta| \le s-1} \big(D_\beta\big)^{b J_s}_c \, \partial^\beta \Psi^c_{J_s} \right].$$

Entonces la integral puede escribirse como suma de dos términos, $I_1$ e $I_2$. Desarrollando la expresión en coordenadas, obtenemos

$$\int_U \langle \mathbf{F}, (\nabla^s)^* \boldsymbol{\Psi} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \underbrace{(-1)^s \int_U h_{ab} F^a \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \partial_{I_s} \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} g^{I_s J_s} \Psi^b_{J_s} \right) d\lambda_{\mathbf{g}}}_{I_1}$$

$$\underbrace{+ (-1)^s \sum_{|\beta| \le s-1} \int_U h_{ab} F^a \big(D_\beta\big)^{b J_s}_c \, \partial^\beta \Psi^c_{J_s} \, d\lambda_{\mathbf{g}}}_{I_2}.$$

Al cambiar el dominio de integración a $\varphi(U)$ y escribir explícitamente las composiciones, se obtiene

$$I_1 = (-1)^s \int_{\varphi(U)} \left[ (h_{ab} F^a) \circ \varphi^{-1} \right] \partial_{I_s} \left( \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} g^{I_s J_s} \Psi^b_{J_s} \right) \circ \varphi^{-1} \right) d\lambda_n,$$

$$I_2 = (-1)^s \sum_{|\beta| \le s-1} \int_{\varphi(U)} \left[ \left( h_{ab} F^a (D_\beta)^{b J_s}_c \sqrt{\det(\mathbf{g})} \right) \circ \varphi^{-1} \right] \partial^\beta (\Psi^c_{J_s} \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda_n.$$

Ahora integramos por partes en el sentido débil en $I_1$ (lo cual es válido porque $F^a \circ \varphi^{-1} \in W^{m,p}(\varphi(U))$ y $s \le m$):

$$I_1 = \int_{\varphi(U)} \partial_{I_s} \left[ \left( h_{ab} \circ \varphi^{-1} \right) (F^a \circ \varphi^{-1}) \right] \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} g^{I_s J_s} \Psi^b_{J_s} \circ \varphi^{-1} \right) d\lambda_n.$$

Aplicando la regla de Leibniz al término entre corchetes, obtenemos

$$I_1 = \int_{\varphi(U)} \left[ \left( h_{ab} g^{I_s J_s} \sqrt{\det(\mathbf{g})} \circ \varphi^{-1} \right) \partial_{I_s} (F^a \circ \varphi^{-1}) \right] (\Psi^b_{J_s} \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda_n$$

$$+ \int_{\varphi(U)} \left[ \sum_{\substack{I_s \\ \alpha < \beta_{I_s}}} \binom{\beta_{I_s}}{\alpha} \partial^{\beta_{I_s} - \alpha} \left( h_{ab} \circ \varphi^{-1} \right) \partial^{\alpha} (F^a \circ \varphi^{-1}) \left( \left( g^{I_s J_s} \sqrt{\det(\mathbf{g})} \Psi^b_{J_s} \right) \circ \varphi^{-1} \right) \right] d\lambda_n.$$

Definimos las funciones coeficientes $(B_\gamma)_{ab I_s}$ en $\varphi(U)$ para cada $|\gamma| \leq s-1$ como

$$(B_\gamma)^{J_s}_{ab} := \sum_{\substack{I_s \\ \gamma < \beta_{I_s}}} \binom{\beta_{I_s}}{\gamma} \partial^{\beta_{I_s} - \gamma} \left( h_{ab} \circ \varphi^{-1} \right) \left( \left( g^{I_s J_s} \sqrt{\det(\mathbf{g})} \right) \circ \varphi^{-1} \right).$$

Sustituyendo esta definición en $I_1$, obtenemos

$$I_1 = \int_{\varphi(U)} \left[ \left( h_{ab} g^{I_s J_s} \sqrt{\det(\mathbf{g})} \circ \varphi^{-1} \right) \partial_{I_s} (F^a \circ \varphi^{-1}) + \sum_{|\gamma| \leq s-1} (B_\gamma)^{J_s}_{ab} \partial^{\gamma} (F^a \circ \varphi^{-1}) \right] (\Psi^b_{J_s} \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda_n.$$

Para $I_2$, al integrar por partes $|\beta|$ veces obtenemos

$$I_2 = \sum_{|\beta| \leq s-1} (-1)^{s+|\beta|} \int_{\varphi(U)} \partial^{\beta} \left[ \left( \left( h_{ab} (D_\beta)^{b J_s}_{c} \sqrt{\det(\mathbf{g})} \right) \circ \varphi^{-1} \right) (F^a \circ \varphi^{-1}) \right] (\Psi^c_{J_s} \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda_n.$$

Aplicando de nuevo la regla de Leibniz para expandir la derivada $\partial^\beta$ del producto, se obtiene

$$I_2 = \int_{\varphi(U)} \sum_{|\beta| \leq s-1} (-1)^{s+|\beta|} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^{\beta - \gamma} \left( \left( h_{ab} (D_\beta)^{b J_s}_{c} \sqrt{\det(\mathbf{g})} \right) \circ \varphi^{-1} \right) \partial^{\gamma} (F^a \circ \varphi^{-1}) (\Psi^c_{J_s} \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda_n.$$

Definimos las funciones coeficientes $(C_\gamma)^{J_s}_{ac}$ en $\varphi(U)$ para cada $|\gamma| \leq s-1$ como

$$(C_\gamma)^{J_s}_{ac} := \sum_{\substack{|\beta| \leq s-1 \\ \gamma \leq \beta}} (-1)^{s+|\beta|} \binom{\beta}{\gamma} \partial^{\beta - \gamma} \left( \left( h_{ab} (D_\beta)^{b J_s}_{c} \sqrt{\det(\mathbf{g})} \right) \circ \varphi^{-1} \right).$$

Sustituyendo esta definición en $I_2$, obtenemos

$$I_2 = \int_{\varphi(U)} \sum_{|\gamma| \leq s-1} (C_\gamma)^{J_s}_{ac} \partial^{\gamma} (F^a \circ \varphi^{-1}) (\Psi^c_{J_s} \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda_n.$$

Combinamos ahora ambos resultados. Para unificar la notación, en $I_1$ renombramos el índice de fibra $b \to c$ (y usamos $h_{ac}$). De esta forma,

$$\int_U \langle \mathbf{F}, (\nabla^s)^* \mathbf{\Psi} \rangle \, d\lambda_{\mathbf{g}} =$$

$$\int_{\varphi(U)} \left[ \left( h_{ac} g^{I_s J_s} \sqrt{\det(\mathbf{g})} \circ \varphi^{-1} \right) \partial_{I_s} (F^a \circ \varphi^{-1}) + \sum_{|\gamma| \le s-1} \left( (B_\gamma)^{J_s}_{ac} + (C_\gamma)^{J_s}_{ac} \right) \partial^\gamma (F^a \circ \varphi^{-1}) \right] (\Psi^c_{J_s} \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda_n.$$

Definimos ahora los coeficientes de corrección $(\widehat{D}_\gamma)$ en $U$ haciendo un *pullback* de $B$ y $C$ e invirtiendo los pesos métricos:

$$\left(\widehat{D}_\gamma\right)^a_{b I_s} := \frac{g_{I_s \tilde{J}_s} h^{a\tilde{c}}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \left[ \left( (B_\gamma)^{\tilde{J}_s}_{b\tilde{c}} \circ \varphi \right) + \left( (C_\gamma)^{\tilde{J}_s}_{b\tilde{c}} \circ \varphi \right) \right].$$

Definimos entonces $\mathbf{G} \in L^p(U, T^{(0,s)}(TU) \otimes \mathbf{E} \restriction_U)$ dado en coordenadas por:

$$G^a_{I_s} = \partial_{I_s} F^a + \sum_{|\gamma| \le s-1} \left(\widehat{D}_\gamma\right)^a_{b I_s} \partial^\gamma F^b. \tag{9.37}$$

Veamos que $\mathbf{G}$ es la derivada covariante débil de orden $s$ que buscamos:

$$\int_U \langle \mathbf{G}, \mathbf{\Psi} \rangle_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_\mathbf{E}} \, d\lambda_\mathbf{g} = \int_U h_{ac} g^{I_s J_s} G^a_{I_s} \Psi^c_{J_s} \, d\lambda_\mathbf{g}$$

$$= \int_U h_{ac} g^{I_s J_s} \left( \partial_{I_s} F^a + \sum_{|\gamma| \le s-1} \left(\widehat{D}_\gamma\right)^a_{b I_s} \partial^\gamma F^b \right) \Psi^c_{J_s} \, d\lambda_\mathbf{g}.$$

El primer término coincide con la parte principal. Para los términos de orden inferior, sustituimos la definición de $\widehat{D}_\gamma$:

$$\int_U \sum_{|\gamma| \le s-1} h_{ac} g^{I_s J_s} \left( \frac{g_{I_s \tilde{J}_s} h^{a\tilde{c}}}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \left[ \left( (B_\gamma)^{\tilde{J}_s}_{b\tilde{c}} \circ \varphi \right) + \left( (C_\gamma)^{\tilde{J}_s}_{b\tilde{c}} \circ \varphi \right) \right] \right) \partial^\gamma F^b \Psi^c_{J_s} \, d\lambda_\mathbf{g}$$

$$= \int_U \sum_{|\gamma| \le s-1} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} (h_{ac} h^{a\tilde{c}}) (g^{I_s J_s} g_{I_s \tilde{J}_s}) \left[ \left( (B_\gamma)^{\tilde{J}_s}_{b\tilde{c}} \circ \varphi \right) + \left( (C_\gamma)^{\tilde{J}_s}_{b\tilde{c}} \circ \varphi \right) \right] \partial^\gamma F^b \Psi^c_{J_s} \, d\lambda_\mathbf{g}.$$

Usando las identidades $h_{ac} h^{a\tilde{c}} = \delta^{\tilde{c}}_c$ y $g^{I_s J_s} g_{I_s \tilde{J}_s} = \delta^{J_s}_{\tilde{J}_s}$, obtenemos

$$= \int_U \sum_{|\gamma| \le s-1} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \left[ \left( (B_\gamma)^{J_s}_{bc} \circ \varphi \right) + \left( (C_\gamma)^{J_s}_{bc} \circ \varphi \right) \right] \partial^\gamma F^b \Psi^c_{J_s} \, d\lambda_\mathbf{g}.$$

$$= \int_{\varphi(U)} \sum_{|\gamma| \le s-1} \left[ (B_\gamma)^{J_s}_{bc} + (C_\gamma)^{J_s}_{bc} \right] \partial^\gamma (F^b \circ \varphi^{-1}) (\Psi^c_{J_s} \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda_n.$$

Esta expresión coincide exactamente con el desarrollo de $\int_U \langle \mathbf{F}, (\nabla^s)^* \mathbf{\Psi} \rangle \, d\lambda_\mathbf{g}$. Por lo tanto, $\mathbf{G}$ es la $s$-ésima derivada covariante débil de $\mathbf{F}$ en $U$. Además, $\mathbf{G} \in L^p(U, T^{(0,s)}(TU) \otimes \mathbf{E} \restriction_U)$, ya que cada componente coordenada es una combinación lineal de derivadas débiles de las componentes de $\mathbf{F}$ (hasta orden $s$) multiplicadas por funciones suaves y acotadas (acotadas en $U$ porque $U$ es una bola coordenada regular). Como $s \le m$ era arbitrario, concluimos que $\mathbf{F} \restriction_U \in W^{m,p}\left(U, \mathbf{E} \restriction_U\right)$.

Finalmente, probamos de manera cuantitativa las dos desigualdades de normas. Pongamos $n := \dim M$,

$\Omega := \varphi(U)$ y $f^a := F^a \circ \varphi^{-1}$ para $a \in \{1,\dots,r\}$. Recordemos que

$$\|\mathbf{F}\|_{W^{m,p}(U,\mathbf{E}\restriction_U)} = \left( \sum_{s=0}^{m} \int_U |\nabla_w^s \mathbf{F}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{1/p}.$$

En orden cero se entiende $\nabla_w^0 \mathbf{F} = \mathbf{F}$.

Definamos la métrica fibrada $\overline{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}$ haciendo ortonormal al marco $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r$. Explícitamente, si $v = \sum_{a=1}^{r} v^a \mathbf{e}_a(x)$ y $w = \sum_{a=1}^{r} w^a \mathbf{e}_a(x)$, ponemos

$$\overline{\mathbf{h}}_{\mathbf{E},x}(v,w) = \sum_{a=1}^{r} v^a w^a.$$

Sea además $\delta := \varphi^* \overline{\mathbf{g}}$, donde $\overline{\mathbf{g}}$ es la métrica euclidiana en $\Omega$. La carta y el marco están definidos en una vecindad de $\overline{U}$, por lo que también lo están estas métricas auxiliares. Para cada $q \in \{0,\dots,m\}$ definimos

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathrm{aux},q,p} := \left( \sum_{s=0}^{q} \int_U |\nabla_w^s \mathbf{F}|^p_{\delta,\overline{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_\delta \right)^{1/p}.$$

Las derivadas covariantes de esta expresión siguen siendo las originales: se han cambiado únicamente la norma fibrada de cada tensor y la medida.

Para cada $s \in \{0,\dots,m\}$ aplicamos el Lema 9.1.43 a las dos métricas inducidas en $T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E}$ sobre el compacto $\overline{U}$. Existen números $a_s, b_s > 0$ tales que, para todo $x \in \overline{U}$ y todo $\mathbf{T} \in T_x^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E}_x$,

$$a_s |\mathbf{T}|_{\delta,\overline{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}} \le |\mathbf{T}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \le b_s |\mathbf{T}|_{\delta,\overline{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}}.$$

Tomando $a_* := \min_{0\le s\le m} a_s > 0$ y $b_* := \max_{0\le s\le m} b_s < \infty$, obtenemos constantes válidas simultáneamente para todos los órdenes considerados. Por otra parte, en las coordenadas de $\varphi$,

$$d\lambda_{\mathbf{g}} = \rho \, d\lambda_\delta, \qquad \rho := \sqrt{\det(\mathbf{g})}.$$

La función $\rho$ es suave y estrictamente positiva en una vecindad de $\overline{U}$. Por compacidad existen $\rho_-, \rho_+ > 0$ tales que $\rho_- \le \rho(x) \le \rho_+$ para todo $x \in \overline{U}$. Por tanto, para cada $q \in \{0,\dots,m\}$,

$$\begin{aligned} a_*^p \rho_- \sum_{s=0}^{q} \int_U |\nabla_w^s \mathbf{F}|^p_{\delta,\overline{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_\delta &\le \sum_{s=0}^{q} \int_U |\nabla_w^s \mathbf{F}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \\ &\le b_*^p \rho_+ \sum_{s=0}^{q} \int_U |\nabla_w^s \mathbf{F}|^p_{\delta,\overline{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_\delta. \end{aligned}$$

Con $c := a_* \rho_-^{1/p}$ y $C := b_* \rho_+^{1/p}$, al tomar raíces $p$-ésimas y particularizar en $q = m$, resulta

$$c\|\mathbf{F}\|_{\mathrm{aux},m,p} \le \|\mathbf{F}\|_{W^{m,p}(U,\mathbf{E}\restriction_U)} \le C\|\mathbf{F}\|_{\mathrm{aux},m,p}. \tag{9.38}$$

La misma comparación vale en cada orden $q \le m$ con estas constantes.

Pasemos ahora de las derivadas covariantes a las derivadas parciales. Para $s \in \{1,\dots,m\}$ escribimos $\mathcal{I}_s :=$

$\{1,\dots,n\}^s$; sus elementos son bloques ordenados $I_s = (i_1,\dots,i_s)$. Para $s=0$ ponemos $\mathcal{I}_0 := \{\varnothing\}$ y $\partial_\varnothing f^a := f^a$. La fórmula (9.37) se escribe

$$\big((\nabla_w^s \mathbf{F})^a_{I_s}\big)\circ\varphi^{-1} = \partial_{I_s} f^a + \sum_{b=1}^{r} \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^n \\ |\gamma|\le s-1}} A^{abI_s}_{s,\gamma}\, \partial^\gamma f^b, \tag{9.39}$$

donde

$$A^{abI_s}_{s,\gamma} := \big((\widehat{D}_\gamma)^a_{bI_s}\big)\circ\varphi^{-1}.$$

Cada coeficiente se prolonga suavemente a una vecindad de $\overline{\Omega}$ y, en particular, pertenece a $L^\infty(\Omega)$. Si $m\ge 1$, definimos

$$K := \max_{\substack{1\le s\le m,\ 1\le a,b\le r \\ I_s\in\mathcal{I}_s,\ \gamma\in\mathbb{N}_0^n,\ |\gamma|\le s-1}} \|A^{abI_s}_{s,\gamma}\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

El máximo contiene un número finito de coeficientes. Si $m=0$, ponemos $K:=0$, pues no hay términos de orden inferior.

Denotemos por

$$G^a_{s,I_s} := \big((\nabla_w^s \mathbf{F})^a_{I_s}\big)\circ\varphi^{-1}, \qquad Q_s := \left(\sum_{a=1}^{r}\sum_{I_s\in\mathcal{I}_s} |G^a_{s,I_s}|^2\right)^{1/2}.$$

En particular, $G^a_{0,\varnothing} = f^a$. Los tensores del marco coordenado, junto con el marco $\mathbf{e}_a$, son ortonormales para las métricas auxiliares. Además, $\varphi_*\lambda_\delta = \lambda_n$. Estas dos observaciones dan las igualdades exactas

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}\|_{\mathrm{aux},m,p} &= \left(\sum_{s=0}^{m}\int_\Omega Q_s(x)^p\, d\lambda_n(x)\right)^{1/p} \\ &= \left[\sum_{s=0}^{m}\int_\Omega \left(\sum_{a=1}^{r}\sum_{I_s\in\mathcal{I}_s}\left|\partial_{I_s} f^a + \sum_{b=1}^{r}\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^n\\|\gamma|\le s-1}} A^{abI_s}_{s,\gamma}\partial^\gamma f^b\right|^2\right)^{p/2} d\lambda_n\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

En el sumando $s=0$, la suma interior de términos de orden inferior es cero y la expresión entre barras es simplemente $f^a$.

Para la cota superior, fijemos $s\in\{1,\dots,m\}$. La desigualdad $|A+B|^2\le 2|A|^2+2|B|^2$ y la cota de los coeficientes

por $K$ implican, casi en todo punto de $\Omega$,

$$\begin{aligned} Q_s^2 &\le 2\sum_{a=1}^{r}\sum_{I_s\in\mathcal{I}_s}|\partial_{I_s}f^a|^2 \\ &\quad + 2rn^sK^2\left(\sum_{b=1}^{r}\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^n\\ |\gamma|\le s-1}}|\partial^\gamma f^b|\right)^2 \\ &= 2\sum_{a=1}^{r}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=s}}\frac{s!}{\alpha!}|\partial^\alpha f^a|^2 + 2rn^sK^2\left(\sum_{b=1}^{r}\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^n\\ |\gamma|\le s-1}}|\partial^\gamma f^b|\right)^2. \end{aligned}$$

El factor $rn^s$ cuenta los pares $(a, I_s)$. El factor $s!/\alpha!$ cuenta los bloques ordenados que producen una misma derivada $\partial^\alpha$; las derivadas distribucionales parciales conmutan, por lo que esta agrupación también es válida para las derivadas débiles. Como $s!/\alpha! \le s!$ y la norma euclidiana de una familia finita es a lo más la suma de los valores absolutos de sus componentes, se sigue que

$$Q_s \le \sqrt{2}\left(\sqrt{s!} + \sqrt{rn^s}\,K\right)\sum_{b=1}^{r}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\ |\beta|\le m}}|\partial^\beta f^b|.$$

En orden cero vale la misma cota con el factor 1. Pongamos

$$B_0 := 1, \qquad B_s := \sqrt{2}\left(\sqrt{s!} + \sqrt{rn^s}\,K\right)\ (1 \le s \le m), \qquad B := \max_{0\le s\le m} B_s.$$

Hay $N_m := \binom{n+m}{m}$ multiíndices de orden a lo más $m$. Aplicando la desigualdad finita

$$\left(\sum_{j=1}^{N} t_j\right)^p \le N^{p-1}\sum_{j=1}^{N} t_j^p \qquad (t_j \ge 0,\ N \in \mathbb{N}),$$

con $N = rN_m$, y usando después la definición de la norma euclidiana de Sobolev, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\|_{\mathrm{aux},m,p}^p &\le (m+1)B^p(rN_m)^{p-1}\sum_{a=1}^{r}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\ |\beta|\le m}}\int_\Omega |\partial^\beta f^a|^p\, d\lambda_n \\ &= (m+1)B^p(rN_m)^{p-1}\sum_{a=1}^{r}\|f^a\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Así, con $C_{\mathrm{aux},m} := (m+1)^{1/p}B(rN_m)^{1-1/p}$, al tomar raíces y usar $(\sum_{a=1}^{r} t_a^p)^{1/p} \le \sum_{a=1}^{r} t_a$, resulta

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathrm{aux},m,p} \le C_{\mathrm{aux},m}\sum_{a=1}^{r}\|f^a\|_{W^{m,p}(\Omega)}. \tag{9.40}$$

Para la cota inferior procedemos por inducción en el orden. Escribamos, para $q \in \{0,\dots,m\}$,

$$S_q := \sum_{a=1}^{r} \|f^a\|_{W^{q,p}(\Omega)}, \qquad U_q := \|\mathbf{F}\|_{\mathrm{aux},q,p}.$$

La afirmación inductiva es que existen $K_q > 0$, independientes de $\mathbf{F}$, tales que

$$S_q \le K_q U_q. \tag{9.41}$$

Para $q = 0$, la desigualdad puntual $|f^a| \le Q_0$ da $\|f^a\|_{L^p(\Omega)} \le U_0$ para cada $a \in \{1,\dots,r\}$. Al sumar obtenemos $S_0 \le rU_0$, de modo que podemos tomar $K_0 := r$.

Supongamos probado el resultado para $q = s-1$, con $1 \le s \le m$. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| = s$, elegimos un bloque $I(\alpha) \in \mathcal{I}_s$ que contenga $\alpha_j$ veces el índice $j$ para cada $j \in \{1,\dots,n\}$. Despejando en (9.39), tenemos

$$\partial^\alpha f^a = G^a_{s,I(\alpha)} - \sum_{b=1}^{r} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}_0^n \\ |\gamma| \le s-1}} A^{abI(\alpha)}_{s,\gamma} \partial^\gamma f^b.$$

Puesto que $|G^a_{s,I(\alpha)}| \le Q_s$, la desigualdad triangular en $L^p(\Omega)$ y la estimación de los multiplicadores acotados dan

$$\|\partial^\alpha f^a\|_{L^p(\Omega)} \le U_s + K \sum_{b=1}^{r} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}_0^n \\ |\gamma| \le s-1}} \|\partial^\gamma f^b\|_{L^p(\Omega)}.$$

Para cada componente $b$, la desigualdad de Hölder para la suma finita de sus $N_{s-1} = \binom{n+s-1}{s-1}$ derivadas proporciona

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}_0^n \\ |\gamma| \le s-1}} \|\partial^\gamma f^b\|_{L^p(\Omega)} &\le N_{s-1}^{1-1/p} \left( \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}_0^n \\ |\gamma| \le s-1}} \|\partial^\gamma f^b\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \\ &= N_{s-1}^{1-1/p} \|f^b\|_{W^{s-1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Para $p = 1$ esta desigualdad es una igualdad. Hay $d_s := \binom{n+s-1}{s}$ multiíndices de orden exactamente $s$. Por tanto, al sumar la cota anterior sobre las $r$ componentes y estos $d_s$ multiíndices,

$$\sum_{a=1}^{r} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = s}} \|\partial^\alpha f^a\|_{L^p(\Omega)} \le r d_s U_s + r d_s K N_{s-1}^{1-1/p} S_{s-1}.$$

La definición de la norma de Sobolev implica asimismo

$$\begin{aligned} S_s &\le S_{s-1} + \sum_{a=1}^{r} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = s}} \|\partial^\alpha f^a\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le r d_s U_s + \left(1 + r d_s K N_{s-1}^{1-1/p}\right) S_{s-1}. \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva, $S_{s-1} \le K_{s-1} U_{s-1} \le K_{s-1} U_s$; la segunda desigualdad se debe a que la norma auxiliar

de orden $s$ contiene todos los términos de la de orden $s-1$. En consecuencia, (9.41) vale para $q=s$ con

$$K_s := rd_s + \big(1 + rd_s K N_{s-1}^{1-1/p}\big) K_{s-1}.$$

La inducción llega hasta $s=m$ y demuestra

$$K_m^{-1} \sum_{a=1}^{r} \|f^a\|_{W^{m,p}(\Omega)} \le \|\mathbf{F}\|_{\mathrm{aux},m,p}. \tag{9.42}$$

Finalmente, combinamos (9.40), (9.42) y (9.38). Tomando $c_m := c/K_m$ y $C_m := CC_{\mathrm{aux},m}$, obtenemos

$$c_m \sum_{a=1}^{r} \|F^a \circ \varphi^{-1}\|_{W^{m,p}(\varphi(U))} \le \|\mathbf{F}\|_{W^{m,p}(U,\mathbf{E}\restriction_U)},$$

$$\|\mathbf{F}\|_{W^{m,p}(U,\mathbf{E}\restriction_U)} \le C_m \sum_{a=1}^{r} \|F^a \circ \varphi^{-1}\|_{W^{m,p}(\varphi(U))}.$$

Las constantes dependen de $m,p,n,r$, de la carta y del marco fijados, de las cotas de comparación de las métricas y del volumen sobre $\overline{U}$, y de las normas $L^\infty(\Omega)$ de los coeficientes que aparecen hasta orden $m$. Ninguna de ellas depende de $\mathbf{F}$. El argumento incluye $m=0$ con las convenciones indicadas y no utiliza una aproximación por secciones suaves.

□

Antes de formular el resultado para secciones, recordemos la versión euclidiana que se utilizará en las trivializaciones locales.

**Definición 9.1.45.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, sea $m \in \mathbb{N}_0$ y sea $1 \le p < \infty$. Definimos $C^{m,p}(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty\}$ y denotamos por $H^{m,p}(\Omega)$ su completación respecto de la norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

**Teorema 9.1.46.** (Meyers–Serrin) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \le p < \infty$. Entonces $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$.

La prueba puede consultarse en [102, 1].

### 9.1.6 El teorema de aproximación de Meyers–Serrin en haces vectoriales

La versión de Meyers–Serrin para haces compara la definición mediante derivadas covariantes débiles con la completación de secciones suaves. Para formularla, introducimos primero el espacio $H^{m,p}(M,\mathbf{E})$, análogo a la construcción de la Definición 7.1.3.

**Definición 9.1.47.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$, y sean $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \le p < \infty$. Definimos

$$C^{m,p}(M,\mathbf{E}) := \{\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E}) \mid \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} < \infty\},$$

donde $\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} := \left( \sum_{s=0}^{m} \int_M |\nabla^s \mathbf{u}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}$.

Definimos

$$H^{m,p}(M,\mathbf{E}) := \overline{C^{m,p}(M,\mathbf{E})}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}},$$

que es la completación de $C^{m,p}(M,\mathbf{E})$ respecto a la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}$.

Como en el caso euclidiano del Teorema 9.1.46, ambas construcciones coinciden. La igualdad $H = W$ se extiende así de las funciones a las secciones de un haz vectorial.

**Teorema 9.1.48.** (Meyers–Serrin para haces vectoriales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$, y sean $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$H^{m,p}(M,\mathbf{E}) = W^{m,p}(M,\mathbf{E}).$$

*Demostración.* Por la Proposición 1.2.11, existe una cubierta abierta numerable y localmente finita de $M$ formada de bolas coordenadas regulares $(U_\alpha,\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$. Refinándola si es necesario, podemos exigir que $\overline{U_\alpha}$ esté contenida en el dominio de un marco local de $\mathbf{E}$. Tomemos $(\psi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ una partición de la unidad suave subordinada a dicha cubierta.
Ahora consideremos una sección $\mathbf{F} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Podemos escribir

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \psi_\alpha \mathbf{F},$$

donde la suma es localmente finita. Para cada $\alpha$, el producto $\psi_\alpha \mathbf{F} \restriction_{U_\alpha}$ pertenece a $W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})$, ya que $\psi_\alpha$ es suave y tiene soporte compacto contenido en $U_\alpha$.
Fijemos $\alpha$ y trabajemos en la carta $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, junto con uno de esos marcos locales $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$, definido en una vecindad de $\overline{U_\alpha}$. Aplicando el Lema 9.1.44 a $(\psi_\alpha\mathbf{F})\restriction_{U_\alpha}$, obtenemos que para todo índice de fibra $a \in \{1,\dots,r\}$ se cumple

$$\big(\psi_\alpha \mathbf{F}\big)^a \circ \varphi_\alpha^{-1} \in W^{m,p}(\varphi_\alpha(U_\alpha)).$$

Además, existen constantes $C_{m,\alpha} > 0$ tales que, para toda sección $\mathbf{H} \in W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})$,

$$\|\mathbf{H}\|_{W^{m,p}(U_\alpha,\mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})} \leq C_{m,\alpha} \sum_{a=1}^{r} \big\| H^a \circ \varphi_\alpha^{-1} \big\|_{W^{m,p}(\varphi_\alpha(U_\alpha))}.$$

Denotemos $\Omega_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$. El soporte de cada componente $\big(\psi_\alpha\mathbf{F}\big)^a \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es un compacto de $\Omega_\alpha$. El Teorema clásico de Meyers–Serrin en dominios de $\mathbb{R}^n$, Teorema 9.1.46, proporciona aproximantes suaves en $W^{m,p}(\Omega_\alpha)$. Para obtener aproximantes de soporte compacto, elegimos $\chi_\alpha \in C_c^\infty(\Omega_\alpha)$ igual a uno en una vecindad del soporte anterior y multiplicamos por $\chi_\alpha$. La regla de Leibniz muestra directamente que la multiplicación por $\chi_\alpha$ es continua en $W^{m,p}(\Omega_\alpha)$. Por lo tanto, para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ y cada componente $a \in \{1,\dots,r\}$ existe una sucesión

$$(\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \in C_c^\infty(\Omega_\alpha), \qquad k \in \mathbb{N},$$

tal que

$$\sum_{a=1}^{r} \big\| (\widetilde{G}_{\alpha,k})^a - \big(\psi_\alpha\mathbf{F}\big)^a \circ \varphi_\alpha^{-1} \big\|_{W^{m,p}(\Omega_\alpha)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

A partir de estas funciones suaves definimos una sección suave $\mathbf{G}_{\alpha,k} \in \Gamma(\mathbf{E} \restriction_{U_\alpha})$ mediante

$$\mathbf{G}_{\alpha,k} = \sum_{a=1}^{r} \left[ (\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \circ \varphi_\alpha \right] \mathbf{e}_a.$$

Entonces, por la estimación del Lema 9.1.44, se sigue que

$$\|\mathbf{G}_{\alpha,k} - (\psi_\alpha \mathbf{F}) \restriction_{U_\alpha}\|_{W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Extendiendo cada $\mathbf{G}_{\alpha,k}$ por cero fuera de $U_\alpha$, podemos verlo como una sección global con soporte compacto, es decir $\mathbf{G}_{\alpha,k} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$, y además

$$\|\mathbf{G}_{\alpha,k} - (\psi_\alpha \mathbf{F}) \restriction_{U_\alpha}\|_{W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})} = \left( \sum_{s=0}^{m} \int_{U_\alpha} |\nabla_w^s (\mathbf{G}_{\alpha,k} - (\psi_\alpha \mathbf{F}) \restriction_{U_\alpha})|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \, d\lambda_\mathbf{g} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dado que $\operatorname{supp}(\mathbf{G}_{\alpha,k} - \psi_\alpha \mathbf{F}) \subseteq U_\alpha$ y $\nabla_w^s$ es un operador local (Proposición 9.1.8), lo anterior es igual a

$$\left( \sum_{s=0}^{m} \int_{M} |\nabla_w^s (\mathbf{G}_{\alpha,k} - \psi_\alpha \mathbf{F})|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \, d\lambda_\mathbf{g} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En consecuencia

$$\|\mathbf{G}_{\alpha,k} - \psi_\alpha \mathbf{F}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Ahora fijemos $\alpha \in \mathbb{N}$ y un entero $q \in \mathbb{N}$. Por la convergencia anterior, existe $k_{\alpha,q} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\psi_\alpha \mathbf{F} - \mathbf{G}_{\alpha,k_{\alpha,q}}\|_{W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})} < \frac{1}{2^{\alpha+q}}.$$

Como $\operatorname{supp}(\mathbf{G}_{\alpha,k}) \subseteq U_\alpha$ para $\alpha, k \in \mathbb{N}$ y la familia $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ es localmente finita, la suma

$$\mathbf{G}_q := \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathbf{G}_{\alpha,k_{\alpha,q}}$$

es localmente finita y, por lo tanto, define una sección global suave $\mathbf{G}_q \in \Gamma(\mathbf{E})$.
Veamos ahora que $\mathbf{G}_q$ aproxima a $\mathbf{F}$ en la norma de Sobolev. Usando la desigualdad del triángulo, obtenemos

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{G}_q\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \leq \sum_{\alpha=1}^{\infty} \|\psi_\alpha \mathbf{F} - \mathbf{G}_{\alpha,k_{\alpha,q}}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \leq \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha+q}} = \frac{1}{2^q}.$$

En particular,

$$\|\mathbf{G}_q\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{F}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} + \|\mathbf{F} - \mathbf{G}_q\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{F}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} + 2^{-q} < \infty,$$

de modo que $\mathbf{G}_q \in W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \cap \Gamma(\mathbf{E})$ para toda $q \in \mathbb{N}$.
Como $2^{-q} \to 0$ cuando $q \to \infty$, concluimos que $\mathbf{G}_q \to \mathbf{F}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Es decir, toda sección en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$

se puede aproximar en la norma de Sobolev por secciones suaves, y esto muestra que

$$H^{m,p}(M,\mathbf{E}) = W^{m,p}(M,\mathbf{E}).$$

□

**Teorema 9.1.49.** (Regla de la cadena para funciones Lipschitz) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sea $1 \le p < \infty$ y sea $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M)$ una función real. Si $\Phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es $L$-Lipschitz, entonces $\Phi \circ u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M)$ y

$$|d(\Phi\circ u)|_{\mathbf{g}} \le L|du|_{\mathbf{g}}$$

casi en todas partes. En el conjunto de los puntos $x$ para los cuales $\Phi$ es diferenciable en $u(x)$ se tiene

$$d(\Phi\circ u)_x = \Phi'(u(x))\,du_x$$

casi en todas partes. Además, $du = 0$ casi en todas partes en cada conjunto de nivel $\{u = c\}$.
Si $u \in W^{1,p}(M)$ y $\Phi\circ u \in L^p(M)$, entonces $\Phi\circ u \in W^{1,p}(M)$. Esta condición de integrabilidad se satisface, en particular, cuando $\Phi(0) = 0$ o cuando $\lambda_{\mathbf{g}}(M) < \infty$.
Para $u, v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M)$ se obtienen las fórmulas

$$d(u-c)_+ = \mathbf{1}_{\{u>c\}}\,du, \qquad du_- = -\mathbf{1}_{\{u<0\}}\,du,$$

y

$$d(u-v)_+ = \mathbf{1}_{\{u>v\}}(du-dv)$$

casi en todas partes, donde $t_+ := \max\{t,0\}$ y $u_- := (-u)_+$.

*Demostración.* Comenzamos con una función $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ cuya derivada sea acotada. Sea $U \Subset M$ una bola coordenada regular. Como $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M)$, la restricción $u|_U$ pertenece a $W^{1,p}(U)$. Aplicamos el Teorema de Meyers–Serrin para haces vectoriales, Teorema 9.1.48, al haz trivial real sobre $U$. Así obtenemos una sucesión $(u_j) \subseteq C^\infty(U)\cap W^{1,p}(U)$ tal que $u_j \to u$ en $W^{1,p}(U)$. Después de pasar a una subsucesión podemos suponer también que $u_j \to u$ casi en todas partes en $U$. Como $\Psi$ es Lipschitz, $\Psi(u_j) \to \Psi(u)$ en $L^p(U)$. Para las diferenciales se tiene

$$d(\Psi\circ u_j) = \Psi'(u_j)\,du_j.$$

La desigualdad

$$\begin{aligned}\|\Psi'(u_j)du_j - \Psi'(u)du\|_{L^p(U,T^*U)} \le{}& \|\Psi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|du_j - du\|_{L^p(U,T^*U)}\\ &+ \|(\Psi'(u_j)-\Psi'(u))du\|_{L^p(U,T^*U)}\end{aligned}$$

muestra que el miembro izquierdo tiende a cero. En efecto, el primer término converge a cero por la aproximación en $W^{1,p}(U)$, y el segundo por el Teorema de convergencia dominada B.6.14, ya que $\Psi'(u_j) \to \Psi'(u)$ casi en todas partes y $|\Psi'(u_j)-\Psi'(u)|^p|du|^p_{\mathbf{g}} \le 2^p\|\Psi'\|^p_{L^\infty(\mathbb{R})}|du|^p_{\mathbf{g}}$. El carácter cerrado del diferencial débil, Lema 9.1.12, implica entonces que

$$d(\Psi\circ u) = \Psi'(u)\,du$$

en $U$. Como las bolas coordenadas regulares de cerradura compacta cubren $M$, la identidad vale localmente

en toda la variedad.

Antes de tratar una función Lipschitz arbitraria, probaremos la afirmación sobre los conjuntos de nivel. Fijemos $c \in \mathbb{R}$ y elijamos $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le \eta \le 1$, $\eta = 1$ en $[-1,1]$ y $\eta = 0$ fuera de $[-2,2]$. Para $\varepsilon > 0$ definimos

$$\Psi_\varepsilon(t) := \int_c^t \eta\left(\frac{s-c}{\varepsilon}\right) ds.$$

Se tiene $|\Psi_\varepsilon| \le 2\varepsilon$ y $\Psi_\varepsilon'(t) = \eta\left(\frac{t-c}{\varepsilon}\right)$. Por lo ya demostrado,

$$d(\Psi_\varepsilon \circ u) = \eta\left(\frac{u-c}{\varepsilon}\right) du.$$

Fijemos una bola coordenada regular $U \Subset M$. Como $|\Psi_\varepsilon \circ u| \le 2\varepsilon$, se tiene $\Psi_\varepsilon \circ u \to 0$ en $L^p(U)$. Por otra parte,

$$\eta\left(\frac{u-c}{\varepsilon}\right) du \longrightarrow \mathbf{1}_{\{u=c\}}\, du$$

en $L^p(U, T^*U)$ por el Teorema de convergencia dominada B.6.14. En efecto, el factor escalar converge puntualmente a $\mathbf{1}_{\{u=c\}}$ y su valor absoluto está acotado por uno. Aplicamos el Lema 9.1.12 a cualquier sucesión $\varepsilon_j \to 0^+$. El límite de las funciones es cero y el de sus diferenciales es $\mathbf{1}_{\{u=c\}} du$, por lo que este último debe ser el diferencial débil de la función nula. En consecuencia, $\mathbf{1}_{\{u=c\}} du = 0$ casi en todas partes en $U$. Como estas bolas cubren $M$, la afirmación vale en toda la variedad.

Sea ahora $\Phi$ una función $L$-Lipschitz. Tomemos el molificador unidimensional del Teorema B.9.1 y pongamos $\Phi_j := \Phi * \rho_{\frac{1}{j}}$. Entonces $\Phi_j \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\|\Phi_j - \Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \qquad |\Phi_j'| \le L.$$

En particular, $\Phi_j(u) \to \Phi(u)$ en $L^p(Q)$ para todo $Q \Subset M$. Por la primera parte de la prueba,

$$d(\Phi_j \circ u) = \Phi_j'(u)\, du.$$

Fijemos nuevamente una bola coordenada regular $U \Subset M$ y escribamos $a_j := \Phi_j'(u)$. La sucesión $(a_j)$ está contenida en la bola cerrada de radio $L$ de $L^\infty(U)$. Como $L^1(U)$ es separable por el Lema 9.1.21, el Corolario B.11.30 permite pasar a una subsucesión, que no renombramos, tal que $a_j \rightharpoonup^* a$ en $L^\infty(U)$ para alguna función $a$ con $|a| \le L$ casi en todas partes. Sea $\omega \in \Gamma_c(T^*U)$. Como $\langle du, \omega\rangle_{\mathbf{g}} \in L^1(U)$, la convergencia débil-$*$ da

$$\int_U a_j \langle du, \omega\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow \int_U a \langle du, \omega\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Para cada $j$, la identidad que define el diferencial débil se escribe

$$\int_U a_j \langle du, \omega\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_U \Phi_j(u) d^*\omega\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

El miembro derecho converge a $\displaystyle\int_U \Phi(u) d^*\omega\, d\lambda_{\mathbf{g}}$, pues $\Phi_j(u) \to \Phi(u)$ en $L^p(U)$ y $d^*\omega$ es suave y tiene soporte compacto. Por lo tanto,

$$d(\Phi \circ u) = a\, du$$

en $U$. En particular, $|d(\Phi \circ u)|_{\mathbf{g}} \le L |du|_{\mathbf{g}}$ casi en todas partes. En las intersecciones de dos bolas, las diferenciales así obtenidas coinciden por la unicidad de la derivada débil. De este modo definen el diferencial

débil de $\Phi \circ u$ en todo $M$.

Resta identificar el coeficiente $a$ en los valores donde $\Phi$ es diferenciable. Si $\Phi$ es diferenciable en $t$, entonces $\Phi_j'(t) \to \Phi'(t)$. Para verlo directamente, escribimos

$$\Phi_j'(t) = j \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(t - \frac{s}{j}\right) \rho'(s)\, ds.$$

Escribamos $\Phi(t+h) = \Phi(t) + h\Phi'(t) + r(h)$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|r(h)| \le \varepsilon |h|$ si $|h| < \delta$. Además,

$$\Phi\left(t - \frac{s}{j}\right) = \Phi(t) - \frac{s}{j}\Phi'(t) + r\left(-\frac{s}{j}\right).$$

El resto, multiplicado por $j$, converge uniformemente a cero para $s \in \operatorname{supp}\rho$. En efecto, si este soporte está contenido en $[-R,R]$ y $j > \frac{R}{\delta}$, entonces

$$\sup_{s\in[-R,R]} j\left|r\left(-\frac{s}{j}\right)\right| \le R\varepsilon.$$

Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho'(s)\, ds = 0$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} s\rho'(s)\, ds = -1$, la fórmula anterior converge a $\Phi'(t)$. Sea $D \subseteq U$ el conjunto medible de los puntos $x$ para los cuales $\Phi$ es diferenciable en $u(x)$. Entonces $a_j(x) \to \Phi'(u(x))$ en $D$. Para cada $\omega \in \Gamma_c(T^*U)$, la función $\mathbf{1}_D \langle du, \omega\rangle_{\mathbf{g}}$ pertenece a $L^1(U)$. La convergencia débil-$*$ y, por otro lado, el Teorema de convergencia dominada B.6.14 sobre $D$ dan

$$\int_D a\langle du, \omega\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_D \Phi'(u)\langle du, \omega\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $\omega$ es arbitraria, el principio de localización implica que

$$a\, du = \Phi'(u)\, du$$

casi en todas partes allí. Esto prueba la fórmula de la cadena anunciada.

Si $u \in W^{1,p}(M)$ y $\Phi(u) \in L^p(M)$, la cota del diferencial muestra que $d(\Phi(u)) \in L^p(M, T^*M)$, de modo que $\Phi(u) \in W^{1,p}(M)$. Si $\Phi(0) = 0$, entonces $|\Phi(u)| \le L|u|$. Si $M$ tiene volumen finito, se usa $|\Phi(u)| \le |\Phi(0)| + L|u|$. En ambos casos se obtiene la integrabilidad requerida.

Finalmente, la función $t \mapsto (t-c)_+$ es diferenciable fuera de $c$, con derivada igual a $\mathbf{1}_{(c,\infty)}$. La fórmula ya probada vale fuera de $\{u = c\}$, y en este conjunto $du = 0$. Por lo tanto, $d(u-c)_+ = \mathbf{1}_{\{u>c\}} du$. La identidad para $u_-$ se obtiene aplicando esta fórmula a $-u$, y la última identidad se obtiene al aplicarla a $u - v$. □

## 9.2 Encajes de Sobolev y el teorema de Rellich–Kondrashov para haces vectoriales

Los encajes de Sobolev son una herramienta básica para estudiar ecuaciones diferenciales parciales sobre haces. En una variedad compacta, una cubierta finita por bolas coordenadas regulares permite reducir el problema a los encajes euclidianos de las componentes y reconstruir después las secciones mediante una partición de la unidad. El Lema 9.1.44 garantiza que este procedimiento conserva exactamente la regularidad de Sobolev.

**Teorema 9.2.1.** (Encaje de Sobolev para haces vectoriales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada de dimensión $n$, y sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave real o complejo de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ (hermitiana en el caso complejo) y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $j\geq 0$ y $m\geq 1$ enteros y $1\leq p,q<\infty$ tales que

$$j+m-\frac{n}{p}\geq j-\frac{n}{q}.$$

Entonces la inclusión

$$W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})\hookrightarrow W^{j,q}(M,\mathbf{E})$$

es continua.

*Demostración.* Fijemos los órdenes y exponentes del enunciado. Elegimos una cubierta finita $(U_\alpha,\varphi_\alpha)_{\alpha=1}^N$ por bolas coordenadas regulares y, en cada $U_\alpha$, un marco $(\mathbf{e}_{1,\alpha},\dots,\mathbf{e}_{r,\alpha})$ definido en una vecindad de $\overline{U_\alpha}$. Tomamos una partición de la unidad $(\psi_\alpha)_{\alpha=1}^N$ subordinada a esta cubierta. Como $M$ es compacta, podemos y supondremos que

$$K_\alpha:=\operatorname{supp}(\psi_\alpha)\Subset U_\alpha\qquad\text{para todo }\alpha\in\{1,\dots,N\}.$$

Pongamos $\Omega_\alpha:=\varphi_\alpha(U_\alpha)$.
La compatibilidad de $\nabla^{\mathbf{E}}$ con $\mathbf{h_E}$ permite aplicar el Lema 9.1.44 y sus estimaciones de comparación local. Para componentes complejas, aplicamos las estimaciones euclidianas a sus partes real e imaginaria. El Teorema 3.3.16, con órdenes totales $j+m$ y $j$, proporciona, para cada $\alpha$, una constante $C_\alpha>0$ tal que

$$\|v\|_{W^{j,q}(\Omega_\alpha)}\leq C_\alpha\|v\|_{W^{j+m,p}(\Omega_\alpha)}\qquad\text{para todo } v\in W_0^{j+m,p}(\Omega_\alpha).\tag{9.43}$$

La formulación con $W_0^{j+m,p}$ es suficiente: todas las funciones que aparecerán a continuación tienen soporte compacto en $\Omega_\alpha$.
Sea $\mathbf{F}\in W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})$ y escribamos

$$\mathbf{F}=\sum_{a=1}^r F_\alpha^a\mathbf{e}_{a,\alpha}\qquad\text{en } U_\alpha.$$

La sección localizada $\psi_\alpha\mathbf{F}$ tiene soporte contenido en $K_\alpha$. Por el Lema 9.1.44, las funciones

$$v_\alpha^a:=(\psi_\alpha F_\alpha^a)\circ\varphi_\alpha^{-1}$$

pertenecen a $W^{j+m,p}(\Omega_\alpha)$. Además,

$$\operatorname{supp}(v_\alpha^a)\subseteq\varphi_\alpha(K_\alpha)\Subset\Omega_\alpha,$$

de modo que $v_\alpha^a\in W_0^{j+m,p}(\Omega_\alpha)$. La estimación (9.43) y la comparación local de normas dan

$$\|(\psi_\alpha\mathbf{F})\restriction_{U_\alpha}\|_{W^{j,q}(U_\alpha,\mathbf{E})}\leq C'_\alpha\|(\psi_\alpha\mathbf{F})\restriction_{U_\alpha}\|_{W^{j+m,p}(U_\alpha,\mathbf{E})}\tag{9.44}$$

para una constante $C'_\alpha>0$ independiente de $\mathbf{F}$.
Precisemos la reconstrucción global de cada sección localizada. Para $s\in\{0,\dots,j\}$, sea

$$G_{\alpha,s}:=\nabla_w^s\big((\psi_\alpha\mathbf{F})\restriction_{U_\alpha}\big).$$

La localidad de la derivada covariante débil implica la inclusión

$$\operatorname{supp}_{U_\alpha}(G_{\alpha,s}) \subseteq \operatorname{supp}_{U_\alpha}\big((\psi_\alpha \mathbf{F}) \restriction_{U_\alpha}\big) \subseteq K_\alpha;$$

no se necesita, ni es correcta en general, una igualdad de soportes. Denotemos por $\widetilde{G}_{\alpha,s}$ la prolongación por cero de $G_{\alpha,s}$ a $M$. Como $K_\alpha \Subset U_\alpha$, esta prolongación pertenece a $L^q(M, T^{(0,s)}(TM)\otimes \mathbf{E})$.
Veamos que $\widetilde{G}_{\alpha,s}$ es la $s$-ésima derivada covariante débil de $\psi_\alpha \mathbf{F}$. Elegimos $\eta_\alpha \in C_c^\infty(U_\alpha)$ igual a uno en una vecindad de $K_\alpha$. Para $\mathbf{\Phi} \in \Gamma_c^\infty(T^{(0,s)}(TM)\otimes \mathbf{E})$, la sección $\eta_\alpha \mathbf{\Phi} \restriction_{U_\alpha}$ es una función de prueba en $U_\alpha$. La definición de $G_{\alpha,s}$ y la localidad de $(\nabla^s)^*$ proporcionan

$$\begin{aligned}
\int_M \langle \widetilde{G}_{\alpha,s}, \mathbf{\Phi}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} &= \int_{U_\alpha} \langle G_{\alpha,s}, \eta_\alpha \mathbf{\Phi}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \\
&= \int_{U_\alpha} \big\langle \psi_\alpha \mathbf{F}, (\nabla^s)^*(\eta_\alpha \mathbf{\Phi})\big\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \\
&= \int_M \langle \psi_\alpha \mathbf{F}, (\nabla^s)^* \mathbf{\Phi}\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.
\end{aligned}$$

En la última igualdad usamos que $\eta_\alpha = 1$ en una vecindad del soporte de $\psi_\alpha \mathbf{F}$. Por lo tanto, $\psi_\alpha \mathbf{F} \in W^{j,q}(M,\mathbf{E})$ y su norma global coincide con la norma obtenida al integrar sobre $U_\alpha$.
Necesitamos finalmente una cota para la localización en el espacio de partida. Para secciones suaves, la regla de Leibniz iterada da, para $0 \le s \le j+m$,

$$|\nabla^s(\psi_\alpha \mathbf{F})|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \le A_s \sum_{t=0}^{s} |\nabla^{s-t}\psi_\alpha|_{\mathbf{g}} |\nabla^t \mathbf{F}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}.$$

Las derivadas de $\psi_\alpha$ están acotadas porque $M$ es compacta. Sumando las normas $L^p$ se obtiene una constante $A_\alpha > 0$ tal que

$$\|\psi_\alpha \mathbf{F}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})} \le A_\alpha \|\mathbf{F}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})}$$

para toda sección suave $\mathbf{F}$. El Teorema de Meyers–Serrin y el paso al límite en distribuciones extienden la desigualdad a todo $\mathbf{F} \in W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})$. Como la cubierta es finita, existe $A > 0$ tal que

$$\|\psi_\alpha \mathbf{F}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})} \le A \|\mathbf{F}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})} \tag{9.45}$$

para todo $\alpha \in \{1,\dots,N\}$.
Usando $\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha \mathbf{F}$, la desigualdad triangular, (9.44) y (9.45), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{F}\|_{W^{j,q}(M,\mathbf{E})} &\le \sum_{\alpha=1}^{N} \|\psi_\alpha \mathbf{F}\|_{W^{j,q}(M,\mathbf{E})} \\
&\le \sum_{\alpha=1}^{N} C'_\alpha \|\psi_\alpha \mathbf{F}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})} \\
&\le C \|\mathbf{F}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})}.
\end{aligned}$$

Esto prueba la continuidad del encaje. □

**Teorema 9.2.2.** (Rellich–Kondrashov en haces vectoriales) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta sin frontera de dimensión $n$, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real o complejo de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ (hermitiana en el caso complejo) y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $j \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ entero y $1 \leq p, q < \infty$ tales que

$$j + m - \frac{n}{p} > j - \frac{n}{q}.$$

Entonces la inclusión

$$W^{j+m,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow W^{j,q}(M, \mathbf{E})$$

es compacta.

*Demostración.* Sea $(\mathbf{F}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $W^{j+m,p}(M, \mathbf{E})$. La compatibilidad de $\nabla^{\mathbf{E}}$ con $\mathbf{h_E}$ permite aplicar la comparación local de normas del Lema 9.1.44. En el caso complejo consideramos el haz real subyacente con métrica $\operatorname{Re}\mathbf{h_E}$ y la conexión real inducida; su norma puntual coincide con la hermitiana y sus componentes son las partes real e imaginaria de las componentes complejas. Conservamos la cubierta, los marcos y las funciones $\psi_\alpha$ de la prueba anterior. Por (9.45), para cada $\alpha$ la sucesión $(\psi_\alpha \mathbf{F}_\nu)_\nu$ está acotada en $W^{j+m,p}(M, \mathbf{E})$. El Lema 9.1.44 muestra entonces que, para cada par $(\alpha, a)$, la sucesión

$$v^a_{\alpha,\nu} := \left(\psi_\alpha (\mathbf{F}_\nu)^a_\alpha\right) \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

está acotada en $W^{j+m,p}(\Omega_\alpha)$. Además,

$$\operatorname{supp}(v^a_{\alpha,\nu}) \subseteq \varphi_\alpha(K_\alpha) \Subset \Omega_\alpha$$

para todo $\nu$. En particular, $v^a_{\alpha,\nu} \in W^{j+m,p}_0(\Omega_\alpha)$.
El Teorema 3.4.2 proporciona, para cada par $(\alpha, a)$, una subsucesión convergente en $W^{j,q}(\Omega_\alpha)$. Como sólo existen $Nr$ pares, una extracción diagonal finita produce una subsucesión, que no relabelamos, tal que $(v^a_{\alpha,\nu})_\nu$ es de Cauchy en $W^{j,q}(\Omega_\alpha)$ para todo $\alpha$ y todo $a$.
La comparación local de normas y la reconstrucción por prolongación nula usadas en la prueba del teorema anterior dan, para $\nu, \mu \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}_\nu - \mathbf{F}_\mu\|_{W^{j,q}(M,\mathbf{E})} &\leq \sum_{\alpha=1}^{N} \|\psi_\alpha(\mathbf{F}_\nu - \mathbf{F}_\mu)\|_{W^{j,q}(M,\mathbf{E})} \\ &\leq C \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \|v^a_{\alpha,\nu} - v^a_{\alpha,\mu}\|_{W^{j,q}(\Omega_\alpha)}. \end{aligned}$$

El miembro derecho tiende a cero cuando $\nu, \mu \to \infty$. La subsucesión es, por lo tanto, de Cauchy en el espacio de Banach $W^{j,q}(M, \mathbf{E})$ y converge en él. Esto prueba la compacidad. □

**Corolario 9.2.3.** (Encajes y exponente crítico) Bajo las hipótesis geométricas de los teoremas anteriores, sean $j \geq 0$ y $m \geq 1$ enteros y sea $1 \leq p < n/m$. Entonces

$$W^{j+m,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow W^{j,q}(M, \mathbf{E})$$

continuamente para $1 \le q \le p_m^* := \dfrac{np}{n-mp}$, y compactamente para $1 \le q < p_m^*$.

*Demostración.* Como $mp < n$, la condición $j + m - \dfrac{n}{p} \ge j - \dfrac{n}{q}$ equivale a $q \le p_m^*$, y la desigualdad estricta equivale a $q < p_m^*$. Aplicamos los Teoremas 9.2.1 y 9.2.2, respectivamente. □

### 9.2.1 Encajes en espacios de secciones de Hölder

Las soluciones de muchos problemas variacionales se obtienen inicialmente como elementos de un espacio de Sobolev. El principio de localización para haces vectoriales del Lema 9.1.6 permite convertir la identidad variacional en una ecuación local en sentido débil. Sin embargo, ese paso no produce por sí mismo regularidad clásica. La pregunta posterior consiste en determinar cuándo la solución débil admite un representante diferenciable y con qué continuidad varían sus derivadas. Como en el caso euclidiano, el encaje no sustituye las estimaciones propias de la ecuación: una vez que éstas proporcionan una cota en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$, los espacios de secciones de Hölder traducen esa regularidad de Sobolev en regularidad clásica cuantitativa.

Antes de definir estos espacios debemos precisar cómo se comparan vectores que pertenecen a fibras distintas. Usaremos la notación para el transporte paralelo fijada en la Definición 2.7.13. En esta subsección las variedades no tienen frontera. Supondremos inicialmente que $M$ es conexa, porque la distancia riemanniana $d_{\mathbf{g}}$ se definió bajo esa hipótesis. Si $M$ no es conexa, las definiciones y los resultados se aplican componente a componente. En particular, la conexidad no constituye una restricción para las variedades compactas, que tienen un número finito de componentes conexas.

**Definición 9.2.4.** (Separación fibrada mediante transporte paralelo) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa y sin frontera tal que $\operatorname{inj}(M) > 0$. Sea $\mathbf{F} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{F}}$. Fijamos

$$\rho_M := \min\{1, \operatorname{inj}(M)\}.$$

Si $x, y \in M$ satisfacen $0 < d_{\mathbf{g}}(x,y) < \rho_M$, denotamos por $\gamma_{xy}\colon [0,1] \longrightarrow M$ la única geodésica minimizante parametrizada con velocidad constante que cumple

$$\gamma_{xy}(0) = x, \qquad \gamma_{xy}(1) = y.$$

Para $\xi \in \mathbf{F}_x$ y $\eta \in \mathbf{F}_y$, definimos

$$|\xi - \eta|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}};x,y} := \left|\xi - P^{\mathbf{F}}_{\gamma_{xy},1\to 0}(\eta)\right|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}(x)}. \tag{9.46}$$

Como $\nabla^{\mathbf{F}}$ es compatible con $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$, el transporte paralelo es una isometría. La Proposición 2.7.14 proporciona entonces la expresión equivalente

$$|\xi - \eta|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}};x,y} = \left|P^{\mathbf{F}}_{\gamma_{xy},0\to 1}(\xi) - \eta\right|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}(y)}.$$

Cuando $x = y$, ponemos

$$|\xi - \eta|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}};x,x} := |\xi - \eta|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}(x)}.$$

Si $\mathbf{T} \in \Gamma^0(\mathbf{F})$ y $S \subseteq M$ satisface $\operatorname{diam}_{\mathbf{g}}(S) < \rho_M$, definimos la oscilación fibrada de $\mathbf{T}$ en $S$ por

$$\operatorname{osc}_{\mathbf{F}}(\mathbf{T}; S) := \sup_{x,y \in S} |\mathbf{T}(x) - \mathbf{T}(y)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}};x,y}.$$

Para $0 < \alpha < 1$, definimos

$$[\mathbf{T}]_{\alpha,\mathbf{F}} := \sup_{\substack{x,y \in M \\ 0 < d_{\mathbf{g}}(x,y) < \rho_M}} \frac{|\mathbf{T}(x) - \mathbf{T}(y)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}};x,y}}{d_{\mathbf{g}}(x,y)^{\alpha}}. \tag{9.47}$$

Si $U \subseteq M$, escribimos $[\mathbf{T}]_{\alpha,\mathbf{F};U}$ cuando el supremo se toma únicamente sobre pares $x, y \in U$.

**Observación 9.2.5.** (Elección del radio) La cota por 1 en la definición de $\rho_M$ sólo normaliza la escala. Si $0 < \rho_1 \le \rho_2 \le \operatorname{inj}(M)$ y $[\mathbf{T}]_{\alpha,\mathbf{F};\rho_j}$ denota la seminorma obtenida usando el radio $\rho_j$, entonces

$$[\mathbf{T}]_{\alpha,\mathbf{F};\rho_1} \le [\mathbf{T}]_{\alpha,\mathbf{F};\rho_2}$$

y

$$[\mathbf{T}]_{\alpha,\mathbf{F};\rho_2} \le [\mathbf{T}]_{\alpha,\mathbf{F};\rho_1} + 2\rho_1^{-\alpha} \|\mathbf{T}\|_{L^\infty(M,\mathbf{F})}.$$

La segunda desigualdad se obtiene separando los pares con distancia menor que $\rho_1$ de aquellos cuya distancia pertenece a $[\rho_1, \rho_2)$. Por ello, después de añadir la norma uniforme, cualesquiera dos radios positivos menores o iguales que $\operatorname{inj}(M)$ producen normas equivalentes.
También puede usarse la formulación mediante bolas

$$[\mathbf{T}]^{\mathrm{bol}}_{\alpha,\mathbf{F}} := \sup_{\substack{x \in M \\ 0 < r < \frac{\rho_M}{2}}} \frac{\operatorname{osc}_{\mathbf{F}}(\mathbf{T}; B_{\mathbf{g}}(x,r))}{r^{\alpha}}.$$

Si $x, y \in B_{\mathbf{g}}(z,r)$, entonces $d_{\mathbf{g}}(x,y) < 2r$, y por lo tanto

$$[\mathbf{T}]^{\mathrm{bol}}_{\alpha,\mathbf{F}} \le 2^{\alpha} [\mathbf{T}]_{\alpha,\mathbf{F}}.$$

Recíprocamente, si $d_{\mathbf{g}}(x,y) < \frac{\rho_M}{2}$, tomamos $d_{\mathbf{g}}(x,y) < r < \frac{\rho_M}{2}$ y usamos que $y \in B_{\mathbf{g}}(x,r)$. Al dejar $r \to d_{\mathbf{g}}(x,y)^+$ obtenemos

$$\frac{|\mathbf{T}(x) - \mathbf{T}(y)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}};x,y}}{d_{\mathbf{g}}(x,y)^{\alpha}} \le [\mathbf{T}]^{\mathrm{bol}}_{\alpha,\mathbf{F}}.$$

Para $\frac{\rho_M}{2} \le d_{\mathbf{g}}(x,y) < \rho_M$, se tiene

$$\frac{|\mathbf{T}(x) - \mathbf{T}(y)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}};x,y}}{d_{\mathbf{g}}(x,y)^{\alpha}} \le 2^{\alpha+1} \rho_M^{-\alpha} \|\mathbf{T}\|_{L^\infty(M,\mathbf{F})}.$$

Así, las cantidades

$$\|\mathbf{T}\|_{L^\infty(M,\mathbf{F})} + [\mathbf{T}]_{\alpha,\mathbf{F}} \qquad \text{y} \qquad \|\mathbf{T}\|_{L^\infty(M,\mathbf{F})} + [\mathbf{T}]^{\mathrm{bol}}_{\alpha,\mathbf{F}}$$

son equivalentes. El factor $\frac{1}{2}$ asegura que cualesquiera dos puntos de $B_{\mathbf{g}}(x,r)$ estén a distancia menor que $\rho_M$. Asimismo, la unicidad de la geodésica minimizante requiere $d_{\mathbf{g}}(x,y) < \operatorname{inj}(M)$; la desigualdad no estricta no es suficiente.

**Definición 9.2.6.** (Secciones de Hölder y secciones de Hölder hasta la cerradura) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa y sin frontera con $\operatorname{inj}(M)>0$, y sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Para $j\in\mathbb{N}_0$ ponemos

$$\mathbf{E}_j := T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E},$$

con la convención $\mathbf{E}_0=\mathbf{E}$. En $\mathbf{E}_j$ consideramos la métrica fibrada inducida por $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, y la conexión producto inducida por la conexión de Levi–Civita y por $\nabla^{\mathbf{E}}$.
Sean $k\in\mathbb{N}_0$ y $0<\alpha<1$. Para $\mathbf{u}\in\Gamma^k(\mathbf{E})$ definimos

$$\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E}_j)} := \sup_{x\in M}|\nabla^j\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}},\qquad 0\le j\le k,$$

y

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} := \sum_{j=0}^{k}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E}_j)} + [\nabla^k\mathbf{u}]_{\alpha,\mathbf{E}_k}. \tag{9.48}$$

El espacio de secciones de Hölder de orden $(k,\alpha)$ es

$$\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E}) := \left\{\mathbf{u}\in\Gamma^k(\mathbf{E})\,\middle|\,\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})}<\infty\right\}.$$

Sea ahora $U\Subset M$ abierto. Para $\mathbf{u}\in\Gamma^k(\mathbf{E}\restriction_U)$ ponemos

$$\mathcal{E}^{k,\alpha}_{\overline{U}}(\mathbf{u}) := \left\{\widetilde{\mathbf{u}}\in\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})\,\middle|\,\widetilde{\mathbf{u}}\restriction_U=\mathbf{u}\right\}.$$

Definimos

$$\Gamma^{k,\alpha}(\overline{U},\mathbf{E}) := \left\{\mathbf{u}\in\Gamma^k(\mathbf{E}\restriction_U)\,\middle|\,\mathcal{E}^{k,\alpha}_{\overline{U}}(\mathbf{u})\neq\varnothing\right\}$$

y equipamos este espacio con la norma de extensión

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\overline{U},\mathbf{E})} := \inf_{\widetilde{\mathbf{u}}\in\mathcal{E}^{k,\alpha}_{\overline{U}}(\mathbf{u})}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})}. \tag{9.49}$$

El segundo argumento recuerda cuál es el haz ambiente. No se está considerando a $\overline{U}$ como una variedad suave. Como $U$ es denso en $\overline{U}$, una extensión determina de manera única los valores de $\mathbf{u}$ y de sus derivadas covariantes hasta orden $k$ sobre la cerradura.
Si $M$ tiene un número finito de componentes conexas $M_1,\dots,M_N$, aplicamos la definición en cada componente y escribimos

$$\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E}) := \left\{\mathbf{u}\in\Gamma^k(\mathbf{E})\,\middle|\,\mathbf{u}\restriction_{M_\nu}\in\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E}\restriction_{M_\nu})\text{ para todo }\nu\in\{1,\dots,N\}\right\},$$

con la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} := \max_{1\le\nu\le N}\|\mathbf{u}\restriction_{M_\nu}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E}\restriction_{M_\nu})}.$$

Si

$$\|\mathbf{u}\|_{\Sigma} := \sum_{\nu=1}^{N}\|\mathbf{u}\restriction_{M_\nu}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E}\restriction_{M_\nu})},$$

entonces

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{u}\|_{\Sigma} \leq N\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})}.$$

Esta convención será la utilizada para las variedades compactas no conexas.

**Observación 9.2.7.** (Extensiones locales de secciones) La condición de extensión global en la definición anterior equivale a la existencia de una extensión sobre una vecindad abierta de $\overline{U}$. Más precisamente, basta que existan abiertos

$$\overline{U} \subseteq V_0 \Subset V_1 \Subset V$$

y una sección $\widehat{\mathbf{u}} \in \Gamma^k(\mathbf{E} \restriction_V)$ que extienda a $\mathbf{u}$ y satisfaga

$$\sum_{j=0}^{k} \|\nabla^j \widehat{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(V_1,\mathbf{E}_j)} + [\nabla^k \widehat{\mathbf{u}}]_{\alpha,\mathbf{E}_k;V_1} < \infty.$$

En efecto, elegimos una función de corte $\chi \in C_c^\infty(V_1)$ igual a uno en una vecindad de $\overline{V_0}$. La extensión por cero de $\chi\widehat{\mathbf{u}}$ fuera de $V_1$, que denotamos por $\widetilde{\chi\widehat{\mathbf{u}}}$, pertenece a $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ y extiende a $\mathbf{u}$. La presencia de $V_1$ asegura que todos los términos de la regla de Leibniz se controlen en un compacto contenido en el dominio de la extensión. Éste es el análogo para secciones de la convención usada en $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.
El término $\|\nabla^k \mathbf{u}\|_{L^\infty(M,T^{(0,k)}(TM)\otimes\mathbf{E})}$ no puede omitirse de (9.48). La seminorma de Hölder no controla el tamaño de $\nabla^k\mathbf{u}$ y se anula, por ejemplo, sobre tensores paralelos.

La comparación local entre la norma geométrica y las componentes escalares utiliza dos hechos: la equivalencia uniforme de la métrica con la métrica euclidiana en una bola coordenada regular y el control del transporte paralelo sobre geodésicas cortas.

**Lema 9.2.8.** (Comparación local de la seminorma de Hölder) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa y sin frontera con $\operatorname{inj}(M) > 0$. Sea $(U,\varphi)$ una bola coordenada regular en $M$. Sea $\mathbf{F} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $N$, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{F}$ y una conexión compatible $\nabla^\mathbf{F}$, y sea $(\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_N)$ un marco local de $\mathbf{F}$ definido en una vecindad de $\overline{U}$. Si

$$\mathbf{T} = \sum_{A=1}^{N} T^A \mathbf{f}_A \qquad \text{en } U,$$

entonces

$$\mathbf{T} \in \Gamma^{0,\alpha}(\overline{U},\mathbf{F}) \iff T^A \circ \varphi^{-1} \in C^{0,\alpha}(\overline{\varphi(U)})$$

para todo $A \in \{1,\dots,N\}$. Además, existen constantes $c_\alpha, C_\alpha > 0$, independientes de $\mathbf{T}$, tales que

$$\begin{aligned} c_\alpha \sum_{A=1}^{N} \|T^A \circ \varphi^{-1}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\varphi(U)})} &\leq \|\mathbf{T}\|_{\Gamma^{0,\alpha}(\overline{U},\mathbf{F})} \\ &\leq C_\alpha \sum_{A=1}^{N} \|T^A \circ \varphi^{-1}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\varphi(U)})}. \end{aligned} \tag{9.50}$$

*Demostración.* Sea $U'$ una bola coordenada regular mayor, de modo que $\overline{U} \subseteq U'$ y que la carta y el marco estén definidos en $U'$. Elegimos un abierto $V$ con

$$\overline{U} \subseteq V \Subset U'.$$

Como $\overline{V}$ es compacto, existe $0 < \delta < \rho_M$ tal que toda geodésica minimizante de longitud menor que $\delta$ con extremos en $\overline{V}$ permanece en $U'$. Disminuyendo $\delta$ si es necesario, el segmento euclidiano que une $\varphi(x)$ con $\varphi(y)$ permanece en $\varphi(U')$ siempre que $x, y \in \overline{V}$ y $d_{\mathbf{g}}(x,y) < \delta$.
Para $x, y \in \overline{V}$ con $d_{\mathbf{g}}(x,y) < \delta$, definimos la matriz $G(x,y)$ por

$$P^{\mathbf{F}}_{\gamma_{xy},1\to 0}\big(\mathbf{f}_B(y)\big) = \sum_{A=1}^{N} G^A_B(x,y)\mathbf{f}_A(x). \tag{9.51}$$

Sea $R(t)$ la matriz del transporte $P^{\mathbf{F}}_{\gamma_{xy},t\to 0}$ en el marco. Por la Proposición 2.7.18, $R(0) = I$ y $R$ satisface un sistema lineal cuyos coeficientes tienen norma acotada por $C|\dot\gamma_{xy}(t)|_{\mathbf{g}} = C d_{\mathbf{g}}(x,y)$. El Lema de Grönwall 1.8.19 da

$$\|R(t)\|_{\mathrm{op}(\mathbb{K}^N)} \le e^{C d_{\mathbf{g}}(x,y)t}$$

y, al integrar la ecuación,

$$\|G(x,y) - I\|_{\mathrm{op}(\mathbb{K}^N)} = \|R(1) - R(0)\|_{\mathrm{op}(\mathbb{K}^N)} \le C d_{\mathbf{g}}(x,y). \tag{9.52}$$

Aquí y en lo que sigue, la constante puede aumentar, pero es independiente de $x$ y de $y$.
La equivalencia uniforme entre $\mathbf{g}$ y la métrica euclidiana en la carta proporciona constantes $c_0, C_0 > 0$ tales que

$$c_0|\varphi(x) - \varphi(y)| \le d_{\mathbf{g}}(x,y) \le C_0|\varphi(x) - \varphi(y)| \tag{9.53}$$

para los pares anteriores. La primera desigualdad se obtiene estimando en coordenadas la longitud de la geodésica minimizante. Para la segunda se estima la longitud de la curva cuya expresión coordenada es el segmento que une $\varphi(x)$ con $\varphi(y)$.
Para $z \in U'$, sea

$$\mathcal{F}_z \colon \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbf{F}_z, \qquad \mathcal{F}_z(c^1,\dots,c^N) := \sum_{A=1}^{N} c^A \mathbf{f}_A(z).$$

Si $\mathbf{S} = \sum_{A=1}^{N} S^A \mathbf{f}_A$ y $s(z) := (S^1(z),\dots,S^N(z))$, entonces (9.51) implica

$$\mathbf{S}(x) - P^{\mathbf{F}}_{\gamma_{xy},1\to 0}(\mathbf{S}(y)) = \mathcal{F}_x\big(s(x) - G(x,y)s(y)\big).$$

Por lo tanto,

$$s(x) - G(x,y)s(y) = s(x) - s(y) + (I - G(x,y))s(y).$$

La equivalencia uniforme entre la norma euclidiana de las componentes y $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$, junto con (9.52) y (9.53),

proporciona

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{S}\|_{L^\infty(\overline{U},\mathbf{F})} + [\mathbf{S}]_{\alpha,\mathbf{F};\overline{U}}\\ &\qquad \le C\sum_{A=1}^{N}\Big(\|S^A\circ\varphi^{-1}\|_{C^0(\overline{\varphi(U)})} + [S^A\circ\varphi^{-1}]_{C^{0,\alpha}(\overline{\varphi(U)})}\Big).\end{aligned} \tag{9.54}$$

Para la desigualdad inversa, despejamos

$$s(x)-s(y) = \big(s(x)-G(x,y)s(y)\big) + (G(x,y)-I)s(y)$$

y repetimos las mismas estimaciones. Los pares con $d_{\mathbf{g}}(x,y)\ge\delta$ se controlan mediante las normas uniformes. Esto prueba la equivalencia de las normas intrínsecas sobre $\overline{U}$.

Pasemos a las normas de extensión. Sea $\widetilde{\mathbf{T}}\in\mathcal{E}^{0,\alpha}_{\overline{U}}(\mathbf{T})$. Elegimos una función de corte $\chi\in C^\infty_c(U')$ que sea igual a uno en una vecindad de $\overline{U}$. Las componentes de $\chi\widetilde{\mathbf{T}}$ en el marco, transportadas por $\varphi$ y extendidas por cero fuera de $\varphi(U')$, son extensiones globales de $T^A\circ\varphi^{-1}$. La estimación (9.54), aplicada en un compacto que contiene a $\operatorname{supp}\chi$, y la regla del producto dan

$$\sum_{A=1}^{N}\|T^A\circ\varphi^{-1}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\varphi(U)})} \le C\|\widetilde{\mathbf{T}}\|_{\Gamma^{0,\alpha}(\mathbf{F})}.$$

Tomando el ínfimo sobre $\widetilde{\mathbf{T}}$ obtenemos la primera desigualdad de (9.50).

Recíprocamente, elegimos extensiones $\widetilde{t}^A\in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ de $T^A\circ\varphi^{-1}$. En $U'$ definimos

$$\widehat{\mathbf{T}} := \chi\sum_{A=1}^{N}(\widetilde{t}^A\circ\varphi)\mathbf{f}_A$$

y denotamos por $\widetilde{\widehat{\mathbf{T}}}$ su extensión por cero fuera de $U'$. Esta sección pertenece a $\Gamma^{0,\alpha}(\mathbf{F})$, extiende a $\mathbf{T}$ y satisface

$$\|\widetilde{\widehat{\mathbf{T}}}\|_{\Gamma^{0,\alpha}(\mathbf{F})} \le C\sum_{A=1}^{N}\|\widetilde{t}^A\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

Tomando primero el ínfimo sobre las extensiones escalares y después en la definición de la norma de $\mathbf{T}$, obtenemos la segunda desigualdad. Las dos construcciones prueban también la equivalencia de pertenencia. □

**Lema 9.2.9.** (Multiplicación por funciones suaves en espacios de secciones de Hölder) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa y sin frontera con $\operatorname{inj}(M)>0$, y sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada y una conexión compatible. Sean $k\in\mathbb{N}_0$, $0<\alpha<1$ y $\chi\in C^\infty_c(M)$. Entonces existe una constante $C_{\chi,k,\alpha}>0$ tal que

$$\|\chi\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \le C_{\chi,k,\alpha}\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})}$$

para toda $\mathbf{u}\in\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$.

*Demostración.* Primero registramos dos estimaciones elementales. Sea $\mathbf{F}\to M$ un haz con conexión compatible y sea $\mathbf{S}\in\Gamma^1(\mathbf{F})$. Para $x,y\in M$ con $0<d_{\mathbf{g}}(x,y)<\rho_M$, el Lema 2.7.21, aplicado a $\gamma_{xy}\colon[0,1]\longrightarrow M$,

da

$$P^{\mathbf{F}}_{\gamma_{xy},1\to 0}(\mathbf{S}(y)) - \mathbf{S}(x) = \int_0^1 P^{\mathbf{F}}_{\gamma_{xy},t\to 0}\big(\nabla^{\mathbf{F}}_{\dot\gamma_{xy}(t)}\mathbf{S}\big)\,dt.$$

Como $|\dot\gamma_{xy}(t)|_{\mathbf{g}} = d_{\mathbf{g}}(x,y)$ y el transporte paralelo es una isometría,

$$|\mathbf{S}(x) - \mathbf{S}(y)|_{\mathbf{h_F};x,y} \le d_{\mathbf{g}}(x,y)\Big\||\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{S}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_F}}\Big\|_{L^\infty(M)}. \tag{9.55}$$

En particular, si $\rho_M \le 1$, una sección con derivada acotada es Hölder continua de cualquier exponente $0<\alpha<1$ para los pares que intervienen en (9.47).

Sean ahora $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \to M$ haces vectoriales con métricas fibradas (hermitianas en el caso complejo) y conexiones compatibles, $\mathbf{A}\in\Gamma^0(\mathbf{F}_1)$ y $\mathbf{B}\in\Gamma^0(\mathbf{F}_2)$. La conexión producto satisface la regla de Leibniz, por lo que la unicidad del transporte paralelo implica

$$P^{\mathbf{F}_1\otimes\mathbf{F}_2}_{\gamma_{xy},1\to 0} = P^{\mathbf{F}_1}_{\gamma_{xy},1\to 0}\otimes P^{\mathbf{F}_2}_{\gamma_{xy},1\to 0}.$$

Al sumar y restar $P^{\mathbf{F}_1}_{\gamma_{xy},1\to 0}(\mathbf{A}(y))\otimes\mathbf{B}(x)$, obtenemos

$$[\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}]_{\alpha,\mathbf{F}_1\otimes\mathbf{F}_2} \le \|\mathbf{B}\|_{L^\infty(M,\mathbf{F}_2)}[\mathbf{A}]_{\alpha,\mathbf{F}_1} + \|\mathbf{A}\|_{L^\infty(M,\mathbf{F}_1)}[\mathbf{B}]_{\alpha,\mathbf{F}_2}. \tag{9.56}$$

La misma estimación vale después de cualquier contracción tensorial de norma uniformemente acotada.

La regla de Leibniz iterada distribuye las $j$ derivadas entre $\chi$ y $\mathbf{u}$. Más precisamente, para cada $j\in\{0,\dots,k\}$ existen enteros $N_{j,\ell}$, coeficientes universales $C_{j,\ell,\nu}$ y permutaciones $\tau_{j,\ell,\nu}$ de los $j$ índices covariantes tales que

$$\nabla^j(\chi\mathbf{u}) = \sum_{\ell=0}^{j}\sum_{\nu=1}^{N_{j,\ell}} C_{j,\ell,\nu}\,\tau_{j,\ell,\nu}\big(\nabla^{j-\ell}\chi\otimes\nabla^\ell\mathbf{u}\big).$$

Aquí una suma con $N_{j,\ell}=0$ se interpreta como vacía. Como $\chi$ tiene soporte compacto, sus derivadas covariantes de cualquier orden y las derivadas de esas secciones están uniformemente acotadas. La fórmula anterior controla, por lo tanto, las normas uniformes de $\nabla^j(\chi\mathbf{u})$.

Para la seminorma de $\nabla^k(\chi\mathbf{u})$, si $\ell<k$, la sección $\nabla^\ell\mathbf{u}$ tiene derivada $\nabla^{\ell+1}\mathbf{u}$ acotada. Por (9.55), tanto $\nabla^\ell\mathbf{u}$ como $\nabla^{k-\ell}\chi$ son Hölder continuas de exponente $\alpha$. La estimación (9.56) controla el término correspondiente. Para $\ell=k$, aplicamos la versión escalar de la misma estimación al producto $\chi\nabla^k\mathbf{u}$; la seminorma de Hölder de $\nabla^k\mathbf{u}$ forma parte de (9.48). Al sumar los términos obtenemos la desigualdad anunciada. □

Podemos ahora obtener el análogo clásico del Lema 9.1.44. La prueba se basa en la expresión triangular de las derivadas covariantes en coordenadas.

**Lema 9.2.10.** (Caracterización local de las secciones de Hölder) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa y sin frontera con $\operatorname{inj}(M)>0$. Sea $(U,\varphi)$ una bola coordenada regular en $M$, y sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $r$, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ un marco local de $\mathbf{E}$ definido en una vecindad de $\overline{U}$, y escribamos

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u^a\mathbf{e}_a \qquad \text{en } U.$$

Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces

$$\mathbf{u} \in \Gamma^{k,\alpha}(\overline{U}, \mathbf{E}) \iff u^a \circ \varphi^{-1} \in C^{k,\alpha}(\overline{\varphi(U)}) \quad \text{para todo } a \in \{1,\dots,r\}.$$

Además, existen constantes $c_{k,\alpha}, C_{k,\alpha} > 0$, independientes de $\mathbf{u}$, tales que

$$\begin{aligned} c_{k,\alpha} \sum_{a=1}^{r} \|u^a \circ \varphi^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\varphi(U)})} &\le \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\overline{U},\mathbf{E})} \\ &\le C_{k,\alpha} \sum_{a=1}^{r} \|u^a \circ \varphi^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\varphi(U)})}. \end{aligned} \tag{9.57}$$

*Demostración.* El caso $k = 0$ es el Lema 9.2.8. Supongamos $k \ge 1$. Sea $U'$ una bola coordenada regular mayor, de modo que $\overline{U} \subseteq U'$ y que la carta y el marco estén definidos en $U'$. En la carta y el marco elegidos, el Lema 9.1.28 da, para cada $s \in \{1,\dots,k\}$,

$$(\nabla^s \mathbf{u})^a_{i_1\dots i_s} = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_s} u^a + \sum_{b=1}^{r} \sum_{|\beta| \le s-1} (B_{s,\beta})^a_{b\, i_1 \dots i_s} \partial^\beta u^b. \tag{9.58}$$

Los coeficientes $B_{s,\beta}$ son suaves en $U'$. Sus derivadas de los órdenes que aparecen a continuación están, por lo tanto, uniformemente acotadas en cada compacto contenido en $U'$.

Probemos primero la desigualdad izquierda de (9.57). Sea $\widetilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}^{k,\alpha}_{\overline{U}}(\mathbf{u})$. Elegimos una función de corte $\chi \in C^\infty_c(U')$ igual a uno en una vecindad de $\overline{U}$ y ponemos $\mathbf{v} := \chi\widetilde{\mathbf{u}}$. Si $\mathbf{v} = \sum_{a=1}^{r} v^a \mathbf{e}_a$ en $U'$, denotamos por $\widetilde{v}^a$ la extensión por cero de $v^a \circ \varphi^{-1}$ fuera de $\varphi(U')$. Cada $\widetilde{v}^a$ pertenece a $C^k(\mathbb{R}^n)$ y extiende a $u^a \circ \varphi^{-1}$.

Despejando la parte principal en (9.58), obtenemos

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_s} v^a = (\nabla^s \mathbf{v})^a_{i_1\dots i_s} - \sum_{b=1}^{r} \sum_{|\beta| \le s-1} (B_{s,\beta})^a_{b\, i_1 \dots i_s} \partial^\beta v^b. \tag{9.59}$$

La equivalencia uniforme de las normas de las fibras y una inducción sobre $s$ proporcionan

$$\sum_{a=1}^{r} \sum_{|\beta| \le k} \|D^\beta \widetilde{v}^a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{s=0}^{k} \|\nabla^s \mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E}_s)}. \tag{9.60}$$

Demostremos esta estimación por inducción. Para $0 \le s \le k$, pongamos

$$S_s := \sum_{a=1}^{r} \sum_{|\beta| \le s} \|D^\beta \widetilde{v}^a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad T_s := \sum_{q=0}^{s} \|\nabla^q \mathbf{v}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E}_q)}.$$

Como $\mathbf{v}$ tiene soporte compacto en el dominio del marco, la extensión por cero no cambia los supremos de sus componentes. La equivalencia uniforme entre la norma de una sección y las normas de sus componentes da $S_0 \le C_0 T_0$.

Supongamos que $S_{s-1} \le C_{s-1} T_{s-1}$ para cierto $1 \le s \le k$. Al tomar valores absolutos en (9.59), usar que los coeficientes $B_{s,\beta}$ están uniformemente acotados en el compacto que contiene el soporte de $\mathbf{v}$ y sumar sobre

$a$ y sobre todos los bloques $(i_1,\dots,i_s)$, obtenemos

$$\sum_{a=1}^{r}\sum_{|\gamma|=s}\|D^{\gamma}\widetilde{v}^{a}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \le C_s'\left(\|\nabla^s\mathbf{v}\|_{L^{\infty}(M,\mathbf{E}_s)} + S_{s-1}\right).$$

Aquí sólo se modifica la constante al pasar de bloques ordenados de índices a multiíndices, pues ambas familias son finitas. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} S_s &\le S_{s-1} + C_s'\left(\|\nabla^s\mathbf{v}\|_{L^{\infty}(M,\mathbf{E}_s)} + S_{s-1}\right)\\ &\le \left((1+C_s')C_{s-1} + C_s'\right)T_s. \end{aligned}$$

Esto prueba el paso inductivo. Tomando el máximo de las constantes que aparecen para $0 \le s \le k$ se obtiene (9.60).

Resta controlar las seminormas de Hölder de las derivadas de orden $k$. Las componentes de $\nabla^k\mathbf{v}$ son Hölder continuas en coordenadas por el Lema 9.2.8, aplicado al haz $\mathbf{E}_k = T^{(0,k)}(TM)\otimes\mathbf{E}$ sobre una bola intermedia que contiene al soporte de $\chi$. Si $|\beta| \le k-1$, la estimación (9.60) controla las primeras derivadas de $D^{\beta}\widetilde{v}^{b}$. Por el teorema del valor medio, estas funciones son Lipschitz y, como tienen soporte en un compacto fijo, son Hölder continuas de exponente $\alpha$ en $\mathbb{R}^n$. La desigualdad

$$[f\mathbf{g}]_{C^{0,\alpha}(K)} \le \|f\|_{C^0(K)}[\mathbf{g}]_{C^{0,\alpha}(K)} + \|\mathbf{g}\|_{C^0(K)}[f]_{C^{0,\alpha}(K)}$$

aplicada a los términos de orden inferior de (9.59) da

$$\sum_{a=1}^{r}[\widetilde{v}^{a}]_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\mathbf{v}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})}.$$

Junto con (9.60), esto implica

$$\sum_{a=1}^{r}\|u^{a}\circ\varphi^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\varphi(U)})} \le C\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})},$$

donde usamos el Lema 9.2.9 para controlar $\mathbf{v} = \chi\widetilde{\mathbf{u}}$. Tomar el ínfimo sobre todas las extensiones $\widetilde{\mathbf{u}}$ prueba la primera desigualdad de (9.57).

Probemos la desigualdad opuesta. Para cada $a \in \{1,\dots,r\}$ elegimos una extensión $w^a \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ de $u^a\circ\varphi^{-1}$. Sea $\eta \in C_c^{\infty}(\varphi(U'))$ una función de corte igual a uno en una vecindad de $\overline{\varphi(U)}$. En $U'$ definimos

$$\mathbf{w} := \sum_{a=1}^{r}\big((\eta w^a)\circ\varphi\big)\mathbf{e}_a$$

y denotamos por $\widetilde{\mathbf{w}}$ su extensión por cero fuera de $U'$. La presencia de $\eta$ asegura que $\widetilde{\mathbf{w}}$ es una sección global de clase $C^k$ y que $\widetilde{\mathbf{w}}\restriction_U = \mathbf{u}$.

La fórmula directa (9.58), la regla de Leibniz y el Lema 9.2.8, aplicado otra vez al haz $\mathbf{E}_k$, proporcionan

$$\|\widetilde{\mathbf{w}}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \le C\sum_{a=1}^{r}\|w^a\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

Los términos de orden $k$ se controlan por las seminormas de las $w^a$. Los términos de orden menor poseen

una derivada adicional acotada y se controlan mediante el teorema del valor medio, exactamente como en la primera parte. Tomando primero el ínfimo sobre las extensiones escalares $w^a$ y después en la definición de la norma de $\mathbf{u}$, obtenemos la segunda desigualdad de (9.57). Las dos construcciones prueban también la equivalencia de pertenencia. □

La siguiente versión localizada de la norma permitirá ensamblar las estimaciones obtenidas en distintas cartas.

**Proposición 9.2.11.** (Equivalencia de la norma de Hölder localizada) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta, conexa y sin frontera. Sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada y una conexión compatible. Consideremos bolas coordenadas regulares $(U_i, \varphi_i)_{i=1}^N$ que cubren $M$ y funciones de corte suaves $(\psi_i)_{i=1}^N$ tales que

$$0 \le \psi_i \le 1, \qquad \operatorname{supp}(\psi_i) \Subset U_i, \qquad \sum_{i=1}^{N} \psi_i = 1.$$

Para cada $i$, sea $(\mathbf{e}_{i,1}, \dots, \mathbf{e}_{i,r})$ un marco local de $\mathbf{E}$ definido en una vecindad de $\overline{U_i}$, y escribamos

$$\psi_i \mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u_i^a \mathbf{e}_{i,a} \qquad \text{en } U_i.$$

Si $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$, existen constantes $c, C > 0$ tales que

$$c\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \le \sum_{i=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \|u_i^a \circ \varphi_i^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\varphi_i(U_i)})} \le C\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \tag{9.61}$$

para toda $\mathbf{u} \in \Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$.

*Demostración.* El Lema 9.2.9 da una constante $C_0 > 0$, independiente de $i$, tal que

$$\|\psi_i \mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \le C_0 \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})}.$$

La uniformidad se debe a que sólo interviene una familia finita de funciones de corte. El Lema 9.2.10, aplicado a $\psi_i \mathbf{u} \restriction_{U_i}$, da la segunda desigualdad de (9.61).
Probemos la primera. Pongamos $K_i := \varphi_i(\operatorname{supp} \psi_i) \Subset \varphi_i(U_i)$ y elijamos $\eta_i \in C_c^\infty(\varphi_i(U_i))$ tal que $\eta_i = 1$ en una vecindad de $K_i$. Para cada $a$, tomamos una extensión $v_i^a \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ de $u_i^a \circ \varphi_i^{-1}$. La función $\eta_i v_i^a$, extendida por cero fuera de $\varphi_i(U_i)$, sigue siendo una extensión de esa componente. En $U_i$ reconstruimos la sección

$$\sum_{a=1}^{r} \big((\eta_i v_i^a) \circ \varphi_i\big) \mathbf{e}_{i,a}$$

y denotamos por $\widetilde{\mathbf{u}}_i$ su extensión por cero fuera de $U_i$. Por construcción, $\widetilde{\mathbf{u}}_i = \psi_i \mathbf{u}$. La comparación local y la regla del producto dan

$$\|\psi_i \mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \le C_i \sum_{a=1}^{r} \|v_i^a\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

Tomando el ínfimo sobre las extensiones $v_i^a$, sumando en $i$ y usando $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \mathbf{u}$, obtenemos

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \leq C \sum_{i=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \|u_i^a \circ \varphi_i^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\varphi_i(U_i)})}.$$

Esto concluye la prueba. □

**Corolario 9.2.12.** (Completitud de los espacios de secciones de Hölder) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta, conexa y sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ es un espacio de Banach.

*Demostración.* Sea $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$. Para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ escribimos

$$\psi_i \mathbf{u}_j = \sum_{a=1}^{r} u_{i,j}^a \mathbf{e}_{i,a} \qquad \text{en } U_i.$$

Para cada par $(i, a)$, las componentes de $\psi_i \mathbf{u}_j$ forman una sucesión de Cauchy en $C^{k,\alpha}(\overline{\varphi_i(U_i)})$ por (9.61). La Proposición 3.5.4 proporciona un límite $f_i^a$ en ese espacio. Como la norma de extensión controla la norma uniforme sobre la cerradura, $f_i^a$ se anula fuera del compacto fijo $K_i = \varphi_i(\operatorname{supp} \psi_i)$, pues esto ocurre para todas las componentes de la sucesión.
Elegimos extensiones globales de los $f_i^a$, las multiplicamos por las funciones $\eta_i$ de la prueba anterior y reconstruimos secciones globales $\mathbf{v}_i$ con soporte en $U_i$. La estimación obtenida en esa prueba da

$$\|\psi_i \mathbf{u}_j - \mathbf{v}_i\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \leq C_i \sum_{a=1}^{r} \|(u_{i,j}^a \circ \varphi_i^{-1}) - f_i^a\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\varphi_i(U_i)})},$$

y el miembro derecho converge a cero. Definimos

$$\mathbf{u} := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i.$$

Como $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \mathbf{u}_j$ y la suma es finita,

$$\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \leq \sum_{i=1}^{N} \|\psi_i \mathbf{u}_j - \mathbf{v}_i\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $\mathbf{u} \in \Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ y el espacio es completo. □

Ya podemos trasladar los encajes euclidianos a secciones de haces.

**Teorema 9.2.13.** (Encaje de Sobolev–Morrey para haces vectoriales) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta y sin frontera de dimensión $n$, y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica

fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$. Supongamos que

$$k + \alpha \leq m - \frac{n}{p}. \tag{9.62}$$

Entonces cada elemento de $W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ admite un único representante en $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ y el mapeo que asigna ese representante define un encaje lineal continuo

$$W^{m,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E}).$$

En particular, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \leq C\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \tag{9.63}$$

para todo $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M, \mathbf{E})$.

*Demostración.* Podemos trabajar en cada componente conexa de $M$ y, por lo tanto, suponemos que $M$ es conexa. Elegimos bolas coordenadas regulares, funciones de corte y marcos locales como en la Proposición 9.2.11. Para $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ escribimos

$$\psi_i \mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u_i^a \mathbf{e}_{i,a} \qquad \text{en } U_i.$$

La estimación de Leibniz utilizada en la prueba del Teorema 9.2.1, en particular la estimación (9.45) con $j = 0$, proporciona una constante $C_0 > 0$ tal que

$$\|\psi_i \mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \leq C_0\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \tag{9.64}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$.
El Lema 9.1.44 muestra que $u_i^a \circ \varphi_i^{-1} \in W^{m,p}(\varphi_i(U_i))$ y que

$$\sum_{a=1}^{r} \|u_i^a \circ \varphi_i^{-1}\|_{W^{m,p}(\varphi_i(U_i))} \leq C_i\|\psi_i \mathbf{u}\|_{W^{m,p}(U_i, \mathbf{E}\restriction_{U_i})}. \tag{9.65}$$

Como $\operatorname{supp}(\psi_i) \Subset U_i$, cada componente tiene soporte compacto contenido en $\varphi_i(U_i)$ y, por lo tanto, pertenece a $W_0^{m,p}(\varphi_i(U_i))$. El Teorema 3.5.7 y (9.62) dan

$$\|u_i^a \circ \varphi_i^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\varphi_i(U_i)})} \leq C_i'\|u_i^a \circ \varphi_i^{-1}\|_{W^{m,p}(\varphi_i(U_i))}.$$

Tomamos los representantes euclidianos de las componentes, reconstruimos en $U_i$ la sección $\psi_i \mathbf{u}$ y la extendemos por cero fuera de $U_i$. La suma de estas secciones es un representante de $\mathbf{u}$, pues coincide casi en todas partes con $\sum_{i=1}^{N} \psi_i \mathbf{u} = \mathbf{u}$. La Proposición 9.2.11, las estimaciones anteriores y la finitud de la cubierta

dan

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} &\le C\sum_{i=1}^{N}\sum_{a=1}^{r}\|u_i^a\circ\varphi_i^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\varphi_i(U_i)})}\\ &\le C\sum_{i=1}^{N}\sum_{a=1}^{r}\|u_i^a\circ\varphi_i^{-1}\|_{W^{m,p}(\varphi_i(U_i))}\\ &\le C\sum_{i=1}^{N}\|\psi_i\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C'\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.\end{aligned}$$

Esto prueba (9.63).

La unicidad del representante se obtiene como en el caso euclidiano. Si una sección continua se anula casi en todas partes y fuera distinta de cero en algún punto, su norma sería positiva en una vecindad abierta de ese punto, que tiene medida de Riemann–Lebesgue positiva. Por lo tanto, la sección debe anularse en todo $M$. □

**Teorema 9.2.14.** (Rellich–Kondrashov hacia secciones de Hölder) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta sin frontera de dimensión $n$, y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $m\in\mathbb{N}$, $1\le p<\infty$, $k\in\mathbb{N}_0$ y $0<\alpha<1$. Si

$$k+\alpha < m-\frac{n}{p}, \tag{9.66}$$

entonces el encaje

$$W^{m,p}(M,\mathbf{E})\hookrightarrow\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$$

es compacto.

*Demostración.* Sea $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Usamos la cubierta, las funciones de corte y los marcos de la prueba anterior. Para cada $i\in\{1,\dots,N\}$ escribimos

$$\psi_i\mathbf{u}_j=\sum_{a=1}^{r}u_{i,j}^a\mathbf{e}_{i,a}\qquad\text{en } U_i.$$

Las estimaciones (9.64) y (9.65) muestran que, para cada par $(i,a)$, la sucesión

$$\left(u_{i,j}^a\circ\varphi_i^{-1}\right)_{j\in\mathbb{N}}$$

está acotada en $W_0^{m,p}(\varphi_i(U_i))$. Por el Teorema 3.5.10, cada una de estas sucesiones posee una subsucesión convergente en $C^{k,\alpha}(\overline{\varphi_i(U_i)})$.

Sólo intervienen los $Nr$ pares de índices. Extrayendo sucesivamente y renombrando la última subsucesión, podemos suponer que

$$u_{i,j}^a\circ\varphi_i^{-1}\quad\text{converge en}\quad C^{k,\alpha}(\overline{\varphi_i(U_i)})$$

para todo $i\in\{1,\dots,N\}$ y todo $a\in\{1,\dots,r\}$. En particular, las componentes localizadas forman sucesiones de

Cauchy en esos espacios. La primera desigualdad de (9.61), aplicada a $\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_\ell$, da

$$\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_\ell\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \le C \sum_{i=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \|(u^a_{i,j} - u^a_{i,\ell}) \circ \varphi_i^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\varphi_i(U_i)})}.$$

El miembro derecho converge a cero cuando $j, \ell \to \infty$. Por lo tanto, la subsucesión es de Cauchy en $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ y converge en ese espacio por el Corolario 9.2.12. Esto prueba la compacidad del encaje. □

**Corolario 9.2.15.** (Exponentes de regularidad para secciones) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta sin frontera de dimensión $n$, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \le p < \infty$. Sea

$$\sigma := m - \frac{n}{p} > 0.$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\sigma = \ell + \theta$, con $\ell \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \theta < 1$, entonces

$$W^{m,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^{\ell,\theta}(\mathbf{E})$$

continuamente, y el encaje en $\Gamma^{\ell,\beta}(\mathbf{E})$ es compacto para todo $0 < \beta < \theta$.

(b) Si $\sigma = s \in \mathbb{N}$, entonces para todo $0 < \alpha < 1$ el encaje

$$W^{m,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^{s-1,\alpha}(\mathbf{E})$$

es compacto y, en particular, continuo.

*Demostración.* Si $\sigma = \ell + \theta$ con $0 < \theta < 1$, el Teorema 9.2.13 aplicado a $k = \ell$ y $\alpha = \theta$ da el encaje continuo, pues

$$\ell + \theta = m - \frac{n}{p}.$$

Si $0 < \beta < \theta$, entonces

$$\ell + \beta < m - \frac{n}{p},$$

y el Teorema 9.2.14 da la compacidad del encaje en $\Gamma^{\ell,\beta}(\mathbf{E})$.
Si $\sigma = s \in \mathbb{N}$ y $0 < \alpha < 1$, se tiene

$$(s-1) + \alpha < s = m - \frac{n}{p}.$$

El mismo teorema de Rellich–Kondrashov, con $k = s - 1$, proporciona el encaje compacto en $\Gamma^{s-1,\alpha}(\mathbf{E})$. Todo operador lineal compacto entre espacios normados es continuo, lo que prueba también la última afirmación. □

### 9.2.2 Independencia de los espacios de Sobolev en el caso compacto

Los espacios de Sobolev, al igual que en el contexto de variedades riemannianas, resultan ser independientes de la elección de métrica y conexión en haces vectoriales definidos sobre una variedad riemanniana compacta. Para demostrar este hecho, estableceremos algunos resultados preliminares que serán de utilidad. En particular,

formularemos un resultado análogo al Lema 7.1.10 en el contexto de haces vectoriales.

**Lema 9.2.16.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sean $\mathbf{g}$ y $\widetilde{\mathbf{g}}$ dos métricas riemannianas en $M$, sean $\nabla^{TM}$ y $\widetilde{\nabla}^{TM}$ dos conexiones en $TM$, sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango finito, sean $\mathbf{h}$ y $\widetilde{\mathbf{h}}$ dos métricas fibradas suaves en $\mathbf{E}$, y sean $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $\widetilde{\nabla}^{\mathbf{E}}$ dos conexiones en $\mathbf{E}$.
Sea $K \subseteq M$ un compacto y $m \geq 0$. Entonces existen constantes $c_m, C_m > 0$ tales que

$$c_m \sum_{j=0}^{m} |\nabla^j \mathbf{u}(x)|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}} \leq \sum_{j=0}^{m} |\widetilde{\nabla}^j \mathbf{u}(x)|^2_{\widetilde{\mathbf{g}},\widetilde{\mathbf{h}}} \leq C_m \sum_{j=0}^{m} |\nabla^j \mathbf{u}(x)|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}}, \qquad \forall x \in K,$$

para toda sección $\mathbf{u} \in \Gamma^m(\mathbf{E})$.

*Demostración.* Si $K = \varnothing$, la afirmación es inmediata. Supongamos que $K \neq \varnothing$. Las conexiones $\nabla^{TM}$ y $\nabla^{\mathbf{E}}$ inducen conexiones en $T^{(0,j)}(TM) \otimes \mathbf{E}$, que denotamos también por $\nabla$. Por la Definición 1.7.10, podemos considerar

$$\mathscr{T}_m(\mathbf{E}) := \bigoplus_{j=0}^{m} T^{(0,j)}(TM) \otimes \mathbf{E}.$$

Para $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$ escribimos

$$J^m_\nabla \mathbf{u} := (\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}, \ldots, \nabla^m \mathbf{u})$$

y, para cada $p \in M$, definimos

$$\mathscr{D}_{\nabla,p}(\mathbf{E}) := \{J^m_\nabla \mathbf{u}(p) \mid \mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})\} \subseteq \mathscr{T}_m(\mathbf{E})_p.$$

Cada $\mathscr{D}_{\nabla,p}(\mathbf{E})$ es un subespacio vectorial por la linealidad de las derivadas covariantes.
Sea $(U, \varphi)$ una carta suave, sea $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r)$ un marco local suave de $\mathbf{E}$ en $U$, sea $p \in U$ y pongamos $x := \varphi(p)$ y $N := \binom{n+m}{m}$. Si $\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u^a \mathbf{e}_a$, definimos el mapeo lineal

$$F^{\varphi,\mathbf{e}}_{\nabla,p} \colon \mathscr{D}_{\nabla,p}(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathbb{K}^{rN}, \qquad F^{\varphi,\mathbf{e}}_{\nabla,p}(J^m_\nabla \mathbf{u}(p)) := \big(D^\alpha(u^a \circ \varphi^{-1})(x)\big)_{1\leq a\leq r,\ |\alpha|\leq m},$$

donde usamos la notación de multiíndices de la Definición 1.1.10. El Lema 9.1.28, en particular la fórmula (9.3), da

$$(\nabla^j \mathbf{u})^a_{i_1\ldots i_j} = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_j}(u^a \circ \varphi^{-1}) + \sum_{b=1}^{r} \sum_{|\alpha|<j} A^{ab,\alpha}_{i_1\ldots i_j} D^\alpha(u^b \circ \varphi^{-1}), \tag{9.67}$$

con coeficientes suaves en $U$. Una inducción sobre $j$ en (9.67) muestra que el jet covariante determina todas las derivadas parciales de las componentes hasta orden $m$. En consecuencia, $F^{\varphi,\mathbf{e}}_{\nabla,p}$ está bien definido y es inyectivo.
Sea $a = (a^b_\alpha)_{1\leq b\leq r,\ |\alpha|\leq m} \in \mathbb{K}^{rN}$. La Proposición 1.3.6 proporciona una función $\chi \in C^\infty_c(U)$ igual a uno en una vecindad de $p$. La sección

$$\mathbf{v}(q) := \chi(q) \sum_{b=1}^{r} \left( \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{a^b_\alpha}{\alpha!} (\varphi(q) - x)^\alpha \right) \mathbf{e}_b(q), \qquad q \in U,$$

prolongada por cero fuera de $U$, pertenece a $\Gamma(\mathbf{E})$ y satisface $D^\alpha(v^b \circ \varphi^{-1})(x) = a^b_\alpha$. Por lo tanto, $F^{\varphi,\mathbf{e}}_{\nabla,p}$ es

suprayectivo y, en consecuencia, un isomorfismo.
Sea $(e_1,\dots,e_{rN})$ la base canónica de $\mathbb{K}^{rN}$. Al expresar los jets covariantes en función de los jets parciales prescritos mediante (9.67), se obtiene que las componentes de las secciones locales

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu(q) := (F^{\varphi,\mathbf{e}}_{\nabla,q})^{-1}(e_\nu), \qquad q \in U, \quad \nu \in \{1,\dots,rN\},$$

son suaves. Sus valores forman una base de $\mathscr{D}_{\nabla,q}(\mathbf{E})$ para todo $q \in U$. Por el Lema 1.7.52,

$$\mathscr{D}_\nabla(\mathbf{E}) := \bigcup_{p\in M} \mathscr{D}_{\nabla,p}(\mathbf{E})$$

es un subhaz vectorial suave de $\mathscr{T}_m(\mathbf{E})$ de rango $rN$. Las conexiones $\widetilde{\nabla}^{TM}$ y $\widetilde{\nabla}^{\mathbf{E}}$ producen de la misma manera el subhaz $\mathscr{D}_{\widetilde{\nabla}}(\mathbf{E})$ y los isomorfismos $F^{\varphi,\mathbf{e}}_{\widetilde{\nabla},p}$.
El compacto $K$ está cubierto por un número finito de bolas coordenadas regulares compactas y, si $M$ tiene frontera, de medias bolas coordenadas regulares compactas

$$\overline{B}_1,\dots,\overline{B}_\ell,$$

cada una contenida en el dominio de una carta $\varphi_i$ y de un marco local $\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_{1,i},\dots,\mathbf{e}_{r,i})$ de $\mathbf{E}$. Para $p \in \overline{B}_i$ y $v \in \mathbb{K}^{rN}$ ponemos

$$Q_i(p,v) := \sum_{j=0}^{m} \left| \left((F^{\varphi_i,\mathbf{e}_i}_{\nabla,p})^{-1}(v)\right)_j \right|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}},$$
$$\widetilde{Q}_i(p,v) := \sum_{j=0}^{m} \left| \left((F^{\varphi_i,\mathbf{e}_i}_{\widetilde{\nabla},p})^{-1}(v)\right)_j \right|^2_{\widetilde{\mathbf{g}},\widetilde{\mathbf{h}}}.$$

Las funciones $Q_i$ y $\widetilde{Q}_i$ son continuas y, para cada $p$, son formas cuadráticas positivo definidas respecto de $v$. Si

$$\mathbb{S}^{rN}_{\mathbb{K}} := \{v \in \mathbb{K}^{rN} \mid \|v\|_2 = 1\},$$

entonces

$$R_i(p,v) := \frac{\widetilde{Q}_i(p,v)}{Q_i(p,v)}$$

es continua y estrictamente positiva en el compacto $\overline{B}_i \times \mathbb{S}^{rN}_{\mathbb{K}}$. Definimos

$$c_{i,m} := \min_{(p,v)\in \overline{B}_i\times\mathbb{S}^{rN}_{\mathbb{K}}} R_i(p,v) > 0, \qquad C_{i,m} := \max_{(p,v)\in \overline{B}_i\times\mathbb{S}^{rN}_{\mathbb{K}}} R_i(p,v) < \infty.$$

La homogeneidad de $Q_i$ y $\widetilde{Q}_i$ implica que

$$c_{i,m} Q_i(p,v) \le \widetilde{Q}_i(p,v) \le C_{i,m} Q_i(p,v) \tag{9.68}$$

para todo $p \in \overline{B}_i$ y todo $v \in \mathbb{K}^{rN}$.
Sea $\mathbf{u} \in \Gamma^m(\mathbf{E})$ y sea $p \in \overline{B}_i$. La construcción polinómica anterior proporciona una sección suave cuyo jet de derivadas parciales en $p$ coincide con el de $\mathbf{u}$. La fórmula (9.3) muestra entonces que los jets covariantes de

ambas secciones coinciden en $p$, para cualquiera de las dos parejas de conexiones. Así,

$$\begin{aligned} F^{\varphi_i,\mathbf{e}_i}_{\nabla,p}(J^m_\nabla \mathbf{u}(p)) &= \big(D^\alpha(u^a_i \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p))\big)_{1\le a\le r,\ |\alpha|\le m} \\ &= F^{\varphi_i,\mathbf{e}_i}_{\widetilde{\nabla},p}(J^m_{\widetilde{\nabla}} \mathbf{u}(p)). \end{aligned}$$

Al aplicar (9.68) a este vector, resulta

$$c_{i,m}\sum_{j=0}^m |\nabla^j \mathbf{u}(p)|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}} \le \sum_{j=0}^m |\widetilde{\nabla}^j \mathbf{u}(p)|^2_{\widetilde{\mathbf{g}},\widetilde{\mathbf{h}}} \le C_{i,m}\sum_{j=0}^m |\nabla^j \mathbf{u}(p)|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}}.$$

Tomando

$$c_m := \min_{1\le i\le \ell} c_{i,m} > 0, \qquad C_m := \max_{1\le i\le \ell} C_{i,m} < \infty,$$

se obtiene la desigualdad en todo $K$. □

## 9.3 Interpolación: desigualdad de Gagliardo–Nirenberg

En esta sección estudiaremos la desigualdad de *interpolación de Gagliardo–Nirenberg* en variedades (y en haces vectoriales). Dicha desigualdad dice lo siguiente:

**Teorema 9.3.1.** (Desigualdad de Gagliardo–Nirenberg para haces vectoriales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta sin frontera de dimensión $n$, y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango finito, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ y una conexión compatible $\nabla^\mathbf{E}$. Sean $m \ge 1$, $0 \le j \le m$ y $1 \le p < \infty$. Entonces existe una constante $C > 0$, dependiente únicamente de $M, \mathbf{g}, \mathbf{E}, \mathbf{h}_\mathbf{E}, \nabla^\mathbf{E}, m, j$ y $p$, tal que

$$\|\nabla^j \mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \le C\,\|\mathbf{F}\|^{1-\frac{j}{m}}_{L^p(M,\mathbf{E})}\left(\|\mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} + \|\nabla^m \mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,m)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right)^{\frac{j}{m}},$$

para toda $\mathbf{F} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Aquí interpretamos $\nabla^0\mathbf{F} = \mathbf{F}$, de modo que $T^{(0,0)}(TM)\otimes\mathbf{E} = \mathbf{E}$.

*Demostración.* Los casos $j = 0$ y $j = m$ son inmediatos. Si $j = 0$, la desigualdad se reduce a $\|\mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \le C\|\mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}$; y si $j = m$, se reduce a

$$\|\nabla^m \mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,m)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \le C\left(\|\mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} + \|\nabla^m \mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,m)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right).$$

Supongamos entonces que $0 < j < m$.

Primero probaremos la desigualdad para secciones suaves. Sea $\mathbf{F} \in \Gamma(\mathbf{E})$. Como $M$ es compacta, podemos tomar una cubierta finita $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha=1}^N$ de $M$ por bolas coordenadas regulares, de modo que $\overline{U_\alpha}$ esté contenida en el dominio de un marco local suave $(\mathbf{e}_{1,\alpha},\dots,\mathbf{e}_{r,\alpha})$ de $\mathbf{E}$. Tomamos además una partición de la unidad $(\psi_\alpha)_{\alpha=1}^N$ subordinada a esta cubierta, con $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subseteq U_\alpha$ para todo $\alpha$.

Para cada $\alpha \in \{1,\dots,N\}$, escribimos

$$(\psi_\alpha \mathbf{F}) \restriction_{U_\alpha} = \sum_{a=1}^r F^a_\alpha \mathbf{e}_{a,\alpha},$$

y denotamos $\Omega_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha)$. Como $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subseteq U_\alpha$, se tiene $\operatorname{supp}(F^a_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}) \Subset \Omega_\alpha$, para todo $a \in \{1,\dots,r\}$.

Definimos la extensión por cero de $F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}$ a $\mathbb{R}^n$ por

$$\widetilde{F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}}(y) := \begin{cases} F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}(y), & y \in \Omega_\alpha, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_\alpha. \end{cases}$$

Como $F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es suave y tiene soporte compacto contenido en $\Omega_\alpha$, su extensión por cero pertenece a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además, para todo multiíndice $\beta$, se cumple

$$D^\beta \widetilde{F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}} = \widetilde{D^\beta (F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1})}.$$

En consecuencia, para cada entero $s \geq 0$,

$$\sum_{|\beta|=s} \|D^\beta \widetilde{F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\beta|=s} \|D^\beta (F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1})\|_{L^p(\Omega_\alpha)}.$$

Aplicando la desigualdad euclidiana de Gagliardo–Nirenberg en $\mathbb{R}^n$, en la forma clásica

$$\sum_{|\beta|=j} \|D^\beta v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{j}{m}} \left( \sum_{|\gamma|=m} \|D^\gamma v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{j}{m}}, \qquad v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

obtenemos, para $v = \widetilde{F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}}$,

$$\sum_{|\beta|=j} \|D^\beta (F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1})\|_{L^p(\Omega_\alpha)} \leq A \|F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}\|_{L^p(\Omega_\alpha)}^{1-\frac{j}{m}} \left( \sum_{|\gamma|=m} \|D^\gamma (F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1})\|_{L^p(\Omega_\alpha)} \right)^{\frac{j}{m}}.$$

Sumando en $a$ y usando la desigualdad de Hölder de la Proposición B.7.9 para la medida de conteo finita, con exponentes $\dfrac{m}{m-j}$ y $\dfrac{m}{j}$, se obtiene

$$\sum_{a=1}^r \sum_{|\beta|=j} \|D^\beta (F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1})\|_{L^p(\Omega_\alpha)} \leq A \left( \sum_{a=1}^r \|F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}\|_{L^p(\Omega_\alpha)} \right)^{1-\frac{j}{m}} \left( \sum_{a=1}^r \sum_{|\gamma|=m} \|D^\gamma (F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1})\|_{L^p(\Omega_\alpha)} \right)^{\frac{j}{m}}.$$

Ahora relacionamos las derivadas parciales euclidianas de los componentes con las derivadas covariantes de $\psi_\alpha \mathbf{F}$. Por el Lema 9.1.28, para cada $s \in \{1, \dots, m\}$, las componentes de $\nabla^s(\psi_\alpha \mathbf{F})$ en la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y el marco $(\mathbf{e}_{1,\alpha}, \dots, \mathbf{e}_{r,\alpha})$ están dadas por

$$(\nabla^s(\psi_\alpha \mathbf{F}))^a_{i_1 \dots i_s} = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_s} F_\alpha^a + \sum_{b=1}^r \sum_{|\beta| \leq s-1} (B_{\alpha,\beta})^a_{b\, i_1 \dots i_s} \partial^\beta F_\alpha^b,$$

donde los coeficientes $(B_{\alpha,\beta})^a_{b\, i_1 \dots i_s}$ son suaves en $U_\alpha$. Como $\operatorname{supp}(\psi_\alpha \mathbf{F}) \subseteq U_\alpha$, todos los cálculos se realizan en un compacto contenido en $U_\alpha$, y por lo tanto esos coeficientes, así como los coeficientes de cambio entre la medida riemanniana y la medida euclidiana en coordenadas, están uniformemente acotados. De esta

fórmula triangular se deduce que existen constantes $P_{\alpha,s}, Q_{\alpha,s} > 0$, independientes de $\mathbf{F}$, tales que

$$\|\nabla^s(\psi_\alpha \mathbf{F})\|_{L^p(M,T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \leq P_{\alpha,s} \sum_{a=1}^{r} \sum_{|\beta|\leq s} \|D^\beta(F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1})\|_{L^p(\Omega_\alpha)},$$

y

$$\sum_{a=1}^{r} \sum_{|\beta|\leq s} \|D^\beta(F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1})\|_{L^p(\Omega_\alpha)} \leq Q_{\alpha,s} \sum_{\ell=0}^{s} \|\nabla^\ell(\psi_\alpha \mathbf{F})\|_{L^p(M,T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E})}.$$

En particular, usando estas estimaciones con $s = j$, usando también la desigualdad euclidiana anterior para los órdenes $1,\dots,j$, y usando que el orden 0 corresponde a la norma $L^p$, obtenemos una constante $R_\alpha > 0$, independiente de $\mathbf{F}$, tal que

$$\|\nabla^j(\psi_\alpha \mathbf{F})\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \leq R_\alpha \|\psi_\alpha \mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}^{1-\frac{j}{m}} \left( \sum_{\ell=0}^{m} \|\nabla^\ell(\psi_\alpha \mathbf{F})\|_{L^p(M,T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \right)^{\frac{j}{m}}.$$

Como la cubierta es finita, tomando $R := \max\{R_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq N\}$, se tiene la misma estimación con $R$ en lugar de $R_\alpha$.

Sumamos ahora en $\alpha$. Como $\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha \mathbf{F}$, la desigualdad del triángulo da

$$\|\nabla^j \mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \leq \sum_{\alpha=1}^{N} \|\nabla^j(\psi_\alpha \mathbf{F})\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})}.$$

Por la estimación anterior y la desigualdad de Hölder de la Proposición B.7.9 para la medida de conteo finita,

$$\|\nabla^j \mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \leq R \left( \sum_{\alpha=1}^{N} \|\psi_\alpha \mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \right)^{1-\frac{j}{m}} \left( \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\ell=0}^{m} \|\nabla^\ell(\psi_\alpha \mathbf{F})\|_{L^p(M,T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \right)^{\frac{j}{m}}.$$

Resta controlar los términos con $\psi_\alpha \mathbf{F}$ por $\mathbf{F}$. Para el término de orden cero, como cada $\psi_\alpha$ es suave y la familia es finita, existe $D_0 > 0$, independiente de $\mathbf{F}$, tal que

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \|\psi_\alpha \mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq D_0 \|\mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

Por otro lado, para cada $s \leq m$, la regla de Leibniz para la conexión inducida en $T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E}$ da

$$|\nabla^s(\psi_\alpha \mathbf{F})|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \leq \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} |\nabla^{s-t}\psi_\alpha|_{\mathbf{g}} \, |\nabla^t \mathbf{F}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}.$$

Como $M$ es compacta y la familia $\{\psi_\alpha\}_{\alpha=1}^{N}$ es finita, las cantidades $\| |\nabla^{s-t}\psi_\alpha|_{\mathbf{g}} \|_{L^\infty(M)}$, con $0 \leq t \leq s \leq m$ y

$1 \leq \alpha \leq N$, están uniformemente acotadas. Por consiguiente, existe $D_m > 0$, independiente de $\mathbf{F}$, tal que

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\ell=0}^{m}\|\nabla^{\ell}(\psi_{\alpha}\mathbf{F})\|_{L^p(M,T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \leq D_m \sum_{\ell=0}^{m}\|\nabla^{\ell}\mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E})}.$$

Sustituyendo estas estimaciones, obtenemos

$$\|\nabla^{j}\mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \leq C_1\|\mathbf{F}\|^{1-\frac{j}{m}}_{L^p(M,\mathbf{E})}\left(\sum_{\ell=0}^{m}\|\nabla^{\ell}\mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right)^{\frac{j}{m}}.$$

Finalmente, usamos la equivalencia de la norma de Sobolev con la norma dada por el término de orden cero y la derivada covariante de orden máximo, es decir, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sum_{\ell=0}^{m}\|\nabla^{\ell}\mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \leq C_2\left(\|\mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} + \|\nabla^{m}\mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,m)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right).$$

Esta equivalencia se obtiene, por ejemplo, aplicando el Lema de Ehrling a las inclusiones compactas $W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow W^{\ell,p}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow L^p(M,\mathbf{E})$, para $0 < \ell < m$, y absorbiendo los términos intermedios. Por lo tanto,

$$\|\nabla^{j}\mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \leq C\|\mathbf{F}\|^{1-\frac{j}{m}}_{L^p(M,\mathbf{E})}\left(\|\mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} + \|\nabla^{m}\mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,m)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right)^{\frac{j}{m}}$$

para toda $\mathbf{F} \in \Gamma(\mathbf{E})$.

Ahora sea $\mathbf{F} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Por el Teorema 9.1.48, existe una sucesión $(\mathbf{F}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma(\mathbf{E}) \cap W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{F}_k \to \mathbf{F}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. En particular, $\mathbf{F}_k \to \mathbf{F}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$, $\nabla^j\mathbf{F}_k \to \nabla^j_w\mathbf{F}$ en $L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})$, y $\nabla^m\mathbf{F}_k \to \nabla^m_w\mathbf{F}$ en $L^p(M,T^{(0,m)}(TM)\otimes\mathbf{E})$. Aplicando la desigualdad ya probada a $\mathbf{F}_k$, se tiene

$$\|\nabla^{j}\mathbf{F}_k\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \leq C\|\mathbf{F}_k\|^{1-\frac{j}{m}}_{L^p(M,\mathbf{E})}\left(\|\mathbf{F}_k\|_{L^p(M,\mathbf{E})} + \|\nabla^{m}\mathbf{F}_k\|_{L^p(M,T^{(0,m)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right)^{\frac{j}{m}}.$$

Al hacer $k \to \infty$, concluimos

$$\|\nabla^{j}\mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \leq C\|\mathbf{F}\|^{1-\frac{j}{m}}_{L^p(M,\mathbf{E})}\left(\|\mathbf{F}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} + \|\nabla^{m}_w\mathbf{F}\|_{L^p(M,T^{(0,m)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right)^{\frac{j}{m}}.$$

Esto concluye la demostración. □

## 9.4 Espacios de Sobolev en variedades con frontera

En numerosas aplicaciones, al plantear una EDP aparecen condiciones de frontera de manera natural. Los espacios de Sobolev permiten llevar un problema diferencial a su formulación débil; sin embargo, cuando la variedad tiene frontera, las fórmulas de integración por partes producen términos adicionales sobre $\partial M$. La identidad con secciones de prueba de soporte interior determina el adjunto diferencial formal, como explica la Observación 8.2.4. Las condiciones de frontera intervienen al elegir un dominio para la realización del operador en $L^2$ y al determinar el dominio de su adjunto de Hilbert.

Para este propósito, introducimos la notación

$$\Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(\mathbf{E}) := \{\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E}) | \mathrm{supp}(\mathbf{u}) \Subset \mathrm{Int}(M)\}.$$

Es decir, $\Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(\mathbf{E})$ denota el espacio de secciones suaves cuyo soporte compacto está contenido en el interior de $M$.

Con esta convención, las fórmulas de integración por partes no producen términos de frontera cuando las secciones de prueba pertenecen a $\Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}$. Por ejemplo, en el Teorema 9.1.29, si tomamos $\mathbf{F} \in \Gamma(T^{(k,l)}(TM) \otimes \mathbf{E})$ y $\mathbf{G} \in \Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(T^{(k,l+s)}(TM) \otimes \mathbf{E})$, entonces el término de frontera se anula y la fórmula se reduce a

$$\int_M \langle \nabla^s \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = (-1)^s \int_M \left\langle \mathbf{F}, (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)^s \mathbf{G} \right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} d\lambda_{\mathbf{g}} + \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{s-1-j} \int_{\partial M} \left\langle \nabla^j \mathbf{F}, \iota_{\nu} \left( (\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \circ \nabla)^{s-1-j} \mathbf{G} \right) \right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Así, al definir derivadas débiles en una variedad con frontera, trabajaremos con secciones de prueba pertenecientes a $\Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}$. De este modo, las condiciones de frontera no quedan incorporadas implícitamente en la definición débil; estas se introducirán posteriormente mediante el operador de traza.

A continuación daremos las definiciones necesarias para trabajar con estos espacios de Sobolev.

**Definición 9.4.1.** (Adjunto formal interior) Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con frontera no vacía y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves equipados con métricas fibradas $\mathbf{h_E}$ y $\mathbf{h_F}$, respectivamente. Sea $P \in \mathbf{PDO}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Decimos que $Q \in \mathbf{PDO}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ es un *adjunto formal interior* de $P$ si, para toda $\mathbf{u} \in \Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(\mathbf{E})$ y toda $\mathbf{v} \in \Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(\mathbf{F})$, se cumple

$$\int_M \langle P\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{h_F}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \mathbf{u}, Q\mathbf{v} \rangle_{\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

En este caso escribimos $Q = P_h^*$; el símbolo $P'$ queda reservado para el transpuesto formal complejo–bilineal.

El adjetivo "interior" recuerda que la identidad anterior se prueba únicamente contra secciones cuyo soporte no toca la frontera. Así, el operador $P_h^*$ describe el adjunto hermitiano formal determinado por la parte diferencial de $P$, sin elegir todavía condiciones de frontera.

**Teorema 9.4.2.** (Existencia y unicidad del adjunto formal interior) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con frontera no vacía y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves con métricas fibradas $\mathbf{h_E}, \mathbf{h_F}$. Si $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, entonces $P$ admite un único adjunto formal interior

$$P_h^* \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{F}, \mathbf{E}).$$

Además, sea $(U, \varphi)$ una carta y sean $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ y $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s$ marcos locales ortonormales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, respectivamente, definidos en $U$. Pongamos

$$D_{\varphi}^{\alpha} a := \left[ D^{\alpha} (a \circ \varphi^{-1}) \right] \circ \varphi, \qquad a \in C^{\infty}(U, \mathbb{K}).$$

Si

$$P\left( \sum_{i=1}^{r} u^i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{j=1}^{s} \left( \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha| \le m} a_{\alpha i}^{j} D_{\varphi}^{\alpha} u^i \right) \mathbf{f}_j,$$

entonces

$$P_h^*\left( \sum_{j=1}^{s} v^j \mathbf{f}_j \right) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \sum_{i=1}^{r} \left[ \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D_{\varphi}^{\alpha} \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})}\, \overline{a_{\alpha i}^{j}}\, v^j \right) \right] \mathbf{e}_i,$$

donde $g_{ab} = \mathbf{g}(\partial_a, \partial_b)$. En el caso real, la barra no altera $a^j_{\alpha i}$.

*Demostración.* Aplicamos el Teorema 8.2.3 a la variedad sin frontera $\mathrm{Int}(M)$ y al operador restringido a su interior. La expresión local allí demostrada depende suavemente de los coeficientes de $P$, de las métricas fibradas y del peso coordenado $\sqrt{\det(\mathbf{g})}$ de la medida riemanniana; como todos esos datos son suaves hasta $\partial M$, sus coeficientes se prolongan suavemente a cada carta de borde y definen el operador mostrado arriba en todo $M$. Para secciones de prueba con soporte contenido en $\mathrm{Int}(M)$, la identidad integral es precisamente la del teorema citado y no produce términos de borde.
Si $Q_1, Q_2$ satisfacen la identidad interior, el lema de unicidad del Capítulo 8 aplicado en $\mathrm{Int}(M)$ da $Q_1 = Q_2$ allí. Sus coeficientes locales son suaves hasta la frontera y coinciden en el abierto denso interior; por continuidad coinciden también en la frontera. Por lo tanto, $Q_1 = Q_2$ en $M$. □

**Definición 9.4.3.** (Derivada covariante débil en variedades con frontera) Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con frontera no vacía y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión suave $\nabla^{\mathbf{E}}$. En la construcción de $\nabla^s$ usamos la conexión producto inducida por Levi–Civita y por $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $s \geq 0$ y sea $\mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$. Decimos que una sección $\mathbf{v} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E})$ es la $s$-ésima derivada covariante débil de $\mathbf{u}$ si, para toda $\sigma \in \Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E})$, se cumple

$$\int_M \langle \mathbf{v}, \sigma \rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \mathbf{u}, (\nabla^s)^*_h \sigma \rangle_{\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

En este caso escribimos $\mathbf{v} = \nabla^s_w \mathbf{u}$. Para $s = 0$ adoptamos la convención $\nabla^0_w \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

En la definición anterior, $(\nabla^s)^*_h$ denota el adjunto hermitiano formal interior de $\nabla^s$, no su transpuesto bilineal. Esta elección permite definir derivadas débiles sin introducir condiciones de frontera de manera implícita.

**Definición 9.4.4.** (Espacios de Sobolev globales y locales en variedades con frontera) Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con frontera no vacía, $\pi\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión suave $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p \leq \infty$.

(a) *Espacios de Sobolev globales.* Definimos $W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ como el conjunto de secciones $\mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$ tales que, para toda $s \in \{0, \dots, m\}$, la derivada covariante débil $\nabla^s_w \mathbf{u}$ existe y pertenece a $L^p(M, T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E})$. Equipamos este espacio con la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} := \begin{cases} \left( \displaystyle\sum_{s=0}^{m} \int_M |\nabla^s_w \mathbf{u}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{0 \leq s \leq m} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in M} |\nabla^s_w \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}, & p = \infty. \end{cases}$$

Con esta norma, $W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ es un espacio de Banach.

(b) *Espacios de Sobolev locales.* Definimos $W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$ como el conjunto de secciones $\mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$ tales que, para toda $s \in \{0, \dots, m\}$, la derivada covariante débil $\nabla^s_w \mathbf{u}$ existe y pertenece a $L^p_{\mathrm{loc}}(M, T^{(0,s)}(TM) \otimes \mathbf{E})$.

Si $K \subseteq M$ es compacto, definimos la seminorma local

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E};K)} := \begin{cases} \left( \displaystyle\sum_{s=0}^{m} \int_K |\nabla_w^s \mathbf{u}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\max_{0\le s\le m} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in K} |\nabla_w^s \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}, & p = \infty. \end{cases}$$

Consideramos $W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ con la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E};K)}\}_{K\subseteq M \text{ compacto}}$.

La restricción al interior identifica isométricamente estos espacios $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ con los espacios definidos débilmente sobre $\mathrm{Int}(M)$ mediante la métrica y la conexión restringidas. En efecto, las secciones de prueba son exactamente las de soporte compacto en el interior, y $\partial M$ tiene medida riemanniana de dimensión $n$ nula, por lo que las normas globales coinciden. Los valores de una sección medible sobre $\partial M$ no modifican su clase de equivalencia. En particular, el Lema 9.1.12 y la completitud de los espacios de Sobolev se aplican también aquí para todo $1 \le p \le \infty$, sin una hipótesis de reflexividad.

Daremos una caracterización local de los espacios de Sobolev en el caso con frontera análoga a la del Lema 9.1.44 la cual nos permitirá trabajar con ellos. Para esta caracterización imponemos compatibilidad métrica, pues la prueba utiliza la fórmula explícita del adjunto formal obtenida a partir de la integración por partes.

**Lema 9.4.5.** Sean $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 \le p < \infty$, sea $(U,\varphi)$ una media bola coordenada regular en una variedad riemanniana con frontera no vacía $M$, y sea $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango $r$, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Denotemos

$$B_U^+ := \varphi(U \cap \mathrm{Int}(M)) = \varphi(U) \cap \{x_n > 0\}.$$

Sea $\mathbf{F} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ y sea $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r\}$ un marco local de $\mathbf{E}$ definido en una vecindad de $\overline{U}$. Supongamos que $\mathbf{F} = \displaystyle\sum_{a=1}^{r} F^a \mathbf{e}_a$ en $U$. Entonces

$$\mathbf{F} \restriction_U \in W^{m,p}(U, \mathbf{E}\restriction_U) \quad \text{si y sólo si} \quad F^a \circ \varphi^{-1} \in W^{m,p}(B_U^+)$$

para todo $1 \le a \le r$.
Además, existen constantes $C_m, c_m > 0$, independientes de $\mathbf{F}$, tales que

$$c_m \sum_{a=1}^{r} \left\| F^a \circ \varphi^{-1} \right\|_{W^{m,p}(B_U^+)} \le \|\mathbf{F}\|_{W^{m,p}(U,\mathbf{E}\restriction_U)} \le C_m \sum_{a=1}^{r} \left\| F^a \circ \varphi^{-1} \right\|_{W^{m,p}(B_U^+)}$$

para todo $\mathbf{F} \in W^{m,p}(U, \mathbf{E}\restriction_U)$.

*Demostración.* Repetimos el argumento del Lema 9.1.44. Primero verificamos que las funciones de prueba coordenadas tienen soporte compacto en el abierto euclidiano correspondiente; esta verificación es la que permite efectuar sin términos de frontera todas las integraciones por partes usadas en aquella prueba.
Sea $(U,\varphi)$ una media bola coordenada regular y recordemos que $B_U^+ = \varphi(U \cap \mathrm{Int}(M))$. Fijemos $s \ge 0$ y tomemos una sección de prueba

$$\boldsymbol{\Psi} \in \Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}\big(T^{(0,s)}(TU) \otimes \mathbf{E}\restriction_U\big).$$

Por definición, $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\Psi})$ es compacto y está contenido en $U \cap \operatorname{Int}(M)$.
Escribamos localmente

$$\boldsymbol{\Psi} = \sum_{\substack{1 \le c \le r \\ J_s \in \{1,\dots,n\}^s}} \Psi^c_{J_s}\, \mathbf{d}x^{J_s} \otimes \mathbf{e}_c,$$

donde $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$ es el marco local de $\mathbf{E}$ sobre $U$ y $J_s$ recorre los bloques de índices de longitud $s$. Para cada $x \in U$, la familia $\{\mathbf{d}x^{J_s} \otimes \mathbf{e}_c\}_{c,J_s}$ es una base del espacio vectorial $T^{(0,s)}_x M \otimes \mathbf{E}_x$. Por independencia lineal puntual, se tiene

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \Psi^c_{J_s}(x) = 0 \text{ para todo } c, J_s.$$

Por lo tanto, el conjunto donde $\boldsymbol{\Psi}$ no se anula coincide con la unión finita de los conjuntos donde alguna componente $\Psi^c_{J_s}$ no se anula. Al tomar cerraduras en $U$, obtenemos

$$\operatorname{supp}(\boldsymbol{\Psi}) = \bigcup_{c,J_s} \operatorname{supp}(\Psi^c_{J_s}).$$

En particular, para todo par de índices $(c, J_s)$,

$$\operatorname{supp}(\Psi^c_{J_s}) \subseteq \operatorname{supp}(\boldsymbol{\Psi}) \Subset U \cap \operatorname{Int}(M).$$

Ahora componemos con la carta. Como $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U)$ es un homeomorfismo, para cada componente se tiene

$$\operatorname{supp}(\Psi^c_{J_s} \circ \varphi^{-1}) = \varphi\big(\operatorname{supp}(\Psi^c_{J_s})\big).$$

Además,

$$\varphi\big(\operatorname{supp}(\Psi^c_{J_s})\big) \subseteq \varphi(\operatorname{supp}(\boldsymbol{\Psi})) \Subset \varphi(U \cap \operatorname{Int}(M)) = B^+_U.$$

Así,

$$\Psi^c_{J_s} \circ \varphi^{-1} \in C^\infty_c(B^+_U)$$

para todo $c, J_s$.
En consecuencia, al pasar a coordenadas, las funciones de prueba que aparecen tienen soporte compacto contenido en el abierto $B^+_U \subseteq \mathbb{R}^n$. Por esta razón, todas las integraciones por partes que intervienen en la definición débil se realizan dentro de un abierto euclidiano, sin términos de frontera. Las identidades locales son entonces las mismas que en el caso de una bola coordenada regular, sustituyendo el dominio coordenado por $B^+_U$.
Las identidades coordenadas de la prueba del Lema 9.1.44 dependen únicamente de estas integraciones por partes y de la suavidad acotada, sobre $\overline{U}$, de los coeficientes de la métrica, de la conexión y del marco. Por lo tanto, con $\varphi(U)$ sustituido por $B^+_U$, la inducción allí construida da

$$\mathbf{F} \restriction_U \in W^{m,p}(U, \mathbf{E} \restriction_U) \quad \text{si y sólo si} \quad F^a \circ \varphi^{-1} \in W^{m,p}(B^+_U)$$

para todo $1 \le a \le r$. La equivalencia de normas se demuestra de forma idéntica a la del lema citado. □

**Teorema 9.4.6.** (Meyers–Serrin en abiertos con frontera uniformemente Lipschitz) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto con frontera uniformemente Lipschitz continua en el sentido de la Definición 3.6.1. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \le p < \infty$. Entonces las restricciones a $\Omega$ de las funciones de $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ forman un subespacio denso de $W^{m,p}(\Omega)$.

*Demostración.* Sea $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Por el Teorema 3.6.2, existe $v := \mathcal{E}u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $v \restriction_\Omega = u$ casi en todas partes. Probaremos explícitamente que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
Elijamos $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $0 \le \chi \le 1$, $\chi = 1$ en $B_{\mathrm{euc}}(0,1)$ y $\operatorname{supp}\chi \subset B_{\mathrm{euc}}(0,2)$, y pongamos $\chi_R(x) := \chi(x/R)$ y $v_R := \chi_R v$. Para $|\alpha| \le m$, la regla de Leibniz débil da

$$D^\alpha v_R = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \chi_R \, D^{\alpha-\beta} v.$$

El término con $\beta = 0$ converge a $D^\alpha v$ en $L^p$ por convergencia dominada. Si $\beta \neq 0$, entonces

$$\|D^\beta \chi_R \, D^{\alpha-\beta} v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le R^{-|\beta|} \|D^\beta \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|D^{\alpha-\beta} v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

Como la suma contiene un número finito de términos, $v_R \to v$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
Fijemos ahora $R$. Si $\rho_\varepsilon$ es el molificador del Teorema B.9.1, entonces $v_{R,\varepsilon} := \rho_\varepsilon * v_R$ pertenece a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$D^\alpha v_{R,\varepsilon} = \rho_\varepsilon * D^\alpha v_R, \qquad |\alpha| \le m.$$

La continuidad de las traslaciones en $L^p$ y la desigualdad integral de Minkowski implican $\rho_\varepsilon * D^\alpha v_R \to D^\alpha v_R$ en $L^p$ para cada $|\alpha| \le m$. Por lo tanto, $v_{R,\varepsilon} \to v_R$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Una elección diagonal proporciona $(\varphi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi_j \to v$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Como la restricción a $\Omega$ no aumenta ninguna de las normas de las derivadas,

$$\|\varphi_j \restriction_\Omega - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \le \|\varphi_j - v\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

□

Para hablar de condiciones de frontera, necesitaremos definir un operador conocido como *operador de traza*. Dicho operador se construirá primero sobre secciones suaves y después se extenderá por densidad. Por esta razón, antes de introducirlo debemos verificar que el teorema de Meyers–Serrin sigue siendo válido en variedades con frontera.

El teorema euclidiano de Meyers–Serrin para abiertos con frontera uniformemente Lipschitz, Teorema 9.4.6, permite aproximar en las cartas de frontera mediante restricciones de funciones suaves definidas en $\mathbb{R}^n$.

**Definición 9.4.7.** Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con frontera no vacía y $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión suave $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $m \in \mathbb{N}_0$ y sea $1 \le p < \infty$. Definimos

$$C^{m,p}(M, \mathbf{E}) := \left\{ \mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E}) \,\middle|\, \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} < \infty \right\},$$

donde, para una sección suave $\mathbf{u}$, la norma de Sobolev está dada por

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} := \left( \sum_{s=0}^{m} \int_M |\nabla^s \mathbf{u}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos

$$H^{m,p}(M, \mathbf{E}) := \overline{C^{m,p}(M, \mathbf{E})}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}}.$$

Es decir, $H^{m,p}(M, \mathbf{E})$ es la completación de las secciones suaves con norma de Sobolev finita.

Como en el caso sin frontera, esta definición coincide con la definición débil de los espacios de Sobolev. La diferencia técnica es que, al trabajar localmente cerca de $\partial M$, se usan medias bolas coordenadas regulares y se pasa al abierto euclidiano $\varphi(U \cap \mathrm{Int}(M))$.

**Teorema 9.4.8.** (Meyers–Serrin para haces vectoriales en variedades con frontera) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con frontera no vacía y sea $\pi_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$, entonces $H^{m,p}(M, \mathbf{E}) = W^{m,p}(M, \mathbf{E})$.

*Demostración.* Como $C^{m,p}(M, \mathbf{E}) \subseteq W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ y $W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ es completo, se tiene directamente $H^{m,p}(M, \mathbf{E}) \subseteq W^{m,p}(M, \mathbf{E})$. Probemos la inclusión recíproca.

Por el análogo de la Proposición 1.2.11 para variedades con frontera, existe una cubierta abierta numerable y localmente finita de $M$ formada por bolas coordenadas regulares contenidas en $\mathrm{Int}(M)$ y por medias bolas coordenadas regulares cerca de $\partial M$. Denotemos esta cubierta por $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$. Refinando si es necesario, podemos suponer que $\overline{U_\alpha}$ está contenida en el dominio de un marco local $(\mathbf{e}_{1,\alpha}, \ldots, \mathbf{e}_{r,\alpha})$ de $\mathbf{E}$. Tomemos una partición suave de la unidad $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ subordinada a dicha cubierta, con $\mathrm{supp}(\psi_\alpha) \Subset U_\alpha$ para todo $\alpha$.

Sea $\mathbf{F} \in W^{m,p}(M, \mathbf{E})$. Como la partición de la unidad es localmente finita, se tiene $\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \psi_\alpha \mathbf{F}$. Fijemos $\alpha \in \mathbb{N}$.

Escribimos localmente $\mathbf{F} = \sum_{a=1}^{r} F_\alpha^a \mathbf{e}_{a,\alpha}$ sobre $U_\alpha$.

Si $U_\alpha$ es una bola coordenada regular, ponemos $\Omega_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha)$. Si $U_\alpha$ es una media bola coordenada regular, ponemos $\Omega_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \mathrm{Int}(M))$. En el primer caso, $\Omega_\alpha$ es una bola abierta de $\mathbb{R}^n$. En el segundo caso, $\Omega_\alpha$ es el interior de una media bola y, en particular, es un abierto de $\mathbb{R}^n$ con frontera continua.

Por el Lema 9.1.44, si $U_\alpha$ es una bola coordenada regular, y por el Lema 9.4.5, si $U_\alpha$ es una media bola coordenada regular, se tiene $F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1} \in W^{m,p}(\Omega_\alpha)$ para todo $a \in \{1, \ldots, r\}$.

Veamos ahora que $(\psi_\alpha \mathbf{F}) \restriction_{U_\alpha} \in W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E} \restriction_{U_\alpha})$. Sus componentes son $(\psi_\alpha \mathbf{F})_\alpha^a = \psi_\alpha F_\alpha^a$, y al componer con la carta,

$$(\psi_\alpha \mathbf{F})_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1} = (\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}).$$

Como $\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es suave y sus derivadas hasta orden $m$ son acotadas sobre $\Omega_\alpha$, la fórmula de Leibniz implica que $(\psi_\alpha \mathbf{F})_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1} \in W^{m,p}(\Omega_\alpha)$. Para todo multiíndice $\beta$ con $|\beta| \leq m$,

$$\partial^\beta \Big( (\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}) \Big) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma (\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}) \partial^{\beta-\gamma} (F_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}),$$

y cada término del lado derecho pertenece a $L^p(\Omega_\alpha)$. Aplicando otra vez el lema local correspondiente, concluimos que $(\psi_\alpha \mathbf{F}) \restriction_{U_\alpha} \in W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E} \restriction_{U_\alpha})$.

Además, por la equivalencia local de normas, existe una constante $C_{m,\alpha} > 0$ tal que, para toda sección $\mathbf{H} \in W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E} \restriction_{U_\alpha})$,

$$\|\mathbf{H}\|_{W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})} \leq C_{m,\alpha} \sum_{a=1}^{r} \|H_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}\|_{W^{m,p}(\Omega_\alpha)}.$$

Ahora aproximamos las componentes de $(\psi_\alpha \mathbf{F}) \restriction_{U_\alpha}$. Aquí distinguimos los dos tipos de cartas.

Si $U_\alpha$ es una bola coordenada regular, entonces $\Omega_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ es una bola abierta y $\mathrm{supp}((\psi_\alpha \mathbf{F})_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}) \Subset \Omega_\alpha$, pues $\mathrm{supp}(\psi_\alpha) \Subset U_\alpha$. Por el teorema euclidiano de Meyers–Serrin en abiertos euclidianos, podemos tomar

funciones $(\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \in C_c^\infty(\Omega_\alpha)$ tales que

$$\sum_{a=1}^{r} \left\| (\widetilde{G}_{\alpha,k})^a - (\psi_\alpha \mathbf{F})_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1} \right\|_{W^{m,p}(\Omega_\alpha)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Si $U_\alpha$ es una media bola coordenada regular, usamos el Teorema 9.4.6. Como $\Omega_\alpha$ tiene frontera uniformemente Lipschitz, para cada componente existe una sucesión $(\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\sum_{a=1}^{r} \left\| (\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \restriction_{\Omega_\alpha} - (\psi_\alpha \mathbf{F})_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1} \right\|_{W^{m,p}(\Omega_\alpha)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

En este caso no pedimos que las funciones aproximantes tengan soporte compacto contenido en $\Omega_\alpha$, sólo usamos que son restricciones a $\Omega_\alpha$ de funciones suaves definidas en $\mathbb{R}^n$.

Para poder regresar a la variedad y extender por cero fuera de $U_\alpha$, elegimos $\chi_\alpha \in C_c^\infty(U_\alpha)$ tal que $\chi_\alpha \equiv 1$ en una vecindad de $\operatorname{supp}(\psi_\alpha)$. Sustituimos, en este caso de frontera, $(\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \restriction_{\Omega_\alpha}$ por $(\chi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \restriction_{\Omega_\alpha}$.

Esta modificación conserva la convergencia. Para verlo, escribamos $\eta_\alpha := \chi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}$ y $f_\alpha^a := (\psi_\alpha \mathbf{F})_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Como $\chi_\alpha \equiv 1$ en una vecindad de $\operatorname{supp}(\psi_\alpha)$, se tiene $\eta_\alpha f_\alpha^a = f_\alpha^a$. Por lo tanto,

$$\eta_\alpha (\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \restriction_{\Omega_\alpha} - f_\alpha^a = \eta_\alpha \left( (\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \restriction_{\Omega_\alpha} - f_\alpha^a \right).$$

Denotemos $h_{\alpha,k}^a := (\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \restriction_{\Omega_\alpha} - f_\alpha^a$. Por construcción, $h_{\alpha,k}^a \to 0$ en $W^{m,p}(\Omega_\alpha)$. Veamos que también $\eta_\alpha h_{\alpha,k}^a \to 0$ en $W^{m,p}(\Omega_\alpha)$.

Sea $\beta$ un multiíndice con $|\beta| \le m$. Por la fórmula de Leibniz,

$$\partial^\beta (\eta_\alpha h_{\alpha,k}^a) = \sum_{\gamma \le \beta} \binom{\beta}{\gamma} (\partial^\gamma \eta_\alpha) \partial^{\beta-\gamma} h_{\alpha,k}^a.$$

Como $\eta_\alpha$ es suave y tiene soporte contenido en $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, sus derivadas de orden $\le m$ son acotadas en $\Omega_\alpha$. Así, para cada $\beta$ existe una constante $C_\beta > 0$, independiente de $k$, tal que

$$\|\partial^\beta (\eta_\alpha h_{\alpha,k}^a)\|_{L^p(\Omega_\alpha)} \le C_\beta \sum_{\gamma \le \beta} \|\partial^{\beta-\gamma} h_{\alpha,k}^a\|_{L^p(\Omega_\alpha)}.$$

Sumando sobre todos los multiíndices $|\beta| \le m$, obtenemos una constante $C > 0$, independiente de $k$, tal que

$$\|\eta_\alpha h_{\alpha,k}^a\|_{W^{m,p}(\Omega_\alpha)} \le C \|h_{\alpha,k}^a\|_{W^{m,p}(\Omega_\alpha)}.$$

Como $h_{\alpha,k}^a \to 0$ en $W^{m,p}(\Omega_\alpha)$, concluimos que $\eta_\alpha (\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \restriction_{\Omega_\alpha} \to f_\alpha^a$ en $W^{m,p}(\Omega_\alpha)$. Por lo tanto, multiplicar las funciones aproximantes por $\chi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}$ no altera el límite.

Después de esta sustitución, las funciones aproximantes tienen soporte, en la carta, contenido en la imagen de un compacto de $U_\alpha$.

En cualquiera de los dos casos, hemos construido funciones suaves $(\widetilde{G}_{\alpha,k})^a$ sobre el dominio coordenado correspondiente, con el soporte necesario para poder regresar a la variedad. Definimos una sección suave sobre $U_\alpha$ mediante

$$\mathbf{G}_{\alpha,k} = \sum_{a=1}^{r} \left[ (\widetilde{G}_{\alpha,k})^a \circ \varphi_\alpha \right] \mathbf{e}_{a,\alpha}.$$

En el caso de una carta de frontera, entendemos aquí que usamos las funciones aproximantes ya multiplicadas por $\chi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Por la elección de los soportes, $\mathbf{G}_{\alpha,k}$ se extiende por cero fuera de $U_\alpha$ y define una sección suave global de $\mathbf{E}$.
Por la estimación local anterior,

$$\|\mathbf{G}_{\alpha,k} - (\psi_\alpha \mathbf{F}) \restriction_{U_\alpha}\|_{W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Como $\operatorname{supp}(\mathbf{G}_{\alpha,k} - \psi_\alpha \mathbf{F}) \subseteq U_\alpha$ y $\nabla^s_w$ es un operador local para cada $s \le m$, se tiene

$$\|\mathbf{G}_{\alpha,k} - (\psi_\alpha \mathbf{F}) \restriction_{U_\alpha}\|_{W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})} = \|\mathbf{G}_{\alpha,k} - \psi_\alpha \mathbf{F}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

En consecuencia, $\|\mathbf{G}_{\alpha,k} - \psi_\alpha \mathbf{F}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \to 0$ cuando $k \to \infty$.
Ahora fijemos $q \in \mathbb{N}$. Por la convergencia anterior, para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ existe $k_{\alpha,q} \in \mathbb{N}$ tal que $\|\psi_\alpha \mathbf{F} - \mathbf{G}_{\alpha,k_{\alpha,q}}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} < 2^{-(\alpha+q)}$. Como $\operatorname{supp}(\mathbf{G}_{\alpha,k_{\alpha,q}}) \subseteq U_\alpha$ y la familia $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ es localmente finita, la suma $\mathbf{G}_q := \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathbf{G}_{\alpha,k_{\alpha,q}}$ es localmente finita. Por lo tanto, define una sección global suave $\mathbf{G}_q \in \Gamma(\mathbf{E})$.

Finalmente, $\mathbf{F} - \mathbf{G}_q = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (\psi_\alpha \mathbf{F} - \mathbf{G}_{\alpha,k_{\alpha,q}})$, donde la suma es localmente finita. Usando la desigualdad del triángulo,

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{G}_q\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le \sum_{\alpha=1}^{\infty} \|\psi_\alpha \mathbf{F} - \mathbf{G}_{\alpha,k_{\alpha,q}}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha+q}} = \frac{1}{2^q}.$$

Así, $\mathbf{G}_q \to \mathbf{F}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ cuando $q \to \infty$.
Además,

$$\|\mathbf{G}_q\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{F}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} + \|\mathbf{F} - \mathbf{G}_q\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{F}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} + 2^{-q} < \infty.$$

Por lo tanto, $\mathbf{G}_q \in H^{m,p}(M,\mathbf{E})$ para todo $q \in \mathbb{N}$.
Hemos probado que toda sección en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ se puede aproximar en la norma de Sobolev por secciones suaves con norma de Sobolev finita. Esto muestra que $W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \subseteq H^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Junto con la inclusión inicial, concluimos que $H^{m,p}(M,\mathbf{E}) = W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. □

**Lema 9.4.9.** (Continuidad de la multiplicación por funciones suaves) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ y una conexión compatible $\nabla^\mathbf{E}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $1 \le p < \infty$. Supongamos que $\psi \in C^\infty(M)$ satisface

$$\|\nabla^q \psi\|_{L^\infty(M, T^{(0,q)}(TM))} < \infty \qquad \text{para todo } 0 \le q \le m.$$

Entonces el operador

$$\mathbf{u} \longmapsto \psi \mathbf{u}$$

es lineal y continuo de $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ en sí mismo. En particular, existe una constante $C_{\psi,m} > 0$ tal que

$$\|\psi \mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_{\psi,m} \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}$$

para todo $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$.
En particular, si $M$ es compacta, toda función $\psi \in C^\infty(M)$ define un operador continuo de multiplicación

en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Más generalmente, en una variedad no compacta basta tomar $\psi \in C_c^\infty(M)$.

*Demostración.* Primero probemos la estimación para secciones suaves. Sea $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E}) \cap W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Para cada $0 \le s \le m$, la regla de Leibniz iterada para la conexión inducida muestra que $\nabla^s(\psi\mathbf{u})$ es una suma finita de términos construidos a partir de las derivadas covariantes de $\psi$ y de $\mathbf{u}$, cuyos órdenes suman $s$. En consecuencia, existe una constante $A_s > 0$, que depende sólo de $s$ y de las convenciones tensoriales, tal que

$$|\nabla^s(\psi\mathbf{u})|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \le A_s \sum_{t=0}^{s} |\nabla^{s-t}\psi|_{\mathbf{g}}\, |\nabla^t \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}.$$

Usando la hipótesis de acotación sobre las derivadas de $\psi$, obtenemos

$$|\nabla^s(\psi\mathbf{u})|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \le A_s \sum_{t=0}^{s} \|\nabla^{s-t}\psi\|_{L^\infty(M,T^{(0,s-t)}(TM))} |\nabla^t \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}.$$

Al tomar la norma de $L^p\big(M, T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)$ y usar la desigualdad del triángulo,

$$\|\nabla^s(\psi\mathbf{u})\|_{L^p(M,T^{(0,s)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \le A_s \sum_{t=0}^{s} \|\nabla^{s-t}\psi\|_{L^\infty(M,T^{(0,s-t)}(TM))} \|\nabla^t \mathbf{u}\|_{L^p(M,T^{(0,t)}(TM)\otimes\mathbf{E})}.$$

Sumando sobre $s \in \{0,\dots,m\}$, se obtiene una constante $C_{\psi,m} > 0$ tal que

$$\|\psi\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_{\psi,m} \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}$$

para toda $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E}) \cap W^{m,p}(M,\mathbf{E})$.
Ahora tomemos $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Por el teorema de Meyers–Serrin para haces vectoriales (Teorema 9.4.8), existe una sucesión $(\mathbf{u}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma(\mathbf{E}) \cap W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Por la estimación ya probada,

$$\|\psi\mathbf{u}_k - \psi\mathbf{u}_\ell\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_{\psi,m} \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_\ell\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Así, $(\psi\mathbf{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Definimos $\psi\mathbf{u}$ como su límite en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Esta definición no depende de la sucesión aproximante, pues, si $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$ y $\mathbf{v}_k \to \mathbf{u}$, entonces

$$\|\psi\mathbf{u}_k - \psi\mathbf{v}_k\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_{\psi,m} \|\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \longrightarrow 0.$$

Además, pasando al límite en

$$\|\psi\mathbf{u}_k\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_{\psi,m} \|\mathbf{u}_k\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})},$$

obtenemos

$$\|\psi\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_{\psi,m} \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Esto prueba la continuidad del operador de multiplicación. □

**Definición 9.4.10.** (Espacios de Sobolev con traza nula) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con frontera no vacía y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ y una conexión suave $\nabla^\mathbf{E}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $1 \le p < \infty$.

Definimos el espacio de Sobolev con traza nula por

$$W_0^{m,p}(M,\mathbf{E}) := \overline{\Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(\mathbf{E})}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}}.$$

Es decir, $W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es la cerradura, en la norma de Sobolev, del espacio de secciones suaves con soporte compacto contenido en el interior de $M$.

Antes de formular el teorema de traza, necesitamos fijar la conexión que usaremos en el haz restringido a la frontera. Si $\mathbf{u}$ es una sección suave de $\mathbf{E}$, entonces $\mathbf{u}\restriction_{\partial M}$ es una sección suave de $\mathbf{E}\restriction_{\partial M}$. Para medir la regularidad Sobolev de esta restricción, no basta considerar el haz $\mathbf{E}\restriction_{\partial M}$ como haz vectorial: también necesitamos una conexión sobre él. La conexión natural se obtiene restringiendo la conexión de $\mathbf{E}$ a direcciones tangentes a la frontera.

**Lema 9.4.11.** (Conexión inducida sobre el haz restringido) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con frontera no vacía y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave equipado con una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Entonces existe una conexión sobre el haz restringido $\mathbf{E}\restriction_{\partial M}\to\partial M$, que denotaremos por $\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}$, definida como sigue.
Si $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(\partial M)$ y $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E}\restriction_{\partial M})$, tomamos extensiones suaves $\widetilde{\mathbf{X}}\in\mathfrak{X}(M)$ y $\widetilde{\mathbf{u}}\in\Gamma(\mathbf{E})$ tales que $\widetilde{\mathbf{X}}\restriction_{\partial M}=\mathbf{X}$ y $\widetilde{\mathbf{u}}\restriction_{\partial M}=\mathbf{u}$, y definimos

$$\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u} := (\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}}\widetilde{\mathbf{u}})\restriction_{\partial M}.$$

Esta definición no depende de las extensiones escogidas. Además, si $\nabla^{\mathbf{E}}$ es compatible con la métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, entonces $\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}$ es compatible con la métrica fibrada restringida $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}\restriction_{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}$.

*Demostración.* Primero probamos que la definición no depende de las extensiones escogidas. Sean $\widetilde{\mathbf{X}}_1,\widetilde{\mathbf{X}}_2\in\mathfrak{X}(M)$ dos extensiones de $\mathbf{X}$ y sean $\widetilde{\mathbf{u}}_1,\widetilde{\mathbf{u}}_2\in\Gamma(\mathbf{E})$ dos extensiones de $\mathbf{u}$. Queremos probar que

$$(\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}_1}\widetilde{\mathbf{u}}_1)\restriction_{\partial M}=(\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}_2}\widetilde{\mathbf{u}}_2)\restriction_{\partial M}.$$

Por linealidad,

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}_1}\widetilde{\mathbf{u}}_1-\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}_2}\widetilde{\mathbf{u}}_2=\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}_1-\widetilde{\mathbf{X}}_2}\widetilde{\mathbf{u}}_1+\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}_2}(\widetilde{\mathbf{u}}_1-\widetilde{\mathbf{u}}_2).$$

El primer término se anula al restringir a $\partial M$, pues $\widetilde{\mathbf{X}}_1-\widetilde{\mathbf{X}}_2$ se anula sobre $\partial M$ y la conexión es $C^\infty(M)$-lineal en la variable vectorial. Para cada $x\in\partial M$, el valor de $\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}_1-\widetilde{\mathbf{X}}_2}\widetilde{\mathbf{u}}_1$ en $x$ depende sólo de $(\widetilde{\mathbf{X}}_1-\widetilde{\mathbf{X}}_2)_x$, que es cero. Veamos ahora que el segundo término también se anula al restringir a $\partial M$. Pongamos $\mathbf{w}:=\widetilde{\mathbf{u}}_1-\widetilde{\mathbf{u}}_2$. Entonces $\mathbf{w}\restriction_{\partial M}=0$. Como el argumento es local, tomamos un marco local $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ de $\mathbf{E}$ cerca de un punto de $\partial M$ y escribimos $\mathbf{w}=\sum_{a=1}^{r}w^a\mathbf{e}_a$. Como $\mathbf{w}$ se anula sobre $\partial M$, y los vectores $\mathbf{e}_1(x),\dots,\mathbf{e}_r(x)$ forman una base de $\mathbf{E}_x$ para cada $x$, se tiene $w^a\restriction_{\partial M}=0$ para todo $a$.
Ahora, usando la regla de Leibniz de la conexión,

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}_2}\mathbf{w}=\sum_{a=1}^{r}\widetilde{\mathbf{X}}_2(w^a)\mathbf{e}_a+\sum_{a=1}^{r}w^a\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}_2}\mathbf{e}_a.$$

Al restringir a $\partial M$, el segundo sumando se anula porque $w^a\restriction_{\partial M}=0$. Para el primer sumando usamos que $\widetilde{\mathbf{X}}_2\restriction_{\partial M}=\mathbf{X}$ y que $\mathbf{X}$ es tangente a $\partial M$. Como $w^a\restriction_{\partial M}=0$, se tiene $\mathbf{X}(w^a\restriction_{\partial M})=0$, y por lo tanto $\widetilde{\mathbf{X}}_2(w^a)\restriction_{\partial M}=0$.

Así, $(\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}_2}\mathbf{w})\restriction_{\partial M} = 0$. Esto prueba que $\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}$ está bien definida.

Probemos ahora que $\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}$ es una conexión. Sean $f \in C^\infty(\partial M)$, $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\partial M)$ y $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E}\restriction_{\partial M})$. Tomamos extensiones suaves de estos objetos a una vecindad de $\partial M$. Como $\nabla^{\mathbf{E}}$ es $C^\infty(M)$-lineal en la variable vectorial, se obtiene $\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}_{f\mathbf{X}+\mathbf{Y}}\mathbf{u} = f\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u} + \nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}_{\mathbf{Y}}\mathbf{u}$. Del mismo modo, usando la regla de Leibniz en la variable de sección,

$$\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{u}) = \mathbf{X}(f)\mathbf{u} + f\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}.$$

Por lo tanto, $\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}$ es una conexión sobre $\mathbf{E}\restriction_{\partial M}$.

Finalmente, supongamos que $\nabla^{\mathbf{E}}$ es compatible con $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Sean $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\partial M)$ y $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \Gamma(\mathbf{E}\restriction_{\partial M})$. Tomamos extensiones $\widetilde{\mathbf{X}},\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{v}}$ como antes. Por compatibilidad de $\nabla^{\mathbf{E}}$ con $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$,

$$\widetilde{\mathbf{X}}\big(\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{v}})\big) = \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}}\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{v}}) + \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\widetilde{\mathbf{u}},\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\mathbf{X}}}\widetilde{\mathbf{v}}).$$

Al restringir a $\partial M$, el lado izquierdo se convierte en $\mathbf{X}\big(\mathbf{h}_{\mathbf{E}}\restriction_{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}(\mathbf{u},\mathbf{v})\big)$, mientras que el lado derecho se convierte en

$$\mathbf{h}_{\mathbf{E}}\restriction_{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}(\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{h}_{\mathbf{E}}\restriction_{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}(\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}_{\mathbf{X}}\mathbf{v}).$$

Por lo tanto, $\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}$ es compatible con la métrica fibrada restringida. □

En adelante, cuando escribamos $W^{m,p}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M})$, entenderemos que este espacio se construye sobre la variedad riemanniana $\partial M$, usando el haz restringido $\mathbf{E}\restriction_{\partial M}$, la métrica fibrada restringida $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}\restriction_{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}$ y la conexión inducida $\nabla^{\mathbf{E}\restriction_{\partial M}}$.

### 9.4.1 El operador de traza

En una carta de frontera, la restricción de una sección a $\partial M$ se expresa mediante la traza de sus componentes sobre la frontera plana. Usaremos el Teorema 3.7.1, el Lema 3.6.8 y el Corolario 3.7.3, demostrados en la sección de trazas euclidianas del Capítulo 3. En particular, las componentes localizadas en una media bola se prolongan por cero dentro de $\mathbb{R}^n_+$ antes de tomar la traza. Conservamos la convención allí fijada para escribir $\gamma_0 D^\beta v$ sobre la cara plana de una media bola.

Antes de formular el resultado global, recordemos que, cuando escribimos $W^{k,p}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M})$, estamos usando la conexión inducida sobre el haz restringido $\mathbf{E}\restriction_{\partial M} \to \partial M$, construida en el Lema 9.4.11. Esta observación es importante porque la traza de una sección de $\mathbf{E}$ tomará valores en un espacio de Sobolev sobre $\mathbf{E}\restriction_{\partial M}$.

**Teorema 9.4.12.** (Teorema de traza de orden entero para haces vectoriales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera no vacía y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces el operador de restricción

$$\gamma_0 \colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}\restriction_{\partial M}), \qquad \gamma_0(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\restriction_{\partial M},$$

admite una única extensión lineal continua

$$\mathbf{Tr} \colon W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow W^{m-1,p}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M}).$$

En particular, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathbf{Tr}(\mathbf{u})\|_{W^{m-1,p}(\partial M, \mathbf{E}\restriction_{\partial M})} \leq C\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}$$

para toda $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M, \mathbf{E})$.

*Demostración.* Primero probaremos la estimación para secciones suaves. Como $\partial M$ es compacta, tomamos una familia finita de medias bolas coordenadas regulares $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha=1}^N$ que cubre $\partial M$. Escribimos $B_\alpha^+ := \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \mathrm{Int}(M))$ y $B'_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \partial M)$. Refinando si es necesario, podemos suponer que $\overline{U_\alpha}$ está contenida en el dominio de un marco local suave $(\mathbf{e}_{1,\alpha}, \ldots, \mathbf{e}_{r,\alpha})$ que trivializa $\mathbf{E}$. Tomemos una partición suave de la unidad $(\psi_\alpha)_{\alpha=1}^N$, definida sobre una vecindad de $\partial M$, subordinada a las cartas $U_\alpha$ y tal que $\operatorname{supp}\psi_\alpha \Subset U_\alpha$. Sea $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$. En $U_\alpha$ escribimos $\mathbf{u} = \sum_{a=1}^r u_\alpha^a \mathbf{e}_{a,\alpha}$. Entonces $\psi_\alpha \mathbf{u} = \sum_{a=1}^r \psi_\alpha u_\alpha^a \mathbf{e}_{a,\alpha}$. Para cada componente, definimos $f_\alpha^a := (\psi_\alpha u_\alpha^a) \circ \varphi_\alpha^{-1}$ en $B_\alpha^+$. Como $\operatorname{supp}\psi_\alpha \Subset U_\alpha$, la función $f_\alpha^a$ se anula en una vecindad de la parte esférica de $B_\alpha^+$. Sea $\widetilde{f_\alpha^a}$ su extensión por cero a $\mathbb{R}^n_+$. Por el Lema 3.6.8, $\widetilde{f_\alpha^a} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, y además $\|\widetilde{f_\alpha^a}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} = \|f_\alpha^a\|_{W^{m,p}(B_\alpha^+)}$. Aplicando el Teorema 3.7.1 a $\widetilde{f_\alpha^a}$, y usando la continuidad de la restricción de $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ a $W^{m-1,p}(B'_\alpha)$, obtenemos

$$\left\|(\gamma_0 \widetilde{f_\alpha^a})\restriction_{B'_\alpha}\right\|_{W^{m-1,p}(B'_\alpha)} \leq C_\alpha \|f_\alpha^a\|_{W^{m,p}(B_\alpha^+)}.$$

Para $\mathbf{u}$ suave, $(\gamma_0 \widetilde{f_\alpha^a})\restriction_{B'_\alpha}$ coincide con $(f_\alpha^a)\restriction_{B'_\alpha}$, pues $\widetilde{f_\alpha^a} = f_\alpha^a$ cerca de $B'_\alpha$ dentro del semiespacio. Sumando sobre $a$ y usando la equivalencia local de normas en la media bola coordenada regular, obtenemos

$$\sum_{a=1}^r \left\|(\gamma_0 \widetilde{f_\alpha^a})\restriction_{B'_\alpha}\right\|_{W^{m-1,p}(B'_\alpha)} \leq C'_\alpha \|\psi_\alpha \mathbf{u}\|_{W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})}.$$

Por otra parte, aplicando la equivalencia local de normas en la variedad sin frontera $\partial M$ al haz restringido $\mathbf{E}\restriction_{\partial M} \to \partial M$, se obtiene

$$\|(\psi_\alpha \mathbf{u})\restriction_{\partial M}\|_{W^{m-1,p}(U_\alpha \cap \partial M, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha \cap \partial M})} \leq C''_\alpha \sum_{a=1}^r \left\|(\gamma_0 \widetilde{f_\alpha^a})\restriction_{B'_\alpha}\right\|_{W^{m-1,p}(B'_\alpha)}.$$

Por lo tanto,

$$\|(\psi_\alpha \mathbf{u})\restriction_{\partial M}\|_{W^{m-1,p}(U_\alpha \cap \partial M, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha \cap \partial M})} \leq C'''_\alpha \|\psi_\alpha \mathbf{u}\|_{W^{m,p}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})}.$$

Usando ahora el Lema 9.4.9, aplicado a la función fija $\psi_\alpha$, existe una constante $C''''_\alpha > 0$ tal que $\|\psi_\alpha \mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \leq C''''_\alpha \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}$. Como la restricción de la norma global a $U_\alpha$ es menor o igual que la norma global, concluimos que

$$\|(\psi_\alpha \mathbf{u})\restriction_{\partial M}\|_{W^{m-1,p}(U_\alpha \cap \partial M, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha \cap \partial M})} \leq C'''''_\alpha \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Como las cartas son finitas y $\sum_{\alpha=1}^N \psi_\alpha = 1$ en una vecindad de $\partial M$, se tiene $\mathbf{u}\restriction_{\partial M} = \sum_{\alpha=1}^N (\psi_\alpha \mathbf{u})\restriction_{\partial M}$. Usando la desigualdad del triángulo y la equivalencia local de normas en $\mathbf{E}\restriction_{\partial M}$, obtenemos una constante $C > 0$ tal

que

$$\|\mathbf{u}\restriction_{\partial M}\|_{W^{m-1,p}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M})} \leq C\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}$$

para toda $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$.

La estimación anterior muestra que la restricción es un operador lineal continuo de $\Gamma(\mathbf{E}) \cap W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ en $W^{m-1,p}(\partial M, \mathbf{E}\restriction_{\partial M})$. El Teorema 9.4.8 afirma que su dominio es denso en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$, mientras que el espacio de llegada es de Banach. El Teorema B.2.36 proporciona entonces una única extensión lineal continua

$$\mathbf{Tr}\colon W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow W^{m-1,p}(\partial M, \mathbf{E}\restriction_{\partial M})$$

y conserva la estimación

$$\|\mathbf{Tr}(\mathbf{u})\|_{W^{m-1,p}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M})} \leq C\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

□

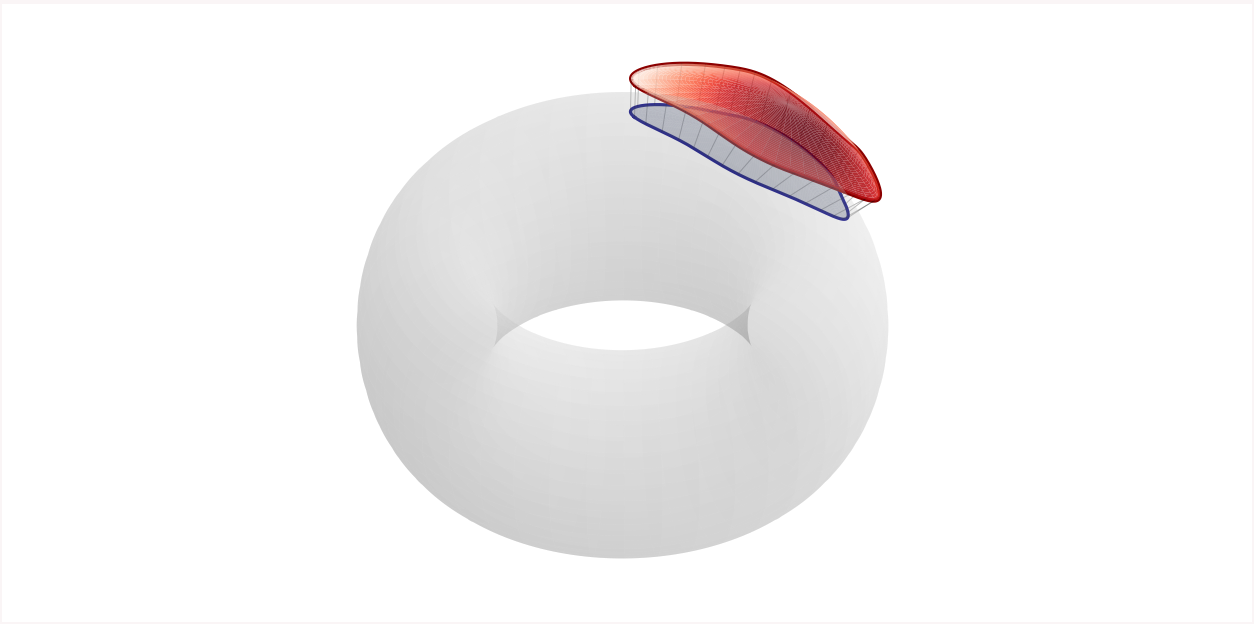


Figura 9.1. El teorema de traza generaliza la idea de restringir una función suave a la frontera de una variedad. En este caso, $\Omega \subseteq T^2$ es un abierto del toro cuya cerradura $\overline{\Omega}$ es una variedad con frontera. La región azul representa $\Omega$, mientras que su frontera $\partial\Omega$ aparece en azul oscuro. La gráfica de la función $u\colon \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ se muestra en rojo y su traza sobre $\partial\Omega$, en rojo oscuro.

### 9.4.2 Espacios de Sobolev–Slobodeckij intrínsecos y traza exacta

El teorema de traza de orden entero proporciona una estimación en $W^{m-1,p}(\partial M, \mathbf{E}\restriction_{\partial M})$, pero esa regularidad no describe por completo la imagen. La restricción a una hipersuperficie pierde exactamente $\frac{1}{p}$ derivadas. Para formular esta afirmación sin elegir cartas ni marcos, compararemos los valores de una sección en fibras distintas mediante el transporte paralelo de la conexión inducida sobre la frontera.

La construcción se presenta primero sobre una variedad cerrada de dimensión positiva, pues $\partial M$ es una variedad de esta clase. Sea $N$ una variedad riemanniana compacta sin frontera y sea $\mathbf{F} \longrightarrow N$ un haz vectorial suave con

métrica fibrada y conexión compatible. Si $N$ no es conexa, las definiciones siguientes se aplican a las restricciones de estos datos a cada componente; por compacidad sólo hay un número finito de ellas. Para $s > 0$ y $1 \le p < \infty$, si $N = N_1 \sqcup \cdots \sqcup N_q$, la norma global se define por

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{s,p}(N,\mathbf{F})} := \left( \sum_{\ell=1}^{q} \|\mathbf{v} \restriction_{N_\ell}\|^p_{W^{s,p}(N_\ell, \mathbf{F}\restriction_{N_\ell})} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En dimensión cero ponemos $W^{s,p}(N,\mathbf{F}) := L^p(N,\mathbf{F})$ para todo $s > 0$; se trata entonces de una suma finita de fibras y no aparece una seminorma de diferencias.

**Definición 9.4.13.** (Seminorma intrínseca de Gagliardo para secciones) Sea $(N, \mathbf{h})$ una variedad riemanniana compacta, conexa y sin frontera, de dimensión $d \ge 1$, y sea $\mathbf{F} \longrightarrow N$ un haz vectorial suave equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{F}$ y una conexión compatible $\nabla^\mathbf{F}$. Ponemos

$$\rho_N := \min\{1, \mathrm{inj}(N)\}.$$

La variedad compacta $N$ es completa y la Proposición 2.13.15 muestra que el radio puntual de inyectividad es continuo y positivo. Su mínimo en $N$ es, por lo tanto, estrictamente positivo. Para $0 < \sigma < 1$, $1 \le p < \infty$ y $\mathbf{v} \in L^p(N,\mathbf{F})$ definimos

$$[\mathbf{v}]_{W^{\sigma,p}(N,\mathbf{F})} := \left( \int_N \int_{\{y \in N \,|\, 0 < d_\mathbf{h}(x,y) < \rho_N\}} \frac{|\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y)|^p_{\mathbf{h}_\mathbf{F};x,y}}{d_\mathbf{h}(x,y)^{d+\sigma p}} \, d\lambda_\mathbf{h}(y) \, d\lambda_\mathbf{h}(x) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{9.69}$$

La separación fibrada del numerador es la de la Definición 9.2.4; por lo tanto,

$$|\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y)|_{\mathbf{h}_\mathbf{F};x,y} = \left| \mathbf{v}(x) - P^\mathbf{F}_{\gamma_{xy},1\to 0}\mathbf{v}(y) \right|_{\mathbf{h}_\mathbf{F}(x)},$$

donde $\gamma_{xy}$ es la única geodésica minimizante corta de $x$ a $y$. El transporte depende suavemente de $(x,y)$ en la región $0 < d_\mathbf{h}(x,y) < \rho_N$; por ello el integrando es medible. Si se cambia un representante sobre un conjunto nulo $Z \subseteq N$, el integrando sólo cambia en $(Z \times N) \cup (N \times Z)$, que tiene medida producto nula por el Teorema B.6.17.
Definimos

$$W^{\sigma,p}(N,\mathbf{F}) := \left\{ \mathbf{v} \in L^p(N,\mathbf{F}) \,\middle|\, [\mathbf{v}]_{W^{\sigma,p}(N,\mathbf{F})} < \infty \right\}$$

y lo dotamos de la norma

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{\sigma,p}(N,\mathbf{F})} := \|\mathbf{v}\|_{L^p(N,\mathbf{F})} + [\mathbf{v}]_{W^{\sigma,p}(N,\mathbf{F})}.$$

Si $s = k + \sigma$, con $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \sigma < 1$, ponemos

$$\mathbf{F}_k := T^{(0,k)}(TN) \otimes \mathbf{F}$$

con su métrica y conexión producto, y definimos

$$W^{s,p}(N,\mathbf{F}) := \left\{ \mathbf{v} \in W^{k,p}(N,\mathbf{F}) \,\middle|\, [\nabla^k_w \mathbf{v}]_{W^{\sigma,p}(N,\mathbf{F}_k)} < \infty \right\}, \tag{9.70}$$

con

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{s,p}(N,\mathbf{F})} := \|\mathbf{v}\|_{W^{k,p}(N,\mathbf{F})} + [\nabla_w^k \mathbf{v}]_{W^{\sigma,p}(N,\mathbf{F}_k)}. \tag{9.71}$$

Para $s \in \mathbb{N}_0$ se conserva la definición intrínseca anterior de $W^{s,p}(N,\mathbf{F})$ mediante derivadas covariantes débiles.

La seminorma de orden $0 < \sigma < 1$ es la versión, para una conexión suave fija, de los espacios fraccionarios covariantes considerados en [127, Definición 6.4]; los órdenes superiores se obtienen aplicándola a $\nabla_w^k \mathbf{v}$ con la conexión producto. Su relación con la teoría euclidiana se establece mediante la caracterización localizada siguiente.

**Lema 9.4.14.** (Independencia del radio de comparación) Sean $(N,\mathbf{h})$ una variedad riemanniana compacta, conexa y sin frontera, de dimensión $d \geq 1$, y sea $\mathbf{F} \to N$ un haz vectorial suave con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $0 < \sigma < 1$, $1 \leq p < \infty$ y $0 < r_1 \leq r_2 \leq \operatorname{inj}(N)$. Denotemos por $[\mathbf{v}]_{\sigma,p;r_i}$ la expresión de (9.69) con $r_i$ en lugar de $\rho_N$. Existen constantes $c, C > 0$, independientes de $v$, tales que

$$c\big(\|\mathbf{v}\|_{L^p(N,\mathbf{F})} + [\mathbf{v}]_{\sigma,p;r_1}\big) \leq \|\mathbf{v}\|_{L^p(N,\mathbf{F})} + [\mathbf{v}]_{\sigma,p;r_2} \leq C\big(\|\mathbf{v}\|_{L^p(N,\mathbf{F})} + [\mathbf{v}]_{\sigma,p;r_1}\big).$$

*Demostración.* La primera desigualdad se sigue de la inclusión de las regiones de integración. En la región $r_1 \leq d_{\mathbf{h}}(x,y) < r_2$, la propiedad isométrica del transporte paralelo y la desigualdad $|a-b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$ dan

$$\frac{|\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y)|^p_{\mathbf{h}_\mathbf{F};x,y}}{d_{\mathbf{h}}(x,y)^{d+\sigma p}} \leq 2^{p-1} r_1^{-d-\sigma p}\big(|\mathbf{v}(x)|^p_{\mathbf{h}_\mathbf{F}} + |\mathbf{v}(y)|^p_{\mathbf{h}_\mathbf{F}}\big).$$

Al integrar sobre $N \times N$ y usar $\lambda_{\mathbf{h}}(N) < \infty$, la contribución de esta región queda acotada por $C\|\mathbf{v}\|^p_{L^p(N,\mathbf{F})}$. Esto prueba la segunda desigualdad. □

El siguiente hecho euclidiano controlará los términos de orden inferior que aparecen al expresar una derivada covariante en un marco.

**Lema 9.4.15.** (Control fraccionario por una derivada entera) Sean $0 < \sigma < 1$ y $1 \leq p < \infty$. Existe $C > 0$ tal que

$$\|f\|_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}$$

para toda $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Además, si $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\|af\|_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C_a\|f\|_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

*Demostración.* Por la Proposición 6.2.2 y el Lema 6.2.4, para $\|z\| < 1$ se tiene

$$\|\tau_z f - f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|z\|^p \|Df\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)},$$

mientras que para $\|z\| \geq 1$ se usa $\|\tau_z f - f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq 2^p\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. Las integrales radiales que resultan son

$$\int_0^1 r^{p(1-\sigma)-1}\,dr < \infty, \qquad \int_1^\infty r^{-\sigma p-1}\,dr < \infty.$$

Esto prueba la primera afirmación.

Para la segunda, escribimos

$$a(x)f(x)-a(y)f(y)=a(x)(f(x)-f(y))+(a(x)-a(y))f(y).$$

El primer término se controla con $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}[f]_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)}$. Para el segundo usamos

$$|a(x)-a(y)|\le C_a\min\{1,\|x-y\|\};$$

la misma separación en $\|x-y\|<1$ y $\|x-y\|\ge 1$ proporciona una cota por $C_a\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. Junto con la estimación $L^p$ se obtiene el resultado. □

**Lema 9.4.16.** (Comparación local entre transporte y componentes) Sea $(N,\mathbf{h})$ una variedad riemanniana compacta, conexa y sin frontera, y sea $\mathbf{F}\to N$ un haz vectorial suave con métrica fibrada y conexión compatible. Sea $(U,\varphi)$ una bola coordenada regular de $N$. Supongamos que existe una bola normal geodésicamente convexa $U'$ tal que $\overline{U}\subseteq U'$, $\operatorname{diam}_{\mathbf{h}}(U')<\rho_N$, y que tanto $\varphi$ como el marco suave $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ de $\mathbf{F}$ se prolongan a $U'$. Escribamos $\mathbf{v}=\sum_{a=1}^r v^a\mathbf{e}_a$ en $U$. Si $0<\sigma<1$ y $1\le p<\infty$, existen constantes $c,C>0$, independientes de $\mathbf{v}$, tales que

$$\begin{aligned} c\sum_{a=1}^r\|v^a\circ\varphi^{-1}\|_{W^{\sigma,p}(\varphi(U))} &\le \|\mathbf{v}\|_{L^p(U,\mathbf{F})}+[\mathbf{v}]_{W^{\sigma,p}(U,\mathbf{F})}\\ &\le C\sum_{a=1}^r\|v^a\circ\varphi^{-1}\|_{W^{\sigma,p}(\varphi(U))}, \end{aligned} \tag{9.72}$$

donde en la seminorma central sólo se integran pares de puntos de $U$.

*Demostración.* Pongamos $\Omega:=\varphi(U)$. En la carta y el marco, el transporte de $y$ a $x$ está representado por una matriz $G(x,y)$. Si $c_{xy}:=\varphi\circ\gamma_{xy}$, la ecuación local del transporte paralelo, Proposición 2.7.18, es una ecuación lineal cuyas matrices de coeficientes son las matrices de conexión evaluadas sobre $\dot c_{xy}$. Esas matrices están acotadas en el compacto considerado y la longitud de $c_{xy}$ es comparable con $d_{\mathbf{h}}(x,y)$. La fórmula integral de la ecuación y la desigualdad de Grönwall del Lema 1.8.19 dan, por lo tanto,

$$\|G(x,y)-I\|\le C_0 d_{\mathbf{h}}(x,y). \tag{9.73}$$

La misma estimación vale para $G(x,y)^{-1}=G(y,x)$.
La equivalencia uniforme entre la norma fibrada y la norma de las componentes en $\overline{U}$ permite deducir de (9.73) las dos desigualdades

$$|\mathbf{v}(x)-\mathbf{v}(y)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}};x,y}\le C_1\left(|v^\flat(x)-v^\flat(y)|+d_{\mathbf{h}}(x,y)|v^\flat(y)|\right), \tag{9.74}$$

$$|v^\flat(x)-v^\flat(y)|\le C_1\left(|\mathbf{v}(x)-\mathbf{v}(y)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}};x,y}+d_{\mathbf{h}}(x,y)|v^\flat(y)|\right), \tag{9.75}$$

donde $v^\flat=(v^1,\dots,v^r)$. En una bola coordenada de cerradura compacta existen constantes $c_2,C_2>0$ tales que

$$c_2\|\varphi(x)-\varphi(y)\|\le d_{\mathbf{h}}(x,y)\le C_2\|\varphi(x)-\varphi(y)\|,\qquad c_2\,dz\le d\lambda_{\mathbf{h}}\le C_2\,dz.$$

Dividimos las potencias $p$ en (9.74) y (9.75) por $d_{\mathbf{h}}(x,y)^{d+\sigma p}$ e integramos. El término de error queda controlado por $\|\mathbf{v}\|^p_{L^p(U,\mathbf{F})}$, pues, uniformemente en $y$,

$$\int_{\varphi(U)} \frac{\|z-w\|^p}{\|z-w\|^{d+\sigma p}}\,dz \le C\int_0^{C_2\operatorname{diam}(U)} r^{p(1-\sigma)-1}\,dr<\infty.$$

La comparación de las normas $L^p$ completa las dos desigualdades de (9.72). □

**Lema 9.4.17.** (Multiplicación por funciones suaves) Sea $(N,\mathbf{h})$ una variedad riemanniana compacta, conexa y sin frontera, y sea $\mathbf{F}\to N$ un haz vectorial suave con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $s>0$, $s\notin\mathbb{N}$, $1\le p<\infty$ y $\chi\in C^\infty(N)$. Existe una constante $C_{\chi,s,p}>0$ tal que

$$\|\chi\mathbf{v}\|_{W^{s,p}(N,\mathbf{F})}\le C_{\chi,s,p}\|\mathbf{v}\|_{W^{s,p}(N,\mathbf{F})}.$$

*Demostración.* Supongamos primero $0<s<1$. La compatibilidad del transporte paralelo con la multiplicación escalar da

$$\begin{aligned}|\chi(x)\mathbf{v}(x)-\chi(y)\mathbf{v}(y)|_{\mathbf{h}_\mathbf{F};x,y}\le{}&|\chi(x)||\mathbf{v}(x)-\mathbf{v}(y)|_{\mathbf{h}_\mathbf{F};x,y}\\&+|\chi(x)-\chi(y)||\mathbf{v}(y)|_{\mathbf{h}_\mathbf{F}}.\end{aligned}$$

Como $N$ es compacta, $\chi$ es acotada y Lipschitz. El segundo término se integra mediante $\int_0^{\rho_N} r^{p(1-s)-1}\,dr<\infty$, exactamente como en la prueba anterior.

Sea ahora $s=k+\sigma$, con $k\ge 1$. La regla de Leibniz iterada expresa $\nabla_w^k(\chi\mathbf{v})$ como una suma finita de contracciones de $\nabla^{k-j}\chi$ con $\nabla_w^j\mathbf{v}$. El término $j=k$ se controla por el caso de orden $\sigma$ aplicado a $\nabla_w^k\mathbf{v}$. Si $j<k$, entonces $\nabla_w^j\mathbf{v}\in W^{1,p}(N,\mathbf{F}_j)$. Justifiquemos esta afirmación y, al mismo tiempo, la regla de Leibniz que se acaba de utilizar. Por el Teorema 9.1.48, existe una sucesión de secciones suaves $(\mathbf{v}_\nu)$ que converge a $\mathbf{v}$ en $W^{k,p}(N,\mathbf{F})$. Para $j<k$, las identidades

$$\nabla^j\mathbf{v}_\nu\longrightarrow\nabla_w^j\mathbf{v},\qquad \nabla(\nabla^j\mathbf{v}_\nu)=\nabla^{j+1}\mathbf{v}_\nu\longrightarrow\nabla_w^{j+1}\mathbf{v}$$

se cumplen en los espacios $L^p$ correspondientes. El Lema 9.1.12, aplicado al haz $\mathbf{F}_j$, muestra que $\nabla_w^j\mathbf{v}$ pertenece a $W^{1,p}(N,\mathbf{F}_j)$ y que su primera derivada débil es $\nabla_w^{j+1}\mathbf{v}$. La fórmula de Leibniz para $\mathbf{v}_\nu$ pasa al límite en $L^p$, porque sus coeficientes son las derivadas suaves y acotadas de $\chi$; de este modo queda establecida la misma fórmula para $\mathbf{v}$.

Se localiza ahora en una cubierta finita y se aplica un corte fijo igual a uno sobre el soporte de cada localización. Las componentes cortadas, prolongadas por cero, pertenecen a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$; el Lema 9.4.15 se aplica entonces en $\mathbb{R}^d$. El término cruzado de la prolongación se controla mediante la distancia positiva del soporte a la frontera de la carta. El Lema 9.4.16 permite regresar a la seminorma intrínseca. En cada marco, las contracciones con $\nabla^{k-j}\chi$ son sumas finitas de multiplicaciones por coeficientes suaves; la segunda parte del mismo lema euclidiano las controla. Las derivadas de $\chi$ están acotadas y la familia de cartas es finita, por lo que todos los términos quedan controlados por $C\|\mathbf{v}\|_{W^{s,p}(N,\mathbf{F})}$. La parte entera de la norma se controla directamente con la misma regla de Leibniz, las cotas uniformes de las derivadas de $\chi$ y la definición de $W^{k,p}(N,\mathbf{F})$. Esto completa la estimación de la norma entera y de la seminorma fraccionaria que aparecen en (9.71). □

**Proposición 9.4.18.** (Caracterización localizada de la norma intrínseca) Sea $(N,\mathbf{h})$ una variedad riemanniana compacta, conexa y sin frontera, de dimensión $d \geq 1$, y sea $\mathbf{F} \to N$ un haz vectorial suave de rango $r$ con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$, y $1 \leq p < \infty$. Elijamos una cubierta finita $(U_i, \varphi_i)_{i=1}^N$ de $N$ por bolas coordenadas regulares como en el Lema 9.4.16, una partición de la unidad $(\psi_i)_{i=1}^N$ con $\operatorname{supp}\psi_i \Subset U_i$, y marcos $(\mathbf{e}_{i,1},\dots,\mathbf{e}_{i,r})$ definidos en vecindades de $\overline{U_i}$. Escribamos

$$\psi_i \mathbf{v} = \sum_{a=1}^{r} v_i^a \mathbf{e}_{i,a} \qquad \text{en } U_i$$

y denotemos por $\widetilde{v}_i^a$ la prolongación por cero de $v_i^a \circ \varphi_i^{-1}$ a $\mathbb{R}^d$. Existen constantes $c, C > 0$, independientes de $\mathbf{v}$, tales que

$$c\|\mathbf{v}\|_{W^{s,p}(N,\mathbf{F})} \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{a=1}^{r} \|\widetilde{v}_i^a\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|\mathbf{v}\|_{W^{s,p}(N,\mathbf{F})}. \tag{9.76}$$

En particular, el espacio definido intrínsecamente es independiente de las cartas, los marcos y la partición utilizados para calcular la norma localizada.

*Demostración.* Tratemos primero $0 < s < 1$. El Lema 9.4.17 controla $\psi_i\mathbf{v}$ por $\mathbf{v}$, y el Lema 9.4.16 controla sus componentes dentro de $\varphi_i(U_i)$. Como $K_i := \varphi_i(\operatorname{supp}\psi_i) \Subset \varphi_i(U_i)$, la prolongación por cero no crea una singularidad en la frontera de la carta. Si $z \in K_i$ y $w \notin \varphi_i(U_i)$, entonces $\|z-w\| \geq \delta_i > 0$, y la parte cruzada de la seminorma queda acotada por

$$2\int_{K_i} |(v_i^a \circ \varphi_i^{-1})(z)|^p \left( \int_{\mathbb{R}^d \setminus \varphi_i(U_i)} \frac{dw}{\|z-w\|^{d+sp}} \right) dz \leq C\delta_i^{-sp} \|v_i^a \circ \varphi_i^{-1}\|_{L^p(\varphi_i(U_i))}^p.$$

En la última desigualdad se usaron coordenadas polares centradas en $z$; la integral radial es $\displaystyle\int_{\delta_i}^{\infty} r^{-sp-1}\,dr = (sp)^{-1}\delta_i^{-sp}$. Esto prueba la segunda desigualdad de (9.76).

Para la desigualdad inversa usamos $\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \psi_i \mathbf{v}$. La desigualdad triangular reduce la estimación a cada sección $\psi_i\mathbf{v}$. Los pares de puntos contenidos en $U_i$ se controlan por (9.72). Si uno de los puntos pertenece al soporte de $\psi_i$ y el otro a $N \setminus U_i$, su distancia es al menos $\operatorname{dist}_{\mathbf{h}}(\operatorname{supp}\psi_i, N \setminus U_i) > 0$; esa parte se controla por la norma $L^p$, como en el Lema 9.4.14. Esto demuestra la primera desigualdad cuando $0 < s < 1$.

Sea $s = k + \sigma$, con $k \geq 1$. En cada carta, la fórmula (9.39), aplicada a la sección localizada $\psi_i\mathbf{v}$, proporciona la expresión triangular

$$(\nabla_w^k(\psi_i\mathbf{v}))^a_{i_1\dots i_k} = \partial_{i_k}\cdots\partial_{i_1} v_i^a + \sum_{b=1}^{r}\sum_{|\beta|\leq k-1} (B_{k,\beta})^a_{b\,i_1\dots i_k}\,\partial^\beta v_i^b. \tag{9.77}$$

Los coeficientes y todas las derivadas que se usan están acotados en los compactos fijados. El Lema 9.4.15 controla en $W^{\sigma,p}$ cada derivada de orden a lo más $k-1$ mediante la norma $W^{k,p}$, y su segunda afirmación permite multiplicarla por los coeficientes $B_{k,\beta}$ después de insertar un corte igual a uno sobre el soporte considerado. Por consiguiente, (9.77) y la fórmula obtenida al despejar las derivadas parciales de orden $k$

dan, en ambos sentidos,

$$\sum_{a=1}^{r} \|\widetilde{v}_i^a\|_{W^{k+\sigma,p}(\mathbb{R}^d)} \le C \|\psi_i \mathbf{v}\|_{W^{k+\sigma,p}(N,\mathbf{F})}$$

y

$$\|\psi_i \mathbf{v}\|_{W^{k+\sigma,p}(N,\mathbf{F})} \le C \sum_{a=1}^{r} \|\widetilde{v}_i^a\|_{W^{k+\sigma,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

La identidad (9.39) fue establecida directamente para derivadas covariantes débiles; por ello (9.77) vale casi en todas partes para la sección dada. Su forma inversa se obtiene despejando algebraicamente las derivadas parciales principales, sin recurrir a una aproximación en la norma fraccionaria. La comparación de la parte fraccionaria de las componentes de $\nabla_w^k(\psi_i \mathbf{v})$ con su seminorma intrínseca se obtiene aplicando el Lema 9.4.16 al haz $\mathbf{F}_k$ para los pares contenidos en $U_i$. La sección $\nabla_w^k(\psi_i \mathbf{v})$ está sostenida en $\operatorname{supp} \psi_i \Subset U_i$; si sólo uno de los dos puntos está en $U_i$, la distancia positiva al complemento controla esa parte de la seminorma por la norma $L^p$, exactamente como en el caso $0 < s < 1$. Se obtiene así la seminorma intrínseca completa. Al sumar en la familia finita de cartas se obtiene (9.76) para todo $k$. □

**Corolario 9.4.19.** (Estructura funcional y densidad) Sea $(N, \mathbf{h})$ una variedad riemanniana compacta, conexa y sin frontera, y sea $\mathbf{F} \to N$ un haz vectorial suave con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $s > 0$ y $1 \le p < \infty$. Entonces $W^{s,p}(N, \mathbf{F})$ es un espacio de Banach. Es separable para $1 \le p < \infty$, reflexivo para $1 < p < \infty$, y $\Gamma(\mathbf{F})$ es denso en él.

*Demostración.* La Proposición 9.4.18 identifica la norma con una norma finita de localizaciones euclidianas. Si $(\mathbf{v}_j)$ es de Cauchy, cada componente localizada converge en el espacio de Banach $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ por el Teorema 6.2.3. Las relaciones de cambio de marco y la identidad $\sum_{i=1}^{N} \psi_i = 1$, que valen para cada $\mathbf{v}_j$, pasan al límite en $L^p$ y reconstruyen una sección $\mathbf{v} \in L^p(N, \mathbf{F})$. La primera desigualdad de (9.76) muestra que $\mathbf{v}_j \to \mathbf{v}$ en $W^{s,p}(N, \mathbf{F})$.

Para la densidad aproximamos cada $\widetilde{v}_i^a$ en $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ por funciones de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, usando el mismo teorema, y multiplicamos las aproximaciones por un corte fijo sostenido en $\varphi_i(U_i)$ e igual a uno sobre $K_i$. Al reconstruir en el marco $\mathbf{e}_{i,a}$ y sumar sobre $i, a$ se obtienen secciones suaves; la estimación localizada demuestra la convergencia. La separabilidad se obtiene de esta misma representación finita. Para $1 < p < \infty$, el mapeo

$$\mathbf{v} \longmapsto \left( \mathbf{v}, \frac{\mathbf{v}(x) - P^{\mathbf{F}}_{\gamma_{xy}, 1 \to 0} \mathbf{v}(y)}{d_{\mathbf{h}}(x,y)^{\frac{d}{p} + \sigma}} \right)$$

realiza el caso $0 < s < 1$ como un subespacio cerrado de un producto de espacios $L^p$ reflexivos. La imagen es cerrada porque la norma inducida por ese producto es equivalente a la norma ya probada completa. Para $s = k + \sigma$, se considera en el mismo producto el vector formado por $\mathbf{v}, \nabla_w \mathbf{v}, \dots, \nabla_w^k \mathbf{v}$ y por el cociente de diferencias paralelas de $\nabla_w^k \mathbf{v}$. La cerradura de las derivadas covariantes débiles y la completitud anterior muestran de nuevo que la imagen es cerrada. Un subespacio cerrado de un producto finito de espacios $L^p$ reflexivos es reflexivo. □

**Observación 9.4.20.** (Dependencia de la conexión) La seminorma de (9.69) registra la conexión y es, por ello, geométricamente natural. No obstante, dos conexiones suaves y compatibles sobre el mismo haz compacto producen el mismo espacio con normas equivalentes. En efecto, la Proposición 9.4.18 compara ambas normas con las mismas localizaciones euclidianas; las constantes pueden ser distintas porque dependen de las matrices locales de las conexiones.

Aplicamos ahora esta construcción a $N = \partial M$ y $\mathbf{F} = \mathbf{E}\restriction_{\partial M}$, con la métrica inducida y la conexión del Lema 9.4.11. La regularidad fraccionaria resultante es, por lo tanto, intrínseca a los datos geométricos de la frontera.

**Teorema 9.4.21.** (Traza intrínseca exacta para haces vectoriales) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera suave no vacía y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango finito, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $m \in \mathbb{N}$ y $1 < p < \infty$, la restricción de secciones suaves se extiende de manera única a un operador lineal continuo y suprayectivo

$$\mathbf{Tr} : W^{m,p}(M, \mathbf{E}) \longrightarrow W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial M, \mathbf{E}\restriction_{\partial M}). \tag{9.78}$$

Existe un operador lineal continuo

$$\mathbf{Ex} : W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial M, \mathbf{E}\restriction_{\partial M}) \longrightarrow W^{m,p}(M, \mathbf{E}) \tag{9.79}$$

tal que $\mathbf{TrEx} = I$. En particular, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$\|\mathbf{Tru}\|_{W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial M, \mathbf{E}\restriction_{\partial M})} \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}$$

y

$$\|\mathbf{Exv}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \leq C_2 \|\mathbf{v}\|_{W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial M, \mathbf{E}\restriction_{\partial M})}.$$

*Demostración.* Si $\dim M = 1$, la frontera es un conjunto finito y, de acuerdo con la convención anterior, el espacio de llegada es la suma finita de las fibras de $\mathbf{E}$ sobre sus puntos. En cada componente intervalo, el teorema fundamental del cálculo y la desigualdad de Hölder acotan la evaluación en los extremos por la norma $W^{1,p}$ y, por lo tanto, por la norma $W^{m,p}$. Una elección de secciones suaves, sostenidas en vecindades disjuntas de los extremos y con valores prescritos en ellos, proporciona una corretracción lineal; su continuidad es automática porque el espacio de llegada tiene dimensión finita. Supondremos en el resto de la prueba que $\dim M \geq 2$.

Pongamos $s := m - \frac{1}{p} = (m-1) + (1 - \frac{1}{p})$; como $1 < p < \infty$, su parte fraccionaria pertenece a $(0,1)$. Elegimos las medias bolas regulares, los marcos y la partición finita $(\psi_\alpha)_{\alpha=1}^N$ de la prueba del Teorema 9.4.12, refinados de modo que las cartas tangenciales de $\partial M$ satisfagan las hipótesis de la Proposición 9.4.18.

Sea primero $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$. En una carta escribimos

$$\psi_\alpha \mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} f_\alpha^a \mathbf{e}_{\alpha,a}, \qquad v_\alpha^a := f_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1} \quad \text{en } B_\alpha^+.$$

Cada $v_\alpha^a$ se anula en una vecindad de la parte esférica. Su prolongación por cero $\widetilde{v}_\alpha^a$ a $\mathbb{R}_+^n$ pertenece a $W^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ por el Lema 3.6.8, y

$$\|\widetilde{v}_\alpha^a\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)} = \|v_\alpha^a\|_{W^{m,p}(B_\alpha^+)}.$$

Aplicamos el operador $\mathcal{E}_m$ del Corolario 3.6.4. La identificación $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ del Teorema 6.3.10, seguida del Teorema 6.7.2, da

$$\begin{aligned}\|\operatorname{tr}(\mathcal{E}_m \widetilde{v}_\alpha^a)\|_{B_{p,p}^{m-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} &\le C\|\mathcal{E}_m \widetilde{v}_\alpha^a\|_{H^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C'\|v_\alpha^a\|_{W^{m,p}(B_\alpha^+)}.\end{aligned}$$

Como $m - \frac{1}{p}$ no es entero, el Teorema 6.3.14 identifica $B_{p,p}^{m-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$ con $W^{m-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$. La traza anterior coincide sobre la bola plana con $(v_\alpha^a)\restriction_{B'_\alpha}$. Dos extensiones de $\widetilde{v}_\alpha^a$ que coinciden en el semiespacio tienen la misma traza: se aproxima en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ por funciones suaves hasta la frontera y se usa la continuidad de los dos operadores de traza; de manera equivalente, se aplica la localidad registrada en el Lema 3.7.2. Como $\widetilde{v}_\alpha^a$ se anula en una vecindad relativa del complemento de $B'_\alpha$ en el borde del semiespacio, el mismo lema muestra que la traza se anula allí. Por lo tanto, $\operatorname{tr}(\mathcal{E}_m \widetilde{v}_\alpha^a)$ es exactamente la prolongación por cero de la traza sobre $B'_\alpha$.

La caracterización localizada de la Proposición 9.4.18 da ahora, con $s = m - \frac{1}{p}$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\restriction_{\partial M}\|_{W^{s,p}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M})} &\le C \sum_{\substack{1\le\alpha\le N\\ 1\le a\le r}} \|\operatorname{tr}(\mathcal{E}_m \widetilde{v}_\alpha^a)\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &\le C \sum_{\substack{1\le\alpha\le N\\ 1\le a\le r}} \|v_\alpha^a\|_{W^{m,p}(B_\alpha^+)} \\ &\le C \sum_{\alpha=1}^{N} \|\psi_\alpha \mathbf{u}\|_{W^{m,p}(U_\alpha,\mathbf{E})} \\ &\le C\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.\end{aligned}$$

En la tercera línea se usó la equivalencia local entre derivadas parciales y covariantes; en la cuarta, la continuidad de la multiplicación por cada $\psi_\alpha$ y la finitud del atlas. Las constantes pueden tomarse simultáneamente porque sólo intervienen un número finito de cartas, marcos y cortes.

El Teorema 9.4.8 y el Corolario 9.4.19 permiten extender la restricción de manera única y continua a todo $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. La inclusión continua

$$W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M}) \hookrightarrow W^{m-1,p}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M})$$

se ve directamente en la definición. Por unicidad de la extensión desde las secciones suaves, el operador obtenido coincide con el del Teorema 9.4.12.

Construyamos la corretracción. Conservamos la cubierta anterior y elegimos una partición $(\vartheta_\alpha)$ de la unidad en $\partial M$ con $\operatorname{supp}\vartheta_\alpha \Subset U_\alpha \cap \partial M$. Para $\mathbf{v} \in W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M})$ escribimos

$$\vartheta_\alpha \mathbf{v} = \sum_{a=1}^{r} g_\alpha^a \mathbf{e}_{\alpha,a}$$

y prolongamos por cero $g_\alpha^a \circ (\varphi_\alpha\restriction_{\partial M})^{-1}$ a $\mathbb{R}^{n-1}$; denotemos esa prolongación por $\widetilde{g}_\alpha^a$. La Proposición 9.4.18 controla la suma de las normas $W^{m-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ de estas prolongaciones por la norma de $\mathbf{v}$.

Aplicamos a cada componente la corretracción ex del Teorema 6.7.2. El resultado pertenece a $H^{m,p}(\mathbb{R}^n) =$

$W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Elegimos un corte $\chi_\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ cuyo soporte, al intersectarlo con el semiespacio superior, esté contenido en la región coordenada, y cuya restricción al hiperplano sea igual a uno en una vecindad del soporte de todas las componentes localizadas. Multiplicamos $\operatorname{ex}\widetilde{g}_\alpha^a$ por $\chi_\alpha$, lo transportamos a la carta, lo reconstruimos con el marco $\mathbf{e}_{\alpha,a}$ y lo prolongamos por cero fuera de $U_\alpha$. Denotemos por $\mathbf{V}_\alpha$ la sección global obtenida. El soporte del factor $\chi_\alpha \operatorname{ex}\widetilde{g}_\alpha^a$ queda separado de la parte artificial de la frontera de la carta; por ello su transporte a $U_\alpha$ y su prolongación por cero tienen derivadas débiles hasta orden $m$ sin términos de frontera. Esto se comprueba con el mismo argumento de pruebas compactamente soportadas del Lema 3.6.8. Las cotas euclidianas para multiplicadores y la equivalencia local de normas dan

$$\|\mathbf{V}_\alpha\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_\alpha \sum_{a=1}^{r} \|\widetilde{g}_\alpha^a\|_{W^{m-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Definimos

$$\mathbf{Exv} := \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{V}_\alpha.$$

La suma es finita, de modo que la estimación localizada prueba la continuidad. Como $\chi_\alpha = 1$ sobre el soporte del dato de frontera y $\operatorname{tr}\operatorname{ex} = I$, se tiene

$$\mathbf{TrV}_\alpha = \vartheta_\alpha \mathbf{v}.$$

Al sumar en $\alpha$ obtenemos $\mathbf{TrExv} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vartheta_\alpha \mathbf{v} = \mathbf{v}$. Esto prueba simultáneamente la suprayectividad y las estimaciones anunciadas. □

**Teorema 9.4.22.** (Trazas de orden superior) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera no vacía y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $m \ge 1$ y $1 \le p < \infty$. Para cada $0 \le j \le m-1$, el operador de restricción suave

$$\mathbf{u} \longmapsto \gamma_0(\nabla^j \mathbf{u}) = (\nabla^j \mathbf{u}) \restriction_{\partial M}, \qquad \mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E}),$$

se extiende de manera única a un operador lineal continuo

$$\mathbf{Tr}_j \colon W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow W^{m-j-1,p}\left(\partial M, \left(T^{(0,j)}(TM) \otimes \mathbf{E}\right) \restriction_{\partial M}\right).$$

En consecuencia, el operador

$$\mathcal{T}_m \colon W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \bigoplus_{j=0}^{m-1} W^{m-j-1,p}\left(\partial M, \left(T^{(0,j)}(TM) \otimes \mathbf{E}\right) \restriction_{\partial M}\right),$$

definido por $\mathcal{T}_m \mathbf{u} := \left(\mathbf{Tr}_0 \mathbf{u}, \mathbf{Tr}_1 \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{Tr}_{m-1} \mathbf{u}\right)$, es lineal y continuo. Si $1 < p < \infty$, se tiene además la estimación más precisa

$$\mathbf{Tr}_j \colon W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow W^{m-j-\frac{1}{p},p}\left(\partial M, \left(T^{(0,j)}(TM) \otimes \mathbf{E}\right) \restriction_{\partial M}\right)$$

para todo $j \in \{0, \ldots, m-1\}$.

*Demostración.* Fijemos $0 \le j \le m-1$ y escribamos $\mathbf{F}_j := T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E}$. Este haz está equipado con la métrica producto y con la conexión inducida. Además, $\mathbf{F}_j \restriction_{\partial M} = \left(T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E}\right)\restriction_{\partial M}$.
Sea $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Por el Teorema 9.4.8, existe $(\mathbf{u}_\nu) \subseteq \Gamma(\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}_\nu \to \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Para secciones suaves, la definición recursiva de la derivada covariante da

$$\nabla^s(\nabla^j \mathbf{u}_\nu) = \nabla^{s+j}\mathbf{u}_\nu, \qquad 0 \le s \le m-j,$$

después de la identificación natural de los factores cotangentes. En consecuencia, $(\nabla^j \mathbf{u}_\nu)$ es de Cauchy en $W^{m-j,p}(M,\mathbf{F}_j)$. Su límite en $L^p$ es $\nabla^j_w \mathbf{u}$; el carácter cerrado de las derivadas covariantes débiles muestra entonces que $\nabla^j_w \mathbf{u} \in W^{m-j,p}(M,\mathbf{F}_j)$ y que sus derivadas sucesivas son las esperadas. Además,

$$\|\nabla^j_w \mathbf{u}\|_{W^{m-j,p}(M,\mathbf{F}_j)} \le \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Como $m-j \ge 1$, podemos aplicar el Teorema 9.4.12 al haz $\mathbf{F}_j \to M$. Así obtenemos un operador lineal continuo

$$\mathbf{Tr}^{\mathbf{F}_j} : W^{m-j,p}(M,\mathbf{F}_j) \longrightarrow W^{m-j-1,p}(\partial M, \mathbf{F}_j \restriction_{\partial M}).$$

Definimos, para $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$, $\mathbf{Tr}_j \mathbf{u} := \mathbf{Tr}^{\mathbf{F}_j}(\nabla^j_w \mathbf{u})$. Entonces

$$\|\mathbf{Tr}_j \mathbf{u}\|_{W^{m-j-1,p}(\partial M, \mathbf{F}_j\restriction_{\partial M})} \le C\|\nabla^j_w \mathbf{u}\|_{W^{m-j,p}(M,\mathbf{F}_j)} \le C\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Esto prueba que $\mathbf{Tr}_j$ es lineal y continuo.
Si $1 < p < \infty$, aplicamos en su lugar el Teorema 9.4.21 al haz $\mathbf{F}_j$ y al orden $m-j$. Como $\nabla^j_w \mathbf{u} \in W^{m-j,p}(M,\mathbf{F}_j)$, obtenemos

$$\|\mathbf{Tr}_j \mathbf{u}\|_{W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\partial M, \mathbf{F}_j\restriction_{\partial M})} \le C\|\nabla^j_w \mathbf{u}\|_{W^{m-j,p}(M,\mathbf{F}_j)} \le C\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Al componer con la inclusión continua en $W^{m-j-1,p}(\partial M, \mathbf{F}_j \restriction_{\partial M})$, el operador así obtenido y el definido mediante el teorema de orden entero coinciden sobre las secciones suaves y, por densidad, en todo $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Veamos ahora que este operador extiende la restricción suave. Si $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$, entonces $\nabla^j_w \mathbf{u} = \nabla^j \mathbf{u}$, y por la definición del operador de traza del Teorema 9.4.12, se tiene $\mathbf{Tr}^{\mathbf{F}_j}(\nabla^j \mathbf{u}) = (\nabla^j \mathbf{u}) \restriction_{\partial M} = \gamma_0(\nabla^j \mathbf{u})$. Por lo tanto, $\mathbf{Tr}_j$ extiende el operador suave $\mathbf{u} \mapsto \gamma_0(\nabla^j \mathbf{u})$.
La unicidad se sigue de la densidad de las secciones suaves en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Finalmente, dotamos la suma directa $\bigoplus_{j=0}^{m-1} W^{m-j-1,p}(\partial M, \mathbf{F}_j \restriction_{\partial M})$ con cualquiera de las normas producto equivalentes. Como cada $\mathbf{Tr}_j$ es lineal y continuo, existe una constante $C_j > 0$ tal que $\|\mathbf{Tr}_j \mathbf{u}\|_{W^{m-j-1,p}(\partial M, \mathbf{F}_j\restriction_{\partial M})} \le C_j\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}$. Sumando sobre $j \in \{0,\dots,m-1\}$, obtenemos

$$\|\mathcal{T}_m \mathbf{u}\| \le \left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j\right)\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}_m$ es lineal y continuo. □

La fórmula de integración por partes que motivó esta construcción permite entender por qué $\mathcal{T}_m$ es el operador

de frontera adecuado. En la fórmula de Green para $\nabla^s$ aparecen términos de la forma

$$\sum_{j=0}^{s-1}(-1)^{s-1-j}\int_{\partial M}\left\langle \nabla^j \mathbf{F}, \iota_{\boldsymbol{\nu}}\left((\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\circ\nabla)^{s-1-j}\mathbf{G}\right)\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}.$$

Por lo tanto, las cantidades que aparecen naturalmente en la frontera son las restricciones de $\nabla^j\mathbf{F}$ a $\partial M$, con $0\le j\le s-1$. Esta es la razón por la cual, para caracterizar $W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})$ cuando $m\ge 2$, no basta anular la traza de $\mathbf{u}$: se deben anular las trazas de sus derivadas covariantes hasta orden $m-1$.

**Teorema 9.4.23.** (Caracterización de $W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})$ por trazas) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera no vacía y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $m\ge 1$ y $1\le p<\infty$. Entonces $W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})=\ker(\mathcal{T}_m)$. Es decir,

$$W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})=\left\{\mathbf{u}\in W^{m,p}(M,\mathbf{E})\,\middle|\,\mathbf{Tr}_j\mathbf{u}=0 \text{ para todo } 0\le j\le m-1\right\}.$$

*Demostración.* Primero probamos que $W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})\subseteq\ker(\mathcal{T}_m)$. Sea $\mathbf{u}\in W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Por definición, existe una sucesión $(\mathbf{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}_k\to\mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Como cada $\mathbf{u}_k$ tiene soporte compacto contenido en $\mathrm{Int}(M)$, existe una vecindad de $\partial M$ donde $\mathbf{u}_k$ se anula. Por lo tanto, para todo $0\le j\le m-1$, también $\nabla^j\mathbf{u}_k$ se anula en una vecindad de $\partial M$. En consecuencia, $\mathbf{Tr}_j\mathbf{u}_k=0$. Usando la continuidad de $\mathbf{Tr}_j$, obtenemos $\mathbf{Tr}_j\mathbf{u}=\lim_{k\to\infty}\mathbf{Tr}_j\mathbf{u}_k=0$. Como esto vale para todo $0\le j\le m-1$, se sigue que $\mathbf{u}\in\ker(\mathcal{T}_m)$.
Probemos ahora la inclusión recíproca. Sea $\mathbf{u}\in\ker(\mathcal{T}_m)$. Tomamos una cubierta abierta finita $(U_\alpha)_{\alpha=1}^N$ de $M$, formada por bolas coordenadas regulares contenidas en $\mathrm{Int}(M)$ y por medias bolas coordenadas regulares cerca de $\partial M$. Sea $(\psi_\alpha)_{\alpha=1}^N$ una partición suave de la unidad subordinada a dicha cubierta, con $\operatorname{supp}\psi_\alpha\Subset U_\alpha$. Como $\mathbf{u}=\sum_{\alpha=1}^N\psi_\alpha\mathbf{u}$, basta probar que $\psi_\alpha\mathbf{u}\in W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})$ para cada $\alpha\in\{1,\dots,N\}$.
Fijemos $\alpha\in\{1,\dots,N\}$. Primero probamos que $\mathbf{Tr}_j(\psi_\alpha\mathbf{u})=0$ para todo $0\le j\le m-1$. Como $\mathbf{u}\in\ker(\mathcal{T}_m)$, se tiene $\mathbf{Tr}_t\mathbf{u}=0$ para todo $0\le t\le m-1$. Por el Teorema 9.4.8, existe una sucesión $(\mathbf{v}_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\Gamma(\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{v}_k\to\mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Por la continuidad de las trazas de orden superior, dada por el Teorema 9.4.22, se obtiene $\mathbf{Tr}_t\mathbf{v}_k\to\mathbf{Tr}_t\mathbf{u}=0$ en $W^{m-t-1,p}\left(\partial M,\left(T^{(0,t)}(TM)\otimes\mathbf{E}\right)\restriction_{\partial M}\right)$, para todo $0\le t\le m-1$.
Ahora fijemos $j\in\{0,\dots,m-1\}$. Para secciones suaves, la regla de Leibniz iterada para la conexión producto da, salvo las permutaciones naturales de los índices covariantes,

$$\nabla^j(\psi_\alpha\mathbf{v}_k)=\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(\nabla^{j-t}\psi_\alpha)\otimes\nabla^t\mathbf{v}_k.$$

De manera precisa, esta igualdad significa que el lado derecho representa una suma finita de términos obtenidos a partir de $(\nabla^{j-t}\psi_\alpha)\otimes\nabla^t\mathbf{v}_k$ mediante permutaciones de los $j$ índices covariantes. Al restringir a $\partial M$, obtenemos

$$\mathbf{Tr}_j(\psi_\alpha\mathbf{v}_k)=\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}\left((\nabla^{j-t}\psi_\alpha)\restriction_{\partial M}\right)\otimes\mathbf{Tr}_t\mathbf{v}_k,$$

nuevamente salvo esas permutaciones de índices. Esta escritura es suficiente para la estimación que necesitamos, porque las permutaciones de índices son isometrías puntuales, y la multiplicación tensorial por las secciones suaves fijas $(\nabla^{j-t}\psi_\alpha)\restriction_{\partial M}$ es continua en los espacios de Sobolev correspondientes so-

bre la variedad compacta $\partial M$. Como $\mathbf{Tr}_t \mathbf{v}_k \to 0$ para todo $0 \le t \le j$, se concluye que $\mathbf{Tr}_j(\psi_\alpha \mathbf{v}_k) \to 0$ en $W^{m-j-1,p}\left(\partial M, \left(T^{(0,j)}(TM) \otimes \mathbf{E}\right) \restriction_{\partial M}\right)$.

Por otra parte, el mapeo $\mathbf{v} \longmapsto \mathbf{Tr}_j(\psi_\alpha \mathbf{v})$ es continuo de $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ en ese mismo espacio: esto se sigue de la continuidad de la multiplicación por $\psi_\alpha$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$, dada por el Lema 9.4.9, y de la continuidad de $\mathbf{Tr}_j$. Como $\mathbf{v}_k \to \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$, se tiene $\mathbf{Tr}_j(\psi_\alpha \mathbf{v}_k) \to \mathbf{Tr}_j(\psi_\alpha \mathbf{u})$. Por unicidad del límite, $\mathbf{Tr}_j(\psi_\alpha \mathbf{u}) = 0$. Como $j$ era arbitrario, obtenemos $\mathbf{Tr}_j(\psi_\alpha \mathbf{u}) = 0$ para todo $0 \le j \le m-1$.

Ahora consideramos los dos tipos de cartas. Si $U_\alpha$ es una bola coordenada regular contenida en $\mathrm{Int}(M)$, entonces $\psi_\alpha \mathbf{u}$ tiene soporte compacto contenido en $\mathrm{Int}(M)$. Tomamos una función $\chi_\alpha \in C_c^\infty(\mathrm{Int}(M))$ tal que $\chi_\alpha \equiv 1$ en una vecindad de $\mathrm{supp}(\psi_\alpha)$. Por el Teorema 9.4.8, existe una sucesión $(\mathbf{z}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma(\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{z}_k \to \psi_\alpha \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Por el Lema 9.4.9, se tiene $\chi_\alpha \mathbf{z}_k \to \chi_\alpha \psi_\alpha \mathbf{u} = \psi_\alpha \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Además, cada $\chi_\alpha \mathbf{z}_k$ es una sección suave con soporte compacto contenido en $\mathrm{Int}(M)$. Por lo tanto, $\psi_\alpha \mathbf{u} \in W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})$.

Supongamos ahora que $U_\alpha$ es una media bola coordenada regular. Escribimos $B_\alpha^+ := \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \mathrm{Int}(M))$ y $B'_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \partial M)$. Tomamos un marco local suave $(\mathbf{e}_{1,\alpha}, \dots, \mathbf{e}_{r,\alpha})$ de $\mathbf{E}$ sobre $U_\alpha$, y escribimos localmente $\psi_\alpha \mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} w_\alpha^a \mathbf{e}_{a,\alpha}$. Pongamos $q_\alpha^a := w_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}$ en $B_\alpha^+$, y denotemos por $\widetilde{q}_\alpha^a$ su extensión por cero a $\mathbb{R}_+^n$. Como $\mathrm{supp}\,\psi_\alpha \Subset U_\alpha$, cada $q_\alpha^a$ se anula fuera de un compacto de $B_\alpha^+ \cup B'_\alpha$ contenido a distancia positiva de la parte esférica de $B_\alpha^+$. Por lo tanto, para estas funciones podemos usar la convención anterior.

Queremos probar que cada $q_\alpha^a$ pertenece a la cerradura de $C_c^\infty(B_\alpha^+)$ en $W^{m,p}(B_\alpha^+)$. Por el Corolario 3.7.3, basta probar que $\gamma_0 D^\beta q_\alpha^a = 0$ sobre $B'_\alpha$, en el sentido de la convención anterior, para todo $|\beta| \le m-1$ y todo $a$. De manera explícita, debemos probar que $(\gamma_0 D^\beta \widetilde{q}_\alpha^a) \restriction_{B'_\alpha} = 0$.

Lo probaremos por inducción sobre $\ell$. Para $\ell = 0$, la igualdad $\mathbf{Tr}_0(\psi_\alpha \mathbf{u}) = 0$ significa que la traza de $\psi_\alpha \mathbf{u}$ se anula como sección de $\mathbf{E} \restriction_{\partial M}$. En la carta de frontera y en el marco elegido, la construcción del operador de traza se hizo precisamente tomando las componentes, extendiéndolas por cero al semiespacio y aplicando la traza del semiespacio. Por lo tanto, $(\gamma_0 \widetilde{q}_\alpha^a) \restriction_{B'_\alpha} = 0$ para todo $a$.

Supongamos probado que $(\gamma_0 D^\beta \widetilde{q}_\alpha^a) \restriction_{B'_\alpha} = 0$ para todo $|\beta| \le \ell - 1$ y todo $a$, donde $1 \le \ell \le m-1$. Como $\mathbf{Tr}_\ell(\psi_\alpha \mathbf{u}) = 0$, las componentes locales de la traza de $\nabla^\ell(\psi_\alpha \mathbf{u})$ se anulan sobre $B'_\alpha$. Por el Lema 9.1.28, aplicado en la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y en el marco $(\mathbf{e}_{1,\alpha}, \dots, \mathbf{e}_{r,\alpha})$, se tiene localmente

$$(\nabla^\ell(\psi_\alpha \mathbf{u}))^a_{i_1 \dots i_\ell} = \partial_{i_\ell} \cdots \partial_{i_1} w_\alpha^a + \sum_{b=1}^{r} \sum_{|\beta| \le \ell-1} (B_\beta)^a_{b\, i_1 \dots i_\ell} \, \partial^\beta w_\alpha^b.$$

Para pasar esta identidad a las trazas fijamos primero los soportes de la aproximación. Elegimos $\chi_\alpha \in C_c^\infty(U_\alpha)$ igual a uno cerca de $\mathrm{supp}\,\psi_\alpha$ y tomamos $\mathbf{z}_k \in \Gamma(\mathbf{E})$ con $\mathbf{z}_k \to \psi_\alpha \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$, por el Teorema 9.4.8. Entonces $\mathbf{v}_k = \chi_\alpha \mathbf{z}_k$ converge al mismo límite en ese espacio, por el Lema 9.4.9, y todos sus soportes quedan en el compacto fijo $\mathrm{supp}\,\chi_\alpha$. Denotemos sus componentes coordenadas por $q_{\alpha,k}^a$. La equivalencia local de normas y el Lema 3.6.8 dan

$$\widetilde{q}_{\alpha,k}^a \longrightarrow \widetilde{q}_\alpha^a \quad \text{en } W^{m,p}(\mathbb{R}_+^n).$$

La extensión por cero se realiza aquí desde la media bola al semiespacio, a través de su parte esférica; el compacto fijo está separado de esa parte y no se cruza la frontera plana.

Para $|\beta| \le \ell$, $D^\beta \widetilde{q}_{\alpha,k}^a \to D^\beta \widetilde{q}_\alpha^a$ en $W^{m-|\beta|,p}(\mathbb{R}_+^n)$, y por la continuidad de la traza,

$$\gamma_0 D^\beta \widetilde{q}_{\alpha,k}^a \longrightarrow \gamma_0 D^\beta \widetilde{q}_\alpha^a \quad \text{en } W^{m-|\beta|-1,p}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Todos estos espacios se incluyen continuamente en $W^{m-\ell-1,p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Multiplicamos los coeficientes $B_\beta$, expresados en la carta, por un corte que vale uno cerca del compacto fijo; se extienden así a coeficientes suaves de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. Sus multiplicaciones, antes y después de tomar traza, son continuas. Además, las componentes de $\nabla^\ell \mathbf{v}_k$ convergen en $W^{m-\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$, pues la derivada covariante de orden $\ell$ es continua de $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ en $W^{m-\ell,p}(M, T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E})$, como se probó en el Teorema 9.4.22. Aplicamos la identidad local a $\mathbf{v}_k$ y tomamos límites en $W^{m-\ell-1,p}(\mathbb{R}^{n-1})$, restringiendo después a $B'_\alpha$. Obtenemos exactamente la identidad de trazas requerida para $\psi_\alpha\mathbf{u}$, también cuando $p=1$.

Fijemos ahora un multiíndice $\gamma$ con $|\gamma|=\ell$. Elegimos un bloque ordenado $(i_1,\dots,i_\ell)$ en el cual el índice $q$ aparece exactamente $\gamma_q$ veces. Como las derivadas débiles parciales conmutan, el término principal de la componente correspondiente es

$$\partial_{i_\ell}\cdots\partial_{i_1} q^a_\alpha = D^\gamma q^a_\alpha.$$

Al tomar la traza de esa componente en $B'_\alpha$, obtenemos

$$0 = \gamma_0(D^\gamma \widetilde{q}^a_\alpha) + \sum_{b=1}^{r}\sum_{|\beta|\le \ell-1} \gamma_0\left(\widetilde{B}_\beta\, D^\beta \widetilde{q}^b_\alpha\right) \quad \text{en } B'_\alpha,$$

donde $\widetilde{B}_\beta$ denota el coeficiente suave expresado en la carta. El miembro izquierdo es cero porque es una componente de $\mathbf{Tr}_\ell(\psi_\alpha\mathbf{u})$. Para cada término de la suma, la compatibilidad de la traza con la multiplicación por una función suave da

$$\gamma_0\left(\widetilde{B}_\beta\, D^\beta \widetilde{q}^b_\alpha\right) = \widetilde{B}_\beta \restriction_{B'_\alpha}\ \gamma_0\left(D^\beta \widetilde{q}^b_\alpha\right) = 0,$$

pues $|\beta|\le \ell-1$ y se aplica la hipótesis inductiva. Para esta compatibilidad se usa la misma sucesión de soporte fijo: si $v_k\to v$ en $W^{m-|\beta|,p}(\mathbb{R}^n_+)$, tanto $\gamma_0(\widetilde{B}_\beta v_k)$ como $(\widetilde{B}_\beta|_{\mathbb{R}^{n-1}})\gamma_0 v_k$ convergen en $W^{m-|\beta|-1,p}(\mathbb{R}^{n-1})$, por las cotas de multiplicación y traza. Coinciden para cada $k$ suave; la unicidad del límite prueba la identidad usada. Por consiguiente,

$$\gamma_0\left(D^\gamma \widetilde{q}^a_\alpha\right) \restriction_{B'_\alpha} = 0$$

para todo $|\gamma|=\ell$ y todo $a$. Con ello termina la inducción.

Así, $\gamma_0 D^\beta q^a_\alpha = 0$ sobre $B'_\alpha$, en el sentido de la convención anterior, para todo $|\beta|\le m-1$ y todo $a$. Por el Corolario 3.7.3, cada $q^a_\alpha$ pertenece a la cerradura de $C^\infty_c(B^+_\alpha)$ en $W^{m,p}(B^+_\alpha)$. Entonces, para cada $a$, existe una sucesión $(\varphi^a_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq C^\infty_c(B^+_\alpha)$ tal que $\varphi^a_k\to q^a_\alpha$ en $W^{m,p}(B^+_\alpha)$.

Definimos, sobre $U_\alpha\cap \mathrm{Int}(M)$, $\mathbf{s}_k := \sum_{a=1}^{r}(\varphi^a_k\circ\varphi_\alpha)\mathbf{e}_{a,\alpha}$. Como cada $\varphi^a_k$ tiene soporte compacto contenido en $B^+_\alpha$, cada $\mathbf{s}_k$ se extiende por cero como una sección suave con soporte compacto contenido en $\mathrm{Int}(M)$. Por la equivalencia local de normas en la media bola coordenada regular, se tiene $\mathbf{s}_k\to\psi_\alpha\mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Por lo tanto, $\psi_\alpha\mathbf{u}\in W^{m,p}_0(M,\mathbf{E})$.

Hemos probado que $\psi_\alpha\mathbf{u}\in W^{m,p}_0(M,\mathbf{E})$ para cada $\alpha\in\{1,\dots,N\}$. Como $\mathbf{u}=\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\mathbf{u}$, se concluye que $\mathbf{u}\in W^{m,p}_0(M,\mathbf{E})$. Esto prueba que $\ker(\mathcal{T}_m)\subseteq W^{m,p}_0(M,\mathbf{E})$ y termina la demostración. □

### 9.4.3 Encajes para secciones en variedades compactas con frontera

El principio de localización permite trasladar a las variedades con frontera los encajes establecidos anteriormente para haces sobre variedades sin frontera. En las cartas interiores se reproduce el argumento de los Teoremas 9.2.1

y 9.2.2. En una carta de frontera, la sección localizada se representa mediante funciones de Sobolev en una media bola; la extensión por cero del Lema 3.6.8 permite considerarlas como funciones en el semiespacio, donde se aplican las partes continua y compacta del Teorema 3.6.6. Una partición suave de la unidad reúne después las estimaciones locales.

**Teorema 9.4.24.** (Encaje de Sobolev para haces sobre variedades con frontera) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera suave no vacía, y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave real o complejo de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ (hermitiana en el caso complejo) y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $j\geq 0$ y $m\geq 1$ enteros y $1\leq p,q<\infty$ tales que

$$j+m-\frac{n}{p}\geq j-\frac{n}{q}.$$

Entonces la inclusión

$$W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})\hookrightarrow W^{j,q}(M,\mathbf{E})$$

es continua.

*Demostración.* Elegimos una cubierta finita $(U_\alpha,\varphi_\alpha)_{\alpha=1}^N$ formada por bolas coordenadas regulares contenidas en $\operatorname{Int}(M)$ y por medias bolas coordenadas regulares centradas en $\partial M$. Refinando la cubierta, suponemos que $\overline{U_\alpha}$ está contenida en el dominio de un marco local suave $(\mathbf{e}_{1,\alpha},\dots,\mathbf{e}_{r,\alpha})$ de $\mathbf{E}$. Tomemos una partición suave de la unidad $(\psi_\alpha)_{\alpha=1}^N$ subordinada a la cubierta, con $\operatorname{supp}\psi_\alpha\Subset U_\alpha$.
Sea $\mathbf{u}\in W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})$. Por el Lema 9.4.9, cada $\psi_\alpha\mathbf{u}$ pertenece a $W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})$ y existe $C_0>0$, independiente de $\mathbf{u}$ y de $\alpha$, tal que

$$\|\psi_\alpha\mathbf{u}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})}\leq C_0\|\mathbf{u}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

En $U_\alpha$ escribimos

$$\psi_\alpha\mathbf{u}=\sum_{a=1}^{r}u_\alpha^a\mathbf{e}_{a,\alpha}$$

y ponemos $v_\alpha^a:=u_\alpha^a\circ\varphi_\alpha^{-1}$. Por los Lemas 9.1.44 y 9.4.5, la norma definida mediante derivadas covariantes es equivalente a la suma de las normas de las componentes; aquí usamos la compatibilidad de $\nabla^{\mathbf{E}}$ con $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. En el caso complejo se aplican a las partes real e imaginaria. Así, existen constantes $c_\alpha,C_\alpha>0$ tales que

$$c_\alpha\sum_{a=1}^{r}\|v_\alpha^a\|_{W^{j+m,p}(\Omega_\alpha)}\leq\|\psi_\alpha\mathbf{u}\|_{W^{j+m,p}(U_\alpha,\mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})}$$

y

$$\|\psi_\alpha\mathbf{u}\|_{W^{j,q}(U_\alpha,\mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})}\leq C_\alpha\sum_{a=1}^{r}\|v_\alpha^a\|_{W^{j,q}(\Omega_\alpha)},$$

donde $\Omega_\alpha:=\varphi_\alpha(U_\alpha)$ en una carta interior y $\Omega_\alpha:=\varphi_\alpha(U_\alpha\cap\operatorname{Int}(M))$ en una carta de frontera.
Si $U_\alpha$ es interior, el soporte de $v_\alpha^a$ está contenido en $\varphi_\alpha(\operatorname{supp}\psi_\alpha)\Subset\Omega_\alpha$. Por lo tanto, $v_\alpha^a\in W_0^{j+m,p}(\Omega_\alpha)$, y se procede exactamente como en la prueba del Teorema 9.2.1: aplicamos el Teorema 3.3.16 a cada componente localizada. Obtenemos una constante $K_\alpha>0$ tal que

$$\|v_\alpha^a\|_{W^{j,q}(\Omega_\alpha)}\leq K_\alpha\|v_\alpha^a\|_{W^{j+m,p}(\Omega_\alpha)}.$$

Supongamos que $U_\alpha$ es una carta de frontera. Entonces $\Omega_\alpha = B_\alpha^+$ es una media bola. Como $\operatorname{supp}\psi_\alpha \Subset U_\alpha$, existe un compacto $K_\alpha \subseteq B_\alpha^+ \cup B_\alpha'$ contenido a distancia positiva de la parte esférica de $B_\alpha^+$ tal que $v_\alpha^a = 0$ casi en todo punto de $B_\alpha^+ \setminus K_\alpha$ para todo $a$. Por el Lema 3.6.8, la extensión por cero $\widetilde{v}_\alpha^a$ pertenece a $W^{j+m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ y

$$\|\widetilde{v}_\alpha^a\|_{W^{j+m,p}(\mathbb{R}^n_+)} = \|v_\alpha^a\|_{W^{j+m,p}(B_\alpha^+)}.$$

Además, todas estas extensiones tienen soporte contenido en un compacto fijo de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ que depende únicamente de la carta y de $\psi_\alpha$. El Teorema 3.6.6 proporciona una constante $K_\alpha > 0$ tal que

$$\|\widetilde{v}_\alpha^a\|_{W^{j,q}(\mathbb{R}^n_+)} \le K_\alpha \|\widetilde{v}_\alpha^a\|_{W^{j+m,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Al restringir a $B_\alpha^+$, obtenemos

$$\|v_\alpha^a\|_{W^{j,q}(B_\alpha^+)} \le K_\alpha \|v_\alpha^a\|_{W^{j+m,p}(B_\alpha^+)}.$$

En ambos tipos de cartas, la equivalencia local de normas da

$$\|\psi_\alpha \mathbf{u}\|_{W^{j,q}(M,\mathbf{E})} \le \frac{C_\alpha K_\alpha}{c_\alpha} \|\psi_\alpha \mathbf{u}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_\alpha' \|\mathbf{u}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Como la cubierta es finita y $\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha \mathbf{u}$, se sigue que

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{j,q}(M,\mathbf{E})} \le \sum_{\alpha=1}^{N} \|\psi_\alpha \mathbf{u}\|_{W^{j,q}(M,\mathbf{E})} \le C \|\mathbf{u}\|_{W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

□

**Teorema 9.4.25.** (Rellich–Kondrashov para haces sobre variedades con frontera) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera suave no vacía, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real o complejo de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ (hermitiana en el caso complejo) y una conexión compatible $\nabla^\mathbf{E}$. Sean $j \ge 0$ y $m \ge 1$ enteros y $1 \le p, q < \infty$ tales que

$$j + m - \frac{n}{p} > j - \frac{n}{q}.$$

Entonces la inclusión

$$W^{j+m,p}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow W^{j,q}(M,\mathbf{E})$$

es compacta.

*Demostración.* Sea $(\mathbf{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $W^{j+m,p}(M,\mathbf{E})$. Usamos la cubierta, la partición de la unidad y los marcos de la prueba anterior. Para cada $\alpha$ y cada $a$, definimos

$$v_{\alpha,k}^a := (\psi_\alpha \mathbf{u}_k)_\alpha^a \circ \varphi_\alpha^{-1}.$$

La continuidad de la multiplicación por $\psi_\alpha$ y la equivalencia local de normas muestran que $(v_{\alpha,k}^a)_k$ está acotada en $W^{j+m,p}(\Omega_\alpha)$. En estas comparaciones usamos la compatibilidad de $\nabla^\mathbf{E}$ con $\mathbf{h}_\mathbf{E}$, como en los Le-

mas 9.1.44 y 9.4.5. Si el haz es complejo, aplicamos los resultados euclidianos a las partes real e imaginaria de las componentes.
Si $U_\alpha$ es una carta interior, se procede como en la prueba del Teorema 9.2.2: el Teorema 3.4.2 proporciona una subsucesión convergente en $W^{j,q}(\Omega_\alpha)$.
Si $U_\alpha$ es una carta de frontera, extendemos cada $v^a_{\alpha,k}$ por cero a $\mathbb{R}^n_+$. El Lema 3.6.8 muestra que las extensiones forman una sucesión acotada en $W^{j+m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ y que sus soportes están contenidos en un mismo compacto de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, determinado por $\operatorname{supp}\psi_\alpha$. La parte compacta del Teorema 3.6.6 proporciona una subsucesión convergente en $W^{j,q}(\mathbb{R}^n_+)$. Al restringir a $B^+_\alpha$, obtenemos una subsucesión convergente en $W^{j,q}(B^+_\alpha)$.
Como el número de cartas y de componentes es finito, mediante extracciones sucesivas obtenemos una única subsucesión, que denotamos nuevamente por $(\mathbf{u}_k)$, para la cual todas las sucesiones $(v^a_{\alpha,k})_k$ son de Cauchy en $W^{j,q}(\Omega_\alpha)$. La equivalencia local de normas implica que $(\psi_\alpha \mathbf{u}_k)_k$ es de Cauchy en $W^{j,q}(U_\alpha, \mathbf{E}\restriction_{U_\alpha})$ para cada $\alpha$. Por lo tanto,

$$\|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_\ell\|_{W^{j,q}(M,\mathbf{E})} \leq \sum_{\alpha=1}^{N} \|\psi_\alpha(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_\ell)\|_{W^{j,q}(M,\mathbf{E})} \longrightarrow 0$$

cuando $k, \ell \to \infty$. Como $W^{j,q}(M,\mathbf{E})$ es completo, la subsucesión converge. Esto prueba la compacidad. □

**Corolario 9.4.26.** (Encajes y exponente crítico) Bajo las hipótesis geométricas de los teoremas anteriores, sean $j \geq 0$ y $m \geq 1$ enteros y sea $1 \leq p < n/m$. Entonces

$$W^{j+m,p}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow W^{j,q}(M,\mathbf{E})$$

continuamente para $1 \leq q \leq p^*_m := \dfrac{np}{n-mp}$, y compactamente para $1 \leq q < p^*_m$.

*Demostración.* Como $mp < n$, la condición $j + m - \dfrac{n}{p} \geq j - \dfrac{n}{q}$ equivale a $q \leq p^*_m$, y la desigualdad estricta equivale a $q < p^*_m$. Aplicamos los Teoremas 9.4.24 y 9.4.25, respectivamente. □

El caso escalar se obtiene tomando el haz trivial de rango uno con su métrica y conexión canónicas.

**Corolario 9.4.27.** (Encaje de Sobolev en variedades compactas con frontera) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera suave no vacía. Sean $j \geq 0$ y $m \geq 1$ enteros y $1 \leq p, q < \infty$ tales que $j + m - \dfrac{n}{p} \geq j - \dfrac{n}{q}$. Entonces la inclusión

$$W^{j+m,p}(M) \hookrightarrow W^{j,q}(M)$$

es continua.

*Demostración.* Aplicamos el Teorema 9.4.24 al haz trivial $M \times \mathbb{R} \to M$, equipado con la métrica usual y con la conexión inducida por la diferencial exterior. Bajo la identificación canónica de sus secciones con funciones, las normas de Sobolev coinciden con las normas escalares. □

**Corolario 9.4.28.** (Rellich–Kondrashov en variedades compactas con frontera) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera suave no vacía. Sean $j \geq 0$ y $m \geq 1$ enteros y $1 \leq p,q < \infty$ tales que $j + m - \frac{n}{p} > j - \frac{n}{q}$. Entonces la inclusión

$$W^{j+m,p}(M) \hookrightarrow W^{j,q}(M)$$

es compacta.

*Demostración.* Es el caso del Teorema 9.4.25 correspondiente al haz trivial de rango uno. □

**Corolario 9.4.29.** (Descenso compacto de un orden) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta, con frontera suave posiblemente vacía, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real o complejo de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ (hermitiana en el caso complejo) y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Para todo entero $m \geq 1$ y todo $1 \leq p < \infty$, las inclusiones

$$W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow W^{m-1,p}(M,\mathbf{E}), \qquad W_0^{m,p}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow W_0^{m-1,p}(M,\mathbf{E})$$

son compactas. Aquí $W_0^{0,p}(M,\mathbf{E}) = L^p(M,\mathbf{E})$.

*Demostración.* En los Teoremas 9.2.2 y 9.4.25 tomamos $j = m-1$, ganancia de una derivada y el mismo exponente $p$ en origen y destino. La desigualdad entre índices se reduce a $1 > 0$, por lo que se obtiene la primera inclusión para todo $1 \leq p < \infty$, incluido $p = 1$.

Para la segunda, si $\mathbf{u} \in W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})$, elegimos $\mathbf{u}_\nu \in \Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(\mathbf{E})$ con $\mathbf{u}_\nu \to \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. La desigualdad $\|\mathbf{v}\|_{W^{m-1,p}(M,\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{v}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}$ implica que la misma convergencia tiene lugar en $W^{m-1,p}(M,\mathbf{E})$; por definición, $\mathbf{u} \in W_0^{m-1,p}(M,\mathbf{E})$. Una sucesión acotada en $W_0^{m,p}$ tiene, por la primera inclusión, una subsucesión convergente en $W^{m-1,p}$. Todos sus términos pertenecen a $W_0^{m-1,p}$, y este subespacio es cerrado por definición, de modo que el límite también pertenece a él. La norma del subespacio es la norma inducida, lo que prueba la compacidad afirmada. □

**Observación 9.4.30.** (Órdenes totales y dependencia de las constantes) En términos de los órdenes totales, los dos teoremas anteriores afirman que

$$W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow W^{k,q}(M,\mathbf{E}) \quad \text{es compacto si} \quad m > k \geq 0, \quad 1 \leq p,q < \infty, \quad m - \frac{n}{p} > k - \frac{n}{q}.$$

Se obtiene esta formulación sustituyendo $j = k$ y la ganancia de derivadas por $m-k$. La misma afirmación vale con subíndice cero en origen y destino: la continuidad de la inclusión lleva las aproximaciones suaves de soporte interior a $W^{k,q}$, y la cerradura de $W_0^{k,q}$ conserva el límite. Si $(m-k)p < n$, la condición estricta equivale a $q < np/(n-(m-k)p)$; en el exponente crítico sólo se ha afirmado continuidad en los teoremas de Sobolev correspondientes.

Las constantes de continuidad dependen de $m,k,p,q$, de $M$, de $\mathbf{g}$ y de los datos suaves $\mathbf{E}$, $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, $\nabla^{\mathbf{E}}$. En las pruebas se obtienen a partir de una cubierta finita fija, de las derivadas de sus funciones de partición y de cotas de los coeficientes de las métricas, de sus inversas y de las conexiones hasta los órdenes usados. No dependen de la sección ni del índice de la sucesión. Para una familia variable de datos geométricos, la uniformidad de estas constantes requiere controlar esas cotas y las cartas; la compacidad de cada variedad por

separado no proporciona una constante uniforme para toda la familia. Ninguna afirmación de este párrafo incluye exponentes infinitos; los encajes hacia secciones continuas y de Hölder se tratan separadamente.

**Corolario 9.4.31.** (Encajes de primer orden para el espacio de Dirichlet) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera suave no vacía y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave real de rango finito, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ compatible con $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Sea $1\le q<n$ y definamos $q^*:=\dfrac{nq}{n-q}$. Entonces

$$W_0^{1,q}(M,\mathbf{E})\hookrightarrow L^{\ell}(M,\mathbf{E})$$

continuamente para todo $1\le \ell\le q^*$ y compactamente para todo $1\le \ell<q^*$.

*Demostración.* La inclusión continua se obtiene del Teorema 9.4.24 con $j=0$ y $m=1$. La inclusión compacta se obtiene del Teorema 9.4.25. En ambos casos basta restringir los operadores de inclusión al subespacio cerrado $W_0^{1,q}(M,\mathbf{E})\subseteq W^{1,q}(M,\mathbf{E})$. □

Para formular el encaje de Morrey hasta la frontera necesitamos extender la notación de la Definición 9.2.6. No usaremos la seminorma definida mediante geodésicas minimizantes, pues esa formulación supone que la variedad no tiene frontera. En su lugar emplearemos las normas de extensión euclidianas ya fijadas para $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.

**Definición 9.4.32.** (Secciones de Hölder hasta la frontera) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera suave no vacía y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango $r$, equipado con una métrica fibrada y una conexión compatible. Elegimos una cubierta finita $(U_\lambda,\varphi_\lambda)_{\lambda=1}^N$ formada por bolas coordenadas regulares interiores y medias bolas coordenadas regulares de frontera, una partición suave de la unidad $(\psi_\lambda)_{\lambda=1}^N$ subordinada a ella, con $\operatorname{supp}\psi_\lambda\Subset U_\lambda$, y marcos locales $(\mathbf{e}_{\lambda,1},\dots,\mathbf{e}_{\lambda,r})$ definidos en vecindades de $\overline{U_\lambda}$. Ponemos

$$\Omega_\lambda:=\begin{cases}\varphi_\lambda(U_\lambda), & U_\lambda\subseteq \operatorname{Int}(M),\\ \varphi_\lambda(U_\lambda\cap \operatorname{Int}(M)), & U_\lambda\cap\partial M\neq\varnothing.\end{cases}$$

Si $\mathbf{u}\in\Gamma^k(\mathbf{E})$ y

$$\psi_\lambda\mathbf{u}=\sum_{a=1}^{r}u_\lambda^a\mathbf{e}_{\lambda,a}\qquad\text{en } U_\lambda,$$

definimos

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{A}}(\mathbf{E})}:=\sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{a=1}^{r}\|u_\lambda^a\circ\varphi_\lambda^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega_\lambda})},\tag{9.80}$$

donde $k\in\mathbb{N}_0$, $0<\alpha<1$ y $\mathcal{A}$ representa el conjunto de datos locales elegido. Denotamos por $\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{A}}(\mathbf{E})$ el espacio de las secciones de clase $C^k$ hasta la frontera para las cuales (9.80) es finita.

**Proposición 9.4.33.** (Independencia de la norma de Hölder hasta la frontera) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera suave no vacía, y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $k\in\mathbb{N}_0$ y $0<\alpha<1$. El espacio y la topología de la Definición 9.4.32 no dependen de la cubierta, la partición de la unidad, las cartas ni los marcos elegidos. Además, el espacio resultante es de Banach. En adelante lo denotaremos por $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ y omitiremos el subíndice $\mathcal{A}$ en su norma.

*Demostración.* Sean $\mathcal{A}$ y $\widetilde{\mathcal{A}}$ dos elecciones de datos locales. Usaremos una tilde para los objetos del segundo sistema. Para un índice $\mu$ de $\widetilde{\mathcal{A}}$, la identidad $\sum_{\lambda=1}^{N} \psi_\lambda = 1$ da

$$\widetilde{\psi}_\mu \mathbf{u} = \sum_{\substack{1\le\lambda\le N \\ U_\lambda \cap \widetilde{U}_\mu \neq \varnothing}} \widetilde{\psi}_\mu \psi_\lambda \mathbf{u}. \tag{9.81}$$

La suma es finita. En un traslape escribimos

$$\mathbf{e}_{\lambda,a} = \sum_{b=1}^{r} (G_{\mu\lambda})^b{}_a \, \widetilde{\mathbf{e}}_{\mu,b}$$

y denotamos por

$$\Phi_{\lambda\mu} := \varphi_\lambda \circ \widetilde{\varphi}_\mu^{-1}$$

el cambio de coordenadas sobre su dominio. Si $f_\lambda^a := u_\lambda^a \circ \varphi_\lambda^{-1}$, la componente $b$ del sumando correspondiente de (9.81), transportada a la carta $\widetilde{\varphi}_\mu$, es

$$\left[(\widetilde{\psi}_\mu G_{\mu\lambda})^b{}_a \circ \widetilde{\varphi}_\mu^{-1}\right] \left(f_\lambda^a \circ \Phi_{\lambda\mu}\right). \tag{9.82}$$

Precisamos por qué esta expresión define un operador continuo entre las normas de extensión. El soporte del primer factor está contenido en un compacto del dominio del cambio de coordenadas. Elegimos en la carta $\widetilde{\varphi}_\mu$ una función suave de corte que vale uno en una vecindad de ese compacto y cuyo soporte sigue contenido en dicho dominio. Los cambios entre cartas de una variedad con frontera se prolongan suavemente a abiertos euclidianos que contienen esos compactos; en dos cartas de frontera la prolongación atraviesa la cara plana, y en un traslape con una carta interior el compacto se encuentra alejado de ella. Tomamos una extensión $F_\lambda^a \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ de $f_\lambda^a$. Después de insertar el corte anterior, (9.82) es la restricción de un producto entre una función suave de soporte compacto y $F_\lambda^a$ compuesto con un difeomorfismo suave. Denotemos por $T_{\mu\lambda}^{ba} f_\lambda^a$ la función del miembro derecho de (9.82). La fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 controla las derivadas hasta orden $k$ de la composición. Para las derivadas de orden $k$ usamos, además,

$$[fg]_{C^{0,\alpha}(K)} \le \|f\|_{C^0(K)} [g]_{C^{0,\alpha}(K)} + \|g\|_{C^0(K)} [f]_{C^{0,\alpha}(K)}$$

y el hecho de que un mapeo suave es Lipschitz en un compacto. Obtenemos una constante $C_{\lambda\mu} > 0$ tal que

$$\|T_{\mu\lambda}^{ba} f_\lambda^a\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\widetilde{\Omega}_\mu})} \le C_{\lambda\mu} \|f_\lambda^a\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega_\lambda})}.$$

La desigualdad se obtiene primero para una extensión $F_\lambda^a$ y después se toma el ínfimo sobre todas las extensiones en la definición de la norma.

Sumamos sobre los finitísimos traslapes, componentes e índices. El máximo de las constantes anteriores es finito y (9.81) proporciona

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\widetilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{E})} \le C \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{A}}(\mathbf{E})}.$$

Intercambiar los dos sistemas da la desigualdad inversa.

Probemos la completitud. Si $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para una de estas normas, cada familia de componentes lo-

calizadas converge en el espacio de Banach $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega_\lambda})$, cuya completitud se estableció en la Proposición 3.5.4. Los límites se reconstruyen en cada marco, se multiplican por cortes iguales a uno en los soportes de $\psi_\lambda$ y se prolongan por cero fuera de $U_\lambda$. La suma finita de las secciones obtenidas define una sección $\mathbf{u}$ de clase $C^k$ hasta la frontera. Como $\mathbf{u}_j = \sum_{\lambda=1}^{N} \psi_\lambda \mathbf{u}_j$, la misma estimación de transferencia muestra que $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$. □

**Teorema 9.4.34.** (Encaje de Sobolev–Morrey para haces sobre variedades con frontera) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera suave no vacía y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito, equipado con una métrica fibrada y una conexión compatible. Sean $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$. Si

$$k + \alpha \le m - \frac{n}{p}, \tag{9.83}$$

entonces cada elemento de $W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ posee un único representante en $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ y existe $C > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \le C \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}. \tag{9.84}$$

La restricción de este representante a $\partial M$ coincide con **Tru**.

*Demostración.* Usamos los datos locales de la Definición 9.4.32. Para $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ escribimos

$$\psi_\lambda \mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u_\lambda^a \mathbf{e}_{\lambda,a} \qquad \text{en } U_\lambda$$

y ponemos $v_\lambda^a := u_\lambda^a \circ \varphi_\lambda^{-1}$. La continuidad de la multiplicación por $\psi_\lambda$, la equivalencia local entre derivadas ordinarias y covariantes y la finitud de la familia proporcionan una constante $C_0 > 0$, independiente de $\mathbf{u}$, tal que

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \|v_\lambda^a\|_{W^{m,p}(\Omega_\lambda)} \le C_0 \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}. \tag{9.85}$$

Si $U_\lambda$ es una carta interior, el soporte de $v_\lambda^a$ es compacto en $\Omega_\lambda$ y, por lo tanto, $v_\lambda^a \in W_0^{m,p}(\Omega_\lambda)$. El Teorema 3.5.7 da

$$\|v_\lambda^a\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega_\lambda})} \le C_\lambda \|v_\lambda^a\|_{W^{m,p}(\Omega_\lambda)}. \tag{9.86}$$

Supongamos que $U_\lambda$ es una carta de frontera y escribamos $\Omega_\lambda = B_\lambda^+$. Existe un compacto

$$K_\lambda \subseteq B_\lambda^+ \cup B_\lambda'$$

que contiene el soporte esencial de todas las componentes $v_\lambda^a$ y está a distancia positiva de la parte esférica de $\partial B_\lambda^+$. El Lema 3.6.8 permite prolongar $v_\lambda^a$ por cero a través de esa parte esférica, pero no a través de la cara plana. Denotemos esta primera prolongación por $w_\lambda^a$. Entonces

$$w_\lambda^a \in W^{m,p}(\mathbb{R}_+^n), \qquad \|w_\lambda^a\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)} = \|v_\lambda^a\|_{W^{m,p}(B_\lambda^+)}.$$

Aplicamos ahora el operador de extensión

$$\mathcal{E}_m\colon W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

del Corolario 3.6.4. Elegimos $R_\lambda > 0$ y $\chi_\lambda \in C_c^\infty(B_{\mathrm{euc}}(0,2R_\lambda))$ de modo que $\chi_\lambda = 1$ en una vecindad de $K_\lambda$, y definimos

$$T_\lambda v_\lambda^a := \chi_\lambda \mathcal{E}_m w_\lambda^a.$$

Esta función pertenece a $W_0^{m,p}(B_{\mathrm{euc}}(0,2R_\lambda))$, su restricción a $B_\lambda^+$ coincide con $v_\lambda^a$ y

$$\|T_\lambda v_\lambda^a\|_{W^{m,p}(B_{\mathrm{euc}}(0,2R_\lambda))} \le C'_\lambda \|v_\lambda^a\|_{W^{m,p}(B_\lambda^+)}.$$

El Teorema 3.5.7, aplicado a $T_\lambda v_\lambda^a$, y la definición de la norma de extensión dan

$$\|v_\lambda^a\|_{C^{k,\alpha}(\overline{B_\lambda^+})} \le C''_\lambda \|v_\lambda^a\|_{W^{m,p}(B_\lambda^+)}. \tag{9.87}$$

Para cada $\lambda$, los representantes continuos de $v_\lambda^1,\dots,v_\lambda^r$ reconstruyen una sección localizada $\mathbf{s}_\lambda$ sobre $U_\lambda$. Esta sección coincide casi en todas partes con $\psi_\lambda \mathbf{u}$ y, como sus componentes se anulan fuera del compacto fijo determinado por $\operatorname{supp}(\psi_\lambda)$, se prolonga por cero a una sección global de clase $C^k$ hasta la frontera. Definimos el representante global por

$$\widetilde{\mathbf{u}} := \sum_{\lambda=1}^{N} \mathbf{s}_\lambda.$$

La suma es finita y coincide casi en todas partes con $\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{N} \psi_\lambda \mathbf{u} = \mathbf{u}$. La Definición 9.4.32, las estimaciones locales y (9.85) dan

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \le C \sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \|v_\lambda^a\|_{W^{m,p}(\Omega_\lambda)} \le C' \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Si dos representantes continuos hasta la frontera definen la misma clase de $L^p(M,\mathbf{E})$, el conjunto relativo donde difieren es abierto. Toda bola o media bola coordenada relativa no vacía tiene volumen riemanniano positivo, de modo que dicho conjunto es vacío. Esto prueba la unicidad.

Resta identificar la restricción a la frontera. Por el Teorema 9.4.8, elegimos $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma(\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Aplicar (9.84) a las diferencias muestra que $\mathbf{u}_j$ converge al representante anterior en $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ y, en particular, uniformemente sobre $\partial M$. Por otro lado, la continuidad del Teorema 9.4.12 implica

$$\mathbf{u}_j \restriction_{\partial M} = \mathbf{Tr}\,\mathbf{u}_j \longrightarrow \mathbf{Tr}\,\mathbf{u} \qquad \text{en } L^p(\partial M, \mathbf{E}\restriction_{\partial M}).$$

La convergencia uniforme da el mismo límite en $L^p$; la unicidad del límite identifica la restricción del representante con la traza. □

**Teorema 9.4.35.** (Rellich–Kondrashov hacia secciones de Hölder hasta la frontera) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera suave no vacía, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de

rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$. Si

$$k + \alpha < m - \frac{n}{p},$$

entonces el encaje

$$W^{m,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$$

es compacto.

*Demostración.* Sea $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ y usemos las localizaciones de la prueba anterior. En una carta interior, cada sucesión de componentes está acotada en $W_0^{m,p}(\Omega_\lambda)$; el Teorema 3.5.10 proporciona una subsucesión convergente en $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega_\lambda})$.
En una carta de frontera aplicamos a cada componente el operador $T_\lambda$ construido en la prueba anterior. Las funciones $T_\lambda v^a_{\lambda,j}$ forman una sucesión acotada en $W_0^{m,p}(B_{\mathrm{euc}}(0, 2R_\lambda))$. El mismo teorema euclidiano proporciona una subsucesión convergente en $C^{k,\alpha}(\overline{B_{\mathrm{euc}}(0, 2R_\lambda)})$; al restringir, las componentes originales convergen en $C^{k,\alpha}(\overline{B^+_\lambda})$.
Sólo hay un número finito de cartas y componentes. Una extracción diagonal produce una única subsucesión para la cual todas las componentes localizadas son de Cauchy en sus espacios de Hölder. Por (9.80), la subsucesión es de Cauchy en $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ y converge por la completitud establecida en la Proposición 9.4.33. □

**Corolario 9.4.36.** (Exponentes de regularidad hasta la frontera) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera suave no vacía, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \le p < \infty$, y sea $\sigma := m - \frac{n}{p} > 0$.

(a) Si $\sigma = \ell + \theta$, con $\ell \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \theta < 1$, entonces

$$W^{m,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^{\ell,\theta}(\mathbf{E})$$

continuamente, y el encaje en $\Gamma^{\ell,\beta}(\mathbf{E})$ es compacto para todo $0 < \beta < \theta$.

(b) Si $\sigma = s \in \mathbb{N}$, entonces, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$W^{m,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^{s-1,\alpha}(\mathbf{E})$$

compactamente y, en particular, continuamente.

*Demostración.* Para $\sigma = \ell + \theta$, el teorema de Sobolev–Morrey hasta la frontera, Teorema 9.4.34, aplicado con $k = \ell$ y $\alpha = \theta$, proporciona el encaje continuo. Si $0 < \beta < \theta$, entonces

$$\ell + \beta < m - \frac{n}{p},$$

y el Teorema 9.4.35 da el encaje compacto en $\Gamma^{\ell,\beta}(\mathbf{E})$.
Si $\sigma = s \in \mathbb{N}$ y $0 < \alpha < 1$, entonces

$$(s-1) + \alpha < s = m - \frac{n}{p}.$$

Aplicando de nuevo el teorema de Rellich–Kondrashov hasta la frontera con $k = s - 1$, obtenemos el encaje

compacto, y por lo tanto continuo, en $\Gamma^{s-1,\alpha}(\mathbf{E})$. □

## 9.5 La desigualdad débil de Kato

Anteriormente demostramos la desigualdad de Kato para secciones suaves. Ahora la extenderemos a secciones en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ mediante el Teorema 9.4.8. Cuando $1 < p < \infty$, la reflexividad de los espacios $L^p(M,\mathbf{F})$ de secciones de haces de rango finito permite extraer las subsucesiones débilmente convergentes necesarias. Para incluir el caso $p = 1$, donde $L^1(M,\mathbf{F})$ no es reflexivo, usaremos el Teorema de Dunford–Pettis.

Recordemos que, si $(X,\mathcal{A},\mu)$ es un espacio de medida, una familia $\mathcal{F} \subseteq L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ es uniformemente integrable si $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^1(X)} < \infty$ y, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\,d\mu < \varepsilon$ para cualesquiera $f \in \mathcal{F}$ y $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \delta$.

**Teorema 9.5.1.** (Dunford–Pettis) Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida finita. Una familia $\mathcal{F} \subseteq L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ tiene cerradura débilmente compacta en $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ si y sólo si $\mathcal{F}$ es uniformemente integrable.

Ésta es la forma clásica del criterio de Dunford–Pettis para una medida finita; véase [22].

Por el Teorema B.7.7, la topología débil de $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ coincide con $\sigma(L^1(X,\mathcal{A},\mu), L^\infty(X,\mathcal{A},\mu))$. Por lo tanto, el enunciado anterior es equivalente a la formulación clásica mediante la dualidad $L^1$–$L^\infty$.

**Teorema 9.5.2.** (Dunford–Pettis para haces vectoriales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta, con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$. Para una familia $\mathcal{F} \subseteq L^1(M,\mathbf{E})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) La cerradura débil de $\mathcal{F}$ en $L^1(M,\mathbf{E})$ es compacta.

(b) La familia $|\mathcal{F}|_{\mathbf{h_E}} := \{|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{F}\} \subseteq L^1(M)$ es uniformemente integrable.

*Demostración.* Como $M$ es compacta, existe una cubierta abierta finita $(U_\alpha)_{\alpha=1}^N$ de $M$ con una trivialización local de $\mathbf{E}$ definida sobre cada $U_\alpha$, así como una partición suave de la unidad $(\chi_\alpha)_{\alpha=1}^N$ subordinada a esta cubierta. En cada $U_\alpha$ fijemos un marco local suave y ortonormal $(\mathbf{e}_{\alpha,1},\dots,\mathbf{e}_{\alpha,r})$.
Para $\alpha \in \{1,\dots,N\}$ y $a \in \{1,\dots,r\}$, definimos

$$T_{\alpha,a}\colon L^1(M,\mathbf{E}) \longrightarrow L^1(U_\alpha), \qquad T_{\alpha,a}(\mathbf{u}) := \langle \chi_\alpha \mathbf{u}, \mathbf{e}_{\alpha,a}\rangle_{\mathbf{h_E}}.$$

Como

$$|T_{\alpha,a}(\mathbf{u})| \le \chi_\alpha |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \le |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}},$$

se tiene

$$\|T_{\alpha,a}(\mathbf{u})\|_{L^1(U_\alpha)} \le \|\mathbf{u}\|_{L^1(M,\mathbf{E})}.$$

Así, $T_{\alpha,a}$ es lineal y continuo respecto de las normas. Por la Proposición B.11.12, también es continuo respecto de las topologías débiles.
Supongamos primero que la cerradura débil $C := \overline{\mathcal{F}}^{\sigma(L^1(M,\mathbf{E}),(L^1(M,\mathbf{E}))')}$ es compacta. La continuidad débil de $T_{\alpha,a}$ implica que $T_{\alpha,a}(C)$ es débilmente compacto en $L^1(U_\alpha)$ y contiene a $T_{\alpha,a}(\mathcal{F})$. Por el teorema de Hahn–Banach, $(L^1(U_\alpha))'$ separa puntos de $L^1(U_\alpha)$; por la Proposición B.11.7, la topología débil de este espacio es

de Hausdorff. En consecuencia, $T_{\alpha,a}(C)$ es débilmente cerrado. Por lo tanto,

$$\overline{T_{\alpha,a}(\mathcal{F})}^{\sigma(L^1(U_\alpha),(L^1(U_\alpha))')} \subseteq T_{\alpha,a}(C),$$

y la cerradura débil de $T_{\alpha,a}(\mathcal{F})$ es compacta. El Teorema 9.5.1 muestra que cada familia $T_{\alpha,a}(\mathcal{F})$ es uniformemente integrable.

Para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{F}$, como

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^{N} \chi_\alpha \mathbf{u}$$

y, sobre $U_\alpha$,

$$\chi_\alpha \mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} T_{\alpha,a}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{\alpha,a},$$

se tiene

$$|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \leq \sum_{\alpha=1}^{N} |\chi_\alpha \mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \leq \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} |T_{\alpha,a}(\mathbf{u})|.$$

En particular,

$$\sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{F}} \|\mathbf{u}\|_{L^1(M,\mathbf{E})} \leq \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{F}} \|T_{\alpha,a}(\mathbf{u})\|_{L^1(U_\alpha)} < \infty.$$

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $(\alpha, a) \in \{1,\dots,N\} \times \{1,\dots,r\}$ existe $\delta_{\alpha,a} > 0$ tal que

$$\int_A |T_{\alpha,a}(\mathbf{u})| \, d\lambda_{\mathbf{g}} < \frac{\varepsilon}{Nr}$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{F}$ y todo conjunto medible $A \subseteq U_\alpha$ con $\lambda_{\mathbf{g}}(A) < \delta_{\alpha,a}$. Tomando

$$\delta := \min_{\substack{1\leq\alpha\leq N \\ 1\leq a\leq r}} \delta_{\alpha,a},$$

si $A \subseteq M$ es medible y $\lambda_{\mathbf{g}}(A) < \delta$, entonces

$$\int_A |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \int_{A\cap U_\alpha} |T_{\alpha,a}(\mathbf{u})| \, d\lambda_{\mathbf{g}} < \varepsilon$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{F}$. Por consiguiente, $|\mathcal{F}|_{\mathbf{h_E}}$ es uniformemente integrable.

Recíprocamente, supongamos que $|\mathcal{F}|_{\mathbf{h_E}}$ es uniformemente integrable. Como

$$|T_{\alpha,a}(\mathbf{u})| \leq |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}},$$

se tiene

$$\sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{F}} \|T_{\alpha,a}(\mathbf{u})\|_{L^1(U_\alpha)} \leq \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{F}} \|\mathbf{u}\|_{L^1(M,\mathbf{E})} < \infty.$$

Además, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $A \subseteq U_\alpha$ es medible y $\lambda_{\mathbf{g}}(A) < \delta$, entonces

$$\int_A |T_{\alpha,a}(\mathbf{u})| \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \int_A |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} < \varepsilon$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, cada familia $T_{\alpha,a}(\mathcal{F})$ es uniformemente integrable. El Teorema 9.5.1 implica que su cerradura débil

$$K_{\alpha,a} := \overline{T_{\alpha,a}(\mathcal{F})}^{\sigma(L^1(U_\alpha),(L^1(U_\alpha))')}$$

es compacta.
Consideremos el producto finito

$$\mathbb{X} := \prod_{\alpha=1}^{N} \prod_{a=1}^{r} L^1(U_\alpha)$$

provisto, por ejemplo, de la norma

$$\|(f_{\alpha,a})_{\alpha,a}\|_{\mathbb{X}} := \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \|f_{\alpha,a}\|_{L^1(U_\alpha)}.$$

Como el producto tiene un número finito de factores, la topología de esta norma coincide con la topología producto. Por la Proposición B.11.14, la topología débil de $\mathbb{X}$ coincide con el producto de las topologías débiles de los factores. En consecuencia,

$$K := \prod_{\alpha=1}^{N} \prod_{a=1}^{r} K_{\alpha,a}$$

es débilmente compacto en $\mathbb{X}$.
Definimos

$$T\colon L^1(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \mathbb{X}, \qquad T(\mathbf{u}) := (T_{\alpha,a}(\mathbf{u}))_{\alpha,a},$$

y

$$S\colon \mathbb{X} \longrightarrow L^1(M,\mathbf{E}), \qquad S((f_{\alpha,a})_{\alpha,a}) := \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \widetilde{f_{\alpha,a}\mathbf{e}_{\alpha,a}},$$

donde la tilde denota la extensión por cero fuera de $U_\alpha$. El operador $S$ es lineal y satisface

$$\|S((f_{\alpha,a})_{\alpha,a})\|_{L^1(M,\mathbf{E})} \leq \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \|f_{\alpha,a}\|_{L^1(U_\alpha)} = \|(f_{\alpha,a})_{\alpha,a}\|_{\mathbb{X}}.$$

Por lo tanto, $S$ es continuo respecto de las normas y, por la Proposición B.11.12, es continuo de la topología débil de $\mathbb{X}$ a la topología débil de $L^1(M,\mathbf{E})$. Como $K$ es débilmente compacto, $S(K)$ es débilmente compacto en $L^1(M,\mathbf{E})$.
Finalmente, para todo $\mathbf{u} \in L^1(M,\mathbf{E})$,

$$S(T(\mathbf{u})) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{a=1}^{r} \widetilde{\langle \chi_\alpha \mathbf{u}, \mathbf{e}_{\alpha,a} \rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} \mathbf{e}_{\alpha,a}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \chi_\alpha \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

casi en todas partes. Como $T(\mathcal{F}) \subseteq K$, se sigue que $\mathcal{F} = S(T(\mathcal{F})) \subseteq S(K)$. Nuevamente por Hahn–Banach y la Proposición B.11.7, la topología débil de $L^1(M,\mathbf{E})$ es de Hausdorff. Por ello, el compacto $S(K)$ es débilmente cerrado. Por consiguiente, la cerradura débil de $\mathcal{F}$ está contenida en $S(K)$ y es un subconjunto débilmente cerrado de este compacto. Por lo tanto, la cerradura débil de $\mathcal{F}$ es compacta. □

Necesitaremos la siguiente consecuencia de la semicontinuidad débil inferior de los funcionales convexos.

**Lema 9.5.3.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathbf{F}\to M$ un haz vectorial de rango finito provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$, sea $1\le p<\infty$ y sea $p'$ el exponente conjugado de $p$. Para toda función no negativa $\varphi\in L^{p'}(M)$, el funcional

$$\Phi_\varphi\colon L^p(M,\mathbf{F})\longrightarrow[0,\infty),\qquad \Phi_\varphi(\mathbf{Z}):=\int_M \varphi|\mathbf{Z}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}},$$

es convexo, continuo respecto a la norma e inferiormente semicontinuo respecto a $\sigma(L^p(M,\mathbf{F}),(L^p(M,\mathbf{F}))')$.

*Demostración.* La convexidad se sigue de la desigualdad del triángulo en las fibras. Además, para cualesquiera $\mathbf{Z},\mathbf{W}\in L^p(M,\mathbf{F})$, la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9) implica

$$|\Phi_\varphi(\mathbf{Z})-\Phi_\varphi(\mathbf{W})|\le\int_M\varphi|\mathbf{Z}-\mathbf{W}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}\le\|\varphi\|_{L^{p'}(M)}\|\mathbf{Z}-\mathbf{W}\|_{L^p(M,\mathbf{F})}.$$

Por lo tanto, $\Phi_\varphi$ es continuo respecto a la norma. Como también es convexo, el Corolario B.11.17 implica que es inferiormente semicontinuo respecto a $\sigma(L^p(M,\mathbf{F}),(L^p(M,\mathbf{F}))')$. □

Por el Lema 7.2.5, sabemos que para una sección suave $\mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$ admite una derivada débil casi en todas partes en $M$. Ahora que disponemos del concepto de *derivada covariante débil*, resulta natural preguntarse si esta derivada clásica definida c.t.p. coincide con alguna derivada débil. La siguiente proposición responde esta pregunta, la cual será importante para demostrar nuestra versión débil de la desigualdad de Kato.

**Lema 9.5.4.** (Derivadas clásica y débil del módulo de una sección suave) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathbf{F}\to M$ un haz vectorial suave real de rango finito provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$ y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{F}}$. Sean $1\le p<\infty$ y $\mathbf{v}\in\Gamma(\mathbf{F})$. Entonces $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M)$ y $\nabla_w|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}=\nabla|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}$ casi en todas partes en $M$, donde el miembro derecho denota la derivada covariante clásica definida casi en todas partes. Además, $\big|\nabla_w|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}\big|_{\mathbf{g}}\le|\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}$ casi en todas partes. Si, adicionalmente, $\mathbf{v}\in L^p(M,\mathbf{F})$ y $\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v}\in L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{F})$, entonces $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}\in W^{1,p}(M)$. En particular, esta última conclusión se cumple automáticamente cuando $M$ es compacta.

*Demostración.* Por el Lema 7.2.5, $\nabla|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}$ existe casi en todas partes en $M$. Definimos la 1-forma medible $G$ por

$$G(x):=\begin{cases}\nabla|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}(x), & |\mathbf{v}(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}>0,\\ 0, & |\mathbf{v}(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}=0.\end{cases}$$

En el conjunto donde $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}>0$, la desigualdad clásica de Kato, Teorema 7.2.6, aplicada con $s=0$, proporciona $|G|_{\mathbf{g}}=\big|\nabla|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}\big|_{\mathbf{g}}\le|\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}$. En el conjunto donde $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}=0$, esta desigualdad también se cumple por la definición de $G$. Por consiguiente, $|G|_{\mathbf{g}}\le|\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}$ casi en todas partes en $M$.
Para cada $\varepsilon>0$, consideremos la función suave

$$f_\varepsilon:=\sqrt{|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}+\varepsilon^2}-\varepsilon.$$

En el abierto donde $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} > 0$, la regla de la cadena implica

$$\nabla f_\varepsilon = \frac{|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}}}{\sqrt{|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h_F}} + \varepsilon^2}} \nabla |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} = \frac{|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}}}{\sqrt{|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h_F}} + \varepsilon^2}} G.$$

Si $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} = 0$ en un punto, la función suave $|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h_F}}$ alcanza allí su valor mínimo y, por lo tanto, $\nabla |\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h_F}} = 0$. En consecuencia,

$$\nabla f_\varepsilon = \frac{\nabla |\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h_F}}}{2\sqrt{|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h_F}} + \varepsilon^2}} = 0$$

en ese punto. Por lo tanto, en todo $M$ se tiene

$$\nabla f_\varepsilon = \frac{|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}}}{\sqrt{|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h_F}} + \varepsilon^2}} G.$$

Como

$$0 \leq \frac{|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}}}{\sqrt{|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{h_F}} + \varepsilon^2}} \leq 1,$$

se sigue que $|\nabla f_\varepsilon|_{\mathbf{g}} \leq |G|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla^{\mathbf{F}} \mathbf{v}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_F}}$.

Además, $\nabla f_\varepsilon \longrightarrow G$ cuando $\varepsilon \to 0^+$ puntualmente en $M$ pues en el conjunto donde $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} > 0$, el cociente anterior converge a 1, mientras que en el conjunto donde $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} = 0$ ambas 1-formas son nulas. Sea $K \subseteq M$ compacto. Como $\mathbf{v}$ es suave, $|\nabla^{\mathbf{F}} \mathbf{v}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_F}} \in L^p(K)$ y, por el Teorema de convergencia dominada, $\nabla f_\varepsilon \longrightarrow G$ en $L^p(K, T^*M)$.

Por otra parte, $0 \leq f_\varepsilon \leq |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}}$ y $f_\varepsilon \longrightarrow |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}}$ puntualmente. Nuevamente por convergencia dominada, $f_\varepsilon \longrightarrow |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}}$ en $L^p(K)$.

Sea ahora $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(T^*M)$ y elijamos $K$ compacto que contenga el soporte de $\boldsymbol{\eta}$. Como $f_\varepsilon$ es suave,

$$\int_M \langle \nabla f_\varepsilon, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M f_\varepsilon \nabla^* \boldsymbol{\eta} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Las convergencias fuertes anteriores y la desigualdad de Hölder permiten pasar al límite y obtener

$$\int_M \langle G, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} \nabla^* \boldsymbol{\eta} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por la definición de derivada covariante débil y de los espacios locales de Sobolev,

$$|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M) \qquad \text{y} \qquad \nabla_w |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} = G$$

casi en todas partes.

Resta identificar $G$ con la derivada clásica. En el conjunto donde $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} > 0$, esta igualdad se cumple por la propia definición de $G$. Si $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} = 0$ en un punto donde la derivada clásica existe, la función no negativa $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}}$ alcanza allí su valor mínimo, por lo que $\nabla |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} = 0 = G$.

Como la derivada clásica existe casi en todas partes, concluimos que $\nabla_w |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} = \nabla |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}}$ casi en todas partes

en $M$. La estimación ya obtenida para $G$ proporciona

$$\left|\nabla_w |\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}}\right|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_F}}$$

casi en todas partes.
Finalmente, si $\mathbf{v} \in L^p(M,\mathbf{F})$ y $\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v} \in L^p(M, T^*M \otimes \mathbf{F})$, la identidad débil anterior implica, por lo tanto, que $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h_F}} \in W^{1,p}(M)$. □

**Teorema 9.5.5.** (Desigualdad débil de Kato) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta, con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ y $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Entonces, para todo $s \in \{0,\dots,m-1\}$, $|\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \in W^{1,p}(M)$ y

$$\left|\nabla_w |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

casi en todas partes en $M$, donde $\nabla_w^0 \mathbf{u} := \mathbf{u}$.

*Demostración.* Fijemos $s \in \{0,\dots,m-1\}$. Por el Teorema 9.1.48, si $\partial M = \varnothing$, o por el Teorema 9.4.8, si $\partial M \neq \varnothing$, existe una sucesión $(\mathbf{u}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma(\mathbf{E}) \cap W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. La desigualdad del triángulo inversa en las fibras implica

$$\left||\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} - |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right| \leq |\nabla^s \mathbf{u}_k - \nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}},$$

por lo que $|\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \to |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ en $L^p(M)$.
Por el Lema 9.5.4, cada función $|\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ admite una derivada covariante débil de primer orden que coincide casi en todas partes con su derivada clásica. La desigualdad de Kato para secciones suaves, Teorema 7.2.6, proporciona

$$\left|\nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla^{s+1}\mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

casi en todas partes. Como $|\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \in L^p(M)$ y $|\nabla^{s+1}\mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \in L^p(M)$, se concluye que $|\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \in W^{1,p}(M)$. Además, nuevamente por la desigualdad del triángulo inversa,

$$\left||\nabla^{s+1} \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} - |\nabla_w^{s+1} \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right| \leq |\nabla^{s+1} \mathbf{u}_k - \nabla_w^{s+1} \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}},$$

de modo que $|\nabla^{s+1}\mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \to |\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ en $L^p(M)$. En particular, la sucesión $\left(\nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^p(M,T^*M)$.
Si $1 < p < \infty$, la reflexividad de $L^p(M,T^*M)$ permite extraer una subsucesión, que seguiremos denotando del mismo modo, y encontrar $\mathbf{Z} \in L^p(M,T^*M)$ tales que

$$\nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \rightharpoonup \mathbf{Z} \quad \text{en } L^p(M,T^*M).$$

Supongamos ahora que $p = 1$. Como $|\nabla^{s+1}\mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \to |\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ en $L^1(M)$, la familia

$$\left\{|\nabla^{s+1}\mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$$

es uniformemente integrable. La convergencia en $L^1(M)$ implica que esta familia está acotada en $L^1(M)$. Por

otra parte, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| |\nabla^{s+1}\mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} - |\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right\|_{L^1(M)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $k \geq N$. Como toda función de $L^1(M)$ posee integral absolutamente continua respecto a $\lambda_{\mathbf{g}}$, y sólo intervienen las funciones $|\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}, |\nabla^{s+1}\mathbf{u}_1|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}, \ldots, |\nabla^{s+1}\mathbf{u}_{N-1}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda_{\mathbf{g}}(A) < \delta$ implica

$$\int_A |\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\int_A |\nabla^{s+1}\mathbf{u}_j|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} < \varepsilon$$

para todo $j \in \{1, \ldots, N-1\}$. Para $k \geq N$ se obtiene

$$\int_A |\nabla^{s+1}\mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \left\| |\nabla^{s+1}\mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} - |\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right\|_{L^1(M)} + \int_A |\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la familia anterior es uniformemente integrable. Como

$$\left| \nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla^{s+1}\mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}},$$

también la familia

$$\left\{ \left| \nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right|_{\mathbf{g}} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$$

es uniformemente integrable. El Teorema 9.5.2, aplicado al haz $T^*M$, implica que la cerradura débil de $\{\nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \mid k \in \mathbb{N}\}$ en $L^1(M, T^*M)$ es compacta. Por el Teorema de Eberlein–Šmulian (Teorema B.11.36), existen una subsucesión y $\mathbf{Z} \in L^1(M, T^*M)$ tales que

$$\nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \rightharpoonup \mathbf{Z} \quad \text{en } L^1(M, T^*M).$$

Así, en ambos casos, tras extraer una subsucesión si es necesario, podemos suponer que

$$\nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \rightharpoonup \mathbf{Z} \quad \text{en } L^p(M, T^*M)$$

para alguna $\mathbf{Z} \in L^p(M, T^*M)$.
Sea $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(T^*M)$. Puesto que $\nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ es la derivada covariante débil de $|\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$, se tiene

$$\int_M \left\langle \nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle_{\mathbf{g}} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \nabla^* \boldsymbol{\eta}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La convergencia débil del miembro izquierdo y la convergencia fuerte $|\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \to |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ en $L^p(M)$ permiten pasar al límite, ya que $\nabla^* \boldsymbol{\eta} \in L^{p'}(M)$, con la interpretación $p' = \infty$ cuando $p = 1$, y por la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9)

$$\left| \int_M \left( |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} - |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right) \nabla^* \boldsymbol{\eta}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \right| \leq \left\| |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} - |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right\|_{L^p(M)} \|\nabla^* \boldsymbol{\eta}\|_{L^{p'}(M)} \longrightarrow 0.$$

Por consiguiente,

$$\int_M \langle \mathbf{Z}, \eta \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \nabla^* \eta \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por la definición de derivada covariante débil, $|\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \in W^{1,p}(M)$ y $\mathbf{Z} = \nabla_w |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$.
Finalmente, sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathrm{Int}(M))$ no negativa. Por el Lema 9.5.3,

$$\int_M \varphi \left| \nabla_w |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right|_{\mathbf{g}} d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_M \varphi \left| \nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right|_{\mathbf{g}} d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La desigualdad de Kato para las secciones suaves y la convergencia $|\nabla^{s+1} \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \to |\nabla_w^{s+1} \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ en $L^p(M)$ implican

$$\liminf_{k\to\infty} \int_M \varphi \left| \nabla_w |\nabla^s \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right|_{\mathbf{g}} d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \lim_{k\to\infty} \int_M \varphi |\nabla^{s+1} \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \varphi |\nabla_w^{s+1} \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

donde la última convergencia se sigue de la desigualdad de Hölder de la Proposición B.7.9, pues $\varphi \in L^{p'}(M)$. Así,

$$\int_M \varphi \left( \left| \nabla_w |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right|_{\mathbf{g}} - |\nabla_w^{s+1} \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right) d\lambda_{\mathbf{g}} \leq 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathrm{Int}(M))$ no negativa. Como la función entre paréntesis pertenece a $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{Int}(M))$, se concluye que

$$\left| \nabla_w |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla_w^{s+1} \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

casi en todas partes en $\mathrm{Int}(M)$. Puesto que $\partial M$ tiene medida cero, la desigualdad también se cumple casi en todas partes en $M$. □

**Observación 9.5.6.** La restricción $p < \infty$ se debe al uso del Teorema 9.4.8, pues las secciones suaves no son, en general, densas en $W^{m,\infty}(M, \mathbf{E})$ respecto a su norma.

**Corolario 9.5.7.** (Desigualdad débil de Kato) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana, con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ y $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M, \mathbf{E})$. Entonces, para todo $s \in \{0, \ldots, m-1\}$, se tiene $|\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \in W^{1,p}(M)$ y $\left| \nabla_w |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \right|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla_w^{s+1} \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ casi en todas partes en $M$.

*Demostración.* Aplicamos una exhaustión suave a la variedad $\mathrm{Int}(M)$, que no tiene frontera: elegimos abiertos crecientes $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ con frontera suave, $\overline{\Omega_j} \Subset \mathrm{Int}(M)$ y $\mathrm{Int}(M) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$. Si $M$ ya es compacta, el teorema anterior también proporciona directamente la conclusión; la exhaustión permite tratar todos los casos con el mismo argumento interior. Por la Proposición 9.1.26, para todo $j \in \mathbb{N}$ y todo $r \leq m$ se tiene $\mathbf{u} \restriction_{\Omega_j} \in W^{m,p}(\Omega_j, \mathbf{E} \restriction_{\Omega_j})$ y $\nabla_w^r(\mathbf{u} \restriction_{\Omega_j}) = (\nabla_w^r \mathbf{u}) \restriction_{\Omega_j}$ casi en todas partes en $\Omega_j$. Identificando $\Omega_j$ con el interior de la variedad compacta con frontera $\overline{\Omega_j}$, el Teorema 9.5.5 implica que $|\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \restriction_{\Omega_j} \in W^{1,p}(\Omega_j)$ y que existe $\mathbf{v}_j \in L^p(\Omega_j, T^*\Omega_j)$ tal que $\mathbf{v}_j = \nabla_w |\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ en $\Omega_j$ y $|\mathbf{v}_j|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla_w^{s+1} \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ casi en todas partes en $\Omega_j$.
Si $j \leq k$, entonces $|\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \restriction_{\Omega_j}$ es la restricción de $|\nabla_w^s \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \restriction_{\Omega_k}$ a $\Omega_j$, y por la Proposición 9.1.26, la derivada débil de esta restricción es $\mathbf{v}_k \restriction_{\Omega_j}$, mientras que por definición también es $\mathbf{v}_j$. La unicidad de la derivada covariante débil da $\mathbf{v}_k \restriction_{\Omega_j} = \mathbf{v}_j$ casi en todas partes en $\Omega_j$. Por lo tanto, existe una sección medible $\mathbf{v}$ de $T^*M$

tal que $\mathbf{v} \restriction_{\Omega_j} = \mathbf{v}_j$ casi en todas partes en $\Omega_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $|\mathbf{v}|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ casi en todas partes en cada $\Omega_j$ y $\operatorname{Int}(M) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$, esta desigualdad vale casi en todas partes en $M$, pues $\partial M$ tiene medida de dimensión $n$ nula. Extendemos $\mathbf{v}$ por cualquier valor, por ejemplo cero, sobre $\partial M$, de donde $\int_M |\mathbf{v}|_{\mathbf{g}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} \leq \int_M |\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} < \infty$ y, por consiguiente, $\mathbf{v} \in L^p(M, T^*M)$.

Finalmente, sea $\mathbf{X} \in \Gamma_{c,\operatorname{Int}(M)}(T^*M)$. Como $\operatorname{supp}(\mathbf{X})$ es un compacto del interior y $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una exhaustión creciente de éste, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{supp}(\mathbf{X}) \subseteq \Omega_j$. Puesto que $\mathbf{v} \restriction_{\Omega_j} = \mathbf{v}_j$ y $\mathbf{v}_j$ es la derivada débil de $|\nabla_w^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \restriction_{\Omega_j}$, se tiene

$$\int_M \langle \mathbf{v}, \mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\Omega_j} \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\Omega_j} |\nabla_w^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \nabla^*\mathbf{X} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M |\nabla_w^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \nabla^*\mathbf{X} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Las primeras y últimas igualdades se deben a que $\operatorname{supp}(\mathbf{X}) \subseteq \Omega_j$ y, por la localidad de $\nabla^*$, $\operatorname{supp}(\nabla^*\mathbf{X}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{X})$. Así, $\mathbf{v} = \nabla_w |\nabla_w^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$. Como $|\nabla_w^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \in L^p(M)$ y $\mathbf{v} \in L^p(M, T^*M)$, concluimos que $|\nabla_w^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \in W^{1,p}(M)$, y la desigualdad $\left|\nabla_w |\nabla_w^s\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\right|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla_w^{s+1}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ vale casi en todas partes en $M$. □

## 9.6 La desigualdad de Poincaré, caso compacto

La desigualdad de Poincaré permite controlar la norma $L^p$ de una sección y, por lo tanto, su norma de Sobolev, únicamente en términos de su derivada covariante débil de primer orden. Más precisamente, una estimación de la forma $\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(M,\mathbf{E})} \leq C\|\nabla_w^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$ equivale, por la definición de la norma de Sobolev, a poder estimar $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}$ mediante $\|\nabla_w^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$. Sin embargo, una estimación de este tipo no puede ser válida en todo $W^{1,p}(M,\mathbf{E})$ cuando la conexión admite secciones paralelas no nulas.

El caso del haz trivial muestra inmediatamente esta obstrucción. Si $M$ es una variedad riemanniana compacta y $\mathbf{E} = M \times \mathbb{R}$ está provisto de la métrica y la conexión triviales y $u \equiv c$ con $c \neq 0$, entonces $u \in W^{1,p}(M)$ y $\nabla_w u = 0$, mientras que $\|u\|_{L^p(M)} > 0$. En un haz vectorial general, la misma obstrucción está dada por el núcleo de la derivada covariante débil, es decir, por las secciones $\mathbf{u}$ que satisfacen $\nabla_w^{\mathbf{E}}\mathbf{u} = 0$. Por lo tanto, la desigualdad de Poincaré no controla una sección de manera absoluta, sino únicamente módulo el espacio de secciones paralelas.

Esta observación permite tratar de manera unificada las distintas formas de la desigualdad. Una posibilidad consiste en proyectar cada sección sobre el núcleo de la conexión y estimar la diferencia entre la sección y su componente paralela. En el caso del haz trivial sobre una variedad conexa, el núcleo está formado por las funciones constantes y la proyección correspondiente es precisamente el promedio. Otra posibilidad consiste en imponer una condición homogénea de Dirichlet: si cada componente conexa de la variedad tiene frontera no vacía, ninguna sección paralela no nula puede tener traza cero. Ambas formulaciones eliminan, mediante mecanismos distintos, la misma obstrucción.

Comenzaremos por describir el espacio de secciones paralelas y una proyección continua sobre él, para lo cual necesitaremos un lema previo sobre las funciones cuya derivada débil es 0.

**Lema 9.6.1.** (Funciones con derivada covariante débil nula) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $1 \leq p < \infty$ y sea $u \in W^{1,p}(M)$. Si

$$\nabla_w u = 0$$

casi en todas partes en $M$, entonces $u$ es constante casi en todas partes en cada componente conexa de $M$.

En particular, si $M$ es conexa, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $u = c$ casi en todas partes en $M$.

*Demostración.* Si $\dim M = 0$, la afirmación es inmediata. Supongamos en adelante que $\dim M = n \geq 1$ y fijemos una componente conexa $M_\alpha$ de $M$.
Por la Proposición 1.2.11, $M_\alpha$ admite una cubierta abierta numerable por bolas coordenadas regulares y medias bolas coordenadas regulares; escribamos dicha cubierta como

$$(U_i, \varphi_i)_{i \in I}.$$

Para cada $i \in I$, definamos

$$\Omega_i := \varphi_i\big(U_i \cap \operatorname{Int}(M)\big).$$

Entonces $\Omega_i$ es, según el caso, una bola abierta o una media bola abierta de $\mathbb{R}^n$; en particular, $\Omega_i$ es conexo. Veamos ahora qué ocurre localmente. Como $u \in W^{1,p}(M)$ y $\nabla_w u = 0$ casi en todas partes en $M$, la Proposición 9.1.26 implica que

$$u \restriction_{U_i} \in W^{1,p}(U_i) \quad \text{y} \quad \nabla_w(u \restriction_{U_i}) = (\nabla_w u) \restriction_{U_i} = 0 \quad \text{casi en todas partes en } U_i.$$

Si $M$ tiene frontera, la aplicación anterior se justifica mediante la identificación descrita en la Sección 9.4. En efecto, $u \restriction_{\operatorname{Int}(M)}$ pertenece a $W^{1,p}(\operatorname{Int}(M))$ y su derivada covariante débil coincide casi en todas partes con $(\nabla_w u) \restriction_{\operatorname{Int}(M)} = 0$. Aplicamos la proposición a la variedad sin frontera $\operatorname{Int}(M)$ y al abierto $U_i \cap \operatorname{Int}(M) = \operatorname{Int}(U_i)$. Volviendo a usar aquella identificación, ahora en $U_i$, obtenemos las afirmaciones anteriores: las secciones de prueba tienen soporte compacto en $\operatorname{Int}(U_i)$ y $U_i \cap \partial M$ tiene medida riemanniana nula, por lo que tanto la pertenencia a $W^{1,p}$ como la identidad de las derivadas débiles se conservan.
Puesto que estamos tratando con funciones escalares, la derivada covariante coincide con el diferencial. Por consiguiente, aplicando los Lemas 9.1.44 y 9.4.5 al haz trivial de rango uno, obtenemos que la representación local

$$v_i := u \circ \varphi_i^{-1}$$

pertenece a $W^{1,p}(\Omega_i)$ y satisface

$$D_j v_i = 0 \quad \text{casi en todas partes en } \Omega_i, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

En otras palabras, todas las derivadas débiles euclidianas de primer orden de $v_i$ se anulan casi en todas partes.
Por el Lema 3.1.5, existe una constante $c_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$v_i = c_i \quad \text{casi en todas partes en } \Omega_i.$$

Volviendo a la variedad, esto significa que

$$u = c_i \quad \text{casi en todas partes en } U_i \cap \operatorname{Int}(M).$$

Afirmamos que, de hecho, también

$$u = c_i \quad \text{casi en todas partes en } U_i.$$

En efecto, si $U_i$ es una bola coordenada regular, entonces $U_i \subseteq \mathrm{Int}(M)$ y no hay nada que probar. Si $U_i$ es una media bola coordenada regular, entonces

$$U_i \setminus \big(U_i \cap \mathrm{Int}(M)\big) = U_i \cap \partial M.$$

Bajo la carta $\varphi_i$, este conjunto corresponde a la cara plana de una media bola, la cual tiene medida de Lebesgue $n$-dimensional nula. Como la medida riemanniana en coordenadas viene dada por $\sqrt{\det(\mathbf{g})}\, d\lambda_n$, con factor suave y estrictamente positivo, se sigue que $U_i \cap \partial M$ también tiene medida riemanniana nula. Por lo tanto,

$$u = c_i \quad \text{casi en todas partes en } U_i.$$

Mostremos ahora que las constantes locales coinciden en los traslapes. Sean $i, j \in I$ tales que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Como $U_i \cap U_j$ es un abierto no vacío de la variedad $M_\alpha$, existe $x \in U_i \cap U_j$. Si $x \in \mathrm{Int}(M)$, entonces alguna vecindad abierta de $x$ en $M$ queda contenida en $\mathrm{Int}(M)$, y por tanto

$$(U_i \cap U_j) \cap \mathrm{Int}(M) \neq \varnothing.$$

Si $x \in \partial M$, como $U_i \cap U_j$ es abierto en la variedad con frontera, al escribirlo en coordenadas de media bola contiene una media bola pequeña; en particular, también contiene puntos de $\mathrm{Int}(M)$. En cualquier caso,

$$(U_i \cap U_j) \cap \mathrm{Int}(M)$$

es un abierto no vacío de $\mathrm{Int}(M)$, luego tiene medida riemanniana positiva.
Pero en ese conjunto se tiene, casi en todas partes,

$$u = c_i \qquad \text{y} \qquad u = c_j.$$

De aquí se sigue que $c_i = c_j$. Por consiguiente, las constantes $\{c_i\}_{i \in I}$ son compatibles en las intersecciones no vacías.
Como $M_\alpha$ es conexa, concluimos que todas las constantes $c_i$ coinciden con una misma constante, que denotaremos por $c_\alpha$. Además, como la cubierta es numerable, la unión de los conjuntos excepcionales de medida nula donde las igualdades locales pueden fallar sigue teniendo medida nula. Por lo tanto,

$$u = c_\alpha \quad \text{casi en todas partes en } M_\alpha.$$

Puesto que la componente conexa $M_\alpha$ era arbitraria, se concluye que $u$ es constante casi en todas partes en cada componente conexa de $M$. En particular, si $M$ es conexa, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = c \quad \text{casi en todas partes en } M.$$

□

**Proposición 9.6.2.** (El espacio de secciones paralelas y su proyección) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$, con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Fijado $1 \leq p < \infty$, definamos $\mathcal{K}(\mathbf{E}) := \left\{ \mathbf{v} \in W^{1,p}(M, \mathbf{E}) \,\middle|\, \nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{v} = 0 \right\}$. Entonces esta definición no depende del exponente $p$, el espacio $\mathcal{K}(\mathbf{E})$ es finito-

dimensional y existe una proyección lineal continua $\mathsf{P}_{\mathbf{E}} \colon L^p(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbf{E})$.
Más precisamente, si $(\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_N)$ es una base ortonormal de $\mathcal{K}(\mathbf{E})$ respecto del producto interno de $L^2(M,\mathbf{E})$, entonces puede tomarse $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{u} := \sum_{j=1}^{N} \left( \int_M \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_j \rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right) \boldsymbol{\sigma}_j$, con la convención $\mathsf{P}_{\mathbf{E}} = 0$ cuando $\mathcal{K}(\mathbf{E}) = \{0\}$.

*Demostración.* Si $\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$, la desigualdad débil de Kato, Corolario 9.5.7, implica que $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \in W^{1,p}(M)$ y $\left|\nabla_w |\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\right|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{v}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = 0$ casi en todas partes. El Lema 9.6.1 muestra que $|\mathbf{v}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$ es constante casi en todas partes en cada componente conexa de $M$. Como $M$ es compacta y tiene un número finito de componentes conexas, se sigue que $\mathbf{v} \in L^\infty(M,\mathbf{E})$. En consecuencia, $\mathbf{v} \in L^q(M,\mathbf{E})$ para todo $1 \leq q < \infty$ y, puesto que $\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{v} = 0$ no depende del exponente de integrabilidad, se tiene $\mathbf{v} \in W^{1,q}(M,\mathbf{E})$ y $\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{v} = 0$ para todo $q$. Esto prueba que el núcleo considerado es independiente de $p$.
Consideremos la bola cerrada $B := \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E}) \middle| \|\mathbf{v}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq 1 \right\}$. Como $\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{v} = 0$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$, las normas $L^p(M,\mathbf{E})$ y $W^{1,p}(M,\mathbf{E})$ coinciden sobre $\mathcal{K}(\mathbf{E})$. Por el Corolario 9.4.29, aplicado con $m = 1$, $B$ es relativamente compacta en $L^p(M,\mathbf{E})$. Además, $B$ es cerrada en $L^p(M,\mathbf{E})$: si $\mathbf{v}_k \in B$ y $\mathbf{v}_k \to \mathbf{v}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$, entonces $\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{v}_k = 0 \to 0$ en $L^p(M, T^*M \otimes \mathbf{E})$ y, por la Lema 9.1.12, $\mathbf{v} \in W^{1,p}(M,\mathbf{E})$ y $\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{v} = 0$. Por lo tanto, $B$ es compacta y, en consecuencia, $\mathcal{K}(\mathbf{E})$ es finito-dimensional.
Todo elemento de $\mathcal{K}(\mathbf{E})$ pertenece a $L^\infty(M,\mathbf{E})$ y, en particular, a $L^2(M,\mathbf{E})$, por lo que puede elegirse una base $(\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_N)$ ortonormal respecto del producto interno de $L^2(M,\mathbf{E})$. Para $\mathbf{u} \in L^p(M,\mathbf{E})$, las integrales que aparecen en la definición de $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ están bien definidas y, denotando por $p'$ el exponente conjugado de $p$, con $p' = \infty$ si $p = 1$, la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9) proporciona $\|\mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq \sum_{j=1}^{N} \|\boldsymbol{\sigma}_j\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \|\boldsymbol{\sigma}_j\|_{L^{p'}(M,\mathbf{E})} \|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}$. Así, $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}$ es lineal y continua. Finalmente, si $\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$, su expansión en la base ortonormal $(\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_N)$ muestra que $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, por lo que $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}$ es una proyección sobre $\mathcal{K}(\mathbf{E})$. □

La desigualdad de Poincaré puede formularse ahora como una estimación de una sección módulo su componente paralela.

**Teorema 9.6.3.** (Desigualdad de Poincaré módulo el núcleo de la conexión) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$, con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $1 \leq p < \infty$, entonces existe una constante $C_P > 0$, dependiente únicamente de $M$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, $\nabla^{\mathbf{E}}$, $p$ y de la proyección $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}$, tal que $\|\mathbf{u} - \mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq C_P \|\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$ para toda $\mathbf{u} \in W^{1,p}(M,\mathbf{E})$.
En consecuencia, $\|\mathbf{u}\|_{\nabla^{\mathbf{E}},p} := \|\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$ define una norma en $\ker(\mathsf{P}_{\mathbf{E}}) \cap W^{1,p}(M,\mathbf{E})$ equivalente a la norma usual de $W^{1,p}(M,\mathbf{E})$.

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que la desigualdad es falsa. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\mathbf{u}_k \in W^{1,p}(M,\mathbf{E})$ tal que $\|\mathbf{u}_k - \mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{u}_k\|_{L^p(M,\mathbf{E})} > k \|\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}_k\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$. Definamos $\mathbf{v}_k := \dfrac{\mathbf{u}_k - \mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k - \mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{u}_k\|_{L^p(M,\mathbf{E})}}$. Como $\mathsf{P}^2_{\mathbf{E}} = \mathsf{P}_{\mathbf{E}}$ y $\nabla^{\mathbf{E}}_w(\mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{u}_k) = 0$, se tiene $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{v}_k = 0$, $\|\mathbf{v}_k\|_{L^p(M,\mathbf{E})} = 1$ y $\|\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{v}_k\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} < \dfrac{1}{k}$. En particular, $(\mathbf{v}_k)$ es acotada en $W^{1,p}(M,\mathbf{E})$.
Por el Corolario 9.4.29, aplicado con $m = 1$, después de pasar a una subsucesión existe $\mathbf{v} \in L^p(M,\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{v}_k \to \mathbf{v}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$. Por otra parte, $\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{v}_k \to 0$ en $L^p(M, T^*M\otimes\mathbf{E})$ y, por la Lema 9.1.12, se tiene $\mathbf{v} \in W^{1,p}(M,\mathbf{E})$ y $\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{v} = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$.

La continuidad de $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$ y la identidad $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{v}_k = 0$ implican $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{v} = 0$. Sin embargo, como $\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ y $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}$ es la identidad sobre $\mathcal{K}(\mathbf{E})$, también se tiene $\mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$. En consecuencia, $\mathbf{v} = 0$, lo cual contradice $\|\mathbf{v}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{v}_k\|_{L^p(M,\mathbf{E})} = 1$. La desigualdad queda demostrada.

Si $\mathbf{u} \in \ker(\mathsf{P}_{\mathbf{E}}) \cap W^{1,p}(M,\mathbf{E})$, entonces $\mathbf{u} - \mathsf{P}_{\mathbf{E}}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ y, por lo tanto, $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq C_P \|\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$. De aquí se obtiene $\|\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(M,\mathbf{E})} \leq (1 + C_P^p)^{\frac{1}{p}} \|\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$, lo que prueba la equivalencia de normas. □

**Corolario 9.6.4.** (Desigualdad de Poincaré con promedio) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta y conexa de dimensión $n$, con o sin frontera, y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una constante $C_P > 0$ tal que $\|u - \overline{u}\|_{L^p(M)} \leq C_P \|\nabla_w u\|_{L^p(M,T^*M)}$ para toda $u \in W^{1,p}(M)$, donde $\overline{u} := \dfrac{1}{\lambda_{\mathbf{g}}(M)} \displaystyle\int_M u \, d\lambda_{\mathbf{g}}$.

*Demostración.* Para el haz trivial $M \times \mathbb{R}$ equipado con la conexión trivial, el espacio $\mathcal{K}(M \times \mathbb{R})$ está formado por las funciones constantes y tiene dimensión 1. Como la función constante 1 satisface $\|1\|_{L^2(M)} = \lambda_{\mathbf{g}}(M)^{\frac{1}{2}}$, la función $\sigma = \lambda_{\mathbf{g}}(M)^{-\frac{1}{2}}$ tiene norma unitaria en $L^2(M)$, por lo que $\{\sigma\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{K}(M \times \mathbb{R})$. En consecuencia, $\mathsf{P}_{M\times\mathbb{R}} u = \left( \displaystyle\int_M u \, \lambda_{\mathbf{g}}(M)^{-\frac{1}{2}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right) \lambda_{\mathbf{g}}(M)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\lambda_{\mathbf{g}}(M)} \displaystyle\int_M u \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \overline{u}$. El resultado se sigue del Teorema 9.6.3. □

**Observación 9.6.5.** Si $M$ no es conexa y $M_1, \ldots, M_\ell$ son sus componentes conexas, el núcleo de la derivada débil está formado por las funciones constantes en cada componente. En consecuencia, la proyección sobre dicho núcleo viene dada por $\mathsf{P}_{M\times\mathbb{R}} u = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \left( \frac{1}{\lambda_{\mathbf{g}}(M_i)} \int_{M_i} u \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right) \mathbf{1}_{M_i}$.

Esta expresión coincide con restar el promedio en cada componente conexa. En particular, el promedio global sólo proporciona la formulación correcta cuando $M$ es conexa.

Existen situaciones geométricas en las que un haz vectorial no admite secciones paralelas no triviales. En tales casos, el núcleo de la derivada covariante débil es trivial y la desigualdad de Poincaré adopta una forma particularmente simple.

**Corolario 9.6.6.** (Caso sin secciones paralelas) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$, con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sea $1 \leq p < \infty$. Si $\mathcal{K}(\mathbf{E}) = \{0\}$, entonces existe una constante $C_P > 0$ tal que $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq C_P \|\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$ para toda $\mathbf{u} \in W^{1,p}(M,\mathbf{E})$. En particular, $\|\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$ define una norma en $W^{1,p}(M,\mathbf{E})$ equivalente a la norma usual de Sobolev.

*Demostración.* Si $\mathcal{K}(\mathbf{E}) = \{0\}$, entonces $\mathsf{P}_{\mathbf{E}} = 0$ y el resultado se sigue directamente del Teorema 9.6.3. □

La formulación anterior elimina la componente paralela de una sección mediante una proyección. Cuando la variedad tiene frontera, otra posibilidad natural consiste en imponer una condición homogénea de Dirichlet. Para demostrar la desigualdad correspondiente necesitaremos relacionar la traza de una sección con la traza de su norma fibrada.

**Lema 9.6.7.** (Compatibilidad entre la traza y la norma fibrada) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera no vacía y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $1 \leq p < \infty$ y $\mathbf{u} \in W^{1,p}(M, \mathbf{E})$, entonces $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \in W^{1,p}(M)$ y $\operatorname{Tr}(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}) = |\mathbf{Tr}(\mathbf{u})|_{\mathbf{h_E}}$ casi en todas partes en $\partial M$.

*Demostración.* Por el Corolario 9.5.7, se tiene $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \in W^{1,p}(M)$. Por el Teorema de Meyers–Serrin para haces vectoriales en variedades con frontera, Teorema 9.4.8, existe una sucesión $(\mathbf{u}_k) \subseteq \Gamma(\mathbf{E}) \cap W^{1,p}(M, \mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$ en $W^{1,p}(M, \mathbf{E})$. La desigualdad triangular inversa implica $\big\| |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} - |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \big\|_{L^p(M)} \leq \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \to 0$. Aplicando nuevamente el Corolario 9.5.7, ahora a cada $\mathbf{u}_k$, se tiene $|\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} \in W^{1,p}(M)$ y

$$\big|\nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}\big|_{\mathbf{g}} \leq |\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

casi en todas partes. Como $\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}_k \to \nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}$ en $L^p(M, T^*M \otimes \mathbf{E})$, la sucesión $\big(\nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}\big)$ es acotada en $L^p(M, T^*M)$. Si $1 < p < \infty$, la reflexividad de $L^p(M, T^*M)$ proporciona una subsucesión y un elemento $\mathbf{Z} \in L^p(M, T^*M)$ tales que

$$\nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} \rightharpoonup \mathbf{Z} \qquad \text{en } L^p(M, T^*M).$$

Si $p = 1$, la convergencia $|\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \to |\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ en $L^1(M)$ implica que la familia

$$\Big\{ |\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}_k|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}} \;\Big|\; k \in \mathbb{N} \Big\}$$

es uniformemente integrable. La desigualdad débil de Kato muestra entonces que

$$\Big\{ \big|\nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}\big|_{\mathbf{g}} \;\Big|\; k \in \mathbb{N} \Big\}$$

también es uniformemente integrable. Por el Teorema 9.5.2, aplicado al haz $T^*M$, la cerradura débil de $\{\nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} \mid k \in \mathbb{N}\}$ en $L^1(M, T^*M)$ es compacta. El Teorema de Eberlein–Šmulian (Teorema B.11.36) permite, por lo tanto, extraer una subsucesión y encontrar $\mathbf{Z} \in L^1(M, T^*M)$ tales que

$$\nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} \rightharpoonup \mathbf{Z} \qquad \text{en } L^1(M, T^*M).$$

Así, en ambos casos, después de pasar a una subsucesión, podemos suponer que $\nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} \rightharpoonup \mathbf{Z}$ en $L^p(M, T^*M)$ para algún $\mathbf{Z} \in L^p(M, T^*M)$. Para toda $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma_{c,\mathrm{Int}(M)}(T^*M)$, puesto que $\nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}$ es la derivada covariante débil de $|\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}$, se tiene

$$\int_M \big\langle \nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}, \boldsymbol{\eta} \big\rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} \nabla^* \boldsymbol{\eta} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $\boldsymbol{\eta} \in L^{p'}(M, T^*M)$ y $\nabla^* \boldsymbol{\eta} \in L^{p'}(M)$, con la convención $p' = \infty$ cuando $p = 1$, la convergencia débil de $\nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}$ permite pasar al límite en el miembro izquierdo. En el miembro derecho usamos la convergencia fuerte $|\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} \to |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}$ en $L^p(M)$; en efecto, por la desigualdad de Hölder,

$$\left| \int_M \big( |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} - |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \big) \nabla^* \boldsymbol{\eta} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right| \leq \big\| |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} - |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \big\|_{L^p(M)} \|\nabla^* \boldsymbol{\eta}\|_{L^{p'}(M)} \longrightarrow 0.$$

Por consiguiente,

$$\int_M \langle \mathbf{Z}, \eta \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \nabla^* \eta \, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

por lo que $\mathbf{Z} = \nabla_w |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}$.
Consideremos el encaje isométrico

$$J_1 : W^{1,p}(M) \longrightarrow L^p(M) \times L^p(M, T^*M), \qquad J_1(w) := (w, \nabla_w w),$$

donde el producto se dota de la norma $\ell^p$, cuya topología coincide con la topología producto. La convergencia fuerte $|\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} \to |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}$ en $L^p(M)$ implica también convergencia débil en ese espacio y, junto con $\nabla_w |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} \rightharpoonup \nabla_w |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}$ en $L^p(M, T^*M)$, la Proposición B.11.14 da

$$J_1(|\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}) \rightharpoonup J_1(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})$$

en $L^p(M) \times L^p(M, T^*M)$. Por el Teorema 9.1.14, aplicado al haz trivial, la imagen de $J_1$ es cerrada. La Proposición B.11.13 muestra entonces que esta convergencia es también débil en la imagen de $J_1$. Como $J_1 \colon W^{1,p}(M) \longrightarrow \mathrm{Im}(J_1)$ es un isomorfismo isométrico, su inversa $J_1^{-1} \colon \mathrm{Im}(J_1) \longrightarrow W^{1,p}(M)$ es lineal y continua y, por la Proposición B.11.12, es continua respecto de las topologías débiles. Aplicando $J_1^{-1}$ a la convergencia anterior, concluimos que

$$|\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} \rightharpoonup |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \qquad \text{en } W^{1,p}(M).$$

Por el Teorema 9.4.12, aplicado respectivamente al haz trivial y a $\mathbf{E}$, los operadores de traza $\mathrm{Tr} \colon W^{1,p}(M) \longrightarrow L^p(\partial M)$ y $\mathbf{Tr} \colon W^{1,p}(M, \mathbf{E}) \longrightarrow L^p(\partial M, \mathbf{E} \restriction_{\partial M})$ son lineales y continuos. Por la Proposición B.11.12, el operador Tr es continuo respecto de las topologías débiles, por lo que $\mathrm{Tr}(|\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}) \rightharpoonup \mathrm{Tr}(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})$ en $L^p(\partial M)$. Por otra parte, la continuidad de $\mathbf{Tr}$ y la convergencia $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$ en $W^{1,p}(M, \mathbf{E})$ implican $\mathbf{Tr}(\mathbf{u}_k) \to \mathbf{Tr}(\mathbf{u})$ en $L^p(\partial M, \mathbf{E} \restriction_{\partial M})$. La desigualdad triangular inversa proporciona entonces

$$|\mathbf{Tr}(\mathbf{u}_k)|_{\mathbf{h_E}} \longrightarrow |\mathbf{Tr}(\mathbf{u})|_{\mathbf{h_E}} \qquad \text{en } L^p(\partial M).$$

Para justificar esta identidad sobre cada sección suave $\mathbf{u}_k$, fijamos $k$ y usamos las funciones suaves

$$f_{k,\varepsilon} := \sqrt{|\mathbf{u}_k|^2_{\mathbf{h_E}} + \varepsilon^2} - \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

La demostración del Lema 9.5.4, aplicada en el compacto $M$, prueba que $f_{k,\varepsilon} \to |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}$ en $W^{1,p}(M)$ para todo $1 \le p < \infty$: las funciones y sus derivadas convergen en $L^p$ por convergencia dominada. La continuidad de la traza proporciona entonces $\mathrm{Tr}(f_{k,\varepsilon}) \to \mathrm{Tr}(|\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}})$ en $L^p(\partial M)$. Puesto que $f_{k,\varepsilon}$ es suave, su traza es su restricción, y la desigualdad

$$0 \le |\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}} - f_{k,\varepsilon} \le \varepsilon$$

prueba que estas restricciones convergen uniformemente en $\partial M$ a $|\mathbf{u}_k \restriction_{\partial M}|_{\mathbf{h_E}}$. Como $\partial M$ tiene medida finita, la convergencia también es en $L^p(\partial M)$. La unicidad del límite da $\mathrm{Tr}(|\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}) = |\mathbf{Tr}(\mathbf{u}_k)|_{\mathbf{h_E}}$ casi en todas partes sobre $\partial M$ para todo $k$. La convergencia fuerte anterior implica también convergencia débil, de modo que la misma sucesión $\mathrm{Tr}(|\mathbf{u}_k|_{\mathbf{h_E}}) = |\mathbf{Tr}(\mathbf{u}_k)|_{\mathbf{h_E}}$ converge débilmente tanto a $\mathrm{Tr}(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})$ como a $|\mathbf{Tr}(\mathbf{u})|_{\mathbf{h_E}}$. La unicidad

del límite débil proporciona finalmente

$$\operatorname{Tr}(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}) = |\mathbf{Tr}(\mathbf{u})|_{\mathbf{h_E}}$$

casi en todas partes sobre $\partial M$. □

Podemos demostrar ahora la desigualdad de Poincaré para secciones con condición homogénea de Dirichlet.

**Teorema 9.6.8.** (Desigualdad de Poincaré en $W_0^{1,p}(M,\mathbf{E})$) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera suave no vacía y supongamos que cada componente conexa de $M$ tiene frontera no vacía. Sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave real de rango finito equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Si $1\le p<\infty$, entonces existe una constante $C_P>0$, dependiente únicamente de $M$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{h_E}$, $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $p$, tal que $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}\le C_P\|\nabla^{\mathbf{E}}_w\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$ para toda $\mathbf{u}\in W_0^{1,p}(M,\mathbf{E})$. En consecuencia, $\|\mathbf{u}\|_{\nabla^{\mathbf{E}},p}:=\left(\int_M |\nabla^{\mathbf{E}}_w\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{1}{p}}$ define una norma en $W_0^{1,p}(M,\mathbf{E})$ equivalente a la norma usual de $W^{1,p}(M,\mathbf{E})$.

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que la desigualdad es falsa. Entonces existe una sucesión $(\mathbf{u}_k)\subseteq W_0^{1,p}(M,\mathbf{E})$ tal que $\|\mathbf{u}_k\|_{L^p(M,\mathbf{E})}=1$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y $\|\nabla^{\mathbf{E}}_w\mathbf{u}_k\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}\to 0$. En particular, $(\mathbf{u}_k)$ es acotada en $W^{1,p}(M,\mathbf{E})$. Por el Corolario 9.4.29, aplicado con $m=1$, después de pasar a una subsucesión existe $\mathbf{u}\in L^p(M,\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}_k\to\mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$.
Como $\nabla^{\mathbf{E}}_w\mathbf{u}_k\to 0$ en $L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})$ y la derivada covariante débil es un operador cerrado de $L^p(M,\mathbf{E})$ en $L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})$, se tiene $\mathbf{u}\in W^{1,p}(M,\mathbf{E})$ y $\nabla^{\mathbf{E}}_w\mathbf{u}=0$. Por lo tanto, $\mathbf{u}_k\to\mathbf{u}$ en $W^{1,p}(M,\mathbf{E})$. Este paso sólo usa convergencia fuerte y la cerradura de la derivada débil, Lema 9.1.12, y es válido también para $p=1$; no requiere reflexividad. Como $W_0^{1,p}(M,\mathbf{E})$ es un subespacio cerrado de $W^{1,p}(M,\mathbf{E})$, se sigue que $\mathbf{u}\in W_0^{1,p}(M,\mathbf{E})$ y, por el Teorema 9.4.23, aplicado con $m=1$, $\mathbf{Tr}(\mathbf{u})=0$.
Escribamos $M=\bigsqcup_{i=1}^{\ell} M_i$, donde $M_1,\dots,M_\ell$ son las componentes conexas de $M$. Por la desigualdad débil de Kato, Corolario 9.5.7, se tiene $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}\in W^{1,p}(M)$ y $\left|\nabla_w|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}\right|_{\mathbf{g}}\le|\nabla^{\mathbf{E}}_w\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}=0$ casi en todas partes. El Lema 9.6.1 implica que, para cada $i\in\{1,\dots,\ell\}$, existe una constante $c_i\ge 0$ tal que $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}=c_i$ casi en todas partes en $M_i$.
Por el Lema 9.6.7, $\operatorname{Tr}(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})=|\mathbf{Tr}(\mathbf{u})|_{\mathbf{h_E}}=0$ casi en todas partes en $\partial M$. Como $\partial M_i\neq\varnothing$ y la traza de la función constante $c_i$ sobre $\partial M_i$ es $c_i$, se concluye que $c_i=0$ para cada $i\in\{1,\dots,\ell\}$. Por lo tanto, $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}=0$ casi en todas partes en $M$ y, en consecuencia, $\mathbf{u}=0$ casi en todas partes.
Sin embargo, la convergencia $\mathbf{u}_k\to\mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$ implica $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}=\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{u}_k\|_{L^p(M,\mathbf{E})}=1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $C_P>0$ tal que $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}\le C_P\|\nabla^{\mathbf{E}}_w\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$ para toda $\mathbf{u}\in W_0^{1,p}(M,\mathbf{E})$.
Finalmente, para toda $\mathbf{u}\in W_0^{1,p}(M,\mathbf{E})$ se tiene $\|\nabla^{\mathbf{E}}_w\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}\le\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(M,\mathbf{E})}\le(1+C_P^p)^{\frac{1}{p}}\|\nabla^{\mathbf{E}}_w\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$, por lo que $\|\cdot\|_{\nabla^{\mathbf{E}},p}$ es una norma equivalente a la norma usual de $W^{1,p}(M,\mathbf{E})$. □

# 10

# Distribuciones en haces vectoriales

La teoría de distribuciones sobre una variedad debe respetar la geometría del espacio y, al mismo tiempo, extender la dualidad utilizada en el caso euclidiano. Para funciones escalares, una distribución puede verse como un funcional continuo sobre funciones de prueba. En un haz vectorial, la formulación natural exige emparejar secciones de prueba del haz dual y controlar su soporte y sus derivadas covariantes.

Desarrollaremos primero la topología de los espacios de secciones suaves con soporte compacto. A partir de ella definiremos las distribuciones con valores en un haz, sus restricciones, su soporte y la acción distribucional de los operadores diferenciales. El adjunto formal permitirá trasladar un operador a la sección de prueba, del mismo modo que la integración por partes define las derivadas distribucionales en $\mathbb{R}^n$.

Este marco será necesario para introducir después espacios de Sobolev de orden real y operadores definidos mediante cálculo funcional, pues permite interpretar sus elementos y sus ecuaciones sin recurrir a coordenadas particulares.

**La dualidad como principio de definición**

La teoría de Schwartz enseñó que un objeto singular puede conocerse por la manera en que actúa sobre funciones de prueba. En un haz vectorial, esa idea exige cuidar qué fibras se emparejan, qué medida permite integrar y cómo se traslada un operador al factor de prueba. El resultado es una teoría que conserva el carácter local de las distribuciones y, a la vez, respeta la geometría global del haz. Esta dualidad será la base de la regularidad elíptica y del teorema del núcleo que aparece al final del capítulo [131].

## 10.1 El espacio de secciones de prueba

En esta sección construiremos los espacios de secciones de prueba asociados a un haz vectorial suave. La idea es paralela a la construcción de $\mathcal{D}(\Omega)$ en el caso euclidiano, pero ahora las normas $C^m$ se definen mediante derivadas covariantes y métricas fibradas. Esta formulación permite trabajar de manera intrínseca y, al mismo tiempo, conservar las propiedades funcionales necesarias para definir distribuciones con valores en haces.

En una carta de frontera, su imagen $\Omega$ es un abierto relativo del semiespacio cerrado. La notación $C^\infty(\Omega)$ significa suavidad hasta la frontera, y $\mathcal{D}(\Omega)$ admite soportes compactos que la alcancen. Su dual se entiende con

esta convención. Todos los interiores y las vecindades de compactos de una variedad se toman en su topología relativa. La extensión por cero de una función de soporte compacto desde un abierto relativo al semiespacio es suave; para prolongarla a través de la frontera geométrica se empleará el Lema B.12.19.

**Definición 10.1.1.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$, $\nabla^{TM}$ una conexión en $TM$ y $\nabla^{\mathbf{E}}$ una conexión en $\mathbf{E}$. Sea $K\subseteq M$ compacto. Para cada $\varphi\in\Gamma^m(\mathbf{E})$, definimos

$$\|\varphi\|_{C^m(K)} := \max_{0\le j\le m}\sup_{x\in K}|\nabla^j\varphi(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}},$$

donde $\nabla^j\varphi$ denota la derivada covariante de orden $j$ de $\varphi$, considerada como sección del haz tensorial $T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E}$ e inducida por las conexiones $\nabla^{TM}$ y $\nabla^{\mathbf{E}}$ como en la Definición 9.1.1. La norma $|\cdot|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$ es la norma inducida por $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h_E}$ en los haces tensoriales correspondientes, véase la Proposición 9.1.2.
Definimos además

$$\Gamma^m_K(\mathbf{E}) := \{\varphi\in\Gamma^m(\mathbf{E})\mid \operatorname{supp}(\varphi)\subseteq K\}.$$

Cuando $m=\infty$, escribiremos

$$\Gamma_K(\mathbf{E}) := \{\varphi\in\Gamma(\mathbf{E})\mid \operatorname{supp}(\varphi)\subseteq K\}.$$

Para cada $m\in\mathbb{N}_0$, la cantidad $\|\cdot\|_{C^m(K)}$ define una norma en $\Gamma^m_K(\mathbf{E})$. La desigualdad del triángulo y la homogeneidad son inmediatas. Si $\|\varphi\|_{C^m(K)}=0$, entonces en particular $\varphi=0$ en $K$. Como $\operatorname{supp}(\varphi)\subseteq K$, se sigue que $\varphi=0$ en $M\setminus K$, y por lo tanto $\varphi=0$ en todo $M$.

Aunque la definición anterior usa una métrica riemanniana, una métrica fibrada y conexiones auxiliares, la topología resultante sobre $\Gamma^m_K(\mathbf{E})$ no depende de estas elecciones. Esto es importante porque las construcciones posteriores deben depender del haz y de la variedad, no de datos auxiliares particulares.

**Teorema 10.1.2.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sean $\mathbf{g}$ y $\widetilde{\mathbf{g}}$ dos métricas riemannianas en $M$, sean $\nabla^{TM}$ y $\widetilde{\nabla}^{TM}$ dos conexiones en $TM$, sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial suave de rango finito, sean $\mathbf{h_E}$ y $\widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}$ dos métricas fibradas suaves en $\mathbf{E}$, y sean $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $\widetilde{\nabla}^{\mathbf{E}}$ dos conexiones en $\mathbf{E}$. Además, sea $K\subseteq M$ compacto. Entonces las normas $\|\cdot\|_{C^m(K)}$ y $\|\cdot\|_{\widetilde{C^m}(K)}$ son equivalentes en $\Gamma^m_K(\mathbf{E})$.

*Demostración.* Para $\mathbf{u}\in\Gamma^m_K(\mathbf{E})$, escribimos

$$\|\mathbf{u}\|_{C^m(K)} = \max_{0\le j\le m}\sup_{x\in K}|\nabla^j\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}},\qquad \|\mathbf{u}\|_{\widetilde{C^m}(K)} = \max_{0\le j\le m}\sup_{x\in K}|\widetilde{\nabla}^j\mathbf{u}(x)|_{\widetilde{\mathbf{g}},\widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}}.$$

Aplicando el Lema 9.2.16 con el entero $m$, existe una constante $C_m>0$ tal que, para todo $x\in K$,

$$\sum_{j=0}^{m}|\widetilde{\nabla}^j\mathbf{u}(x)|^2_{\widetilde{\mathbf{g}},\widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}}\le C_m\sum_{j=0}^{m}|\nabla^j\mathbf{u}(x)|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}.$$

Por lo tanto,

$$\max_{0\le j\le m}|\widetilde{\nabla}^j\mathbf{u}(x)|^2_{\widetilde{\mathbf{g}},\widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{E}}}\le C_m(m+1)\max_{0\le j\le m}|\nabla^j\mathbf{u}(x)|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}.$$

Tomando supremo sobre $x\in K$, obtenemos

$$\|\mathbf{u}\|_{\widetilde{C^m}(K)}\le\sqrt{C_m(m+1)}\,\|\mathbf{u}\|_{C^m(K)}.$$

El argumento inverso, intercambiando los datos con tilde y sin tilde, produce una constante $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{C^m(K)} \leq \widetilde{C}\,\|\mathbf{u}\|_{\widetilde{C}^m(K)}.$$

Estas dos desigualdades proporcionan las constantes de comparación afirmadas. □

Para probar que $\Gamma^m_K(\mathbf{E})$ es completo, adaptaremos el argumento euclidiano al límite uniforme de secciones y de sus derivadas covariantes. Esta formulación intrínseca permitirá después pasar al límite en identidades covariantes.

**Lema 10.1.3.** (Límite uniforme de secciones continuas) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{F} \longrightarrow M$ un haz vectorial de rango finito provisto de una métrica fibrada continua $\mathbf{h}_\mathbf{F}$. Sea $(\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de secciones continuas de $\mathbf{F}$, y supongamos que existe una sección $\mathbf{s}\colon M \longrightarrow \mathbf{F}$ tal que

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}\|_{L^\infty(M,\mathbf{F})} \longrightarrow 0.$$

Entonces $\mathbf{s}$ es continua.

*Demostración.* Fijemos $p \in M$. Elegimos una trivialización local $\Psi\colon \mathbf{F}\restriction_U \longrightarrow U \times \mathbb{K}^r$ sobre una vecindad abierta $U$ de $p$, donde $r$ es el rango de $\mathbf{F}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Tomamos además una vecindad abierta $V$ de $p$ tal que $\overline{V} \subseteq U$ y $\overline{V}$ sea compacta.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, escribimos $\Psi(\mathbf{s}_n(x)) = (x, u_n(x))$ y $\Psi(\mathbf{s}(x)) = (x, u(x))$ para $x \in U$, donde $u_n, u\colon U \longrightarrow \mathbb{K}^r$.
Como la métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{F}$ es continua y $\overline{V}$ es compacto, las normas inducidas por $\mathbf{h}_\mathbf{F}$ en las fibras de $\mathbf{F}\restriction_{\overline{V}}$ son uniformemente equivalentes a la norma euclidiana de $\mathbb{K}^r$. Por lo tanto, existe una constante $C > 0$ tal que

$$|u_n(x) - u(x)| \leq C\,|\mathbf{s}_n(x) - \mathbf{s}(x)|_{\mathbf{h}_\mathbf{F}}$$

para todo $x \in \overline{V}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.
En consecuencia,

$$\|u_n - u\|_{C^0(\overline{V},\mathbb{K}^r)} \leq C\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}\|_{L^\infty(M,\mathbf{F})} \longrightarrow 0.$$

Así, $u_n \to u$ uniformemente en $\overline{V}$. Como cada $u_n$ es continua, $u$ también es continua en $V$. Por lo tanto, $\mathbf{s}$ es continua en $V$.
Como $p \in M$ era arbitrario, concluimos que $\mathbf{s}$ es continua en todo $M$. □

**Proposición 10.1.4.** Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$, $\nabla^{TM}$ una conexión en $TM$, $\nabla^\mathbf{E}$ una conexión en $\mathbf{E}$, y sea $K \subseteq M$ compacto. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, el espacio $\big(\Gamma^m_K(\mathbf{E}), \|\cdot\|_{C^m(K)}\big)$ es un espacio de Banach.

*Demostración.* Usaremos la convención $\nabla^0\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}$. Para cada $r \in \{0,\dots,m\}$, denotemos por $\mathbf{F}_r := T^{(0,r)}(TM)\otimes\mathbf{E}$ el haz tensorial en el que toma valores $\nabla^r\boldsymbol{\varphi}$. Este haz está provisto de la conexión inducida por $\nabla^{TM}$ y $\nabla^\mathbf{E}$, así como de la métrica fibrada inducida por $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}_\mathbf{E}$.
Sea $(\boldsymbol{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\Gamma^m_K(\mathbf{E})$. Fijemos $r \in \{0,\dots,m\}$.
Si $x \in M \setminus K$, como $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}_n) \subseteq K$, existe una vecindad abierta de $x$ en la cual $\boldsymbol{\varphi}_n$ se anula. Por lo tanto, $\nabla^r\boldsymbol{\varphi}_n(x) = 0$. En consecuencia, $\nabla^r\boldsymbol{\varphi}_n$ se anula en $M \setminus K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, para cualesquiera $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\|\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n - \nabla^r \boldsymbol{\varphi}_p\|_{L^\infty(M, T^{(0,r)}(TM)\otimes \mathbf{E})} = \|\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n - \nabla^r \boldsymbol{\varphi}_p\|_{C^0(K, T^{(0,r)}(TM)\otimes \mathbf{E})} \leq \|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_p\|_{C^m(K)}.$$

Como $(\boldsymbol{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$, se sigue que $(\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en $M$.
Para cada $x \in M$, la sucesión $(\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en la fibra $(\mathbf{F}_r)_x$, la cual es un espacio vectorial normado finito-dimensional y, por lo tanto, completo. Definimos

$$\mathbf{A}_r(x) := \lim_{n\to\infty} \nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n(x), \qquad x \in M.$$

Así obtenemos una sección $\mathbf{A}_r \colon M \longrightarrow \mathbf{F}_r$.
Veamos que la convergencia es uniforme. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, p \geq N$, entonces

$$\|\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n - \nabla^r \boldsymbol{\varphi}_p\|_{L^\infty(M, T^{(0,r)}(TM)\otimes \mathbf{E})} < \varepsilon.$$

Fijemos $n \geq N$ y hagamos $p \to \infty$. Para cada $x \in M$,

$$\left|\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n(x) - \mathbf{A}_r(x)\right|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \leq \varepsilon.$$

Tomando supremo sobre $x \in M$, obtenemos

$$\|\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n - \mathbf{A}_r\|_{L^\infty(M, T^{(0,r)}(TM)\otimes \mathbf{E})} \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n \to \mathbf{A}_r$ uniformemente en $M$.
Como cada $\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n$ es continua, el Lema 10.1.3 implica que $\mathbf{A}_r$ es continua. Además, puesto que $\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n = 0$ en $M \setminus K$ para todo $n$, al pasar al límite se obtiene $\mathbf{A}_r = 0$ en $M \setminus K$.
Definimos $\boldsymbol{\varphi} := \mathbf{A}_0$. Entonces $\boldsymbol{\varphi}$ es una sección continua de $\mathbf{E}$ y se anula en $M \setminus K$. Como $K$ es compacto, y por lo tanto cerrado, se sigue que $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) \subseteq K$.
Resta probar que $\boldsymbol{\varphi}$ es de clase $C^m$ y que $\nabla^r \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}_r$ para todo $r \in \{0, \ldots, m\}$.
Fijemos $r \in \{0, \ldots, m-1\}$. Consideremos el haz $\mathbf{F}_r = T^{(0,r)}(TM) \otimes \mathbf{E}$ con la conexión inducida. Sea $\gamma \colon [a, b] \longrightarrow M$ una curva suave y sean $t, t_0 \in [a, b]$.
Como $\boldsymbol{\varphi}_n \in \Gamma_K^m(\mathbf{E})$ y $r \leq m-1$, la sección $\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n$ es de clase $C^1$ como sección de $\mathbf{F}_r$. Usamos el Lema 2.7.21 con la sección $\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n$ restringida a $\gamma$. Obtenemos

$$P^{\mathbf{F}_r}_{\gamma, t\to t_0}\left(\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n(\gamma(t))\right) - \nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n(\gamma(t_0))$$

$$= \int_{t_0}^{t} P^{\mathbf{F}_r}_{\gamma, \tau\to t_0}\left(\nabla^{\mathbf{F}_r}_{\dot\gamma(\tau)}\left(\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n\right)(\gamma(\tau))\right) d\tau.$$

Por la definición de la derivada covariante de orden superior, bajo la identificación $T^*M \otimes \mathbf{F}_r \cong T^{(0,r+1)}(TM) \otimes \mathbf{E}$, se tiene $\nabla^{\mathbf{F}_r}(\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n) = \nabla^{r+1} \boldsymbol{\varphi}_n$. Por lo tanto,

$$\nabla^{\mathbf{F}_r}_{\dot\gamma(\tau)}\left(\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n\right)(\gamma(\tau)) = \iota^{\mathrm{prim}}_{\dot\gamma(\tau)}\left(\nabla^{r+1} \boldsymbol{\varphi}_n(\gamma(\tau))\right),$$

donde $\iota_v^{\text{prim}}$ denota la contracción en el primer factor covariante; es decir,

$$\big(\iota_v^{\text{prim}} A\big)(X_1,\dots,X_r) = A(v,X_1,\dots,X_r).$$

Así,

$$P^{\mathbf{F}_r}_{\gamma,t\to t_0}\big(\nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n(\gamma(t))\big) - \nabla^r \boldsymbol{\varphi}_n(\gamma(t_0))$$
$$= \int_{t_0}^{t} P^{\mathbf{F}_r}_{\gamma,\tau\to t_0}\Big(\iota^{\text{prim}}_{\dot\gamma(\tau)}\big(\nabla^{r+1}\boldsymbol{\varphi}_n(\gamma(\tau))\big)\Big)\,d\tau.$$

Haremos $n\to\infty$ en esta identidad. Como $\nabla^r\boldsymbol{\varphi}_n \to \mathbf{A}_r$ uniformemente en $M$, el lado izquierdo converge a

$$P^{\mathbf{F}_r}_{\gamma,t\to t_0}\big(\mathbf{A}_r(\gamma(t))\big) - \mathbf{A}_r(\gamma(t_0)).$$

Veamos ahora que también podemos pasar al límite en la integral. Fijados $t$ y $t_0$, consideremos el intervalo compacto comprendido entre ellos. La función

$$\tau \longmapsto P^{\mathbf{F}_r}_{\gamma,\tau\to t_0}\circ \iota_{\dot\gamma(\tau)}$$

es continua y toma valores en el espacio de operadores lineales entre espacios vectoriales finito-dimensionales. Por lo tanto, existe una constante $C>0$ tal que

$$\Big\| P^{\mathbf{F}_r}_{\gamma,\tau\to t_0}\circ \iota_{\dot\gamma(\tau)}\Big\| \le C$$

para todo $\tau$ entre $t_0$ y $t$.
En consecuencia,

$$\left|\int_{t_0}^{t} P^{\mathbf{F}_r}_{\gamma,\tau\to t_0}\Big(\iota_{\dot\gamma(\tau)}\big(\nabla^{r+1}\boldsymbol{\varphi}_n(\gamma(\tau)) - \mathbf{A}_{r+1}(\gamma(\tau))\big)\Big)\,d\tau\right|$$
$$\le C\,|t-t_0|\,\|\nabla^{r+1}\boldsymbol{\varphi}_n - \mathbf{A}_{r+1}\|_{L^\infty(M,T^{(0,r+1)}(TM)\otimes\mathbf{E})}.$$

El lado derecho converge a 0, pues $\nabla^{r+1}\boldsymbol{\varphi}_n\to\mathbf{A}_{r+1}$ uniformemente en $M$. Por lo tanto,

$$P^{\mathbf{F}_r}_{\gamma,t\to t_0}\big(\mathbf{A}_r(\gamma(t))\big) - \mathbf{A}_r(\gamma(t_0))$$
$$= \int_{t_0}^{t} P^{\mathbf{F}_r}_{\gamma,\tau\to t_0}\Big(\iota_{\dot\gamma(\tau)}\big(\mathbf{A}_{r+1}(\gamma(\tau))\big)\Big)\,d\tau.$$

Esta identidad tiene exactamente la forma del Lema 2.7.22, aplicado al haz $\mathbf{F}_r$, a la sección $\mathbf{A}_r$ y al tensor $\mathbf{A}_{r+1}$ visto como elemento de $\Gamma^0(T^*M\otimes\mathbf{F}_r)$. Concluimos que $\mathbf{A}_r$ es de clase $C^1$ y que $\nabla^{\mathbf{F}_r}\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{r+1}$.
A partir de esta compatibilidad, probaremos por inducción sobre $r\in\{0,\dots,m\}$ que $\boldsymbol{\varphi}\in\Gamma^r(\mathbf{E})$ y $\nabla^r\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{A}_r$.
Para $r=0$, la afirmación es inmediata, pues $\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{A}_0$ y $\mathbf{A}_0$ es continua.
Supongamos ahora que la afirmación vale para cierto $r\in\{0,\dots,m-1\}$. Entonces $\boldsymbol{\varphi}\in\Gamma^r(\mathbf{E})$ y $\nabla^r\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{A}_r$. Como acabamos de probar que $\mathbf{A}_r$ es de clase $C^1$ y $\nabla^{\mathbf{F}_r}\mathbf{A}_r=\mathbf{A}_{r+1}$, se sigue, por la definición de derivada covariante de orden superior, que $\boldsymbol{\varphi}\in\Gamma^{r+1}(\mathbf{E})$ y $\nabla^{r+1}\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{A}_{r+1}$.
Por inducción, $\boldsymbol{\varphi}\in\Gamma^m(\mathbf{E})$ y $\nabla^r\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{A}_r$ para todo $r\in\{0,\dots,m\}$.
Como además $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi})\subseteq K$, concluimos que $\boldsymbol{\varphi}\in\Gamma^m_K(\mathbf{E})$.

Finalmente, para cada $r \in \{0,\dots,m\}$, $\nabla^r \varphi_n \to \nabla^r \varphi$ uniformemente en $K$. Por lo tanto,

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{C^m(K)} = \max_{0\le r\le m} \|\nabla^r \varphi_n - \nabla^r \varphi\|_{C^0(K,T^{(0,r)}(TM)\otimes \mathbf{E})} \longrightarrow 0.$$

Así, toda sucesión de Cauchy en $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$ converge en $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$. Concluimos que $\left(\Gamma_K^m(\mathbf{E}), \|\cdot\|_{C^m(K)}\right)$ es un espacio de Banach. □

Una vez construido el espacio de Banach $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$ para cada orden finito, pasamos al espacio de secciones suaves con soporte contenido en $K$. Este espacio no está descrito por una sola norma, sino por la familia numerable de normas $C^m$.

**Definición 10.1.5.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$, y sea $K \subseteq M$ compacto. Dotamos a $\Gamma_K(\mathbf{E})$ de la topología localmente convexa inducida por la familia de seminormas

$$\mathbf{u} \longmapsto \|\mathbf{u}\|_{C^m(K)}, \qquad m \in \mathbb{N}_0.$$

Esta es la topología de convergencia uniforme sobre $K$ de las secciones y de todas sus derivadas covariantes.

**Lema 10.1.6.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$, y sea $K \subseteq M$ compacto. Entonces la topología de $\Gamma_K(\mathbf{E})$ generada por la familia de seminormas $(\|\cdot\|_{C^m(K)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ admite como base local en 0 la familia de conjuntos

$$V_{K,m,\ell} := \left\{ \mathbf{u} \in \Gamma_K(\mathbf{E}) \;\middle|\; \|\mathbf{u}\|_{C^m(K)} < \frac{1}{\ell} \right\}, \qquad m \in \mathbb{N}_0, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, una base de vecindades de $\mathbf{u} \in \Gamma_K(\mathbf{E})$ está dada por

$$\mathbf{u} + V_{K,m,\ell} = \left\{ \mathbf{v} \in \Gamma_K(\mathbf{E}) \;\middle|\; \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{C^m(K)} < \frac{1}{\ell} \right\}.$$

*Demostración.* Por la Definición B.10.18 de topología inducida por seminormas, una base local en 0 está dada por los conjuntos de la forma

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in \Gamma_K(\mathbf{E}) \;\middle|\; \|\mathbf{u}\|_{C^{m_1}(K)} < \varepsilon_1, \dots, \|\mathbf{u}\|_{C^{m_q}(K)} < \varepsilon_q \right\}.$$

Sea $m := \max\{m_1,\dots,m_q\}$. Entonces, como las normas $C^m$ son crecientes respecto del orden,

$$\|\mathbf{u}\|_{C^{m_i}(K)} \le \|\mathbf{u}\|_{C^m(K)} \qquad \forall i \in \{1,\dots,q\}.$$

Elegimos $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\ell} < \min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q\}$. Si $\mathbf{u} \in V_{K,m,\ell}$, entonces

$$\|\mathbf{u}\|_{C^{m_i}(K)} \le \|\mathbf{u}\|_{C^m(K)} < \frac{1}{\ell} < \varepsilon_i$$

para toda $i \in \{1,\dots,q\}$. Por lo tanto, $V_{K,m,\ell} \subseteq U$.
Esto prueba que la familia $V_{K,m,\ell}$ es una base local en 0. El caso general se obtiene por traslación, usando que las traslaciones son homeomorfismos en un espacio vectorial topológico. □

**Proposición 10.1.7.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, y sea $K\subseteq M$ compacto. Para $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\Gamma_K(\mathbf{E})$, definimos

$$d_K(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m}\frac{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{C^m(K)}}{1+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{C^m(K)}}.$$

Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $d_K$ es una métrica en $\Gamma_K(\mathbf{E})$ invariante bajo traslaciones.

(b) La topología de $\Gamma_K(\mathbf{E})$ generada por la familia de seminormas $(\|\cdot\|_{C^m(K)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ coincide con la topología inducida por $d_K$.

(c) $(\Gamma_K(\mathbf{E}),d_K)$ es completo.

En particular, $\Gamma_K(\mathbf{E})$ es un espacio de Fréchet.

*Demostración.* Consideremos la familia numerable de seminormas

$$p_m(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u}\|_{C^m(K)}, \qquad m\in\mathbb{N}_0,$$

definida en $\Gamma_K(\mathbf{E})$. En realidad, cada $p_m$ es una norma en $\Gamma_K(\mathbf{E})$: si $p_m(\mathbf{u})=0$, entonces en particular $\mathbf{u}=0$ en $K$; como $\operatorname{supp}(\mathbf{u})\subseteq K$, se sigue que $\mathbf{u}=0$ en $M\setminus K$, y por lo tanto $\mathbf{u}=0$ en todo $M$. Así, la familia $(p_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ separa puntos.

Las propiedades $(a)$ y $(b)$ son entonces un caso particular de la Proposición B.10.24. La métrica construida en dicha proposición, aplicada a la familia $(p_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$, es precisamente $d_K$, y por lo tanto $d_K$ es invariante bajo traslaciones e induce la topología localmente convexa generada por las normas $\|\cdot\|_{C^m(K)}$.

Resta probar la completitud. Para ello usaremos la completitud secuencial de las intersecciones proyectivas. Observemos primero que, dentro del espacio vectorial topológico de Hausdorff $Y := \Gamma_K^0(\mathbf{E})$, se tiene la igualdad algebraica

$$\Gamma_K(\mathbf{E}) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} \Gamma_K^m(\mathbf{E}).$$

Si una sección pertenece a $\Gamma_K(\mathbf{E})$, entonces es suave y, por lo tanto, pertenece a $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$ para todo $m\in\mathbb{N}_0$. Recíprocamente, si una sección pertenece a $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$ para todo $m\in\mathbb{N}_0$, entonces es de clase $C^m$ para todo $m$, luego es suave, y su soporte está contenido en $K$.

Para cada $m\in\mathbb{N}_0$, el espacio $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$ es de Banach por la Proposición 10.1.4. Además, la inclusión

$$\Gamma_K^m(\mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma_K^0(\mathbf{E})$$

es continua, pues

$$\|\mathbf{u}\|_{C^0(K)} \le \|\mathbf{u}\|_{C^m(K)}.$$

Por otro lado, la topología de $\Gamma_K(\mathbf{E})$ generada por las normas $\|\cdot\|_{C^m(K)}$ coincide con la topología proyectiva asociada a las inclusiones naturales

$$\iota_m\colon \Gamma_K(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma_K^m(\mathbf{E}), \qquad m\in\mathbb{N}_0.$$

Esto se debe a que dicha topología es, por definición, la topología inicial que hace continuas todas las inclusiones $\iota_m$, o equivalentemente la topología generada por las seminormas $\mathbf{u} \mapsto \|\iota_m(\mathbf{u})\|_{C^m(K)} = \|\mathbf{u}\|_{C^m(K)}$; véanse la Definición B.10.39 y la Definición B.10.18.
Aplicando la Proposición 4.2.4, reindexando la familia $\{\Gamma_K^m(\mathbf{E})\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ mediante $n = m+1$, concluimos que $\Gamma_K(\mathbf{E})$ es secuencialmente completo para esta topología proyectiva. Como esta misma topología está inducida por la métrica invariante bajo traslaciones $d_K$, una sucesión es de Cauchy respecto a $d_K$ si y sólo si es de Cauchy en la topología vectorial correspondiente. Por la completitud secuencial, toda sucesión de Cauchy para $d_K$ converge en $\Gamma_K(\mathbf{E})$; y, como $d_K$ induce la topología, dicha convergencia es convergencia respecto a la métrica $d_K$. Por lo tanto, $(\Gamma_K(\mathbf{E}), d_K)$ es completo.
Finalmente, $\Gamma_K(\mathbf{E})$ es localmente convexo porque su topología está generada por seminormas, es Hausdorff porque la familia $(p_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ separa puntos, es metrizable por $d_K$ y es completo por lo que acabamos de probar. Por la definición de espacio de Fréchet, o equivalentemente por el Teorema B.10.38, concluimos que $\Gamma_K(\mathbf{E})$ es un espacio de Fréchet. □

**Proposición 10.1.8.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$, y sean $K, L \subseteq M$ compactos tales que $K \subseteq L$. Entonces:

(a) para cada $m \in \mathbb{N}_0$, la inclusión natural $\Gamma_K^m(\mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma_L^m(\mathbf{E})$ es una isometría sobre su imagen, es decir,

$$\|\mathbf{u}\|_{C^m(L)} = \|\mathbf{u}\|_{C^m(K)} \qquad \forall \mathbf{u} \in \Gamma_K^m(\mathbf{E});$$

(b) la topología de $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$ coincide con la topología de subespacio inducida por $\Gamma_L^m(\mathbf{E})$;

(c) la topología de Fréchet de $\Gamma_K(\mathbf{E})$ coincide con la topología de subespacio inducida por $\Gamma_L(\mathbf{E})$;

(d) las imágenes de $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$ en $\Gamma_L^m(\mathbf{E})$ y de $\Gamma_K(\mathbf{E})$ en $\Gamma_L(\mathbf{E})$ son cerradas.

*Demostración.* Sea $\mathbf{u} \in \Gamma_K^m(\mathbf{E})$. Como $\operatorname{supp}(\mathbf{u}) \subseteq K$, se tiene $\mathbf{u} = 0$ en el abierto $M \setminus K$. Por lo tanto, para cada $j \in \{0, \dots, m\}$, también se cumple $\nabla^j \mathbf{u} = 0$ en $M \setminus K$. En particular, sobre $L \setminus K$ todas las derivadas covariantes de $\mathbf{u}$ hasta orden $m$ son nulas. De aquí se obtiene

$$\sup_{x\in L} |\nabla^j \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} = \sup_{x\in K} |\nabla^j \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \qquad 0 \le j \le m.$$

Al tomar el máximo para $0 \le j \le m$, obtenemos $\|\mathbf{u}\|_{C^m(L)} = \|\mathbf{u}\|_{C^m(K)}$. Esto prueba $(a)$.
El inciso $(b)$ se sigue inmediatamente de $(a)$, pues la norma de $\Gamma_L^m(\mathbf{E})$ restringida al subespacio $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$ coincide con la norma propia de $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$.
Para $(c)$, recordemos que la topología de $\Gamma_K(\mathbf{E})$ está inducida por la familia de normas $\|\cdot\|_{C^m(K)}$, con $m \in \mathbb{N}_0$, mientras que la topología de $\Gamma_L(\mathbf{E})$ está inducida por la familia $\|\cdot\|_{C^m(L)}$, con $m \in \mathbb{N}_0$. Por $(a)$, al restringir estas últimas normas a $\Gamma_K(\mathbf{E})$ se obtiene exactamente la familia $\|\cdot\|_{C^m(K)}$. Por lo tanto, las topologías coinciden.
Para $(d)$, sea $\mathbf{u}_j \in \Gamma_K^m(\mathbf{E})$ una sucesión que converge a $\mathbf{u} \in \Gamma_L^m(\mathbf{E})$. En particular, $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ uniformemente sobre $L$. Como $\mathbf{u}_j = 0$ en $L \setminus K$, también $\mathbf{u} = 0$ allí; fuera de $L$ la sección $\mathbf{u}$ ya se anula, luego $\operatorname{supp} \mathbf{u} \subseteq K$. Esto prueba la cerradura de la imagen en nivel $C^m$. Si $\mathbf{u}_j \in \Gamma_K(\mathbf{E})$ converge a $\mathbf{u}$ en $\Gamma_L(\mathbf{E})$, la seminorma $C^0(L)$ da el mismo argumento. Por lo tanto, ambas imágenes son cerradas. □

**Definición 10.1.9.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave. Fijemos una exhaustión creciente de $M$ por compactos

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq M, \qquad K_n \subseteq \operatorname{Int}(K_{n+1}), \qquad M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

(a) Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, el espacio $\Gamma^m(\mathbf{E})$ se dota de la topología localmente convexa generada por la familia de seminormas

$$p_{n,j}(u) := \sup_{x \in K_n} |\nabla^j u(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j \leq m.$$

(b) El espacio $\Gamma(\mathbf{E})$ se dota de la topología localmente convexa generada por la familia de seminormas

$$p_{n,m}(u) := \max_{0 \leq j \leq m} \sup_{x \in K_n} |\nabla^j u(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

(c) Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, el espacio $\Gamma_c^m(\mathbf{E})$ se dota de la topología final localmente convexa asociada a las inclusiones

$$\Gamma_{K_n}^m(\mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma_c^m(\mathbf{E}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

En otras palabras,

$$\Gamma_c^m(\mathbf{E}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_{K_n}^m(\mathbf{E}).$$

Por la Proposición 10.1.8, las inclusiones son encajes con imagen cerrada. Como cada $\Gamma_{K_n}^m(\mathbf{E})$ es un espacio de Banach, $\Gamma_c^m(\mathbf{E})$ es un límite inductivo estricto LB y, en particular, un espacio LF estricto.

(d) El espacio $\Gamma_c(\mathbf{E})$ se dota de la topología final localmente convexa asociada a las inclusiones

$$\Gamma_{K_n}(\mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma_c(\mathbf{E}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es decir,

$$\Gamma_c(\mathbf{E}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_{K_n}(\mathbf{E}).$$

Por la Proposición 10.1.8, las inclusiones son encajes con imagen cerrada. Como cada $\Gamma_{K_n}(\mathbf{E})$ es un espacio de Fréchet, $\Gamma_c(\mathbf{E})$ es un espacio LF estricto.

**Proposición 10.1.10.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito. Las topologías definidas en 10.1.9 no dependen de las métricas, conexiones ni exhaustión creciente por compactos elegidas.

*Demostración.* La independencia respecto de las métricas y de las conexiones auxiliares se sigue del Teorema 10.1.2. Sobre cada compacto fijo $K \subseteq M$, las normas $C^m(K)$ construidas con dos elecciones distintas de métricas y conexiones son equivalentes. Por lo tanto, para cada $m$ fijo, ambas elecciones generan la misma topología en $\Gamma_K^m(\mathbf{E})$ y en $\Gamma_K(\mathbf{E})$.
Resta justificar que la topología no depende de la exhaustión. Sean $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(L_q)_{q \in \mathbb{N}}$ dos exhauciones cre-

cientes de $M$ por compactos, con $K_n \subseteq \mathrm{Int}(K_{n+1})$, $L_q \subseteq \mathrm{Int}(L_{q+1})$, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ y $M = \bigcup_{q=1}^{\infty} L_q$.
Primero probemos que cada compacto de una exhaustión queda contenido en algún compacto de la otra. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Como $M = \bigcup_{q=1}^{\infty} L_q$ y $L_q \subseteq \mathrm{Int}(L_{q+1})$, los abiertos $\mathrm{Int}(L_q)$ cubren $M$. En particular, cubren al compacto $K_n$. Por compacidad, existen $q_1, \ldots, q_s$ tales que

$$K_n \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{s} \mathrm{Int}(L_{q_\alpha}).$$

Si $q_0 := \max\{q_1, \ldots, q_s\}$, entonces, por crecimiento de la familia $(L_q)$,

$$K_n \subseteq L_{q_0}.$$

El mismo argumento, intercambiando los papeles de $K$ y $L$, muestra que para cada $q \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_q \subseteq K_{n_0}$.
Consideremos ahora la topología de $\Gamma^m(\mathbf{E})$. Para la exhaustión $(K_n)$ está generada por las seminormas

$$p^K_{n,j}(\mathbf{u}) := \sup_{x \in K_n} |\nabla^j \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j \leq m,$$

mientras que para la exhaustión $(L_q)$ está generada por las seminormas

$$p^L_{q,j}(\mathbf{u}) := \sup_{x \in L_q} |\nabla^j \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}, \qquad q \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j \leq m.$$

Si $K_n \subseteq L_{q_0}$, entonces $p^K_{n,j}(\mathbf{u}) \leq p^L_{q_0,j}(\mathbf{u})$ para toda $\mathbf{u} \in \Gamma^m(\mathbf{E})$. Por lo tanto, toda vecindad básica definida mediante la exhaustión $(K_n)$ contiene una vecindad básica definida mediante la exhaustión $(L_q)$. El argumento recíproco, usando que cada $L_q$ queda contenido en algún $K_{n_0}$, da la inclusión inversa entre las topologías. Así, ambas exhauciones inducen la misma topología en $\Gamma^m(\mathbf{E})$. El mismo razonamiento se aplica a $\Gamma(\mathbf{E})$, usando las seminormas

$$p^K_{n,r}(\mathbf{u}) := \max_{0 \leq j \leq r} \sup_{x \in K_n} |\nabla^j \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}$$

y sus análogas asociadas a $(L_q)$.
Veamos ahora la independencia de la exhaustión para los espacios con soporte compacto. Denotemos por $\tau^m_K$ la topología final localmente convexa en $\Gamma^m_c(\mathbf{E})$ asociada a la familia $(\Gamma^m_{K_n}(\mathbf{E}))_{n\in\mathbb{N}}$, y por $\tau^m_L$ la topología final localmente convexa asociada a la familia $(\Gamma^m_{L_q}(\mathbf{E}))_{q\in\mathbb{N}}$.
Probaremos que $\tau^m_K = \tau^m_L$ usando la propiedad de maximalidad del Teorema 4.4.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \subseteq L_{q_0}$. Entonces la inclusión

$$\Gamma^m_{K_n}(\mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^m_c(\mathbf{E})$$

vista con la topología $\tau^m_L$ es continua, pues se descompone como

$$\Gamma^m_{K_n}(\mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^m_{L_{q_0}}(\mathbf{E}) \hookrightarrow (\Gamma^m_c(\mathbf{E}), \tau^m_L),$$

donde la primera flecha es continua por la Proposición 10.1.8 y la segunda lo es por la definición de $\tau_L^m$ como topología final localmente convexa.
Por lo tanto, $\tau_L^m$ es una topología localmente convexa en $\Gamma_c^m(\mathbf{E})$ que hace continuas todas las inclusiones $\Gamma_{K_n}^m(\mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma_c^m(\mathbf{E})$. Como $\tau_K^m$ es la topología más fina con esta propiedad, se obtiene $\tau_L^m \subseteq \tau_K^m$. Intercambiando las exhauciones $(K_n)$ y $(L_q)$ se obtiene $\tau_K^m \subseteq \tau_L^m$. En consecuencia, $\tau_K^m = \tau_L^m$.
El mismo argumento prueba la independencia de la topología de $\Gamma_c(\mathbf{E})$. Si $K_n \subseteq L_{q_0}$, la inclusión

$$\Gamma_{K_n}(\mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma_{L_{q_0}}(\mathbf{E})$$

es continua por la Proposición 10.1.8; luego la topología final localmente convexa definida por la exhaustión $(L_q)$ hace continuas todas las inclusiones $\Gamma_{K_n}(\mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma_c(\mathbf{E})$. Por la maximalidad del Teorema 4.4.1, una topología contiene a la otra. El intercambio de las exhauciones da la contención recíproca, y por lo tanto ambas coinciden. □

**Definición 10.1.11.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave. Definimos

$$\mathcal{D}(M,\mathbf{E}) := \Gamma_c(\mathbf{E}),$$

y dotamos este espacio de la topología inductiva localmente convexa estricta

$$\mathcal{D}(M,\mathbf{E}) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{K_n}(\mathbf{E}),$$

donde $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una exhaustión creciente de $M$ por compactos. Por la Proposición 10.1.10, esta topología no depende de la exhaustión elegida. En particular, $\mathcal{D}(M,\mathbf{E})$ es un espacio LF.

La estructura LF de $\mathcal{D}(M,\mathbf{E})$ permite describir la convergencia de sucesiones de manera concreta: una sucesión converge si y sólo si todos sus términos tienen soporte contenido en un mismo compacto y, sobre ese compacto, convergen uniformemente junto con todas sus derivadas covariantes.

**Corolario 10.1.12.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave. Sean $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{E})$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(M,\mathbf{E})$ si y sólo si existe un compacto $K \subseteq M$ tal que:

(a) $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq K$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$;

(b) para toda $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{C^k(K)} \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

*Demostración.* Por definición, $\mathcal{D}(M,\mathbf{E})$ es el espacio LF generado por la sucesión de espacios de Fréchet $\Gamma_{K_n}(\mathbf{E})$. Aplicando el inciso correspondiente del Teorema 4.4.6, la sucesión $\varphi_n$ converge a $\varphi$ en $\mathcal{D}(M,\mathbf{E})$ si y sólo si existe un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{\varphi\} \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Gamma_{K_N}(\mathbf{E})$$

y, además, $\varphi_n \to \varphi$ en la topología de Fréchet de $\Gamma_{K_N}(\mathbf{E})$.
La primera condición equivale a que todos los soportes estén contenidos en el compacto $K_N$. Tomando $K = K_N$, obtenemos $(a)$. Por otro lado, la topología de $\Gamma_{K_N}(\mathbf{E})$ está inducida por la familia de seminormas

$\|\cdot\|_{C^k(K_N)}$, con $k \in \mathbb{N}_0$. Por la caracterización de convergencia para topologías inducidas por seminormas, Proposición B.10.23, la convergencia $\varphi_n \to \varphi$ en $\Gamma_{K_N}(\mathbf{E})$ equivale a

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{C^k(K_N)} \to 0 \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}_0.$$

Esto prueba $(b)$.
Recíprocamente, supongamos que existe un compacto $K \subseteq M$ que satisface $(a)$ y $(b)$. Como $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una exhaustión creciente con $K_n \subseteq \operatorname{Int}(K_{n+1})$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_N$. Entonces $\varphi_n, \varphi \in \Gamma_{K_N}(\mathbf{E})$ para toda $n$. Fijemos $k \in \mathbb{N}_0$. Como las secciones $\varphi_n - \varphi$ tienen soporte contenido en $K$, se anulan en $M \setminus K$. Por lo tanto, sus derivadas covariantes de cualquier orden también se anulan en $M \setminus K$. En particular,

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{C^k(K_N)} = \|\varphi_n - \varphi\|_{C^k(K)}.$$

Por la hipótesis $(b)$, el lado derecho tiende a 0. Como esto vale para todo $k \in \mathbb{N}_0$, se obtiene $\varphi_n \to \varphi$ en $\Gamma_{K_N}(\mathbf{E})$. Aplicando nuevamente el Teorema 4.4.6, concluimos que $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(M, \mathbf{E})$. □

## 10.2 Distribuciones en haces vectoriales

Con estas herramientas estamos listos para definir el concepto de distribución en el contexto de haces vectoriales.

**Definición 10.2.1.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $W$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).
Denotamos por $\mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ al espacio de todos los mapeos $\mathbb{K}$-lineales

$$\mathbf{F} \colon \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \longrightarrow W$$

que son continuos.
Dotamos a $\mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ de la topología débil-$*$, definida como la topología inicial asociada a la familia de mapeos de evaluación

$$\operatorname{ev}_\varphi \colon \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W) \longrightarrow W, \qquad \operatorname{ev}_\varphi(\mathbf{F}) = \mathbf{F}(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*),$$

es decir, la topología generada por los conjuntos de la forma

$$\operatorname{ev}_\varphi^{-1}(U) = \{\mathbf{F} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W) \mid \mathbf{F}(\varphi) \in U\},$$

donde $\varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$ y $U \subseteq W$ es abierto.
Los elementos de $\mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ se llaman **distribuciones** en $\mathbf{E}$ con valores en $W$.
En el caso $W = \mathbb{K}$ escribimos simplemente $\mathcal{D}'(M, \mathbf{E})$ y si adicionalmente $\mathbf{E} = T^{(0,0)}(TM)$, escribimos $\mathcal{D}'(M)$.

**Observación 10.2.2.** La topología débil-$*$ en $\mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ coincide con la topología de convergencia puntual sobre $\mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$. Es decir, una sucesión $(\mathbf{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ converge a $\mathbf{F} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ si y sólo si

$$\mathbf{F}_n(\varphi) \to \mathbf{F}(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*).$$

Más generalmente, una red $(\mathbf{F}_\alpha)_\alpha$ converge a $\mathbf{F}$ si y sólo si

$$\mathbf{F}_\alpha(\varphi) \to \mathbf{F}(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*).$$

**Proposición 10.2.3.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave, sea $W$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $N := \dim W$. Entonces existe un isomorfismo natural de espacios vectoriales topológicos

$$\mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W) \cong \mathcal{D}'(M, \mathbf{E})^N,$$

donde el lado derecho se dota de la topología producto.

*Demostración.* Sea $\{w_1, \dots, w_N\}$ una base de $W$ y $\{w^1, \dots, w^N\}$ la base dual inducida. Dado $\mathbf{F} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$, definimos

$$\mathbf{F}_j := w^j \circ \mathbf{F} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}), \qquad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Entonces, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$, se tiene

$$\mathbf{F}(\varphi) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j(\varphi)\, w_j.$$

Esto define un isomorfismo lineal

$$\mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W) \longrightarrow \mathcal{D}'(M, \mathbf{E})^N.$$

Además, por la definición de la topología débil-$*$, la convergencia en $\mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ es equivalente a la convergencia componente a componente, lo cual muestra que este isomorfismo es un homeomorfismo. □

**Observación 10.2.4.** En particular, existe una identificación natural

$$\mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W) \cong \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}) \otimes W,$$

la cual, al elegir una base de $W$, se reduce a la identificación anterior con un producto finito.

La continuidad se puede caracterizar de la siguiente manera, la cual es análoga al caso euclidiano.

**Teorema 10.2.5.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave y $W$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita dotado de una norma $|\cdot|_W$. Sea $\mathbf{F}\colon \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \longrightarrow W$ un operador lineal. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $\mathbf{F}$ es continuo.

(b) Si $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi$ en $\mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{F}(\varphi_k) = \mathbf{F}(\varphi).$$

(c) Para todo conjunto compacto $K \subseteq M$, la restricción $\mathbf{F} \restriction_{\mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*)}$ es continua.

(d) Para todo conjunto compacto $K \subseteq M$, existen $m \in \mathbb{N}_0$ y $c_K > 0$ tales que

$$|\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi})|_W \leq c_K \|\boldsymbol{\varphi}\|_{C^m(K)} \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*).$$

*Demostración.* (a)⇒(b). Sea $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$ tal que $\boldsymbol{\varphi}_k \to \boldsymbol{\varphi}$. Por continuidad de $\mathbf{F}$, se tiene directamente que

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}_k) \longrightarrow \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}).$$

(b)⇒(c). Sea $K \subseteq M$ un conjunto compacto. Consideremos la inclusión canónica

$$\iota \colon \mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*) \hookrightarrow \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*),$$

la cual es continua por construcción de la topología inductiva.
Sea $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*)$ tal que $\boldsymbol{\varphi}_k \to \boldsymbol{\varphi}$ en $\mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*)$. Entonces $\boldsymbol{\varphi}_k \to \boldsymbol{\varphi}$ en $\mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$, y por (b),

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}_k) \longrightarrow \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}).$$

Esto muestra que la restricción $\mathbf{F} \restriction_{\mathcal{D}_K(M,\mathbf{E}^*)}$ es secuencialmente continua. Como $\mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*)$ es un espacio de Fréchet, en particular es metrizable, y por la Proposición B.10.10, la continuidad secuencial implica continuidad. Por lo tanto, $\mathbf{F} \restriction_{\mathcal{D}_K(M,\mathbf{E}^*)}$ es continua.
(c)⇒(a). Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión exhaustiva de compactos tal que

$$\mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_n}(M, \mathbf{E}^*).$$

Por hipótesis, para todo $n \in \mathbb{N}$ la restricción $\mathbf{F} \restriction_{\mathcal{D}_{K_n}(M,\mathbf{E}^*)}$ es continua.
Por la definición de la topología inductiva (Teorema 4.4.1), un operador lineal

$$\mathbf{F} \colon \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \longrightarrow W$$

es continuo si y sólo si todas sus restricciones a los espacios $\mathcal{D}_{K_n}(M, \mathbf{E}^*)$ son continuas. Concluimos que $\mathbf{F}$ es continuo.

(c)⇒(d). Sea $K \subseteq M$ un conjunto compacto. Entonces $\mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo cuya topología está generada por la familia creciente de seminormas

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{C^m(K)}, \qquad m \in \mathbb{N}_0.$$

Por (c), la restricción $\mathbf{F} \restriction_{\mathcal{D}_K(M,\mathbf{E}^*)}$ es continua. Aplicando el Teorema B.10.25, existe $m \in \mathbb{N}_0$ y $c_K > 0$ tales que

$$|\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi})|_W \leq c_K \|\boldsymbol{\varphi}\|_{C^m(K)} \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*).$$

(d)⇒(c). Sea $K \subseteq M$ compacto. Supongamos que se cumple la estimación de (d). Si $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\boldsymbol{\varphi}$ en $\mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*)$, entonces en particular

$$\|\boldsymbol{\varphi}_k - \boldsymbol{\varphi}\|_{C^m(K)} \longrightarrow 0$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Aplicando la estimación de (d), obtenemos

$$|\mathbf{F}(\varphi_k) - \mathbf{F}(\varphi)|_W \leq c_K \|\varphi_k - \varphi\|_{C^m(K)} \longrightarrow 0.$$

Esto muestra que $\mathbf{F} \restriction_{\mathcal{D}_K(M,\mathbf{E}^*)}$ es continua.

□

Con esto en mente definimos el orden de una distribución:

**Definición 10.2.6.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave, sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathbf{F}\colon \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*) \longrightarrow W$ una distribución.
Sea $K \subseteq M$ un conjunto compacto. Por el inciso (d) del Teorema 10.2.5, existen $m_K \in \mathbb{N}_0$ y $C_K > 0$ tales que

$$|\mathbf{F}(\varphi)|_W \leq C_K \|\varphi\|_{C^{m_K}(K)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(M,\mathbf{E}^*).$$

Al menor entero $m_K$ que satisface esta desigualdad se le denomina el *orden* de $\mathbf{F}$ sobre el compacto $K$.
Decimos que $\mathbf{F}$ es una distribución de *orden* $m$ en $M$ si $m$ es el menor entero no negativo tal que, para todo compacto $K \subseteq M$, existe una constante $C_K > 0$ con

$$|\mathbf{F}(\varphi)|_W \leq C_K \|\varphi\|_{C^m(K)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(M,\mathbf{E}^*).$$

Si no existe tal entero $m$, decimos que $\mathbf{F}$ es una distribución de orden infinito.

**Lema 10.2.7.** (Aproximación con aumento seguro del soporte) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave. Si $K \subseteq \operatorname{Int} L$ son compactos, entonces para cada $\mathbf{u} \in \Gamma^m_K(\mathbf{E})$ existe una sucesión $\mathbf{u}_j \in \Gamma_L(\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en la norma $C^m(L)$.

*Demostración.* Si $\dim M = 0$, toda sección es suave y basta tomar $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}$. Supongamos que $\dim M = n \geq 1$. Elijamos un abierto $V$ con $K \subseteq V \Subset \operatorname{Int} L$, una cubierta finita de $\overline{V}$ por cartas trivializantes relativamente compactas en $\operatorname{Int} L$ y funciones $\rho_a \in C^\infty_c(M)$ subordinadas a esas cartas, indexadas por $a \in \{1,\dots,N\}$, cuya suma es uno en una vecindad de $K$. Entonces $\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{N} \rho_a \mathbf{u}$. En cada carta, el soporte de las componentes de $\rho_a \mathbf{u}$ es un compacto contenido en su dominio coordenado; en particular, está separado de sus bordes artificiales.
Fijemos una mollificadora $\eta \in C^\infty_c(B(0,1))$, no negativa y con integral uno, y pongamos $\eta_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-n}\eta(z/\varepsilon)$. En una carta interior, cada componente $f$ se prolonga por cero a $\mathbb{R}^n$ como función de clase $C^m$ y soporte compacto. La convolución $\eta_\varepsilon * f$ converge a $f$ uniformemente junto con sus derivadas de orden a lo sumo $m$.
En una carta de frontera, prolongamos primero $f$ por cero dentro de $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$, únicamente a través de los bordes artificiales de la carta. Esta prolongación sigue siendo de clase $C^m$ hasta la frontera y tiene soporte compacto en $\mathbb{H}^n$. Denotemos por $f_0$ su prolongación medible por cero al semiespacio inferior y definamos

$$f_\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * f_0)(x + 2\varepsilon e_n), \qquad x \in \mathbb{H}^n.$$

La convolución es suave en $\mathbb{R}^n$. Además, para $x_n \geq 0$ y $z \in \operatorname{supp}\eta$, la última coordenada de $x + 2\varepsilon e_n - \varepsilon z$ es

al menos $\varepsilon$. Por ello, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \le m$ podemos derivar usando sólo valores interiores de $f$, y obtenemos

$$D^\alpha f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) D^\alpha f(x + 2\varepsilon e_n - \varepsilon z)\, dz.$$

Las derivadas $D^\alpha f$ son uniformemente continuas en el semiespacio, pues son continuas hasta la frontera y tienen soporte compacto. Como $|2\varepsilon e_n - \varepsilon z| \le 3\varepsilon$ en esta integral y $\int \eta = 1$, se sigue que

$$\max_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\mathbb{H}^n} |D^\alpha f_\varepsilon(x) - D^\alpha f(x)| \longrightarrow 0.$$

En ambos tipos de carta, el soporte del aproximante está contenido en la vecindad de radio $3\varepsilon$ del soporte original, tomada en el modelo coordenado correspondiente. Podemos elegir, para cada soporte, un compacto ligeramente mayor todavía contenido en el dominio de la carta. Al tomar $\varepsilon$ suficientemente pequeño, todos los aproximantes quedan soportados en esos compactos fijos. Se transportan entonces al haz y se prolongan por cero fuera de sus cartas; las secciones resultantes son suaves y están soportadas en $\operatorname{Int} L$. La equivalencia de las normas coordenadas y covariantes sobre esos compactos, dada por el Teorema 10.1.2, convierte la convergencia de las componentes en convergencia $C^m$ de las secciones. Como sólo hay una cantidad finita de cartas y componentes, elegimos una sucesión común $\varepsilon_j \downarrow 0$ y sumamos los aproximantes. Así obtenemos $\mathbf{u}_j \in \Gamma_L(\mathbf{E})$ con $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $C^m(L)$. □

**Observación 10.2.8.** Sea $\mathbf{F}\colon \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*) \to W$ una distribución de orden global $m$. Para $\mathbf{u} \in \Gamma_K^m(\mathbf{E}^*)$, elijamos un compacto $L$ con $K \subseteq \operatorname{Int} L$ y, por el lema anterior, $\mathbf{u}_j \in \Gamma_L(\mathbf{E}^*)$ con $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $C^m(L)$. La estimación de orden sobre $L$ muestra que $(\mathbf{F}(\mathbf{u}_j))$ es de Cauchy; definimos

$$\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) := \lim_j \mathbf{F}(\mathbf{u}_j).$$

El valor no depende de $L$ ni de la aproximación. En efecto, para dos elecciones $L_1, L_2$ tomamos un compacto $L_3$ que contenga a ambos en su interior. Las diferencias de los dos aproximantes convergen a cero en $C^m(L_3)$ y la estimación de orden sobre $L_3$ fuerza la igualdad de los límites. Así se obtiene una única extensión lineal continua

$$\widetilde{\mathbf{F}}\colon \Gamma_c^m(\mathbf{E}^*) \longrightarrow W$$

que coincide con $\mathbf{F}$ en $\mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*)$. Para cada compacto $K$, su restricción a $\Gamma_K^m(\mathbf{E}^*)$ es continua porque, al elegir $L$ como arriba, $\|\mathbf{u}\|_{C^m(L)} = \|\mathbf{u}\|_{C^m(K)}$.

Daremos algunos ejemplos de distribuciones.

**Ejemplo 10.2.9.** A continuación presentamos dos ejemplos fundamentales de distribuciones. Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave. Fijamos una métrica fibrada auxiliar $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ en $\mathbf{E}$ y denotamos por $\mathbf{h}_\mathbf{E}^*$ la métrica dual en $\mathbf{E}^*$.

(a) La delta de Dirac. Sea $p \in M$. Definimos

$$\delta_p\colon \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*) \longrightarrow \mathbf{E}_p^*, \qquad \delta_p(\boldsymbol{\varphi}) := \boldsymbol{\varphi}(p).$$

Sea $K \subseteq M$ compacto y $\varphi \in \mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*)$. Si $p \notin K$, entonces $\delta_p(\varphi) = 0$. Si $p \in K$, se tiene

$$|\delta_p(\varphi)|_{\mathbf{h}^*_{\mathbf{E}}(p)} = |\varphi(p)|_{\mathbf{h}^*_{\mathbf{E}}(p)} \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)|_{\mathbf{h}^*_{\mathbf{E}}(x)} \leq \|\varphi\|_{C^0(K,\mathbf{E}^*)}.$$

En ambos casos, existe $C_K = 1$ tal que

$$|\delta_p(\varphi)|_{\mathbf{h}^*_{\mathbf{E}}(p)} \leq C_K \|\varphi\|_{C^0(K,\mathbf{E}^*)}.$$

Por el inciso (d) del Teorema 10.2.5, $\delta_p$ es continua. Además, como la estimación se obtiene con $m = 0$ para todo compacto $K$, se concluye que $\delta_p$ es una distribución de orden 0.

(b) Secciones localmente integrables. Sea $\mathbf{f} \in L^1_{\text{loc}}(M, \mathbf{E})$. Definimos

$$\mathbf{T}_{\mathbf{f}}(\varphi) := \int_M \varphi(\mathbf{f})\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*).$$

Sea $K \subseteq M$ compacto y $\varphi \in \mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}^*)$. Entonces

$$|\mathbf{T}_{\mathbf{f}}(\varphi)| \leq \int_K |\varphi(x)(\mathbf{f}(x))|\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x) \leq \int_K |\varphi(x)|_{\mathbf{h}^*_{\mathbf{E}}(x)} |\mathbf{f}(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)}\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x).$$

De aquí

$$|\mathbf{T}_{\mathbf{f}}(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{C^0(K,\mathbf{E}^*)} \int_K |\mathbf{f}(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)}\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x).$$

Como $\mathbf{f} \in L^1_{\text{loc}}(M, \mathbf{E})$, la integral es finita; denotándola por $C_K$, obtenemos

$$|\mathbf{T}_{\mathbf{f}}(\varphi)| \leq C_K \|\varphi\|_{C^0(K,\mathbf{E}^*)}.$$

Por el inciso (d) del Teorema 10.2.5, $\mathbf{T}_{\mathbf{f}}$ es continua y, al depender sólo de la norma $C^0$, es una distribución de orden 0.

A pesar de que toda sección localmente integrable se puede ver como una distribución, nos podemos preguntar en qué caso una distribución se puede inducir a partir de una sección de este tipo. Estas distribuciones reciben un nombre especial por su importancia y lo dejamos plasmado en la siguiente definición:

**Definición 10.2.10.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave. Una distribución $\mathbf{T}\colon \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \longrightarrow \mathbb{K}$ se denomina *regular* si existe $\mathbf{f} \in L^1_{\text{loc}}(M, \mathbf{E})$ tal que

$$\mathbf{T}(\varphi) = \int_M \varphi(\mathbf{f})\, d\lambda_{\mathbf{g}} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*),$$

donde $\varphi(\mathbf{f})(x) = \varphi(x)(\mathbf{f}(x))$.

**Observación 10.2.11.** El mapeo lineal $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{T}_{\mathbf{f}}$ define un operador de $L^1_{\text{loc}}(M, \mathbf{E})$ en el espacio de distribuciones. Más adelante veremos que este operador es inyectivo. En consecuencia, es común identificar la sección $\mathbf{f}$ con la distribución que induce, y escribir simplemente $\mathbf{f}(\varphi)$ en lugar de $\mathbf{T}_{\mathbf{f}}(\varphi)$.

La aparición de $\mathbf{E}^*$ en el espacio de secciones de prueba se explica mediante el emparejamiento canónico entre

un haz y su dual:

**Observación 10.2.12.** La elección de definir una distribución como un operador lineal

$$\mathbf{T}\colon \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*) \longrightarrow W,$$

donde $W$ es un espacio vectorial normado de dimensión finita, está motivada por la existencia de un emparejamiento canónico entre un haz vectorial y su dual.
Si $\mathbf{f} \in \Gamma(\mathbf{E})$ es una sección suficientemente regular, entonces a cada $\varphi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*)$ podemos asociar naturalmente un escalar mediante la contracción fibra a fibra

$$\varphi(\mathbf{f})(x) = \varphi(x)(\mathbf{f}(x)).$$

Esto permite definir un operador lineal

$$\mathbf{T}_{\mathbf{f}}\colon \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*) \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad \mathbf{T}_{\mathbf{f}}(\varphi) = \int_M \varphi(x)(\mathbf{f}(x))\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x),$$

el cual generaliza el caso escalar clásico.
Por ejemplo, si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, entonces la expresión

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

define una distribución escalar. La formulación anterior no es sino la versión intrínseca de esta construcción en el contexto de haces vectoriales.

Es importante observar que esta construcción utiliza únicamente el emparejamiento canónico

$$\mathbf{E}_x^* \times \mathbf{E}_x \longrightarrow \mathbb{K},$$

el cual no requiere ninguna estructura adicional. En particular, si en lugar de considerar secciones de $\mathbf{E}^*$ se trabajara con secciones de $\mathbf{E}$, no existiría una forma natural de definir una expresión del tipo

$$\int_M \psi(x)\,\mathbf{f}(x)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x),$$

para $\psi, \mathbf{f} \in \Gamma(\mathbf{E})$ sin introducir una métrica fibrada que identifique $\mathbf{E}$ con $\mathbf{E}^*$.
Por esta razón, la formulación en términos de $\mathbf{E}^*$ es intrínseca y no depende de elecciones geométricas adicionales.

La extensión al caso $W$-valuado surge de manera natural al considerar familias finitas de distribuciones. Si $W \cong \mathbb{K}^r$, entonces un operador lineal

$$\mathbf{T}\colon \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*) \longrightarrow W$$

puede escribirse como

$$\mathbf{T}(\varphi) = \big(T_1(\varphi), \dots, T_r(\varphi)\big),$$

donde cada $T_i\colon \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*) \longrightarrow \mathbb{K}$ es una distribución escalar. En este sentido, las distribuciones con valores en $W$ no introducen nueva dificultad analítica, sino que permiten tratar simultáneamente un número finito de

distribuciones escalares.

Esta formulación será fundamental más adelante al considerar distribuciones sobre variedades producto y describir operadores lineales mediante núcleos distribucionales.

### 10.2.1 Operadores diferenciales parciales y distribuciones

Hemos visto que las distribuciones están definidas como funcionales lineales sobre el espacio de secciones de prueba $\mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*)$. En particular, si queremos extender la acción de operadores diferenciales a distribuciones, es necesario entender cómo dichos operadores interactúan con este espacio.

Sea

$$P\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{F})$$

un operador diferencial. Si $\mathbf{T}$ es una distribución, quisiéramos definir una nueva distribución $P\mathbf{T}$ que represente la acción de $P$ sobre $\mathbf{T}$. Por analogía con el caso clásico, es natural esperar que esta acción esté determinada por una identidad del tipo

$$(P\mathbf{T})(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{T}(\text{expresión que depende de } P \text{ y } \boldsymbol{\varphi}).$$

Dado que $\mathbf{T}$ sólo está definido sobre $\mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*)$, la expresión anterior sugiere que debemos asociar a cada $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M,\mathbf{F}^*)$ una sección de $\mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*)$. Es decir, necesitamos construir un operador

$$P'\colon \mathcal{D}(M,\mathbf{F}^*) \longrightarrow \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*),$$

que permita transferir la acción de $P$ al nivel de las secciones de prueba.

A diferencia del caso puntual, la transferencia de operadores diferenciales requiere de la estructura integral de la variedad para poder realizar integración por partes. Esto sugiere que el operador $P'$ debe caracterizarse mediante una identidad integral que involucre la evaluación natural entre los haces y sus duales.

**Definición 10.2.13.** (Transpuesto formal) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos. Si $P \in \mathbf{PDO}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, su *transpuesto formal* es un operador

$$P'\colon \Gamma(\mathbf{F}^*) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}^*)$$

que satisface

$$\int_M \boldsymbol{\psi}(P\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M (P'\boldsymbol{\psi})(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} \tag{10.1}$$

para todo $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$ y toda $\boldsymbol{\psi} \in \Gamma_c(\mathbf{F}^*)$. El emparejamiento de esta identidad es complejo-bilineal. En el caso real se usa la misma definición, omitiendo todas las conjugaciones que aparecen a continuación.

**Proposición 10.2.14.** (Construcción intrínseca del transpuesto formal) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos. Sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. El transpuesto formal existe, es único y pertenece a $\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)$. Para cualesquiera métricas hermitianas auxiliares $\mathbf{h}_{\mathbf{E}},\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$, lineales en la primera variable, se tiene

$$P' = \mathcal{R}_{\mathbf{E}} \circ \overline{P_h^*} \circ \mathcal{R}_{\mathbf{F}}^{-1}. \tag{10.2}$$

Los dominios y codominios de la composición se exhiben en el diagrama

$$\mathbf{F}^* \xrightarrow{\mathcal{R}_{\mathbf{F}}^{-1}} \overline{\mathbf{F}} \xrightarrow{\overline{P_h^*}} \overline{\mathbf{E}} \xrightarrow{\mathcal{R}_{\mathbf{E}}} \mathbf{E}^*.$$

En particular, el miembro derecho de (10.2) no depende de las métricas fibradas auxiliares.

*Demostración.* Los isomorfismos de Riesz $\mathcal{R}_{\mathbf{F}}^{-1}\colon \mathbf{F}^* \to \overline{\mathbf{F}}$ y $\mathcal{R}_{\mathbf{E}}\colon \overline{\mathbf{E}} \to \mathbf{E}^*$ son complejo-lineales y de orden cero. Por la teoría de conjugación de operadores, $\overline{P_h^*}\colon \Gamma(\overline{\mathbf{F}}) \to \Gamma(\overline{\mathbf{E}})$ es complejo-lineal y tiene orden a lo sumo $m$. Por composición, el miembro derecho de (10.2) es un operador complejo-lineal de orden a lo sumo $m$.
Sean $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$ y $\psi \in \Gamma_c(\mathbf{F}^*)$, y escribamos

$$\mathcal{R}_{\mathbf{F}}^{-1}\psi = \overline{\mathbf{v}}, \qquad \mathbf{v} \in \Gamma_c(\mathbf{F}).$$

Por la definición $\mathcal{R}_{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{v}})(\mathbf{w}) = \mathbf{h}_{\mathbf{F}}(\mathbf{w},\mathbf{v})$ y por la identidad del adjunto hermitiano,

$$\begin{aligned}\int_M \psi(P\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} &= \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{F}}(P\mathbf{u},\mathbf{v})\, d\lambda_{\mathbf{g}} \\ &= \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, P_h^*\mathbf{v})\, d\lambda_{\mathbf{g}} \\ &= \int_M \mathcal{R}_{\mathbf{E}}\left(\overline{P_h^*\mathbf{v}}\right)(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} \\ &= \int_M \left(\mathcal{R}_{\mathbf{E}} \circ \overline{P_h^*} \circ \mathcal{R}_{\mathbf{F}}^{-1}\right)(\psi)(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.\end{aligned}$$

Esto prueba (10.1).
Para la unicidad, sean $S_1, S_2 \in \mathbf{PDO}(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)$ dos operadores que satisfacen esa identidad. Fijemos $\psi \in \Gamma_c(\mathbf{F}^*)$ y pongamos $\eta = (S_1 - S_2)\psi \in \Gamma_c(\mathbf{E}^*)$. Si $\mathcal{R}_{\mathbf{E}}^{-1}\eta = \overline{\mathbf{w}}$, entonces $\mathbf{w} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$ y, al tomar $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, obtenemos

$$0 = \int_M \eta(\mathbf{w})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{w},\mathbf{w})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{w} = 0$ y $S_1\psi = S_2\psi$. Para una sección $\psi$ no compactamente soportada, se elige una función de corte igual a uno cerca de un punto dado y se usa la localidad de $S_1, S_2$. Así, $S_1 = S_2$ en todas las secciones. Como cualquier elección de métricas auxiliares produce un operador que satisface la misma identidad integral, la unicidad demuestra la independencia de esas métricas. □

**Corolario 10.2.15.** (Fórmula local del transpuesto formal) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. En una carta $\varphi\colon U \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, con funciones coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$, sean $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ y $(\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_s)$ marcos locales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, y sean $(\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^r)$ y $(\mathbf{f}^1,\dots,\mathbf{f}^s)$ sus marcos duales. Pongamos

$$D_\varphi^\alpha a := \left[D^\alpha (a \circ \varphi^{-1})\right] \circ \varphi.$$

Si

$$P\left(\sum_{i=1}^r u^i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^r \sum_{|\alpha|\le m} a_{\alpha i}^j D_\varphi^\alpha u^i\right) \mathbf{f}_j,$$

Entonces, para $\boldsymbol{\psi} = \sum_{j=1}^{s} \psi_j \mathbf{f}^j$,

$$P'\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \sum_{i=1}^{r} \left[ \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D_{\varphi}^{\alpha} \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})}\, a_{\alpha i}^{j} \psi_j \right) \right] \mathbf{e}^i, \tag{10.3}$$

donde $g_{ab} = \mathbf{g}(\partial_a, \partial_b)$.

*Demostración.* Sea $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r} u^i \mathbf{e}_i \in \Gamma_c(\mathbf{E}|_U)$ y sea $\boldsymbol{\psi} = \sum_{j=1}^{s} \psi_j \mathbf{f}^j \in \Gamma(\mathbf{F}^*|_U)$. Por la fórmula local de $P$ y de la medida riemanniana,

$$\int_U \boldsymbol{\psi}(P\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha| \le m} \int_{\Omega} \left( a_{\alpha i}^{j} \circ \varphi^{-1} \right) \left( \psi_j \circ \varphi^{-1} \right) D^{\alpha} \left( u^i \circ \varphi^{-1} \right) \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})} \circ \varphi^{-1} \right) d\lambda_n.$$

La función $u^i \circ \varphi^{-1}$ tiene soporte compacto en $\Omega$. Integrando $|\alpha|$ veces por partes, sin términos de frontera, el sumando correspondiente a $i, j, \alpha$ es

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left( u^i \circ \varphi^{-1} \right) D^{\alpha} \left[ \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})}\, a_{\alpha i}^{j} \psi_j \right) \circ \varphi^{-1} \right] d\lambda_n.$$

Sumando todos los términos e insertando $\left(\sqrt{\det(\mathbf{g})}\right)^{-1} \sqrt{\det(\mathbf{g})}$, se obtiene

$$\int_U \boldsymbol{\psi}(P\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_U (P'\boldsymbol{\psi})(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

donde $P'\boldsymbol{\psi}$ es precisamente el miembro derecho de (10.3). La unicidad del transpuesto formal identifica esta expresión local con el operador global ya construido. □

**Proposición 10.2.16.** (Reglas del transpuesto formal) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \to M$ haces vectoriales complejos. Sean $P \in \mathbf{PDO}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, $Q \in \mathbf{PDO}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ y $R \in \mathbf{PDO}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Entonces:

(a) para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$(P + \lambda R)' = P' + \lambda R';$$

(b)
$$(Q \circ P)' = P' \circ Q';$$

(c) si $U \subseteq M$ es abierto y $P_U$ denota la restricción local de $P$, entonces
$$(P_U)' = (P')_U;$$

(d) si $P$ tiene orden cero, entonces
$$(P'\boldsymbol{\psi})(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\psi}(P\mathbf{u})$$

puntualmente; en particular, $(M_f)' = M_f$;

(e) si

$$\kappa_{\mathbf{E}} \colon \overline{\mathbf{E}^*} \longrightarrow (\overline{\mathbf{E}})^*, \qquad \kappa_{\mathbf{E}}(\overline{\eta})(\overline{v}) := \overline{\eta(v)},$$

y

$$\kappa_{\mathbf{F}} \colon \overline{\mathbf{F}^*} \longrightarrow (\overline{\mathbf{F}})^*, \qquad \kappa_{\mathbf{F}}(\overline{\psi})(\overline{w}) := \overline{\psi(w)},$$

entonces

$$(\overline{P})' = \kappa_{\mathbf{E}} \circ \overline{P'} \circ \kappa_{\mathbf{F}}^{-1}. \tag{10.4}$$

*Demostración.* La primera identidad resulta de la bilinealidad de (10.1); a diferencia del adjunto hermitiano, aquí no aparece $\overline{\lambda}$. Para $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$ y $\boldsymbol{\theta} \in \Gamma_c(\mathbf{G}^*)$,

$$\int_M \boldsymbol{\theta}(QP\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M (Q'\boldsymbol{\theta})(P\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M (P'Q'\boldsymbol{\theta})(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

lo cual prueba la segunda identidad por unicidad. La misma identidad integral, aplicada enteramente dentro de $U$, prueba la tercera. La cuarta es la definición del transpuesto algebraico fibra a fibra.
El mapeo $\kappa_{\mathbf{E}}$ es un isomorfismo complejo-lineal. Para $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$ y $\eta \in \Gamma_c(\mathbf{F}^*)$ se tiene

$$\kappa_{\mathbf{F}}(\overline{\eta})(\overline{P}\,\overline{\mathbf{u}}) = \overline{\eta(P\mathbf{u})}, \qquad \kappa_{\mathbf{E}}(\overline{P'\eta})(\overline{\mathbf{u}}) = \overline{(P'\eta)(\mathbf{u})}.$$

Conjugando la identidad integral de $P'$ se obtiene la identidad integral para el miembro derecho de (10.4); la unicidad del transpuesto formal concluye. □

La construcción anterior permite extender la acción de operadores diferenciales al nivel de distribuciones. Si $P \colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{F})$ es un operador diferencial y $P' \colon \Gamma(\mathbf{F}^*) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}^*)$ denota su transpuesto formal respecto del emparejamiento bilineal de evaluación, entonces $P'$ transforma secciones de prueba de $\mathbf{F}^*$ en secciones de prueba de $\mathbf{E}^*$. Esto permite definir la acción de $P$ sobre una distribución mediante dualidad.

**Lema 10.2.17.** (Estimación $C^k$ para operadores diferenciales) Sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves de rangos $r$ y $s$, respectivamente, sobre una variedad suave $M$ con o sin frontera, y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Entonces, para todo compacto $K \subseteq M$ y todo $k \in \mathbb{N}_0$, existe una constante $C_{K,k} > 0$ tal que

$$\|P\mathbf{u}\|_{C^k(K,\mathbf{F})} \leq C_{K,k} \|\mathbf{u}\|_{C^{k+m}(K,\mathbf{E})}, \qquad \mathbf{u} \in \Gamma_K^{k+m}(\mathbf{E}).$$

En particular, $P$ induce un mapeo continuo

$$P \colon \mathcal{D}_K(M, \mathbf{E}) \longrightarrow \mathcal{D}_K(M, \mathbf{F}).$$

*Demostración.* Sea $K \subseteq M$ compacto. Tomemos una familia finita de cartas suaves $(U_i, \varphi_i)$, con $i \in \{1, \ldots, N\}$, tales que cada $U_i$ es una bola coordenada regular, existen trivializaciones locales

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E},i} \colon \mathbf{E} \restriction_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{K}^r, \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F},i} \colon \mathbf{F} \restriction_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{K}^s,$$

y se cumple $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_i$.

Consideremos una partición de la unidad $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ subordinada a la cubierta $\{U_i\}_{i=1}^N$ de $K$, con suma uno en una vecindad de $K$, y definamos

$$K_i := K \cap \operatorname{supp}(\psi_i).$$

Como $\operatorname{supp}(\psi_i)$ es cerrado en $M$ y está contenido en $U_i$, cada $K_i$ es un compacto contenido en $U_i$. Omitimos los índices para los cuales $K_i = \varnothing$ y renumeramos los restantes. Si $\mathbf{u} \in \Gamma_K^{k+m}(\mathbf{E})$, entonces $\operatorname{supp}(\mathbf{u}) \subseteq K$ y

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \mathbf{u}.$$

Además, como $\operatorname{supp}(\psi_i) \subseteq U_i$, se tiene

$$\operatorname{supp}(\psi_i \mathbf{u}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{u}) \cap \operatorname{supp}(\psi_i) \subseteq K \cap \operatorname{supp}(\psi_i) = K_i.$$

Fijemos $i \in \{1, \ldots, N\}$ y escribamos $\mathbf{v}_i := \psi_i \mathbf{u}$. Definimos su representación local en la trivialización $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E},i}$ por

$$\widetilde{v_i} := \pi_2 \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E},i} \circ (\mathbf{v}_i \restriction_{U_i}) \colon U_i \longrightarrow \mathbb{K}^r,$$

y análogamente definimos la representación local de $P\mathbf{v}_i$ en la trivialización $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F},i}$ por

$$\widetilde{P\mathbf{v}_i} := \pi_2 \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F},i} \circ ((P\mathbf{v}_i) \restriction_{U_i}) \colon U_i \longrightarrow \mathbb{K}^s.$$

Por el Teorema 8.1.34, existen funciones suaves

$$a_{\alpha,i} \colon U_i \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s), \qquad |\alpha| \leq m,$$

tales que

$$\widetilde{P\mathbf{v}_i} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha,i} \, D^\alpha \widetilde{v_i}.$$

Sea $\beta$ un multiíndice con $|\beta| \leq k$. Aplicaremos la regla de Leibniz al mapeo bilineal

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^s, \qquad (A, w) \longmapsto A(w).$$

Para que la notación sea precisa, si $A \colon U_i \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s)$ y escribimos $A(x) = (A_a^b(x))$, con $1 \leq a \leq r$ y $1 \leq b \leq s$, entonces definimos $D^\gamma A$ componente a componente, es decir,

$$D^\gamma A(x) := \big(D^\gamma A_a^b(x)\big).$$

Con esta convención, $D^\gamma A(x)$ sigue siendo un elemento de $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s)$.

Entonces, para cada $|\beta| \leq k$, se tiene

$$D^\beta(\widetilde{P\mathbf{v}_i}) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \big(D^\gamma a_{\alpha,i}\big) \big(D^{\alpha+\beta-\gamma} \widetilde{v_i}\big).$$

Esta identidad se obtiene aplicando la regla de Leibniz componente a componente a la expresión matricial anterior.

Como $K_i$ es compacto y los coeficientes $a_{\alpha,i}$ son suaves, las funciones $D^\gamma a_{\alpha,i}$ están acotadas sobre $K_i$ para todo $|\gamma| \le k$. Además, si $|\alpha| \le m$, $\gamma \le \beta$ y $|\beta| \le k$, entonces $|\alpha+\beta-\gamma| \le m+k$. Por lo tanto, existe una constante $A_i > 0$ tal que

$$\max_{|\beta|\le k} \|D^\beta(\widetilde{P\mathbf{v}_i})\|_{C^0(K_i,\mathbb{K}^s)} \le A_i \max_{|\eta|\le k+m} \|D^\eta \widetilde{v}_i\|_{C^0(K_i,\mathbb{K}^r)}.$$

Ahora relacionemos esta estimación con las normas $C^j$. Sobre $U_i$, escribimos $\varphi_i = (x_i^1,\dots,x_i^n)$ y denotamos por $\partial_{x_i^1},\dots,\partial_{x_i^n}$ los campos coordenados. Definimos una conexión $\widetilde{\nabla}^{TM,i}$ en $TU_i$ declarando que estos campos coordenados son paralelos, es decir,

$$\widetilde{\nabla}^{TM,i}_{\partial_{x_i^\ell}} \partial_{x_i^a} = 0, \qquad a,\ell \in \{1,\dots,n\}.$$

Asimismo, si $\mathbf{e}_1^i,\dots,\mathbf{e}_r^i$ es el marco local de $\mathbf{E}\restriction_{U_i}$ inducido por la trivialización $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{E},i}$, definimos una conexión $\widetilde{\nabla}^{\mathbf{E},i}$ en $\mathbf{E}\restriction_{U_i}$ declarando que dicho marco es paralelo:

$$\widetilde{\nabla}^{\mathbf{E},i}_{\partial_{x_i^\ell}} \mathbf{e}_a^i = 0, \qquad a \in \{1,\dots,r\},\ \ell \in \{1,\dots,n\}.$$

Tomamos también la métrica riemanniana $\widetilde{\mathbf{g}}_i$ que hace ortonormal al marco coordenado y la métrica fibrada $\widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{E},i}$ que hace ortonormal al marco $\mathbf{e}_1^i,\dots,\mathbf{e}_r^i$.

Con estas elecciones, si $\mathbf{v}_i = \sum_{a=1}^r v_i^a \mathbf{e}_a^i$ en $U_i$, entonces $\widetilde{v}_i = (v_i^1,\dots,v_i^r)$ y las componentes de las derivadas covariantes iteradas de $\mathbf{v}_i$, calculadas con las conexiones $\widetilde{\nabla}^{TM,i}$ y $\widetilde{\nabla}^{\mathbf{E},i}$, son precisamente las derivadas parciales de las componentes de $\widetilde{v}_i$. Por consiguiente, para cada $j \le k+m$ existe una constante $B_{i,j} > 0$ tal que

$$\max_{|\eta|\le j} \|D^\eta \widetilde{v}_i\|_{C^0(K_i,\mathbb{K}^r)} \le B_{i,j} \|\mathbf{v}_i\|_{\widetilde{C^j}(K_i,\mathbf{E})}.$$

Aquí $\|\cdot\|_{\widetilde{C^j}(K_i,\mathbf{E})}$ denota la norma $C^j$ en secciones de $\mathbf{E}$ construida con las elecciones $\widetilde{\mathbf{g}}_i$, $\widetilde{\nabla}^{TM,i}$, $\widetilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{E},i}$ y $\widetilde{\nabla}^{\mathbf{E},i}$. Por el Teorema 10.1.2, aplicado al compacto $K_i$ y al haz $\mathbf{E}$, las normas $\|\cdot\|_{\widetilde{C^{k+m}}(K_i,\mathbf{E})}$ y $\|\cdot\|_{C^{k+m}(K_i,\mathbf{E})}$ son equivalentes. En particular, existe una constante $C_i > 0$ tal que

$$\|\mathbf{v}_i\|_{\widetilde{C^{k+m}}(K_i,\mathbf{E})} \le C_i \|\mathbf{v}_i\|_{C^{k+m}(K_i,\mathbf{E})}.$$

Como $\mathbf{v}_i = \psi_i \mathbf{u}$, la regla de Leibniz para derivadas covariantes implica que existe una constante $L_i > 0$ tal que

$$\|\mathbf{v}_i\|_{C^{k+m}(K_i,\mathbf{E})} = \|\psi_i \mathbf{u}\|_{C^{k+m}(K_i,\mathbf{E})} \le L_i \|\mathbf{u}\|_{C^{k+m}(K,\mathbf{E})}.$$

Aplicamos ahora el mismo razonamiento al haz $\mathbf{F}$. Si $\mathbf{f}_1^i,\dots,\mathbf{f}_s^i$ es el marco local de $\mathbf{F}\restriction_{U_i}$ inducido por $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{F},i}$, tomamos la conexión $\widetilde{\nabla}^{\mathbf{F},i}$ determinada por

$$\widetilde{\nabla}^{\mathbf{F},i}_{\partial_{x_i^\ell}} \mathbf{f}_b^i = 0, \qquad b \in \{1,\dots,s\},\ \ell \in \{1,\dots,n\},$$

y la métrica fibrada $\widetilde{h}_{\mathbf{F},i}$ que hace ortonormal dicho marco. Entonces, usando nuevamente el Teorema 10.1.2,

existe una constante $D_i > 0$ tal que

$$\|P\mathbf{v}_i\|_{C^k(K_i,\mathbf{F})} \leq D_i \max_{|\beta|\leq k} \|D^\beta(\widetilde{P\mathbf{v}_i})\|_{C^0(K_i,\mathbb{K}^s)}.$$

Combinando las estimaciones anteriores, obtenemos

$$\|P\mathbf{v}_i\|_{C^k(K_i,\mathbf{F})} \leq D_i A_i B_{i,k+m} C_i L_i \|\mathbf{u}\|_{C^{k+m}(K,\mathbf{E})}.$$

Así, para cada $i \in \{1,\ldots,N\}$ existe una constante $C_i' > 0$ tal que

$$\|P(\psi_i\mathbf{u})\|_{C^k(K_i,\mathbf{F})} \leq C_i' \|\mathbf{u}\|_{C^{k+m}(K,\mathbf{E})}.$$

Como $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \psi_i\mathbf{u}$ y $P$ es lineal, se tiene $P\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N P(\psi_i\mathbf{u})$. Además, la localidad de $P$ implica que $\operatorname{supp}(P(\psi_i\mathbf{u})) \subseteq \operatorname{supp}(\psi_i\mathbf{u}) \subseteq K_i$. Por lo tanto, $\|P(\psi_i\mathbf{u})\|_{C^k(K,\mathbf{F})} = \|P(\psi_i\mathbf{u})\|_{C^k(K_i,\mathbf{F})}$. Usando la desigualdad del triángulo para la norma $C^k(K,\mathbf{F})$, obtenemos

$$\|P\mathbf{u}\|_{C^k(K,\mathbf{F})} \leq \sum_{i=1}^N \|P(\psi_i\mathbf{u})\|_{C^k(K,\mathbf{F})} = \sum_{i=1}^N \|P(\psi_i\mathbf{u})\|_{C^k(K_i,\mathbf{F})}.$$

De las estimaciones anteriores se sigue que

$$\|P\mathbf{u}\|_{C^k(K,\mathbf{F})} \leq \left(\sum_{i=1}^N C_i'\right) \|\mathbf{u}\|_{C^{k+m}(K,\mathbf{E})}.$$

Definiendo $C_{K,k} := \sum_{i=1}^N C_i'$, se obtiene la estimación deseada.

La localidad de $P$ nos garantiza que $\operatorname{supp}(P\mathbf{u}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{u})$, por lo que el mapeo está bien definido y además lo anterior nos dice que es continuo. □

**Proposición 10.2.18.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves, sea $W$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Entonces $P$ induce un operador lineal continuo

$$P\colon \mathcal{D}'(M,\mathbf{E},W) \longrightarrow \mathcal{D}'(M,\mathbf{F},W)$$

dado por

$$(P\mathbf{T})(\boldsymbol{\varphi}) := \mathbf{T}(P'\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M,\mathbf{F}^*),$$

donde $P'\colon \Gamma(\mathbf{F}^*) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}^*)$ es el transpuesto formal bilineal. La continuidad se entiende respecto a las topologías débil-$*$ de ambos espacios de distribuciones.

*Demostración.* Primero veamos que la definición tiene sentido. Por la Proposición 10.2.14, se tiene $P' \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)$. Por lo tanto, si $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M,\mathbf{F}^*)$, entonces $P'\boldsymbol{\varphi}$ es una sección suave de $\mathbf{E}^*$.
Además, como los operadores diferenciales son locales, se tiene

$$\operatorname{supp}(P'\boldsymbol{\varphi}) \subseteq \operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}).$$

En particular, si $\varphi$ tiene soporte compacto, entonces $P'\varphi$ también tiene soporte compacto. Así, $P'\varphi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*)$, y por lo tanto la expresión $\mathbf{T}(P'\varphi)$ está bien definida.
Definimos $(P\mathbf{T})(\varphi) := \mathbf{T}(P'\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{F}^*)$. La linealidad de $P\mathbf{T}$ se sigue de la linealidad de $\mathbf{T}$ y de $P'$.
Probemos ahora que $P\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M,\mathbf{F},W)$. Sea $K \subseteq M$ compacto. Si $\varphi \in \mathcal{D}_K(M,\mathbf{F}^*)$, entonces, por la localidad de $P'$, se tiene $P'\varphi \in \mathcal{D}_K(M,\mathbf{E}^*)$. Como $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M,\mathbf{E},W)$, por el Teorema 10.2.5, existen $\ell \in \mathbb{N}_0$ y $c_K > 0$ tales que

$$|\mathbf{T}(\psi)|_W \leq c_K \|\psi\|_{C^\ell(K,\mathbf{E}^*)} \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}_K(M,\mathbf{E}^*).$$

Aplicando esta estimación a $\psi = P'\varphi$, obtenemos

$$|(P\mathbf{T})(\varphi)|_W = |\mathbf{T}(P'\varphi)|_W \leq c_K \|P'\varphi\|_{C^\ell(K,\mathbf{E}^*)}.$$

Como $P'$ es un operador diferencial de orden $m$, por el Lema 10.2.17, existe una constante $C_{K,\ell} > 0$ tal que

$$\|P'\varphi\|_{C^\ell(K,\mathbf{E}^*)} \leq C_{K,\ell} \|\varphi\|_{C^{\ell+m}(K,\mathbf{F}^*)}.$$

Por lo tanto,

$$|(P\mathbf{T})(\varphi)|_W \leq c_K C_{K,\ell} \|\varphi\|_{C^{\ell+m}(K,\mathbf{F}^*)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(M,\mathbf{F}^*).$$

Nuevamente por el Teorema 10.2.5, aplicado ahora al haz $\mathbf{F}$, concluimos que $P\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M,\mathbf{F},W)$.
Veamos ahora que el operador inducido por $P$ es lineal. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathcal{D}'(M,\mathbf{E},W)$, entonces, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{F}^*)$,

$$P(\lambda\mathbf{T}_1 + \mu\mathbf{T}_2)(\varphi) = (\lambda\mathbf{T}_1 + \mu\mathbf{T}_2)(P'\varphi) = \lambda\mathbf{T}_1(P'\varphi) + \mu\mathbf{T}_2(P'\varphi).$$

Por lo tanto, $P(\lambda\mathbf{T}_1 + \mu\mathbf{T}_2) = \lambda P\mathbf{T}_1 + \mu P\mathbf{T}_2$.
Finalmente probemos la continuidad del operador inducido respecto a las topologías débil-$*$. Sea $(\mathbf{T}_\alpha)_\alpha$ una red en $\mathcal{D}'(M,\mathbf{E},W)$ tal que $\mathbf{T}_\alpha \to \mathbf{T}$ en $\mathcal{D}'(M,\mathbf{E},W)$. Por la Observación 10.2.2, esto significa que

$$\mathbf{T}_\alpha(\psi) \longrightarrow \mathbf{T}(\psi) \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*).$$

Sea ahora $\varphi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{F}^*)$. Como ya vimos, $P'\varphi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*)$. Por lo tanto,

$$(P\mathbf{T}_\alpha)(\varphi) = \mathbf{T}_\alpha(P'\varphi) \longrightarrow \mathbf{T}(P'\varphi) = (P\mathbf{T})(\varphi).$$

Como esto vale para toda $\varphi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{F}^*)$, nuevamente por la Observación 10.2.2, se concluye que $P\mathbf{T}_\alpha \to P\mathbf{T}$ en $\mathcal{D}'(M,\mathbf{F},W)$. Así, el operador inducido por $P$ es continuo. □

**Observación 10.2.19.** Si $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$ es una sección suave, entonces $P\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{F})$ y la distribución regular asociada a $P\mathbf{u}$ coincide con la distribución obtenida al aplicar $P$ a la distribución regular asociada a $\mathbf{u}$. Si $\mathbf{T}_\mathbf{u}$ está dada por

$$\mathbf{T}_\mathbf{u}(\psi) := \int_M \psi(\mathbf{u})\, d\lambda_\mathbf{g}, \qquad \psi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*),$$

entonces, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{F}^*)$,

$$(P\mathbf{T}_\mathbf{u})(\varphi) = \mathbf{T}_\mathbf{u}(P'\varphi) = \int_M (P'\varphi)(\mathbf{u})\, d\lambda_\mathbf{g}.$$

Por la definición del transpuesto formal bilineal,

$$\int_M (P'\varphi)(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \varphi(P\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por lo tanto, $P\mathbf{T}_{\mathbf{u}} = \mathbf{T}_{P\mathbf{u}}$.
En particular, si $P$ es de orden 0, entonces $P$ corresponde a una sección suave de $\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $P'$ corresponde al transpuesto puntual $\mathbf{F}^* \to \mathbf{E}^*$. En el caso especial en que $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ y $P$ es la multiplicación por una función $f \in C^\infty(M)$, se obtiene

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi).$$

La proposición anterior muestra que la acción de un operador diferencial sobre distribuciones queda determinada por la acción de su transpuesto formal bilineal sobre las secciones de prueba. Esta construcción es suficiente para definir derivadas distribucionales y, más generalmente, para trasladar operadores diferenciales al contexto de distribuciones. A continuación daremos algunos ejemplos que ilustran lo que tenemos hasta el momento.

**Ejemplo 10.2.20.** (Operadores diferenciales y sus extensiones distribucionales en haces) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves y sea $W$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita.
Si $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, el operador inducido sobre distribuciones está definido por

$$(P\mathbf{T})(\varphi) := \mathbf{T}(P'\varphi), \qquad \mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M,\mathbf{E},W),\ \varphi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{F}^*),$$

donde $P'\colon \Gamma(\mathbf{F}^*) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}^*)$ es el transpuesto formal bilineal. Esta definición es válida para distribuciones arbitrarias con valores en $W$.
Para visualizar las fórmulas integrales, consideraremos también el caso particular $W = \mathbb{K}$. Si $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$, denotamos por $\mathbf{T}_{\mathbf{u}}$ la distribución regular inducida por $\mathbf{u}$, dada por

$$\mathbf{T}_{\mathbf{u}}(\psi) := \int_M \psi(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \psi \in \mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*).$$

(a) Sea $\nabla^{\mathbf{E}}\colon \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes \mathbf{E})$ una conexión. El operador inducido es

$$\nabla^{\mathbf{E}}\colon \mathcal{D}'(M,\mathbf{E},W) \longrightarrow \mathcal{D}'(M,T^*M \otimes \mathbf{E},W),$$

y está dado por

$$(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{T})(\varphi) = \mathbf{T}\big((\nabla^{\mathbf{E}})'\varphi\big), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(M,TM \otimes \mathbf{E}^*).$$

En el caso regular, es decir, cuando $W = \mathbb{K}$ y $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}$, se tiene

$$(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{T}_{\mathbf{u}})(\varphi) = \int_M \varphi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Si además $\mathbf{E}$ está provisto de una métrica fibrada, en el caso real, o hermitiana, en el complejo, el isomorfismo de Riesz del haz $\mathbf{H} := T^*M \otimes \mathbf{E}$ determina de manera única $\varphi^\sharp \in \Gamma_c(\mathbf{H})$ por

$$\overline{\varphi^\sharp} = \mathcal{R}_{\mathbf{H}}^{-1}\varphi, \qquad \varphi(w) = \mathbf{h}_{\mathbf{H}}(w,\varphi^\sharp).$$

En el caso complejo, $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ es antilineal; el mapeo $\mathcal{R}_{\mathbf{H}}^{-1} : \mathbf{H}^* \to \overline{\mathbf{H}}$ es complejo–lineal. Entonces

$$(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{T}_{\mathbf{u}})(\varphi) = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{H}}(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}, \varphi^\sharp)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por la definición del adjunto hermitiano formal,

$$\int_M \mathbf{h}_{\mathbf{H}}(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}, \varphi^\sharp)\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, (\nabla^{\mathbf{E}})_h^* \varphi^\sharp)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Así, en presencia de métricas fibradas, la misma identidad puede leerse como una fórmula de integración por partes.

(b) Para la derivada covariante de orden $k$,

$$\nabla^k : \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(T^{(0,k)}(TM) \otimes \mathbf{E}),$$

el operador inducido está dado por

$$(\nabla^k \mathbf{T})(\varphi) = \mathbf{T}\big((\nabla^k)'\varphi\big), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(M, T^{(k,0)}(TM) \otimes \mathbf{E}^*).$$

Si $W = \mathbb{K}$ y $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}$, entonces

$$(\nabla^k \mathbf{T}_{\mathbf{u}})(\varphi) = \int_M \varphi(\nabla^k \mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

En presencia de una métrica fibrada real o hermitiana, ponemos $\mathbf{H}_k := T^{(0,k)}(TM) \otimes \mathbf{E}$ y definimos $\varphi^\sharp$ por $\overline{\varphi^\sharp} = \mathcal{R}_{\mathbf{H}_k}^{-1}\varphi$. Se obtiene

$$(\nabla^k \mathbf{T}_{\mathbf{u}})(\varphi) = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{H}_k}(\nabla^k \mathbf{u}, \varphi^\sharp)\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, (\nabla^k)_h^* \varphi^\sharp)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

(c) Sea $\operatorname{div} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ el operador divergencia asociado a $\mathbf{g}$. Su extensión distribucional está dada por

$$(\operatorname{div}\mathbf{T})(\varphi) = \mathbf{T}\big((\operatorname{div})'\varphi\big), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(M).$$

En este caso, $(\operatorname{div})'\varphi = -d\varphi$. Por lo tanto, si $W = \mathbb{K}$ y $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$ para un campo vectorial suave $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$(\operatorname{div}\mathbf{T}_{\mathbf{X}})(\varphi) = \int_M \varphi \operatorname{div}\mathbf{X}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Usando la métrica riemanniana,

$$\int_M \varphi \operatorname{div}\mathbf{X}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M d\varphi(\mathbf{X})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M \langle \operatorname{grad}\varphi, \mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Así, el transpuesto formal bilineal de la divergencia se escribe como $-d$, mientras que la métrica permite identificarlo con el negativo del gradiente.

(d) Supongamos que $\mathbf{E}$ está equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, real o hermitiana según el campo escalar, y que $\nabla^{\mathbf{E}}$ es compatible con ella. En $\nabla^2$ usamos la conexión tensorial inducida por $\nabla^{\mathbf{E}}$ y por la conexión de Levi–Civita de $\mathbf{g}$. Sea $\Delta_B : \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E})$ el Laplaciano de Bochner asociado a $\mathbf{g}$ y a $\nabla^{\mathbf{E}}$, de-

finido, con la convención de signo positivo, por $\Delta_B = (\nabla^{\mathbf{E}})_h^* \nabla^{\mathbf{E}} = -\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2)$. Su extensión distribucional está dada por

$$(\Delta_B \mathbf{T})(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{T}\big((\Delta_B)'\boldsymbol{\varphi}\big), \qquad \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*).$$

Si $W = \mathbb{K}$ y $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}$, entonces

$$(\Delta_B \mathbf{T}_{\mathbf{u}})(\boldsymbol{\varphi}) = \int_M \boldsymbol{\varphi}(\Delta_B \mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Con esta métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, definimos la sección de prueba $\boldsymbol{\varphi}^\sharp \in \Gamma_c(\mathbf{E})$ mediante $\overline{\boldsymbol{\varphi}^\sharp} := \mathcal{R}_{\mathbf{E}}^{-1}\boldsymbol{\varphi}$. Entonces

$$(\Delta_B \mathbf{T}_{\mathbf{u}})(\boldsymbol{\varphi}) = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\Delta_B \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}^\sharp)\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, (\Delta_B)_h^* \boldsymbol{\varphi}^\sharp)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $\Delta_B = (\nabla^{\mathbf{E}})_h^* \nabla^{\mathbf{E}}$, es formalmente autoadjunto y se tiene $(\Delta_B)_h^* = \Delta_B$.

(e) *Digresión lorentziana, fuera del convenio riemanniano vigente en el resto del capítulo.* Si $(M, \mathbf{g})$ es una variedad lorentziana cerrada, el operador de D'Alembert

$$\Box\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \qquad \Box := \operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2),$$

también induce un operador sobre distribuciones

$$\Box\colon \mathcal{D}'(M, W) \longrightarrow \mathcal{D}'(M, W),$$

definido por

$$(\Box \mathbf{T})(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{T}(\Box'\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M).$$

En el caso regular escalar, es decir, si $W = \mathbb{K}$ y $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}$, se obtiene

$$(\Box \mathbf{T}_{\mathbf{u}})(\boldsymbol{\varphi}) = \int_M \boldsymbol{\varphi}\, \Box \mathbf{u}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

En este caso, $\lambda_{\mathbf{g}}$ denota la medida de Borel positiva asociada a la densidad lorentziana: en coordenadas, $d\lambda_{\mathbf{g}} = |\det(\mathbf{g})|^{1/2}\, dx$. No se está afirmando que $\mathbf{g}$ defina una distancia riemanniana ni se usa aquí ninguna de las estimaciones positivas propias de la geometría riemanniana.

(f) Finalmente, si $P \in \mathbf{PDO}^{(0)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ corresponde a una sección suave de $\operatorname{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, entonces

$$(P\mathbf{T})(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{T}(P'\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{F}^*).$$

Si $W = \mathbb{K}$ y $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}$, entonces

$$(P\mathbf{T}_{\mathbf{u}})(\boldsymbol{\varphi}) = \int_M \boldsymbol{\varphi}(P\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

En presencia de métricas fibradas $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$, definimos $\boldsymbol{\varphi}^\sharp \in \Gamma_c(\mathbf{F})$ por $\overline{\boldsymbol{\varphi}^\sharp} := \mathcal{R}_{\mathbf{F}}^{-1}\boldsymbol{\varphi}$. Entonces esto puede escribirse como

$$(P\mathbf{T}_{\mathbf{u}})(\boldsymbol{\varphi}) = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{F}}(P\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}^\sharp)\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, P_h^* \boldsymbol{\varphi}^\sharp)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

En general, la acción sobre distribuciones está determinada por el transpuesto formal bilineal $P'$. Cuando se consideran distribuciones regulares y se fijan métricas fibradas, las fórmulas anteriores se reescriben

mediante el adjunto hermitiano formal $P_h^*$, recuperando las identidades de integración por partes usuales.

**Ejemplo 10.2.21.** (Un ejemplo donde el espacio $W$ sí interviene) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, tomemos el haz trivial $\mathbf{E} = M \times \mathbb{K}$ y sea $W = \mathbb{K}^2$. Fijemos una función suave $u \in C^\infty(M)$ y un punto $p \in M$. Definimos

$$T \colon \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathbb{K}^2$$

por

$$T(\varphi) := \left( \int_M \varphi u \, d\lambda_{\mathbf{g}}, \varphi(p) \right).$$

Entonces $T \in \mathcal{D}'(M, \mathbb{K}^2)$. La primera componente es una distribución regular, mientras que la segunda componente es la delta de Dirac en $p$.
Si $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(M \times \mathbb{K}, M \times \mathbb{K})$, entonces la extensión distribucional de $P$ está dada por

$$(PT)(\varphi) = T(P'\varphi).$$

Por lo tanto,

$$(PT)(\varphi) = \left( \int_M (P'\varphi) u \, d\lambda_{\mathbf{g}}, (P'\varphi)(p) \right).$$

En particular, si $P = \Delta_{\mathbf{g}}$, el cual es formalmente autoadjunto, entonces

$$(\Delta_{\mathbf{g}} T)(\varphi) = \left( \int_M (\Delta_{\mathbf{g}} \varphi) u \, d\lambda_{\mathbf{g}}, (\Delta_{\mathbf{g}} \varphi)(p) \right).$$

La primera componente representa la acción del Laplaciano sobre la parte regular, mientras que la segunda representa la acción del Laplaciano sobre la delta de Dirac. En este sentido, tomar $W = \mathbb{K}^2$ permite reunir en un solo objeto distribucional dos tipos distintos de fuentes: una fuente extendida dada por $u$ y una fuente puntual concentrada en $p$.

En los ejemplos anteriores hemos considerado principalmente el caso escalar $W = \mathbb{K}$. A continuación extendemos estas construcciones al caso de distribuciones con valores en un espacio vectorial de dimensión finita.

**Definición 10.2.22.** (Distribución regular con valores en $W$) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $W$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Una distribución

$$\mathbf{T} \colon \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \longrightarrow W$$

se denomina *regular* si existe $\mathbf{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E} \otimes W)$ tal que

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}) = \int_M (\boldsymbol{\varphi} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{f}) \, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*).$$

**Observación 10.2.23.** En el caso $W = \mathbb{K}$, esta definición coincide con la de la Definición 10.2.10.

**Definición 10.2.24.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave, sea $W$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E} \otimes W)$. Definimos la distribución

regular asociada a $\mathbf{u}$ como

$$\mathbf{T}_{\mathbf{u}}(\varphi) := \int_M (\varphi \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*).$$

**Observación 10.2.25.** En el caso en que $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E} \otimes W)$ sea una sección suave, la expresión anterior define una distribución regular suave. En particular, esta construcción extiende la asociación clásica de secciones suaves con distribuciones regulares.

### 10.2.2 Propiedades locales

Una propiedad fundamental de las distribuciones es su carácter local. En particular, es posible restringir una distribución a un subconjunto abierto, lo cual refleja que su acción está completamente determinada por el comportamiento de las funciones de prueba en vecindades pequeñas. Esta construcción es compatible con la estructura de haces vectoriales y será utilizada de manera recurrente en lo que sigue.

**Definición 10.2.26.** (Restricción de distribuciones en haces) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave y $U \subseteq M$ un abierto. Sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$. Definimos la restricción de $\mathbf{T}$ a $U$ como la distribución

$$\mathbf{T} \restriction_U \in \mathcal{D}'(U, \mathbf{E}, W)$$

dada por

$$\mathbf{T} \restriction_U (\varphi) := \mathbf{T}(\widetilde{\varphi}), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbf{E}^*),$$

donde $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$ es la extensión por cero de $\varphi$ fuera de $U$.

**Lema 10.2.27.** (Buena definición de la restricción) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave, sea $W$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $U \subseteq M$ un abierto. Si $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$, la fórmula

$$\mathbf{T} \restriction_U (\varphi) := \mathbf{T}(\widetilde{\varphi}), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbf{E}^*),$$

donde $\widetilde{\varphi}$ denota la extensión por cero de $\varphi$ fuera de $U$, define un elemento de $\mathcal{D}'(U, \mathbf{E}, W)$. Si $V \subseteq U$ es abierto, entonces

$$(\mathbf{T} \restriction_U) \restriction_V = \mathbf{T} \restriction_V .$$

*Demostración.* Denotemos por

$$e_U \colon \mathcal{D}(U, \mathbf{E}^* \restriction_U) \longrightarrow \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$$

la prolongación por cero. Este mapeo es lineal. Si $K \Subset U$, entonces toda $\varphi \in \Gamma_K(\mathbf{E}^* \restriction_U)$ se anula en una vecindad del borde de $U$, por lo que $e_U \varphi$ es suave y tiene soporte contenido en $K$. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, sus derivadas covariantes coinciden con las de $\varphi$ en $U$ y se anulan fuera de $U$; en particular,

$$\|e_U \varphi\|_{C^m(K;M)} = \|\varphi\|_{C^m(K;U)}.$$

Así, la restricción de $e_U$ a cada etapa de soporte fijo es continua. La propiedad final de la topología $LF$, dada por el Teorema 4.4.1, implica que $e_U$ es continua en los espacios de prueba completos.
Por lo tanto, $\mathbf{T} \restriction_U = \mathbf{T} \circ e_U$ es lineal y continuo, es decir, pertenece a $\mathcal{D}'(U, \mathbf{E}, W)$. Finalmente, si $V \subseteq U$,

prolongar primero por cero de $V$ a $U$ y después de $U$ a $M$ produce exactamente la prolongación por cero de $V$ a $M$. Al componer con $\mathbf{T}$ se obtiene la identidad de restricciones. □

La noción de restricción permite formalizar el carácter local de las distribuciones: los abiertos en los que una distribución se anula determinan su soporte.

**Definición 10.2.28.** (Soporte de una distribución) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave, sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$. Definimos el soporte de $\mathbf{T}$ como el conjunto

$$\operatorname{supp}(\mathbf{T}) := M \setminus \bigcup \{U \subseteq M \text{ abierto} \mid \mathbf{T} \restriction_U = 0\}.$$

A continuación daremos una definición equivalente mediante una proposición:

**Proposición 10.2.29.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave y sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$. Entonces

$$\operatorname{supp}(\mathbf{T}) = \{x \in M \mid \text{para toda vecindad abierta } U \text{ de } x, \text{ existe } \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \text{ con } \operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) \subseteq U \text{ y } \mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}) \neq 0\}.$$

*Demostración.* Definimos

$$A := \bigcup \{U \subseteq M \text{ abierto} \mid \mathbf{T} \restriction_U = 0\}.$$

Observamos que $A$ es un conjunto abierto, por lo que su complemento $M \setminus A$ es cerrado. Probaremos que $M \setminus A$ coincide con el conjunto descrito en la segunda definición.
Sea $x \in M \setminus A$. Consideremos una vecindad abierta $U$ de $x$. Entonces no puede ocurrir que $\mathbf{T} \restriction_U = 0$, pues en tal caso $U \subseteq A$ y, en particular, $x \in A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbf{T} \restriction_U \neq 0$. Esto significa que existe una sección de prueba $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(U, \mathbf{E}^*)$ tal que

$$\mathbf{T} \restriction_U (\boldsymbol{\varphi}) \neq 0.$$

Si denotamos por $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$ la extensión por cero de $\boldsymbol{\varphi}$ fuera de $U$, entonces $\operatorname{supp}(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}) \subseteq U$ y

$$\mathbf{T}(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{T} \restriction_U (\boldsymbol{\varphi}) \neq 0.$$

Concluimos que toda vecindad abierta de $x$ contiene el soporte de una sección de prueba sobre la cual $\mathbf{T}$ no se anula, por lo que $x$ pertenece al segundo conjunto.
Recíprocamente, supongamos que $x$ pertenece al segundo conjunto. Si $x \in A$, entonces existe un abierto $U \subseteq M$ tal que $x \in U$ y $\mathbf{T} \restriction_U = 0$. Sin embargo, por hipótesis, existe una sección de prueba $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$ con $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) \subseteq U$ tal que

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}) \neq 0.$$

Como $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) \subseteq U$, la restricción $\boldsymbol{\varphi} \restriction_U$ pertenece a $\mathcal{D}(U, \mathbf{E}^*)$ y su extensión por cero a $M$ coincide con $\boldsymbol{\varphi}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{T} \restriction_U (\boldsymbol{\varphi} \restriction_U) = 0,$$

lo cual contradice la elección de $\boldsymbol{\varphi}$. En consecuencia, $x \notin A$.
Hemos probado que ambos conjuntos coinciden, y con ello la equivalencia de las definiciones. □

La noción de soporte permite formalizar de manera precisa el carácter local de las distribuciones. En particular, una distribución no "detecta" secciones de prueba cuyo soporte esté contenido en regiones donde la distribución se anula. Esto se expresa en el siguiente resultado fundamental.

**Proposición 10.2.30.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ y sea $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$. Si $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) \cap \operatorname{supp}(\mathbf{T}) = \varnothing$, entonces $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}) = 0$.

*Demostración.* Sea $K := \operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi})$, el cual es compacto. Para cada $x \in K$, como $x \notin \operatorname{supp}(\mathbf{T})$, existe una vecindad abierta $U_x$ de $x$ tal que $\mathbf{T} \restriction_{U_x} = 0$. La familia $\{U_x\}_{x \in K}$ es una cubierta abierta de $K$, por lo que existen abiertos $U_1, \ldots, U_k$ que aún cubren $K$.

Sea $\{\chi_j\}_{j \in \{1,\ldots,k\}}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_j\}_{j \in \{1,\ldots,k\}}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, definimos $\boldsymbol{\varphi}_j := \chi_j \boldsymbol{\varphi}$. Entonces $\boldsymbol{\varphi} = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{\varphi}_j$ y $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}_j) \subseteq U_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Como $\mathbf{T} \restriction_{U_j} = 0$ y $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}_j) \subseteq U_j$, se sigue que $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}_j) = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto, $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}_j) = 0$.

□

**Observación 10.2.31.** La condición $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(T) = \varnothing$ no puede sustituirse por la condición de que $\varphi$ se anule sobre $\operatorname{supp}(T)$. Por ejemplo, si $M = \mathbb{R}$, $\mathbf{E} = M \times \mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, M \times \mathbb{K}, \mathbb{K})$ está dada por $T(\varphi) = \varphi'(0)$, entonces $\operatorname{supp}(T) = \{0\}$, pero puede ocurrir que $\varphi(0) = 0$ y sin embargo $T(\varphi) \neq 0$.

La propiedad anterior permite extender de manera natural la acción de una distribución a ciertas secciones que no tienen soporte compacto.

**Proposición 10.2.32.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ y sea $\boldsymbol{\varphi} \in \Gamma(M, \mathbf{E}^*)$. Si $\operatorname{supp}(\mathbf{T}) \cap \operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi})$ es compacto, entonces la cantidad $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi})$ puede definirse de manera consistente.

*Demostración.* Sea $K := \operatorname{supp}(\mathbf{T}) \cap \operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi})$, el cual es compacto por hipótesis. Como $M$ es una variedad suave, existe un abierto relativamente compacto $V \subseteq M$ tal que $K \subseteq V$. Para cada $x \in K$ existe una carta relativamente compacta $V_x$ que contiene a $x$; por compacidad de $K$, existe una subcubierta finita $V_{x_1}, \ldots, V_{x_N}$ y tomando $V := \bigcup_{j=1}^{N} V_{x_j}$ se obtiene un abierto con $\overline{V}$ compacto y $K \subseteq V$.

Como $K \subseteq V$ y $K$ es compacto, podemos elegir un abierto $U \subseteq M$ tal que

$$K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Tomamos ahora una función $\sigma \in \mathcal{D}(M, \mathbb{K})$ tal que $\sigma \equiv 1$ en $\overline{U}$ y $\operatorname{supp}(\sigma) \subseteq V$. Definimos

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}) := \mathbf{T}(\sigma \boldsymbol{\varphi}).$$

Observemos que $\sigma \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$, por lo que la expresión anterior tiene sentido.

Para ver que esta definición no depende de la elección de $\sigma$, sean $\sigma$ y $\sigma'$ dos funciones con la propiedad anterior. Entonces $\sigma - \sigma'$ se anula en una vecindad de $K$, y en particular

$$\operatorname{supp}\big((\sigma-\sigma')\boldsymbol{\varphi}\big) \cap \operatorname{supp}(\mathbf{T}) = \varnothing.$$

Por la Proposición 10.2.30, se sigue que

$$\mathbf{T}\big((\sigma-\sigma')\boldsymbol{\varphi}\big) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{T}(\sigma\boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{T}(\sigma'\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{T}\big((\sigma-\sigma')\boldsymbol{\varphi}\big) = 0,$$

lo que prueba que la definición es independiente de la elección de $\sigma$. □

**Observación 10.2.33.** La proposición anterior muestra que la acción de una distribución puede extenderse a secciones suaves cuyo soporte no es compacto, siempre que su intersección con el soporte de la distribución sea compacta. Esto refuerza la idea de que el comportamiento de una distribución está completamente determinado por su soporte.

La localización empleada más adelante en la definición de espacios funcionales requiere representar distribuciones en coordenadas. La siguiente construcción fija también el factor de volumen; omitirlo cambiaría las componentes de una distribución regular.

**Proposición 10.2.34.** (Representación local de una distribución) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial de rango $r$, sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E})$ y sean

$$\varphi\colon U \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$$

una carta y un marco local de $\mathbf{E}$, con marco dual $\mathbf{e}^* = (\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^r)$. Si

$$J_\varphi(x) := \sqrt{\det\big(\mathbf{g}(\varphi^{-1}(x))\big)}, \qquad x \in \Omega,$$

definimos la componente coordenada de $\mathbf{T}$ por

$$\big\langle T^a_{\varphi,\mathbf{e}}, \psi \big\rangle := (\mathbf{T} \restriction_U)\left(\left(\frac{\psi}{J_\varphi} \circ \varphi\right)\mathbf{e}^a\right), \qquad \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{10.5}$$

para $a \in \{1, \dots, r\}$. Entonces $T^a_{\varphi,\mathbf{e}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u^a \mathbf{e}_a \in L^1_{\mathrm{loc}}(U, \mathbf{E})$ y $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}$, se tiene

$$T^a_{\varphi,\mathbf{e}} = T_{u^a \circ \varphi^{-1}} \quad \text{en } \Omega,$$

donde el segundo miembro es la distribución euclidiana definida con la medida de Lebesgue.
En el caso escalar omitiremos el marco y escribiremos $(\mathbf{T} \restriction_U) \circ \varphi^{-1}$ para esta distribución. Si $\kappa = \varphi^{-1}\colon \Omega \longrightarrow U$ es la parametrización correspondiente, escribiremos también $(\mathbf{T} \restriction_U) \circ \kappa$; ambas expresiones denotan el mismo objeto.
Si $h \in C^\infty_c(U)$, cada componente de $h\mathbf{T}$ tiene soporte compacto contenido en $\Omega$ y admite una extensión por cero canónica a $\mathbb{R}^n$. En concreto, si $K := \operatorname{supp}((h\mathbf{T})^a_{\varphi,\mathbf{e}}) \Subset \Omega$ y $\chi \in C^\infty_c(\Omega)$ satisface $\chi = 1$ en una vecindad de

$K$, esa extensión está dada por

$$\widetilde{\langle (h\mathbf{T})^a_{\varphi,\mathbf{e}}, \psi\rangle} := \langle (h\mathbf{T})^a_{\varphi,\mathbf{e}}, \chi(\psi \restriction_\Omega)\rangle, \qquad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{10.6}$$

y no depende de $\chi$.

*Demostración.* El mapeo

$$\psi \longmapsto \left(\frac{\psi}{J_\varphi} \circ \varphi\right) \mathbf{e}^a$$

es lineal y continuo de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $\mathcal{D}(U, \mathbf{E}^* \restriction_U)$: sobre cada compacto, la regla de Leibniz y la regla de la cadena controlan todas sus derivadas. La continuidad de $\mathbf{T} \restriction_U$ prueba que (10.5) define una distribución euclidiana. Para una distribución regular usamos la fórmula de cambio de variables

$$\int_U \eta \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_\Omega (\eta \circ \varphi^{-1})(x) J_\varphi(x) \, d\lambda_n(x),$$

válida para toda función integrable $\eta$ con soporte en $U$. Así,

$$\int_U \left(\frac{\psi}{J_\varphi} \circ \varphi\right) u^a \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_\Omega \psi(x) u^a(\varphi^{-1}(x)) \, dx,$$

que prueba la segunda afirmación.
La identidad $\operatorname{supp}(h\mathbf{T}) \subseteq \operatorname{supp}(h) \Subset U$ se deduce directamente de la definición del producto de una distribución por una función suave y de la Proposición 10.2.30. Por lo tanto, el conjunto $K$ de la última afirmación es compacto en $\Omega$. Si $\chi_1$ y $\chi_2$ valen uno cerca de $K$, entonces $(\chi_1 - \chi_2)(\psi \restriction_\Omega)$ tiene soporte separado de $K$; la Proposición 10.2.30 muestra que las dos fórmulas dan el mismo valor. La continuidad de (10.6) es inmediata en cada espacio de funciones de prueba con soporte en un compacto fijo. □

La noción de soporte describe dónde "vive" una distribución. Sin embargo, es posible refinar esta idea distinguiendo los puntos en los cuales la distribución es suave de aquellos en los que presenta singularidades.

**Definición 10.2.35.** (Soporte singular) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave, sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$. Definimos el soporte singular de $\mathbf{T}$ como el conjunto

$$\operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}) := \{x \in M \mid \text{para toda vecindad } U \text{ de } x,\ \mathbf{T} \restriction_U \neq \mathbf{T}_{\mathbf{u}} \text{ para toda } \mathbf{u} \in \Gamma(U, \mathbf{E} \otimes W)\}.$$

Equivalentemente, $x \notin \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$ si y sólo si existe una vecindad abierta $U$ de $x$ y una sección suave $\mathbf{u} \in \Gamma(U, \mathbf{E} \otimes W)$ tales que $\mathbf{T} \restriction_U = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}$.

**Proposición 10.2.36.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave, sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$. Entonces $\operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$ es un subconjunto cerrado de $M$ y se tiene

$$\operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{T}).$$

*Demostración.* Sea $x \notin \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$. Entonces existe una vecindad abierta $U$ de $x$ y una sección suave $\mathbf{u} \in \Gamma(U, \mathbf{E} \otimes W)$ tales que $\mathbf{T} \restriction_U = \mathbf{T}_\mathbf{u}$. En particular, para todo $y \in U$ se cumple que $\mathbf{T} \restriction_U$ coincide con una distribución inducida por una sección suave en una vecindad de $y$, por lo que $y \notin \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$. Esto muestra que $U \subseteq M \setminus \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$, y por lo tanto $M \setminus \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$ es abierto. Concluimos que $\operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$ es cerrado. Para la segunda afirmación, sea $x \notin \operatorname{supp}(\mathbf{T})$. Entonces existe una vecindad abierta $U$ de $x$ tal que $\mathbf{T} \restriction_U = 0$. Como $0 = \mathbf{T}_0$ con $0 \in \Gamma(U, \mathbf{E} \otimes W)$, se tiene que $\mathbf{T} \restriction_U$ coincide con una distribución inducida por una sección suave. Por lo tanto, $x \notin \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$, lo cual implica $\operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{T})$. □

**Ejemplo 10.2.37.** Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $p \in M$. Supongamos que $\mathbf{E}_p^* \neq \{0\}$. Fijemos una métrica fibrada auxiliar $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ en $\mathbf{E}$ y su métrica dual $\mathbf{h}_\mathbf{E}^*$ en $\mathbf{E}^*$. Consideremos

$$\delta_p \colon \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \longrightarrow \mathbf{E}_p^*, \qquad \delta_p(\boldsymbol{\varphi}) := \boldsymbol{\varphi}(p),$$

la distribución delta de Dirac en $p$. Recordemos que $\delta_p$ es una distribución con valores en $\mathbf{E}_p^*$, es decir,

$$\delta_p \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, \mathbf{E}_p^*).$$

Afirmamos que

$$\operatorname{supp}(\delta_p) = \{p\}.$$

Si $\dim M \geq 1$, también se tiene $\operatorname{sing\,supp}(\delta_p) = \{p\}$; si $\dim M = 0$, su soporte singular es vacío.
Sea $U \subseteq M$ un abierto tal que $p \notin U$. Entonces, para toda sección de prueba $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$ con $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) \subseteq U$, se tiene $\boldsymbol{\varphi}(p) = 0$, y por lo tanto $\delta_p(\boldsymbol{\varphi}) = 0$. Esto muestra que $\delta_p \restriction_U = 0$, de donde se sigue que

$$\operatorname{supp}(\delta_p) \subseteq \{p\}.$$

Por otro lado, si $U$ es cualquier abierto que contiene a $p$, existe una sección de prueba $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$ con $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) \subseteq U$ tal que $\boldsymbol{\varphi}(p) \neq 0$. Basta tomar un elemento no nulo de $\mathbf{E}_p^*$ y usar el Lema 1.7.28. Así, $\delta_p(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi}(p) \neq 0$, lo que implica que $p \in \operatorname{supp}(\delta_p)$. Concluimos que

$$\operatorname{supp}(\delta_p) = \{p\}.$$

Si $\dim M = 0$, la variedad es discreta y la medida riemanniana es la medida de conteo. Sea $\mathbf{v}$ la sección de $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}_p^*$ nula fuera de $p$ y cuyo valor en $p$ es el tensor canónico $\sum_{a=1}^{r} e_a \otimes e^a$, donde $\{e_a\}_{a=1}^r$ es cualquier base de $\mathbf{E}_p$ y $\{e^a\}_{a=1}^r$ su base dual. Este tensor es independiente de la base, y la sección es suave porque cada punto es abierto. Para toda prueba,

$$\mathbf{T}_\mathbf{v}(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{a=1}^{r} \boldsymbol{\varphi}(p)(e_a) e^a = \boldsymbol{\varphi}(p) = \delta_p(\boldsymbol{\varphi}).$$

Por tanto, $\delta_p$ es regular y su soporte singular es vacío.
Supongamos ahora $d := \dim M \geq 1$. Veamos que $p \in \operatorname{sing\,supp}(\delta_p)$. Supongamos, por contradicción, que existe un abierto $U$ con $p \in U$ y una sección suave $\mathbf{u} \in \Gamma(U, \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}_p^*)$ tales que

$$\delta_p \restriction_U = \mathbf{T}_\mathbf{u}.$$

Entonces, para toda sección de prueba $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(U, \mathbf{E}^*)$, se tendría

$$\boldsymbol{\varphi}(p) = \delta_p(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\varphi}) = \int_U (\boldsymbol{\varphi} \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{E}_p^*})(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Consideremos un abierto $V \subseteq M$ tal que $p \in V$, $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subseteq U$. Podemos escogerlo de modo que $\mathbf{E}^*$ admita una trivialización local sobre $V$ y que exista una carta $(V, \varphi)$. Por el Lema 1.7.28, elegimos $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma_c(V, \mathbf{E}^*)$ tal que $\boldsymbol{\eta}(p) \neq 0$, y la extendemos por cero fuera de $V$.
Sea $H = \mathbb{R}^d$ si la carta es interior y $H = \mathbb{H}^d$ si es de frontera. Como $\varphi(V)$ es abierto en $H$, podemos elegir $r_n \downarrow 0$ de modo que $\overline{B_{\mathrm{euc}}(\varphi(p), r_1)} \cap H \subseteq \varphi(V)$. Restringiendo a $H$ cortes euclidianos centrados en $\varphi(p)$ y transportándolos por la carta, obtenemos $\rho_n \in C_c^\infty(V)$ con

$$0 \leq \rho_n \leq 1, \qquad \rho_n(p) = 1, \qquad \mathrm{supp}(\rho_n) \subseteq \varphi^{-1}\big(B_{\mathrm{euc}}(\varphi(p), r_n) \cap H\big).$$

El peso $\sqrt{\det(\mathbf{g})} \circ \varphi^{-1}$ está acotado sobre el compacto coordenado de radio $r_1$. Por consiguiente, existe $C_0 > 0$ independiente de $n$ tal que

$$\lambda_{\mathbf{g}}(\mathrm{supp}\rho_n) \leq C_0 \lambda_d\big(B_{\mathrm{euc}}(\varphi(p), r_n)\big) \longrightarrow 0,$$

pues $d \geq 1$. Todos estos soportes están contenidos en $V \subseteq U$.
Definimos entonces

$$\boldsymbol{\varphi}_n := \rho_n \boldsymbol{\eta}.$$

Entonces $\boldsymbol{\varphi}_n \in \mathcal{D}(U, \mathbf{E}^*)$ y

$$\boldsymbol{\varphi}_n(p) = \boldsymbol{\eta}(p) \neq 0$$

para todo $n$.
Por otra parte, la sección $\mathbf{s} := (\boldsymbol{\eta} \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{E}_p^*})(\mathbf{u})$ es suave en $V$ y su soporte está contenido en el compacto $\mathrm{supp}\,\boldsymbol{\eta} \Subset V$. Es, por tanto, acotada en ese compacto y nula fuera de él. Existe así una constante $C > 0$ tal que $|\mathbf{s}(q)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}^*(p)} \leq C$ para todo $q \in V$.
Como $\boldsymbol{\varphi}_n = \rho_n \boldsymbol{\eta}$ y $\mathrm{supp}(\rho_n) \subseteq V$, se tiene

$$\int_U (\boldsymbol{\varphi}_n \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{E}_p^*})(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_V \rho_n \mathbf{s}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por la desigualdad triangular para integrales,

$$\left| \int_V \rho_n \mathbf{s}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}^*(p)} \leq \int_V |\rho_n| |\mathbf{s}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}^*(p)}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $0 \leq \rho_n \leq 1$ y $|\mathbf{s}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}^*(p)} \leq C$ en $\mathrm{supp}(\rho_n)$, obtenemos

$$\left| \int_U (\boldsymbol{\varphi}_n \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{E}_p^*})(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}^*(p)} \leq C\, \lambda_{\mathbf{g}}(\mathrm{supp}(\rho_n)).$$

Recordemos que $\lambda_{\mathbf{g}}(\mathrm{supp}(\rho_n)) \longrightarrow 0$, por lo tanto

$$\int_U (\boldsymbol{\varphi}_n \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{E}_p^*})(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow 0.$$

Esto es una contradicción pues dichas integrales son iguales a $\varphi_n(p) = \eta(p) \neq 0$. Por lo tanto, no existe tal sección suave $\mathbf{u}$, y se sigue que $p \in \operatorname{sing}\operatorname{supp}(\delta_p)$.

A continuación veremos algunas propiedades adicionales del soporte, como su relación con restricciones y con operadores diferenciales parciales.

**Proposición 10.2.38.** (Compatibilidad de la restricción con el soporte) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ y sea $U \subseteq M$ un abierto. Entonces

$$\operatorname{supp}(\mathbf{T} \restriction_U) = \operatorname{supp}(\mathbf{T}) \cap U.$$

*Demostración.* Primero probemos que $\operatorname{supp}(\mathbf{T} \restriction_U) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{T}) \cap U$. Sea $x \in U$ tal que $x \notin \operatorname{supp}(\mathbf{T})$. Entonces existe una vecindad abierta $V \subseteq M$ de $x$ tal que $\mathbf{T} \restriction_V = 0$. Como $U \cap V$ es una vecindad abierta de $x$ en $U$, se tiene

$$(\mathbf{T} \restriction_U) \restriction_{U\cap V} = \mathbf{T} \restriction_{U\cap V} = 0.$$

Por lo tanto, $x \notin \operatorname{supp}(\mathbf{T} \restriction_U)$.
Recíprocamente, sea $x \in \operatorname{supp}(\mathbf{T}) \cap U$. Consideremos una vecindad abierta $V \subseteq U$ de $x$. Como $U$ es abierto en $M$, también podemos ver $V$ como un abierto de $M$. Dado que $x \in \operatorname{supp}(\mathbf{T})$, no puede ocurrir que $\mathbf{T} \restriction_V = 0$. Por lo tanto, existe una sección de prueba $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(V, \mathbf{E}^*)$ tal que $\mathbf{T} \restriction_V (\boldsymbol{\varphi}) \neq 0$. Pero $\mathbf{T} \restriction_V = (\mathbf{T} \restriction_U) \restriction_V$, de modo que $(\mathbf{T} \restriction_U) \restriction_V \neq 0$. Como esto vale para toda vecindad abierta $V$ de $x$ en $U$, se sigue que $x \in \operatorname{supp}(\mathbf{T} \restriction_U)$.
Concluimos que $\operatorname{supp}(\mathbf{T} \restriction_U) = \operatorname{supp}(\mathbf{T}) \cap U$. □

**Proposición 10.2.39.** (Compatibilidad de la restricción con operadores diferenciales) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves y sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ y sea $U \subseteq M$ abierto. Si $P_U$ es la restricción de $P$ a $U$, entonces

$$(P\mathbf{T})|_U = P_U(\mathbf{T}|_U) \qquad \text{en } \mathcal{D}'(U, \mathbf{F}|_U, W). \tag{10.7}$$

*Demostración.* Por la compatibilidad del transpuesto formal con restricciones, $(P_U)' = (P')_U$. Sea $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(U, \mathbf{F}^*|_U)$ y denotemos por $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ su prolongación por cero; ésta es suave porque $\operatorname{supp}\boldsymbol{\varphi} \Subset U$. La localidad de $P'$ implica que $P'\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ es la prolongación por cero de $(P_U)'\boldsymbol{\varphi}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}((P\mathbf{T})|_U)(\boldsymbol{\varphi}) &= (P\mathbf{T})(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{T}(P'\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}) \\ &= (\mathbf{T}|_U)((P_U)'\boldsymbol{\varphi}) = (P_U(\mathbf{T}|_U))(\boldsymbol{\varphi}),\end{aligned}$$

que es (10.7). □

**Proposición 10.2.40.** (Localidad de los operadores diferenciales sobre distribuciones) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves y sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ y sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$. Entonces

$$\operatorname{supp}(P\mathbf{T}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{T}).$$

*Demostración.* Sea $x \notin \operatorname{supp}(\mathbf{T})$. Entonces existe una vecindad abierta $U$ de $x$ tal que $\mathbf{T} \restriction_U = 0$.
Sea $\varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbf{F}^*)$ y sea $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{F}^*)$ su extensión por cero fuera de $U$. Por la Proposición 10.2.39, se tiene

$$(P\mathbf{T}) \restriction_U (\varphi) = \mathbf{T} \restriction_U \left((P'\widetilde{\varphi}) \restriction_U\right).$$

Como $\mathbf{T} \restriction_U = 0$, obtenemos

$$(P\mathbf{T}) \restriction_U (\varphi) = 0.$$

Esto vale para toda $\varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbf{F}^*)$, por lo que $(P\mathbf{T}) \restriction_U = 0$. En consecuencia, $x \notin \operatorname{supp}(P\mathbf{T})$.
Por lo tanto,

$$\operatorname{supp}(P\mathbf{T}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{T}).$$

□

**Lema 10.2.41.** (Restricción de distribuciones regulares) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E} \otimes W)$ y sea $U \subseteq M$ un abierto. Entonces

$$(\mathbf{T}_{\mathbf{u}}) \restriction_U = \mathbf{T}_{\mathbf{u} \restriction_U}$$

como elementos de $\mathcal{D}'(U, \mathbf{E} \restriction_U, W)$.

*Demostración.* Sea $\varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbf{E}^* \restriction_U)$. Por definición de la restricción de una distribución,

$$(\mathbf{T}_{\mathbf{u}}) \restriction_U (\varphi) = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}(\widetilde{\varphi}),$$

donde $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$ denota la extensión de $\varphi$ por cero fuera de $U$.
Por la definición de $\mathbf{T}_{\mathbf{u}}$, se tiene

$$\mathbf{T}_{\mathbf{u}}(\widetilde{\varphi}) = \int_M (\widetilde{\varphi} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $\widetilde{\varphi}$ se anula fuera de $U$, esta integral se reduce a

$$\int_U (\varphi \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u} \restriction_U)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Pero este último término es precisamente

$$\mathbf{T}_{\mathbf{u} \restriction_U}(\varphi).$$

Por lo tanto, $(\mathbf{T}_{\mathbf{u}}) \restriction_U (\varphi) = \mathbf{T}_{\mathbf{u} \restriction_U}(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbf{E}^* \restriction_U)$, y la igualdad queda probada. □

**Proposición 10.2.42.** (Distribuciones regulares suaves y soporte) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E} \otimes W)$ y sea $\mathbf{T}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ la distribución regular suave inducida por $\mathbf{u}$. Entonces

$$\operatorname{supp}(\mathbf{T}_{\mathbf{u}}) = \operatorname{supp}(\mathbf{u}).$$

*Demostración.* Sea $x \notin \operatorname{supp}(\mathbf{u})$. Entonces existe una vecindad abierta $U$ de $x$ tal que $\mathbf{u} \restriction_U = 0$. Si $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(U, \mathbf{E}^*)$, se tiene

$$(\mathbf{T}_{\mathbf{u}} \restriction_U)(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{T}_{\mathbf{u}\restriction_U}(\boldsymbol{\varphi}) = \int_U (\boldsymbol{\varphi} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u} \restriction_U)\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0.$$

De aquí se sigue que $\mathbf{T}_{\mathbf{u}} \restriction_U = 0$, y por lo tanto $x \notin \operatorname{supp}(\mathbf{T}_{\mathbf{u}})$. Esto prueba que $\operatorname{supp}(\mathbf{T}_{\mathbf{u}}) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{u})$.
Recíprocamente, sea $x \in \operatorname{supp}(\mathbf{u})$. Veamos que $x \in \operatorname{supp}(\mathbf{T}_{\mathbf{u}})$. Sea $U$ una vecindad abierta arbitraria de $x$. Como $x \in \operatorname{supp}(\mathbf{u})$, existe $y \in U$ tal que $\mathbf{u}(y) \neq 0$.
Dado que $\mathbf{u}(y) \in \mathbf{E}_y \otimes W$ es no nulo, existen $\ell_0 \in \mathbf{E}_y^*$ y $\omega \in W^*$ tales que

$$\omega\big((\ell_0 \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u}(y))\big) \neq 0.$$

Aplicando el Lema 1.7.28 al haz $\mathbf{E}^* \to M$, podemos escoger una sección suave $\boldsymbol{\ell} \in \Gamma(\mathbf{E}^*)$ con $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\ell}) \subseteq U$ y $\boldsymbol{\ell}(y) = \ell_0$.
Multiplicando $\boldsymbol{\ell}$ por un escalar no nulo, si es necesario, podemos suponer que

$$\operatorname{Re}\, \omega\big((\boldsymbol{\ell}(y) \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u}(y))\big) > 0,$$

donde, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Re se entiende como la identidad. Por continuidad, existe un abierto relativamente compacto $V \subseteq U$, con $y \in V$, tal que

$$\operatorname{Re}\, \omega\big((\boldsymbol{\ell}(z) \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u}(z))\big) > 0 \qquad \forall z \in V.$$

Sea ahora $\rho \in \mathcal{D}(U, \mathbb{K})$ una función de corte tal que $\rho \geq 0$, $\rho \not\equiv 0$ y $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq V$. Definimos

$$\boldsymbol{\varphi} := \rho\, \boldsymbol{\ell} \restriction_U \in \mathcal{D}(U, \mathbf{E}^*).$$

Entonces

$$\omega\big(\mathbf{T}_{\mathbf{u}} \restriction_U (\boldsymbol{\varphi})\big) = \omega\left(\int_U (\boldsymbol{\varphi} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}\right).$$

Como $W$ es de dimensión finita, podemos introducir $\omega$ dentro de la integral y obtenemos

$$\omega\big(\mathbf{T}_{\mathbf{u}} \restriction_U (\boldsymbol{\varphi})\big) = \int_U \omega\big((\boldsymbol{\varphi} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u})\big)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Usando la definición de $\boldsymbol{\varphi}$ y que $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq V$, esto se reduce a

$$\omega\big(\mathbf{T}_{\mathbf{u}} \restriction_U (\boldsymbol{\varphi})\big) = \int_V \rho\, \omega\big((\boldsymbol{\ell} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u})\big)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Tomando partes reales,

$$\operatorname{Re}\, \omega\big(\mathbf{T}_{\mathbf{u}} \restriction_U (\boldsymbol{\varphi})\big) = \int_V \rho\, \operatorname{Re}\, \omega\big((\boldsymbol{\ell} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u})\big)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

El integrando es no negativo y no se anula identicamente, pues $\rho \geq 0$, $\rho \not\equiv 0$ y

$$\operatorname{Re}\, \omega\big((\boldsymbol{\ell}(z) \otimes \mathrm{id}_W)(\mathbf{u}(z))\big) > 0 \qquad \forall z \in V.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{Re}\omega\big(\mathbf{T}_{\mathbf{u}}\restriction_U(\boldsymbol{\varphi})\big) > 0,$$

y en particular $\mathbf{T}_{\mathbf{u}}\restriction_U(\boldsymbol{\varphi}) \neq 0$. Por lo tanto, $\mathbf{T}_{\mathbf{u}}\restriction_U \neq 0$.
Como $U$ era una vecindad arbitraria de $x$, concluimos que $x \in \operatorname{supp}(\mathbf{T}_{\mathbf{u}})$. En consecuencia,

$$\operatorname{supp}(\mathbf{T}_{\mathbf{u}}) = \operatorname{supp}(\mathbf{u}).$$

□

**Proposición 10.2.43.** (Compatibilidad de la restricción con el soporte singular) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave y sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ y sea $U \subseteq M$ un abierto. Entonces

$$\operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}\restriction_U) = \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}) \cap U.$$

*Demostración.* Sea $x \in U$ tal que $x \notin \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$. Entonces existe una vecindad abierta $V \subseteq M$ de $x$ y una sección suave $\mathbf{u} \in \Gamma(V, \mathbf{E} \otimes W)$ tales que

$$\mathbf{T}\restriction_V = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}.$$

Al restringir a $U \cap V$, se obtiene

$$(\mathbf{T}\restriction_U)\restriction_{U\cap V} = \mathbf{T}\restriction_{U\cap V} = (\mathbf{T}_{\mathbf{u}})\restriction_{U\cap V} = \mathbf{T}_{\mathbf{u}\restriction_{U\cap V}}.$$

Por lo tanto, $x \notin \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}\restriction_U)$. Esto prueba que

$$\operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}\restriction_U) \subseteq \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}) \cap U.$$

Recíprocamente, sea $x \in U$ tal que $x \notin \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}\restriction_U)$. Entonces existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de $x$ y una sección suave $\mathbf{u} \in \Gamma(V, \mathbf{E} \otimes W)$ tales que

$$(\mathbf{T}\restriction_U)\restriction_V = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}.$$

Como $V$ es también abierto en $M$, se tiene $\mathbf{T}\restriction_V = (\mathbf{T}\restriction_U)\restriction_V = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}$. Por lo tanto, $x \notin \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$. Esto prueba la contención recíproca.
Concluimos que

$$\operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}\restriction_U) = \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}) \cap U.$$

□

**Proposición 10.2.44.** (Localidad de operadores diferenciales y soporte singular) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves y sea $W$ un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ y sea $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$. Entonces

$$\operatorname{sing\,supp}(P\mathbf{T}) \subseteq \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}).$$

*Demostración.* Sea $x \notin \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T})$. Entonces existe una vecindad abierta $U$ de $x$ y una sección suave $\mathbf{u} \in \Gamma(U, \mathbf{E} \otimes W)$ tales que

$$\mathbf{T} \restriction_U = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}.$$

Veremos que $(P\mathbf{T}) \restriction_U$ es también una distribución regular suave.
Sea $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(U, \mathbf{F}^*)$ y sea $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \mathcal{D}(M, \mathbf{F}^*)$ su extensión por cero fuera de $U$. Por la Proposición 10.2.39, se cumple

$$(P\mathbf{T}) \restriction_U (\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{T} \restriction_U \left( (P'\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}) \restriction_U \right).$$

Usando que $\mathbf{T} \restriction_U = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}$, obtenemos

$$(P\mathbf{T}) \restriction_U (\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{T}_{\mathbf{u}} \left( (P'\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}) \restriction_U \right) = \int_U \left( (P'\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}) \restriction_U \otimes \mathrm{id}_W \right)(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Observemos ahora que $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ coincide con $\boldsymbol{\varphi}$ en $U$, de modo que $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi} = 0$ en $U$. Como $P'$ es un operador diferencial, es local, y por lo tanto

$$P'(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi}) = 0 \qquad \text{en } U.$$

En consecuencia,

$$(P'\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}) \restriction_U = P'\boldsymbol{\varphi},$$

donde $P'\boldsymbol{\varphi}$ se calcula en $U$.
Sustituimos esto en la integral anterior. Para justificar la identidad que resulta, trabajamos localmente: escribimos

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{u}_a \otimes w_a,$$

donde $\{w_1, \ldots, w_N\}$ es una base de $W$ y cada $\mathbf{u}_a$ es una sección local suave de $\mathbf{E}$. Entonces

$$\left( (P'\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}) \restriction_U \otimes \mathrm{id}_W \right)(\mathbf{u}) = \sum_{a=1}^{N} (P'\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{u}_a)\, w_a.$$

Aplicando la definición del transpuesto formal bilineal (en $U$), se tiene

$$\int_U (P'\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{u}_a)\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_U \boldsymbol{\varphi}(P\mathbf{u}_a)\, d\lambda_{\mathbf{g}} \qquad \text{para todo } a \in \{1, \ldots, N\}.$$

Por lo tanto,

$$\int_U \left( (P'\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}) \restriction_U \otimes \mathrm{id}_W \right)(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \sum_{a=1}^{N} \left( \int_U \boldsymbol{\varphi}(P\mathbf{u}_a)\, d\lambda_{\mathbf{g}} \right) w_a.$$

Por otra parte, como $P$ actúa únicamente sobre la componente en $\mathbf{E}$, se tiene

$$(P \otimes \mathrm{id}_W)\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{N} P\mathbf{u}_a \otimes w_a \in \Gamma(U, \mathbf{F} \otimes W).$$

De aquí se sigue que

$$\sum_{a=1}^{N}\left(\int_U \varphi(P\mathbf{u}_a)\,d\lambda_{\mathbf{g}}\right)w_a=\int_U\big(\varphi\otimes \mathrm{id}_W\big)\big((P\otimes \mathrm{id}_W)\mathbf{u}\big)\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

En consecuencia,

$$(P\mathbf{T})\restriction_U(\varphi)=\int_U\big(\varphi\otimes \mathrm{id}_W\big)\big((P\otimes \mathrm{id}_W)\mathbf{u}\big)\,d\lambda_{\mathbf{g}}=\mathbf{T}_{(P\otimes \mathrm{id}_W)\mathbf{u}}(\varphi).$$

Como esto vale para toda $\varphi\in\mathcal{D}(U,\mathbf{F}^*)$, concluimos que

$$(P\mathbf{T})\restriction_U=\mathbf{T}_{(P\otimes \mathrm{id}_W)\mathbf{u}}.$$

En particular, $(P\mathbf{T})\restriction_U$ es una distribución regular suave en una vecindad de $x$, lo que implica que

$$x\notin \operatorname{sing\,supp}(P\mathbf{T}).$$

Dado que $x$ era arbitrario, se obtiene

$$\operatorname{sing\,supp}(P\mathbf{T})\subseteq\operatorname{sing\,supp}(\mathbf{T}).$$

□

### 10.2.3 Productos externos y secciones dependientes de parámetros

Para estudiar operadores desde un punto de vista más global resulta conveniente considerar secciones que dependan de dos variables. En el caso euclidiano, esto aparece al escribir operadores mediante funciones de dos variables, usualmente llamadas núcleos. En el contexto de variedades y haces vectoriales, la expresión correspondiente debe formularse de manera intrínseca.

**Observación 10.2.45.** (Productos con frontera y esquinas) Si ambos factores tienen frontera, $M\times N$ es una variedad con esquinas. Sus cartas producto toman valores en abiertos relativos de $\mathbb{R}^{m+n-r}\times[0,\infty)^r$, con $r\in\{0,1,2\}$. Una sección es suave hasta las caras si todas las derivadas ordinarias de sus componentes interiores se prolongan continuamente a ellas. El Lema B.12.19, aplicado localmente tras una función de corte, muestra que esta condición equivale a admitir extensiones suaves locales al espacio euclidiano. Las reglas de la cadena garantizan que es independiente de las cartas producto.

Los haces sobre el producto, sus secciones de soporte compacto y sus distribuciones se interpretarán en este sentido. Sobre cada compacto, las normas de derivadas covariantes son equivalentes a las de las derivadas ordinarias en un número finito de cartas producto: se aplican las expresiones triangulares de las derivadas covariantes y la acotación de sus coeficientes suaves hasta las caras. Los espacios de soporte fijo son de Fréchet. En efecto, un límite uniforme de todas las derivadas en esas cartas conserva las identidades de derivación por el teorema fundamental del cálculo en los segmentos interiores; la continuidad prolonga esas identidades a las caras, y el soporte sigue en el compacto fijado. Las inclusiones de soportes son cerradas y conservan sus seminormas, por lo que una exhaustión por compactos define el mismo límite inductivo estricto *LF* de la sección anterior. Sus argumentos de completitud y continuidad por etapas se aplican sin cambios a estos productos. En particular, las funciones de prueba pueden ser distintas de cero sobre cualquiera de sus caras.

Si $\mathbf{E} \longrightarrow M$ y $\mathbf{F} \longrightarrow N$ son haces vectoriales suaves, una sección dependiente de dos variables que tome valores en $\mathbf{E}_x \otimes \mathbf{F}_y^*$ para cada $(x,y) \in M \times N$ debe entenderse como una sección de un haz vectorial sobre $M \times N$.

Aplicando el pullback a las proyecciones canónicas del producto, obtenemos haces vectoriales sobre $M \times N$ a partir de haces definidos sobre cada factor. Esto permite introducir el producto externo.

**Definición 10.2.46.** (Producto externo de haces vectoriales) Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera, y sean $\mathbf{E} \longrightarrow M$ y $\mathbf{F} \longrightarrow N$ haces vectoriales suaves. Denotemos por $\pi_M : M \times N \longrightarrow M$ y $\pi_N : M \times N \longrightarrow N$ las proyecciones canónicas.
Definimos el *producto externo* de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ como el haz vectorial suave sobre $M \times N$ dado por

$$\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F} := \pi_M^* \mathbf{E} \otimes \pi_N^* \mathbf{F}.$$

En particular, para cada $(x,y) \in M \times N$, su fibra está dada por $(\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F})_{(x,y)} = \mathbf{E}_x \otimes \mathbf{F}_y$.

**Observación 10.2.47.** Existe un isomorfismo canónico

$$(\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F})^* \cong \mathbf{E}^* \boxtimes \mathbf{F}^*.$$

Fibra a fibra se tiene $(\mathbf{E}_x \otimes \mathbf{F}_y)^* \cong \mathbf{E}_x^* \otimes \mathbf{F}_y^*$, ya que los espacios vectoriales involucrados son de dimensión finita. Estos isomorfismos fibra a fibra son compatibles con las trivializaciones locales y, por lo tanto, definen un isomorfismo suave de haces.

El producto externo permite interpretar de manera intrínseca una expresión del tipo $\varphi(x,y) \in \mathbf{E}_x \otimes \mathbf{F}_y^*$ como una sección de $\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F}^*$ sobre $M \times N$. Antes de aplicar distribuciones en una de las variables, conviene precisar un isomorfismo elemental que usaremos repetidamente.

**Observación 10.2.48.** (Convención) Si $V$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $N$ es una variedad suave con o sin frontera, identificaremos $V$ con el haz vectorial trivial $N \times V \to N$. En consecuencia, si $\mathbf{F} \to N$ es un haz vectorial, escribiremos simplemente $V \otimes \mathbf{F}$ para el producto tensorial del haz trivial $N \times V$ con $\mathbf{F}$. Con esta convención,

$$(V \otimes \mathbf{F})_y \cong V \otimes \mathbf{F}_y, \qquad y \in N.$$

**Proposición 10.2.49.** Sea $N$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{F} \longrightarrow N$ un haz vectorial suave, sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $K \subseteq N$ compacto. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, el mapeo lineal

$$\Theta_K : V \otimes_\pi \Gamma_K^k(\mathbf{F}) \longrightarrow \Gamma_K^k(V \otimes \mathbf{F}), \qquad \Theta_K(v \otimes \mathbf{s})(y) := v \otimes \mathbf{s}(y),$$

extendido por linealidad, es un isomorfismo lineal.
Además, si fijamos una norma en $V$, una métrica riemanniana $\mathbf{g}$ en $N$, una métrica fibrada y una conexión en $\mathbf{F}$, entonces $\Theta_K$ es un isomorfismo topológico de $V \otimes_\pi \Gamma_K^k(\mathbf{F})$, provisto de la norma tensorial proyectiva inducida por $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_{C^k(K,\mathbf{F})}$, sobre $\Gamma_K^k(V \otimes \mathbf{F})$ con la norma $\|\cdot\|_{C^k(K,V\otimes\mathbf{F})}$.

*Demostración.* Probemos primero que $\Theta_K$ está bien definido. Si $v \in V$ y $\mathbf{s} \in \Gamma_K^k(\mathbf{F})$, entonces, para cada $y \in N$, $v \otimes \mathbf{s}(y) \in (V \otimes \mathbf{F})_y$, de modo que el mapeo $y \longmapsto v \otimes \mathbf{s}(y)$ define una sección de clase $C^k$ del haz $V \otimes \mathbf{F}$. Además, $\operatorname{supp}(\Theta_K(v \otimes \mathbf{s})) \subseteq \operatorname{supp}(\mathbf{s}) \subseteq K$. Por lo tanto, $\Theta_K(v \otimes \mathbf{s}) \in \Gamma_K^k(V \otimes \mathbf{F})$. Extendiendo por linealidad, obtenemos

un mapeo lineal

$$\Theta_K\colon V\otimes\Gamma_K^k(\mathbf{F})\longrightarrow\Gamma_K^k(V\otimes\mathbf{F}).$$

Veamos que es sobreyectivo. Tomemos una base $\{e_1,\dots,e_r\}$ de $V$ y sea $\{\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^r\}$ la base dual de $V^*$. Si $\sigma\in\Gamma_K^k(V\otimes\mathbf{F})$, definimos $\sigma_i(y):=(\varepsilon^i\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{F}_y})(\sigma(y))$ para $i\in\{1,\dots,r\}$.
Como $\varepsilon^i\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{F}}$ define un homomorfismo suave de haces $V\otimes\mathbf{F}\longrightarrow\mathbf{F}$, se sigue que $\sigma_i$ es de clase $C^k$. Además, si $y\notin K$, entonces $\sigma(y)=0$ y por lo tanto $\sigma_i(y)=0$. Así, $\sigma_i\in\Gamma_K^k(\mathbf{F})$.
Para cada $y\in N$, usando la base $\{e_i\}$, se tiene $\sigma(y)=\sum_{i=1}^r e_i\otimes\sigma_i(y)$. Por lo tanto, $\sigma=\Theta_K\left(\sum_{i=1}^r e_i\otimes\sigma_i\right)$. Esto prueba que $\Theta_K$ es sobreyectivo.
Probemos ahora la inyectividad. Supongamos que

$$\Theta_K\left(\sum_{i=1}^r e_i\otimes\mathbf{s}_i\right)=0,\qquad \mathbf{s}_i\in\Gamma_K^k(\mathbf{F}).$$

Entonces, para todo $y\in N$, $\sum_{i=1}^r e_i\otimes\mathbf{s}_i(y)=0$ en $V\otimes\mathbf{F}_y$. Al componer con $\varepsilon^j\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{F}_y}$, obtenemos $\mathbf{s}_j(y)=0$ para todo $y\in N$. Como esto vale para todo $j\in\{1,\dots,r\}$, se sigue que $\mathbf{s}_j=0$ para todo $j$. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^r e_i\otimes\mathbf{s}_i=0$ en $V\otimes\Gamma_K^k(\mathbf{F})$, y $\Theta_K$ es inyectivo.
Finalmente probemos la afirmación topológica. La conexión de $\mathbf{F}$ y la conexión trivial de $N\times V$ inducen una conexión en $V\otimes\mathbf{F}$. Si $\sigma=\sum_{i=1}^r e_i\otimes\mathbf{s}_i$, entonces, para $0\le j\le k$, $\nabla^j\sigma=\sum_{i=1}^r e_i\otimes\nabla^j\mathbf{s}_i$. Como $V$ es de dimensión finita, existen constantes $A,B>0$, dependientes de la base y de las métricas fijadas pero independientes de las secciones, tales que para todo $y\in K$ y $0\le j\le k$,

$$A\max_{1\le i\le r}|\nabla^j\mathbf{s}_i(y)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}\le\left|\sum_{i=1}^r e_i\otimes\nabla^j\mathbf{s}_i(y)\right|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{V\otimes\mathbf{F}}}\le B\max_{1\le i\le r}|\nabla^j\mathbf{s}_i(y)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}.$$

Tomando supremo en $y\in K$ y máximo sobre $0\le j\le k$, obtenemos constantes $C_1,C_2>0$ tales que

$$C_1\max_{1\le i\le r}\|\mathbf{s}_i\|_{C^k(K,\mathbf{F})}\le\left\|\Theta_K\left(\sum_{i=1}^r e_i\otimes\mathbf{s}_i\right)\right\|_{C^k(K,V\otimes\mathbf{F})}\le C_2\max_{1\le i\le r}\|\mathbf{s}_i\|_{C^k(K,\mathbf{F})}.$$

Para la base fija $(e_i)$, la cantidad $\max_{1\le i\le r}\|\mathbf{s}_i\|_{C^k(K,\mathbf{F})}$ es equivalente a la norma proyectiva de $\sum_{i=1}^r e_i\otimes\mathbf{s}_i$. Estas desigualdades muestran que $\Theta_K$ y $\Theta_K^{-1}$ son continuas. □

**Corolario 10.2.50.** Sea $N$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{F}\longrightarrow N$ un haz vectorial suave y sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces, para todo $k\in\mathbb{N}_0$, el mapeo lineal

$$\Theta: V\otimes\mathcal{D}^k(N,\mathbf{F})\longrightarrow\mathcal{D}^k(N,V\otimes\mathbf{F}),\qquad \Theta(v\otimes\mathbf{s})(y):=v\otimes\mathbf{s}(y),$$

extendido por linealidad, es un isomorfismo lineal continuo con inversa continua.

*Demostración.* Recordemos que $\mathcal{D}^k(N,\mathbf{F}) = \Gamma_c^k(\mathbf{F})$ y que este espacio se dota de la topología inductiva

$$\mathcal{D}^k(N,\mathbf{F}) = \varinjlim_{\ell\in\mathbb{N}} \Gamma^k_{K_\ell}(\mathbf{F}),$$

donde $(K_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ es una exhaustión creciente de $N$ por compactos. De igual manera,

$$\mathcal{D}^k(N, V\otimes\mathbf{F}) = \varinjlim_{\ell\in\mathbb{N}} \Gamma^k_{K_\ell}(V\otimes\mathbf{F}).$$

Para cada $\ell$, la Proposición 10.2.49 proporciona un isomorfismo lineal continuo con inversa continua

$$\Theta_{K_\ell} : V\otimes\Gamma^k_{K_\ell}(\mathbf{F}) \longrightarrow \Gamma^k_{K_\ell}(V\otimes\mathbf{F}).$$

Además, si $K_\ell \subseteq K_{\ell'}$, los mapeos correspondientes son compatibles con las inclusiones naturales, pues todos están definidos por la misma fórmula $v\otimes\mathbf{s}\mapsto(y\mapsto v\otimes\mathbf{s}(y))$.
Por lo tanto, los isomorfismos $\Theta_{K_\ell}$ inducen un mapeo lineal

$$\Theta : V\otimes\mathcal{D}^k(N,\mathbf{F}) \longrightarrow \mathcal{D}^k(N, V\otimes\mathbf{F}).$$

Probemos que este mapeo es biyectivo. Si $\mathbf{s}\in\mathcal{D}^k(N,\mathbf{F})$, entonces existe $\ell$ tal que $\mathbf{s}\in\Gamma^k_{K_\ell}(\mathbf{F})$; por la proposición anterior, $\Theta(v\otimes\mathbf{s})\in\Gamma^k_{K_\ell}(V\otimes\mathbf{F})\subseteq\mathcal{D}^k(N,V\otimes\mathbf{F})$. Esto muestra que $\Theta$ está bien definido.
Sea ahora $\sigma\in\mathcal{D}^k(N,V\otimes\mathbf{F})$. Entonces existe $\ell$ tal que $\sigma\in\Gamma^k_{K_\ell}(V\otimes\mathbf{F})$. Por la Proposición 10.2.49, existen $\mathbf{s}_1,\dots,\mathbf{s}_r\in\Gamma^k_{K_\ell}(\mathbf{F})$ tales que

$$\sigma = \sum_{i=1}^r e_i\otimes\mathbf{s}_i.$$

Como $\mathbf{s}_i\in\mathcal{D}^k(N,\mathbf{F})$, obtenemos que

$$\sigma = \Theta\left(\sum_{i=1}^r e_i\otimes\mathbf{s}_i\right).$$

Esto prueba la sobreyectividad. La inyectividad se obtiene del mismo modo usando un compacto que contenga los soportes de todas las secciones involucradas y aplicando la inyectividad de $\Theta_K$ en ese compacto.
Finalmente, la continuidad de $\Theta$ y de su inversa se deduce de la definición de la topología inductiva, pues basta verificarla sobre cada espacio $\Gamma^k_{K_\ell}$, donde ya fue probada en la Proposición 10.2.49. Esto prueba que $\Theta$ es un isomorfismo topológico. □

Aplicaremos este corolario con $V=\mathbf{E}_x$ y con el haz $\mathbf{F}^*$ sobre $N$. Así, para cada $x\in M$, tenemos un isomorfismo canónico

$$\mathbf{E}_x\otimes\mathcal{D}^k(N,\mathbf{F}^*)\cong\mathcal{D}^k(N,\mathbf{E}_x\otimes\mathbf{F}^*).$$

Esto justifica la acción de una distribución en la variable $y$ sobre secciones de $\mathbf{E}_x\otimes\mathbf{F}^*$.

**Lema 10.2.51.** Sean $(M,\mathbf{g})$ y $(N,\tilde{\mathbf{g}})$ variedades riemannianas con o sin frontera, provistas de sus respectivas medidas de Riemann–Lebesgue $\lambda_{\mathbf{g}}$ y $\lambda_{\tilde{\mathbf{g}}}$. Sean $\mathbf{E}\longrightarrow M$ y $\mathbf{F}\longrightarrow N$ haces vectoriales suaves, sea $K\subseteq N$ compacto y sea $\varphi\in\Gamma^k(M\times N,\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{F}^*)$ una sección tal que $\operatorname{supp}(\varphi)\subseteq M\times K$.
Sea $m<k$ y sea $\mathbf{T}\in\mathcal{D}'(N,\mathbf{F},\mathbb{K})$ una distribución de orden $m$. Entonces el mapeo $\mathbf{f}\colon M\longrightarrow\mathbf{E}$ dado por

$\mathbf{f}(x) := \mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot))$ define una sección en $\Gamma^{k-m}(M,\mathbf{E})$ con soporte contenido en la proyección de $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi})$ sobre el primer factor, es decir,

$$\operatorname{supp}(\mathbf{f}) \subseteq \{x \in M \mid \exists y \in K \text{ tal que } (x,y) \in \operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi})\}.$$

Además, si $P$ es un operador diferencial lineal de orden $\leq k-m$ actuando sobre secciones de $\mathbf{E}$, entonces

$$P\mathbf{f} = \mathbf{T}(P_x \boldsymbol{\varphi}(x,\cdot)),$$

donde $P_x$ indica que $P$ actúa en la variable $x$.
En particular, si $\boldsymbol{\varphi}$ es suave con soporte compacto y $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(N,\mathbf{F},\mathbb{K})$ es una distribución arbitraria, entonces $\mathbf{f}$ es una sección suave de $\mathbf{E}$ con soporte compacto.

*Demostración.* Primero explicamos el significado de la expresión $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot))$. Fijemos $x \in M$. Como $\boldsymbol{\varphi}(x,y) \in \mathbf{E}_x \otimes \mathbf{F}^*_y$, la sección $\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot)$ pertenece a $\mathcal{D}^k(N,\mathbf{E}_x \otimes \mathbf{F}^*)$. Además, como $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) \subseteq M \times K$, se tiene $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot)) \subseteq K$.
Por el Corolario 10.2.50, aplicado a $V = \mathbf{E}_x$ y al haz $\mathbf{F}^*$, existe un isomorfismo canónico

$$\mathbf{E}_x \otimes \mathcal{D}^k(N,\mathbf{F}^*) \cong \mathcal{D}^k(N,\mathbf{E}_x \otimes \mathbf{F}^*).$$

Por lo tanto, podemos considerar $\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot)$ como un elemento de $\mathbf{E}_x \otimes \mathcal{D}^k(N,\mathbf{F}^*)$. Si escribimos

$$\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot) = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes \boldsymbol{\varphi}_i(x,\cdot),$$

con $v_i \in \mathbf{E}_x$ y $\boldsymbol{\varphi}_i(x,\cdot) \in \mathcal{D}^k(N,\mathbf{F}^*)$, definimos

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot)) := (\mathrm{id}_{\mathbf{E}_x} \otimes \mathbf{T})(\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot)) = \sum_{i=1}^{r} v_i\, \mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}_i(x,\cdot)).$$

Esta definición no depende de la descomposición elegida, porque proviene del mapeo lineal $\mathrm{id}_{\mathbf{E}_x} \otimes \mathbf{T}$. Por simplicidad escribiremos $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot))$ en lugar de $(\mathrm{id}_{\mathbf{E}_x} \otimes \mathbf{T})(\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot))$.
Probemos ahora que $\mathbf{f}$ es de clase $C^{k-m}$. Como la cuestión es local en $M$, tomamos una carta coordenada y una trivialización local de $\mathbf{E}$. Identificando la carta con un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, podemos suponer localmente que $\mathbf{E} \restriction_U \cong U \times \mathbb{K}^r$. Por la independencia de las normas $C^m$ respecto de la métrica y de la conexión en compactos, podemos trabajar localmente con la conexión trivial y la norma euclidiana en el factor $\mathbb{K}^r$. Fijamos además una métrica fibrada auxiliar $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$ y una conexión en $\mathbf{F}$; en $\mathbb{K}^r \otimes \mathbf{F}^*$ usamos la métrica producto $h_{\mathrm{prod}}$ inducida por la norma euclidiana y por $\mathbf{h}^*_{\mathbf{F}}$. La afirmación global se obtiene al variar la carta y la trivialización.
Fijemos $x_0 \in U$ y tomemos una vecindad compacta y convexa $U' \subseteq U$ de $x_0$. Como $\boldsymbol{\varphi}$ es de clase $C^k$ y tiene soporte en la variable $y$ contenido en $K$, para todo multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| \leq k-m$ se tiene

$$D^{\alpha}_x \boldsymbol{\varphi}(x,\cdot) \in \mathcal{D}^m(N,\mathbb{K}^r \otimes \mathbf{F}^*)$$

para todo $x \in U'$.
Usamos la fórmula de Taylor con residuo integral en la variable $x$, centrada en $x_0$, hasta orden $k-m$. Para

$x \in U'$ y $y \in N$ tenemos

$$\boldsymbol{\varphi}(x,y) = \sum_{|\alpha|\le k-m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,y)(x-x_0)^\alpha$$

$$+ \sum_{|\alpha|=k-m} \frac{k-m}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-m-1} \left[ D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}((1-t)x_0 + tx, y) - D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,y) \right] dt\, (x-x_0)^\alpha.$$

Definamos, para $|\alpha| = k-m$,

$$R_\alpha(x,\cdot) := \int_0^1 (1-t)^{k-m-1} \left[ D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}((1-t)x_0 + tx, \cdot) - D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,\cdot) \right] dt.$$

Entonces

$$\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot) = \sum_{|\alpha|\le k-m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,\cdot)(x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k-m} \frac{k-m}{\alpha!} R_\alpha(x,\cdot)(x-x_0)^\alpha.$$

Como $D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,\cdot) \in \mathcal{D}^m(N, \mathbb{K}^r \otimes \mathbf{F}^*)$ para $|\alpha| \le k-m$, y como $\mathbf{T}$ tiene orden $m$ sobre $K$, podemos aplicar $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^r} \otimes \mathbf{T}$ a cada término. Obtenemos

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot)) = \sum_{|\alpha|\le k-m} \frac{1}{\alpha!} \mathbf{T}\big(D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,\cdot)\big)(x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k-m} \frac{k-m}{\alpha!} \mathbf{T}(R_\alpha(x,\cdot))(x-x_0)^\alpha.$$

Probemos que $\mathbf{T}(R_\alpha(x,\cdot)) \to 0$ cuando $x \to x_0$. Aquí $\nabla_y^j$ denota la conexión iterada que actúa sólo en el factor $N$ del haz $\mathbb{K}^r \otimes \mathbf{F}^*$. Como $D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}$ es de clase $C^m$ en la variable $y$ y continua en $x$, las secciones $\nabla_y^j D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x,y)$, con $0 \le j \le m$, son continuas en $U' \times K$. Como $U' \times K$ es compacto, son uniformemente continuas. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, entonces para todo $t \in [0,1]$, todo $y \in K$ y todo $0 \le j \le m$,

$$\left| \nabla_y^j D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}((1-t)x_0 + tx, y) - \nabla_y^j D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,y) \right|_{\widetilde{g}, h_{\mathrm{prod}}} < \varepsilon.$$

De aquí se sigue que

$$\|R_\alpha(x,\cdot)\|_{C^m(K, \mathbb{K}^r \otimes \mathbf{F}^*)} \le \varepsilon \int_0^1 (1-t)^{k-m-1}\, dt = \frac{\varepsilon}{k-m}.$$

En consecuencia, $\|R_\alpha(x,\cdot)\|_{C^m(K, \mathbb{K}^r \otimes \mathbf{F}^*)} \to 0$ cuando $x \to x_0$.
Como $\mathbf{T}$ es de orden $m$, existe una constante $C_K > 0$ tal que

$$|\mathbf{T}(\boldsymbol{\psi})| \le C_K \|\boldsymbol{\psi}\|_{C^m(K, \mathbf{F}^*)}$$

para toda sección de prueba $\boldsymbol{\psi}$ de $\mathbf{F}^*$ con soporte contenido en $K$. Usando esta estimación componente a componente en $\mathbb{K}^r \otimes \mathbf{F}^*$ y aumentando $C_K$ si es necesario, obtenemos

$$|\mathbf{T}(R_\alpha(x,\cdot))|_{\mathbb{K}^r} \le C_K \|R_\alpha(x,\cdot)\|_{C^m(K, \mathbb{K}^r \otimes \mathbf{F}^*)} \longrightarrow 0.$$

Así, la expresión anterior de $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot))$ muestra que $\mathbf{f}$ admite en $x_0$ una expansión de Taylor de orden $k-m$ con coeficientes $\mathbf{T}(D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,\cdot))$. Por lo tanto,

$$D_x^\alpha \mathbf{f}(x_0) = \mathbf{T}(D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,\cdot)), \qquad |\alpha| \le k-m.$$

Resta verificar que estas derivadas son continuas. Sea $|\alpha| \le k-m$. Para $x, x_0 \in U'$, usando de nuevo que $\mathbf{T}$

tiene orden $m$ sobre $K$, tenemos

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha \mathbf{f}(x) - D_x^\alpha \mathbf{f}(x_0)|_{\mathbb{K}^r} &= \left|\mathbf{T}(D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x,\cdot) - D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,\cdot))\right|_{\mathbb{K}^r} \\ &\leq C_K \|D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x,\cdot) - D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x_0,\cdot)\|_{C^m(K,\mathbb{K}^r\otimes\mathbf{F}^*)}.\end{aligned}$$

El último término tiende a 0 cuando $x \to x_0$, por la continuidad uniforme de las derivadas en $U' \times K$. Así, $D_x^\alpha \mathbf{f}$ es continua. Como $x_0$ era arbitrario, concluimos que $\mathbf{f} \in \Gamma^{k-m}(M,\mathbf{E})$.
Probemos ahora la afirmación sobre el soporte. Como $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi})$ es cerrado en $M \times N$ y está contenido en $M \times K$, con $K$ compacto, su proyección sobre $M$ es cerrada. Si $x$ no pertenece a dicha proyección, existe una vecindad $U_x$ de $x$ tal que $(U_x \times K) \cap \operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) = \varnothing$. Por lo tanto, $\boldsymbol{\varphi}(x,\cdot) = 0$ y, en consecuencia, $\mathbf{f}(x) = 0$. Esto prueba la inclusión de soportes.
Sea ahora $P$ un operador diferencial lineal de orden $\leq k-m$ actuando sobre secciones de $\mathbf{E}$. En coordenadas locales, $P$ es una combinación finita de derivadas en la variable $x$ de orden a lo más $k-m$ con coeficientes suaves y homomorfismos de haces. Como ya probamos que

$$D_x^\alpha \mathbf{f}(x) = \mathbf{T}(D_x^\alpha \boldsymbol{\varphi}(x,\cdot)) \qquad |\alpha| \leq k-m,$$

al combinar linealmente estas identidades con los coeficientes de $P$, obtenemos

$$(P\mathbf{f})(x) = \mathbf{T}(P_x \boldsymbol{\varphi}(x,\cdot)).$$

Por localidad, esta identidad no depende de la carta ni de la trivialización.
Finalmente, supongamos que $\boldsymbol{\varphi}$ es suave con soporte compacto y que $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(N,\mathbf{F},\mathbb{K})$ es una distribución arbitraria. Como $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi})$ es compacto en $M \times N$, existe un compacto $K \subseteq N$ tal que $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) \subseteq M \times K$. Además, la proyección de $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi})$ sobre $M$ es compacta. Por la definición de distribución, para ese compacto $K$ existe un entero $m_K$ tal que $\mathbf{T}$ tiene orden $\leq m_K$ sobre $K$. Como $\boldsymbol{\varphi}$ es suave, podemos aplicar lo ya probado con cualquier $k > m_K$. Así, $\mathbf{f}$ es de clase $C^\ell$ para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$, y por lo tanto es suave. La afirmación sobre el soporte compacto se sigue de la inclusión de soportes ya demostrada y de que la proyección de un compacto bajo $M \times N \to M$ es compacta. □

El resultado anterior permite evaluar una distribución en una de las variables de una sección definida sobre un producto. La sección obtenida en la variable restante pierde, a lo más, tantas derivadas como indique el orden de la distribución.

### 10.2.4 Tensorización de espacios de prueba

La descripción topológica de las secciones de prueba sobre $M \times N$ se obtiene primero con soportes fijos y después se pasa al límite inductivo. En la primera etapa aparecen productos proyectivos de espacios de Fréchet nucleares. En la segunda interviene el producto inductivo, que es el que linealiza los mapeos bilineales separadamente continuos sobre espacios $LF$. Las definiciones y los resultados abstractos sobre estas topologías se encuentran en la Sección B.12.

**Lema 10.2.52.** (Localización en modelos con caras) Sean $U \subseteq G_{m,r} := \mathbb{R}^{m-r} \times [0,\infty)^r$ y $V \subseteq G_{n,s}$ abiertos relativos. Para todo compacto $C \subseteq U$, el espacio $\mathcal{D}_C(U)$ de funciones suaves hasta las caras con soporte en

$C$ es nuclear de Fréchet. Si

$$C_0 \subseteq \operatorname{Int}_{G_{m,r}}(C_1) \subseteq U, \qquad D_0 \subseteq \operatorname{Int}_{G_{n,s}}(D_1) \subseteq V$$

son compactos, existe un operador lineal continuo

$$\mathscr{R} : \mathcal{D}_{C_0 \times D_0}(U \times V) \longrightarrow \mathcal{D}_{C_1}(U) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_{D_1}(V)$$

cuya composición con el producto de funciones es la identidad.

*Demostración.* Para $f \in \mathcal{D}_C(U)$, su extensión por cero al complemento de $U$ en $G_{m,r}$ es suave: el soporte $C$ está contenido en el abierto relativo $U$. Esta operación sólo atraviesa el borde del abierto dentro del modelo. A continuación aplicamos el operador $E_{m,r}$ del Lema B.12.19. Obtenemos un mapeo continuo

$$J_C : \mathcal{D}_C(U) \longrightarrow \mathcal{D}_{\widehat{C}}(\mathbb{R}^m), \qquad J_C f = E_{m,r}\widetilde{f},$$

para un compacto fijo $\widehat{C}$. La restricción a $U$ es inversa de $J_C$ sobre su imagen y es continua para todos los seminormas de derivadas. Esta imagen es cerrada. En efecto, si $J_C f_j \to h$ en $\mathcal{D}_{\widehat{C}}(\mathbb{R}^m)$, las restricciones convergen en todas las derivadas a $f = h|_U$, que tiene soporte en $C$; la continuidad de la extensión da $J_C f = h$. Así $\mathcal{D}_C(U)$ es isomorfo a un subespacio cerrado de un espacio nuclear de Fréchet, y la primera afirmación se sigue del Corolario B.12.20 y la Proposición B.12.15.

Para construir $\mathscr{R}$, prolongamos primero $\Phi \in \mathcal{D}_{C_0 \times D_0}(U \times V)$ por cero a $G_{m,r} \times G_{n,s}$ y después extendemos en cada grupo de variables:

$$\widehat{\Phi} := E^x_{m,r} E^y_{n,s} \widetilde{\Phi}.$$

La extensión depende continuamente de $\Phi$ en todos los seminormas y tiene soporte en $A_0 \times B_0$, para compactos fijos $A_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ y $B_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. Esto se obtiene aplicando el control del soporte en cada grupo y tratando el otro como parámetro. Elegimos compactos $A_1, B_1$ que contengan a $A_0, B_0$ en sus respectivos interiores. El Lema B.12.22 proporciona un operador continuo

$$R_{\mathrm{eucl}} : \mathcal{D}_{A_0 \times B_0}(\mathbb{R}^{m+n}) \longrightarrow \mathcal{D}_{A_1}(\mathbb{R}^m) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_{B_1}(\mathbb{R}^n)$$

que recupera cada función al aplicar el producto externo. Su construcción por series de Fourier sobre toros se aplica a $\widehat{\Phi}$, que es suave a través de todas las caras.

Tomamos $\chi \in \mathcal{D}_{C_1}(U)$ y $\eta \in \mathcal{D}_{D_1}(V)$ iguales a uno cerca de $C_0$ y $D_0$. Estas funciones se obtienen restringiendo funciones de corte euclidianas: la compacidad permite cubrir cada compacto menor por un número finito de bolas cuyas intersecciones con el modelo estén contenidas en el interior relativo del compacto mayor. Los mapeos

$$P(f) := \chi(f|_U), \qquad Q(g) := \eta(g|_V)$$

son continuos hacia $\mathcal{D}_{C_1}(U)$ y $\mathcal{D}_{D_1}(V)$ por la regla de Leibniz. Definimos

$$\mathscr{R}\Phi := (P \widehat{\otimes} Q) R_{\mathrm{eucl}} \widehat{\Phi}.$$

Todas las operaciones son continuas y, por la identidad de restricción de las extensiones, el producto de sus

factores es

$$\chi(x)\eta(y)\widehat{\Phi}|_{U\times V} = \chi(x)\eta(y)\Phi = \Phi.$$

Esto prueba la segunda afirmación. □

**Proposición 10.2.53.** (Nuclearidad de las secciones con soporte fijo) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito y sea $K \subseteq M$ compacto. Entonces $\Gamma_K(\mathbf{E})$ es un espacio nuclear de Fréchet.

*Demostración.* Por la Proposición 10.1.7, sólo falta probar la nuclearidad. Elegimos abiertos coordenados y trivializantes $U_1,\dots,U_s$ que cubran $K$, con $U_j$ relativamente compacto, y funciones $\chi_j \in C_c^\infty(U_j)$ tales que $\sum_{j=1}^{s}\chi_j = 1$ en una vecindad de $K$. Fijemos una carta $\kappa_j\colon U_j \longrightarrow \kappa_j(U_j)$, cuya imagen es un abierto relativo de $\mathbb{R}^{\dim M}$ o del semiespacio cerrado, y un marco local $(\mathbf{e}_{j,1},\dots,\mathbf{e}_{j,r})$ de $\mathbf{E}$ en $U_j$, donde $r = \operatorname{rank}(\mathbf{E})$.
Para $\mathbf{u} \in \Gamma_K(\mathbf{E})$ escribimos

$$(\chi_j\mathbf{u})|_{U_j} = \sum_{a=1}^{r} u_j^a \mathbf{e}_{j,a}$$

y ponemos $K_j := \kappa_j(K \cap \operatorname{supp}\chi_j)$. El mapeo

$$I\colon \Gamma_K(\mathbf{E}) \longrightarrow \prod_{j=1}^{s} \mathcal{D}_{K_j}(\kappa_j(U_j))^r, \qquad I(\mathbf{u}) := \left(u_j^a \circ \kappa_j^{-1}\right)_{j,a},$$

es lineal y continuo. Definimos un mapeo en sentido contrario por

$$S\left((v_j^a)_{j,a}\right) := \sum_{j=1}^{s} \left( \sum_{a=1}^{r} \widetilde{(v_j^a \circ \kappa_j)\mathbf{e}_{j,a}} \right)^M.$$

La tilde con superíndice $M$ denota la extensión por cero desde $U_j$ hasta $M$. Cada sección dentro de la suma tiene soporte en el compacto $\kappa_j^{-1}(K_j) \Subset U_j$, por lo que esta extensión es suave. Además, $\kappa_j^{-1}(K_j) \subseteq K$, de modo que $S$ toma valores en $\Gamma_K(\mathbf{E})$. Las expresiones locales de las derivadas muestran que $S$ es continuo: cada seminorma $C^k$ de un sumando está acotada por una suma finita de seminormas $C^k$ de sus funciones componentes.
Como $\sum_{j=1}^{s}\chi_j = 1$ en una vecindad de $K$ y $\mathbf{u}$ se anula fuera de $K$, se tiene $S(I(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \Gamma_K(\mathbf{E})$. En consecuencia, $I$ es un encaje topológico e $I \circ S$ es una proyección continua sobre su imagen. Esta imagen es, por lo tanto, un subespacio complementado del producto finito.
Cada espacio $\mathcal{D}_{K_j}(\kappa_j(U_j))$ es nuclear por el Lema 10.2.52. La Proposición B.12.15 muestra que el producto finito y su subespacio complementado $I(\Gamma_K(\mathbf{E}))$ son nucleares. Puesto que $I$ es un isomorfismo topológico sobre su imagen, $\Gamma_K(\mathbf{E})$ es nuclear. El mismo argumento con cartas de cuadrantes prueba la afirmación para los productos con esquinas de la Observación 10.2.45. □

**Teorema 10.2.54.** (Tensorización localizada de secciones) Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera,

y sean $\mathbf{E} \to M$ y $\mathbf{F} \to N$ haces vectoriales suaves de rango finito. Sean compactos

$$K_0 \subseteq \operatorname{Int}(K_1) \subseteq M, \qquad L_0 \subseteq \operatorname{Int}(L_1) \subseteq N.$$

El producto externo induce un encaje topológico

$$T_{K_1,L_1} : \Gamma_{K_1}(\mathbf{E}) \widehat{\otimes}_\pi \Gamma_{L_1}(\mathbf{F}) \longrightarrow \Gamma_{K_1\times L_1}(\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F}).$$

Su imagen contiene a $\Gamma_{K_0\times L_0}(\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F})$ y la restricción de $T^{-1}_{K_1,L_1}$ a este subespacio es continua.

*Demostración.* Las estimaciones locales para las derivadas de $u \boxtimes v$ muestran que el mapeo bilineal

$$\Gamma_{K_1}(\mathbf{E}) \times \Gamma_{L_1}(\mathbf{F}) \longrightarrow \Gamma_{K_1\times L_1}(\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F})$$

es continuo. La propiedad universal del producto proyectivo y la completitud del espacio de llegada proporcionan el operador continuo $T_{K_1,L_1}$.
Construiremos primero una preimagen continua para las secciones con soporte en $K_0 \times L_0$. Elegimos abiertos coordenados y trivializantes

$$U_1, \dots, U_A \Subset \operatorname{Int}(K_1), \qquad V_1, \dots, V_B \Subset \operatorname{Int}(L_1),$$

que cubran $K_0$ y $L_0$. Sean $(\mathbf{e}_{i,1}, \dots, \mathbf{e}_{i,r})$ y $(\mathbf{f}_{j,1}, \dots, \mathbf{f}_{j,s})$ los marcos locales. Tomamos funciones de corte $\chi_i \in C^\infty_c(U_i)$ y $\eta_j \in C^\infty_c(V_j)$ tales que

$$\sum_{i=1}^{A} \chi_i = 1 \quad \text{en una vecindad de } K_0, \qquad \sum_{j=1}^{B} \eta_j = 1 \quad \text{en una vecindad de } L_0.$$

Denotemos las cartas por $\kappa_i \colon U_i \longrightarrow \kappa_i(U_i)$ y $\lambda_j \colon V_j \longrightarrow \lambda_j(V_j)$. Elegimos compactos $\widetilde{C}_i \Subset \kappa_i(U_i)$ y $\widetilde{D}_j \Subset \lambda_j(V_j)$ cuyos interiores contienen, respectivamente,

$$C_i := \kappa_i(K_0 \cap \operatorname{supp}(\chi_i)), \qquad D_j := \lambda_j(L_0 \cap \operatorname{supp}(\eta_j)).$$

Sea $\mathbf{\Phi} \in \Gamma_{K_0\times L_0}(\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F})$. En $U_i \times V_j$ escribimos

$$(\chi_i \boxtimes \eta_j)\mathbf{\Phi} = \sum_{a=1}^{r} \sum_{b=1}^{s} \big(\Phi^{ab}_{ij} \circ (\kappa_i \times \lambda_j)\big)\mathbf{e}_{i,a} \boxtimes \mathbf{f}_{j,b},$$

donde

$$\Phi^{ab}_{ij} \in \mathcal{D}_{C_i\times D_j}\big(\kappa_i(U_i) \times \lambda_j(V_j)\big).$$

La extracción de cada coeficiente es continua en las topologías de soporte fijo. El Lema 10.2.52 proporciona un operador continuo

$$\mathscr{R}_{ij} : \mathcal{D}_{C_i\times D_j}\big(\kappa_i(U_i) \times \lambda_j(V_j)\big) \longrightarrow \mathcal{D}_{\widetilde{C}_i}(\kappa_i(U_i)) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_{\widetilde{D}_j}(\lambda_j(V_j))$$

cuya composición con el producto de funciones es la identidad.

Para $h \in \mathcal{D}_{\widetilde{C}_i}(\kappa_i(U_i))$, la sección $(h \circ \kappa_i)\mathbf{e}_{i,a}$ tiene soporte en $\kappa_i^{-1}(\widetilde{C}_i) \Subset U_i$. Denotamos por

$$\widetilde{(h \circ \kappa_i)\mathbf{e}_{i,a}}^{M}$$

su extensión por cero desde $U_i$ hasta $M$. Si $k \in \mathcal{D}_{\widetilde{D}_j}(\lambda_j(V_j))$, denotamos por

$$\widetilde{(k \circ \lambda_j)\mathbf{f}_{j,b}}^{N}$$

para la extensión por cero desde $V_j$ hasta $N$. Definimos

$$P_{i,a}(h) := \widetilde{(h \circ \kappa_i)\mathbf{e}_{i,a}}^{M}, \qquad Q_{j,b}(k) := \widetilde{(k \circ \lambda_j)\mathbf{f}_{j,b}}^{N}.$$

Estas extensiones son suaves y los mapeos $P_{i,a}$ y $Q_{j,b}$ son continuos. Además, toman valores en $\Gamma_{K_1}(\mathbf{E})$ y $\Gamma_{L_1}(\mathbf{F})$ porque sus soportes están contenidos en $\operatorname{Int}(K_1)$ y $\operatorname{Int}(L_1)$. Por la propiedad universal del producto proyectivo, $P_{i,a}\widehat{\otimes}Q_{j,b}$ es continuo. Ponemos

$$R_{K_0,L_0}^{K_1,L_1}\mathbf{\Phi} := \sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}\sum_{a=1}^{r}\sum_{b=1}^{s}(P_{i,a}\widehat{\otimes}Q_{j,b})\mathscr{R}_{ij}(\Phi_{ij}^{ab}).$$

La suma es finita, de modo que $R_{K_0,L_0}^{K_1,L_1}$ es continuo. Al aplicar $T_{K_1,L_1}$, cada término recupera el coeficiente correspondiente de $(\chi_i \boxtimes \eta_j)\mathbf{\Phi}$. Por las identidades de partición de la unidad,

$$T_{K_1,L_1}R_{K_0,L_0}^{K_1,L_1}\mathbf{\Phi} = \sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}(\chi_i \boxtimes \eta_j)\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}.$$

Falta probar que $T_{K_1,L_1}$ es un encaje topológico. Cubrimos $K_1$ y $L_1$ por un número finito de cartas trivializantes $(U_\alpha, \kappa_\alpha)$ y $(V_\beta, \lambda_\beta)$. Elegimos funciones de corte $\zeta_\alpha \in C_c^\infty(U_\alpha)$ y $\theta_\beta \in C_c^\infty(V_\beta)$ cuyas sumas sean iguales a uno en vecindades de $K_1$ y $L_1$. Al tomar las componentes de $\zeta_\alpha u$ y $\theta_\beta v$ en los marcos locales, las extendemos primero por cero dentro de sus modelos coordenados y después mediante el Lema B.12.19 al espacio euclidiano completo. En las cartas interiores este último operador es la identidad. Obtenemos encajes topológicos

$$I_{\mathbf{E}} : \Gamma_{K_1}(\mathbf{E}) \hookrightarrow \prod_{c=1}^{C}\mathcal{D}_{A_c}(\mathbb{R}^{\dim M}), \qquad I_{\mathbf{F}} : \Gamma_{L_1}(\mathbf{F}) \hookrightarrow \prod_{d=1}^{D}\mathcal{D}_{B_d}(\mathbb{R}^{\dim N}).$$

El índice $c$ recorre las parejas formadas por una carta del primer factor y una componente del marco, y $d$ recorre las parejas análogas del segundo factor. Sean los compactos de soporte antes de la extensión

$$A_c^0 = \kappa_\alpha(K_1 \cap \operatorname{supp}(\zeta_\alpha)), \qquad B_d^0 = \lambda_\beta(L_1 \cap \operatorname{supp}(\theta_\beta)),$$

repetidos una vez por cada componente. Elegimos $A_c$ y $B_d$ que contengan los soportes fijos de sus extensiones suaves. Si, por ejemplo, $u_\alpha^a$ es la componente de $\zeta_\alpha u$ en $U_\alpha$, la coordenada correspondiente de $I_{\mathbf{E}}u$ es $E_\alpha\big(\widetilde{u_\alpha^a \circ \kappa_\alpha^{-1}}\big)$, donde la tilde denota la extensión por cero desde $\kappa_\alpha(U_\alpha)$ a su modelo $G_{\dim M, r_\alpha}$, y

$E_\alpha = E_{\dim M, r_\alpha}$, con $r_\alpha \in \{0,1\}$. La extensión con tilde es suave porque $\operatorname{supp}(\zeta_\alpha) \Subset U_\alpha$, y $E_\alpha$ prolonga suavemente sus jets a través de la frontera geométrica. La misma convención, con operadores $E_\beta$, se usa para $I_{\mathbf{F}}$.

Que $I_{\mathbf{E}}$ e $I_{\mathbf{F}}$ sean encajes se verifica con las seminormas $C^k$: las componentes están acotadas por seminormas de la sección, mientras que la identidad dada por las funciones de corte acota las seminormas de la sección mediante una suma finita de seminormas de sus componentes. La misma construcción, con $\zeta_\alpha \boxtimes \theta_\beta$ y con la extensión $E^x_\alpha E^y_\beta$ de cada componente localizada, da un encaje

$$I_{\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{F}} : \Gamma_{K_1\times L_1}(\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{F}) \hookrightarrow \prod_{c,d} \mathcal{D}_{A_c\times B_d}(\mathbb{R}^{\dim M+\dim N}).$$

El control del soporte en cada grupo de variables permite usar precisamente los compactos $A_c \times B_d$. La identidad de productos del lema de extensión garantiza, para secciones elementales, que extender la componente de $u \boxtimes v$ equivale a multiplicar las componentes extendidas de $u$ y $v$. Por continuidad, la misma identidad vale en los productos tensoriales completados.

Por la Proposición 10.2.53, los dos espacios del dominio son nucleares. Los productos finitos del codominio también lo son. El Teorema B.12.14 permite identificar las topologías $\pi$ y $\varepsilon$, y la Proposición B.12.18 muestra que $I_{\mathbf{E}}\widehat{\otimes} I_{\mathbf{F}}$ es un encaje topológico. Después de aplicar la Proposición B.12.3, el producto externo se transforma, en cada coordenada $(c,d)$, en el mapeo escalar

$$\mathcal{D}_{A_c}(\mathbb{R}^{\dim M})\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_{B_d}(\mathbb{R}^{\dim N}) \longrightarrow \mathcal{D}_{A_c\times B_d}(\mathbb{R}^{\dim M+\dim N}),$$

que es un encaje por el Lema B.12.22.

Sea $(z_\gamma)$ una red en $\Gamma_{K_1}(\mathbf{E})\widehat{\otimes}_\pi\Gamma_{L_1}(\mathbf{F})$ y supongamos que $T_{K_1,L_1} z_\gamma \to 0$. La conmutatividad de los mapeos de localización implica que la imagen de $(I_{\mathbf{E}}\widehat{\otimes} I_{\mathbf{F}})z_\gamma$ bajo todos los encajes escalares anteriores converge a cero. Como su producto finito es un encaje, $(I_{\mathbf{E}}\widehat{\otimes} I_{\mathbf{F}})z_\gamma \to 0$. El mapeo $I_{\mathbf{E}}\widehat{\otimes} I_{\mathbf{F}}$ también es un encaje, por lo que $z_\gamma \to 0$. El mismo argumento aplicado a una red constante prueba la inyectividad de $T_{K_1,L_1}$. En consecuencia, su inversa sobre la imagen es continua. El operador construido al principio es, por inyectividad, la restricción de esa inversa a $\Gamma_{K_0\times L_0}(\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{F})$. □

**Teorema 10.2.55.** (Tensorización de espacios de prueba) Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera, y sean $\mathbf{E}\to M$ y $\mathbf{F}\to N$ haces vectoriales suaves de rango finito. El producto externo induce un isomorfismo topológico canónico

$$\mathcal{D}(M,\mathbf{E})\widehat{\otimes}_\iota \mathcal{D}(N,\mathbf{F}) \cong \mathcal{D}(M\times N, \mathbf{E}\boxtimes\mathbf{F}).$$

En particular, las combinaciones lineales finitas de secciones $\mathbf{u}\boxtimes\mathbf{v}$ son densas en $\mathcal{D}(M\times N,\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{F})$.

*Demostración.* Elijamos exhaustiones por compactos $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(L_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $K_j \subseteq \operatorname{Int}(K_{j+1})$ y $L_j \subseteq \operatorname{Int}(L_{j+1})$. Entonces $(K_j\times L_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una exhaustión de $M\times N$ con la misma propiedad.

Primero identificaremos la topología que aparece en el producto tensorial algebraico. La topología $\iota$ de $\mathcal{D}(M,\mathbf{E})\otimes\mathcal{D}(N,\mathbf{F})$ coincide con la topología final localmente convexa respecto de los mapeos

$$\Gamma_{K_p}(\mathbf{E})\otimes_\pi \Gamma_{L_q}(\mathbf{F}) \longrightarrow \mathcal{D}(M,\mathbf{E})\otimes\mathcal{D}(N,\mathbf{F}), \qquad p,q\in\mathbb{N}.$$

Para comprobarlo, sea $b\colon \mathcal{D}(M,\mathbf{E})\times\mathcal{D}(N,\mathbf{F}) \longrightarrow Z$ un mapeo bilineal. Si $b$ es separadamente continuo, su

restricción a $\Gamma_{K_p}(\mathbf{E}) \times \Gamma_{L_q}(\mathbf{F})$ también lo es. Estos dos espacios son de Fréchet, de modo que la Proposición B.12.10 hace continua la restricción. Recíprocamente, supongamos que todas las restricciones son continuas. Si $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(M,\mathbf{E})$, existe $p$ tal que $\mathbf{u} \in \Gamma_{K_p}(\mathbf{E})$. Para cada $q$, el mapeo $\mathbf{v} \mapsto b(\mathbf{u},\mathbf{v})$ es continuo en $\Gamma_{L_q}(\mathbf{F})$. La propiedad final de la topología $LF$ de $\mathcal{D}(N,\mathbf{F})$ implica que es continuo en todo ese espacio. El mismo argumento, con los factores intercambiados, prueba la continuidad respecto de la primera variable. La propiedad universal del producto inductivo, Proposición B.12.8, da la igualdad de topologías.
El producto externo es separadamente continuo. En efecto, si $\mathbf{v} \in \Gamma_{L_q}(\mathbf{F})$ está fijo, para cada $p$ las estimaciones locales $C^k$ muestran que $\mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u} \boxtimes \mathbf{v}$ es continuo de $\Gamma_{K_p}(\mathbf{E})$ en $\Gamma_{K_p \times L_q}(\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F})$. La propiedad final de la topología $LF$ prueba la continuidad en $\mathcal{D}(M,\mathbf{E})$. El otro factor se trata de la misma manera. Por consiguiente, el producto externo se linealiza en un operador continuo sobre $\mathcal{D}(M,\mathbf{E}) \otimes_\iota \mathcal{D}(N,\mathbf{F})$. Como $\mathcal{D}(M \times N, \mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F})$ es completo por el Teorema 4.4.6, este operador se extiende de manera única a

$$T : \mathcal{D}(M,\mathbf{E}) \widehat{\otimes}_\iota \mathcal{D}(N,\mathbf{F}) \longrightarrow \mathcal{D}(M \times N, \mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F}).$$

Construiremos la inversa de $T$. Para $\mathbf{\Phi} \in \Gamma_{K_j \times L_j}(\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F})$, el Teorema 10.2.54 proporciona un único elemento

$$R_j \mathbf{\Phi} \in \Gamma_{K_{j+1}}(\mathbf{E}) \widehat{\otimes}_\pi \Gamma_{L_{j+1}}(\mathbf{F})$$

cuya imagen exterior es $\mathbf{\Phi}$. El mapeo $R_j$ es continuo. La inclusión de las dos etapas de soporte fijo en los espacios de prueba induce un operador continuo desde este producto proyectivo completado hasta $\mathcal{D}(M,\mathbf{E}) \widehat{\otimes}_\iota \mathcal{D}(N,\mathbf{F})$.
Debemos comprobar que la definición no depende de la etapa. Supongamos que $j < q$ y que $\mathbf{\Phi} \in \Gamma_{K_j \times L_j}(\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F})$. Incluimos $R_j \mathbf{\Phi}$ y $R_q \mathbf{\Phi}$ en

$$\Gamma_{K_{q+1}}(\mathbf{E}) \widehat{\otimes}_\pi \Gamma_{L_{q+1}}(\mathbf{F}).$$

Las inclusiones usadas aquí son encajes topológicos. En efecto, los espacios de soporte fijo son nucleares por la Proposición 10.2.53, por lo que $\pi = \varepsilon$, y la afirmación se sigue de la Proposición B.12.18. Las dos preimágenes tienen imagen exterior igual a $\mathbf{\Phi}$. La inyectividad del Teorema 10.2.54, aplicada en la etapa $K_{q+1} \times L_{q+1}$, muestra que coinciden.
Podemos definir, por lo tanto,

$$R : \mathcal{D}(M \times N, \mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F}) \longrightarrow \mathcal{D}(M,\mathbf{E}) \widehat{\otimes}_\iota \mathcal{D}(N,\mathbf{F}), \qquad R\mathbf{\Phi} := R_j \mathbf{\Phi}$$

cuando $\operatorname{supp} \mathbf{\Phi} \subseteq K_j \times L_j$. Cada restricción de $R$ a $\Gamma_{K_j \times L_j}(\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F})$ es continua. La topología $LF$ del dominio es final respecto de estas etapas, de modo que $R$ es continuo. Por construcción, $T \circ R$ es la identidad.
Sean ahora $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(M,\mathbf{E})$ y $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(N,\mathbf{F})$. Elegimos $j$ de modo que $\operatorname{supp} \mathbf{u} \subseteq K_j$ y $\operatorname{supp} \mathbf{v} \subseteq L_j$. Los elementos $R(\mathbf{u} \boxtimes \mathbf{v})$ y $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, considerados en la etapa correspondiente, tienen la misma imagen bajo el producto externo. La inyectividad localizada da

$$R(\mathbf{u} \boxtimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}.$$

Así, $R \circ T$ es la identidad sobre el producto tensorial algebraico. Este subespacio es denso en su completación, y la continuidad de $R \circ T$ extiende la identidad a todo $\mathcal{D}(M,\mathbf{E}) \widehat{\otimes}_\iota \mathcal{D}(N,\mathbf{F})$. Por lo tanto, $T$ y $R$ son isomorfismos topológicos inversos. La imagen del producto tensorial algebraico bajo $T$ es el espacio de las combinaciones lineales finitas de secciones $\mathbf{u} \boxtimes \mathbf{v}$, por lo que dicho espacio es denso en el espacio de prueba del producto. □

**Corolario 10.2.56.** (Descomposición tensorial con control de soporte) Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera, sean $\mathbf{E} \to M$ y $\mathbf{F} \to N$ haces vectoriales suaves de rango finito, y sean $K_0 \subseteq \operatorname{Int}(K_1) \subseteq M$ y $L_0 \subseteq \operatorname{Int}(L_1) \subseteq N$ compactos. Toda sección

$$\mathbf{\Phi} \in \Gamma_{K_0 \times L_0}(\mathbf{E}^* \boxtimes \mathbf{F}^*)$$

posee una única preimagen

$$u_{\mathbf{\Phi}} \in \Gamma_{K_1}(\mathbf{E}^*) \widehat{\otimes}_{\pi} \Gamma_{L_1}(\mathbf{F}^*)$$

bajo el mapeo exterior. Además, $\mathbf{\Phi} \mapsto u_{\mathbf{\Phi}}$ es continuo.

*Demostración.* Aplicamos el Teorema 10.2.54 a los haces $\mathbf{E}^*$ y $\mathbf{F}^*$. El mapeo exterior de la etapa $K_1 \times L_1$ es inyectivo y su imagen contiene a $\Gamma_{K_0 \times L_0}(\mathbf{E}^* \boxtimes \mathbf{F}^*)$. Por lo tanto, cada $\mathbf{\Phi}$ tiene una única preimagen $u_{\mathbf{\Phi}}$. La continuidad de $\mathbf{\Phi} \mapsto u_{\mathbf{\Phi}}$ es precisamente la continuidad de la inversa restringida a ese subespacio. □

### 10.2.5 El teorema del núcleo de Schwartz

Un operador continuo puede estudiarse como una distribución sobre el producto de las variedades de partida y llegada. En presencia de haces, el núcleo toma valores en el producto tensorial adecuado; la formulación siguiente hace explícita esa identificación.

**Teorema 10.2.57.** (Teorema del núcleo de Schwartz para haces vectoriales) Sean $M$ y $N$ variedades suaves con o sin frontera, sean $\mathbf{E} \to M$ y $\mathbf{F} \to N$ haces vectoriales suaves, y sea $W$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita.
Sea

$$A \colon \mathcal{D}(N, \mathbf{F}^*) \longrightarrow \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$$

un mapeo lineal, donde el espacio de llegada está dotado de la topología débil-$*$, o equivalentemente, de convergencia puntual de la Definición 10.2.1. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A$ es continuo;

(b) el mapeo bilineal

$$B_A \colon \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \times \mathcal{D}(N, \mathbf{F}^*) \longrightarrow W, \qquad B_A(\varphi, \psi) := (A\psi)(\varphi),$$

es separadamente continuo;

(c) para cualesquiera compactos $K \subseteq M$ y $L \subseteq N$, la restricción de $B_A$ a $\Gamma_K(\mathbf{E}^*) \times \Gamma_L(\mathbf{F}^*)$ es continua.

Cuando estas condiciones se satisfacen, existe una única distribución

$$\mathbf{K}_A \in \mathcal{D}'(M \times N, \mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F}, W)$$

tal que

$$\mathbf{K}_A(\varphi \boxtimes \psi) = (A\psi)(\varphi)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$ y toda $\psi \in \mathcal{D}(N, \mathbf{F}^*)$.

Recíprocamente, toda distribución $\mathbf{K} \in \mathcal{D}'(M \times N, \mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F}, W)$ define un mapeo lineal

$$A_{\mathbf{K}} \colon \mathcal{D}(N, \mathbf{F}^*) \longrightarrow \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$$

mediante

$$(A_{\mathbf{K}}\psi)(\varphi) := \mathbf{K}(\varphi \boxtimes \psi),$$

y este mapeo es continuo para la topología débil-$*$. Además, las correspondencias $A \mapsto \mathbf{K}_A$ y $\mathbf{K} \mapsto A_{\mathbf{K}}$ son lineales e inversas entre sí. En otras palabras, existe una biyección lineal canónica

$$\mathcal{D}'(M \times N, \mathbf{E} \boxtimes \mathbf{F}, W) \cong \mathcal{L}\big(\mathcal{D}(N, \mathbf{F}^*), \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)_\sigma\big),$$

donde el subíndice $\sigma$ indica la topología débil-$*$.

*Demostración.* Si $A$ es continuo para la topología de convergencia puntual, entonces, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$, el mapeo

$$\psi \longmapsto (A\psi)(\varphi) = \mathrm{ev}_\varphi(A\psi)$$

es continuo. Para cada $\psi$, el mapeo $\varphi \mapsto (A\psi)(\varphi)$ es continuo porque $A\psi$ es una distribución. Esto prueba $(a) \Rightarrow (b)$.

Supongamos $(b)$. La restricción de $B_A$ a $\Gamma_K(\mathbf{E}^*) \times \Gamma_L(\mathbf{F}^*)$ es separadamente continua. Ambos factores son espacios de Fréchet por la Proposición 10.1.7, y la Proposición B.12.10 muestra que la restricción es continua. Por lo tanto, $(b) \Rightarrow (c)$.

Finalmente, supongamos $(c)$ y fijemos $\varphi \in \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*)$. Existe un compacto $K \subseteq M$ tal que $\varphi \in \Gamma_K(\mathbf{E}^*)$. Para todo compacto $L \subseteq N$, la condición $(c)$ implica que $\psi \mapsto B_A(\varphi, \psi)$ es continuo en $\Gamma_L(\mathbf{F}^*)$. Como la topología de $\mathcal{D}(N, \mathbf{F}^*)$ es final respecto de estos espacios de soporte fijo, el mismo mapeo es continuo en $\mathcal{D}(N, \mathbf{F}^*)$. Así, $\mathrm{ev}_\varphi \circ A$ es continuo para toda $\varphi$. La topología débil-$*$ de $\mathcal{D}'(M, \mathbf{E}, W)$ es la topología inicial respecto de las evaluaciones, de modo que la Proposición B.10.40 prueba la continuidad de $A$. Con esto obtenemos $(c) \Rightarrow (a)$.

Supongamos ahora que se satisfacen estas condiciones. Por $(b)$ y por la propiedad universal del producto inductivo, Proposición B.12.8, existe un único operador continuo

$$\widetilde{B}_A : \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \otimes_\iota \mathcal{D}(N, \mathbf{F}^*) \longrightarrow W$$

tal que $\widetilde{B}_A(\varphi \otimes \psi) = B_A(\varphi, \psi)$. El espacio $W$ es completo porque tiene dimensión finita. La propiedad universal de la completación extiende $\widetilde{B}_A$ de manera única a un operador continuo

$$\widehat{B}_A : \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \widehat{\otimes}_\iota \mathcal{D}(N, \mathbf{F}^*) \longrightarrow W.$$

Sea

$$T : \mathcal{D}(M, \mathbf{E}^*) \widehat{\otimes}_\iota \mathcal{D}(N, \mathbf{F}^*) \longrightarrow \mathcal{D}(M \times N, \mathbf{E}^* \boxtimes \mathbf{F}^*)$$

el isomorfismo del Teorema 10.2.55. Definimos

$$\mathbf{K}_A := \widehat{B}_A \circ T^{-1}.$$

Este es un operador lineal continuo sobre $\mathcal{D}(M\times N,\mathbf{E}^*\boxtimes\mathbf{F}^*)$. Mediante el isomorfismo $(\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{F})^*\cong\mathbf{E}^*\boxtimes\mathbf{F}^*$ de la Observación 10.2.47, se identifica con un elemento de $\mathcal{D}'(M\times N,\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{F},W)$. Además,

$$\mathbf{K}_A(\varphi\boxtimes\psi)=\widehat{B}_A(\varphi\otimes\psi)=B_A(\varphi,\psi)=(A\psi)(\varphi).$$

Para la unicidad, sea $\mathbf{S}$ otra distribución que satisfaga la misma identidad. Entonces $\mathbf{S}-\mathbf{K}_A$ se anula sobre toda sección $\varphi\boxtimes\psi$ y, por linealidad, sobre todas sus combinaciones lineales finitas. Estas combinaciones son densas por el Teorema 10.2.55. Como $\mathbf{S}-\mathbf{K}_A$ es continuo, se anula en todo $\mathcal{D}(M\times N,\mathbf{E}^*\boxtimes\mathbf{F}^*)$. Por lo tanto, $\mathbf{S}=\mathbf{K}_A$.

Recíprocamente, sea $\mathbf{K}\in\mathcal{D}'(M\times N,\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{F},W)$. Para $\psi\in\mathcal{D}(N,\mathbf{F}^*)$ definimos

$$(A_{\mathbf{K}}\psi)(\varphi):=\mathbf{K}(\varphi\boxtimes\psi).$$

Para $\psi$ fija, el mapeo $\varphi\mapsto\varphi\boxtimes\psi$ es continuo, como se probó al construir el isomorfismo del Teorema 10.2.55. Su composición con $\mathbf{K}$ es, por lo tanto, un operador continuo de $\mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*)$ en $W$. Esto prueba que $A_{\mathbf{K}}\psi\in\mathcal{D}'(M,\mathbf{E},W)$. La linealidad de $A_{\mathbf{K}}$ se sigue de la linealidad de $\mathbf{K}$.

Para probar la continuidad de $A_{\mathbf{K}}$ hacia el dual débil-$*$, fijemos $\varphi\in\mathcal{D}(M,\mathbf{E}^*)$. El mapeo

$$\mathrm{ev}_\varphi\circ A_{\mathbf{K}}:\psi\longmapsto\mathbf{K}(\varphi\boxtimes\psi)$$

es continuo porque $\psi\mapsto\varphi\boxtimes\psi$ es continuo. Todas las evaluaciones son continuas. Por la propiedad universal de la topología inicial, $A_{\mathbf{K}}$ es continuo para la topología débil-$*$.

Finalmente,

$$(A_{\mathbf{K}_A}\psi)(\varphi)=\mathbf{K}_A(\varphi\boxtimes\psi)=(A\psi)(\varphi),$$

de modo que $A_{\mathbf{K}_A}=A$. Si se comienza con $\mathbf{K}$, las distribuciones $\mathbf{K}_{A_{\mathbf{K}}}$ y $\mathbf{K}$ coinciden sobre todos los productos elementales. La densidad demostrada en el Teorema 10.2.55 y la continuidad de ambas distribuciones implican que coinciden en todo el espacio de prueba. Por lo tanto, $\mathbf{K}_{A_{\mathbf{K}}}=\mathbf{K}$. Las definiciones muestran también que las dos correspondencias son lineales. □

**Observación 10.2.58.** (Variantes del teorema del núcleo) La formulación escalar euclidiana puede encontrarse en [149, Teorema 51.7]. Una prueba por regularización y una formulación sobre variedades aparecen en [64, Teorema 3.1]. Taylor demuestra la versión sobre variedades compactas mediante estimaciones de Sobolev y operadores de Hilbert–Schmidt en [142, Capítulo 4, §6]. Para la formulación geométrica con haces vectoriales sobre variedades cerradas véase también [90, Capítulo 13, §3.5]. El resultado vale aquí para variedades no compactas y para haces distintos sobre los dos factores. El control por las etapas $K_j\times L_j$ ocupa el lugar de una hipótesis global de compacidad.

# 11

# Símbolo principal y operadores elípticos

Los Capítulos 8 y 10 construyen los operadores diferenciales entre secciones, sus adjuntos formales y sus extensiones distribucionales. Sobre esa base, este capítulo aísla la parte de orden máximo, formula la elipticidad de manera intrínseca y deduce las estimaciones de regularidad que se utilizarán en el estudio del semigrupo del calor y de los espacios de Sobolev fraccionarios.

La parte principal de un operador contiene menos información que el operador completo, pero gobierna varias de sus propiedades analíticas fundamentales. En una variedad compacta, la invertibilidad del símbolo principal permite recuperar todas las derivadas de una sección a partir del operador aplicado a ella y de un término de orden cero. De esta observación se desprenden la regularidad elíptica y la equivalencia entre la norma de Sobolev y la norma de gráfica. El mismo símbolo será, posteriormente, el objeto geométrico que intervenga en la teoría del índice.

Durante este capítulo, $M$ será una variedad suave de dimensión $n$, sin frontera salvo que se indique lo contrario, y $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \to M$ serán haces vectoriales suaves reales o complejos de rango finito. Cuando intervengan normas $L^2$ o de Sobolev, fijaremos una métrica riemanniana $\mathbf{g}$ en $M$, métricas fibradas $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$ y $\mathbf{h}_{\mathbf{G}}$ en los haces correspondientes, hermitianas cuando los haces sean complejos, y conexiones compatibles $\nabla^{\mathbf{E}}$, $\nabla^{\mathbf{F}}$ y $\nabla^{\mathbf{G}}$. En los factores tensoriales construidos a partir de $TM$ y $T^*M$ se empleará la conexión de Levi–Civita de $\mathbf{g}$.

**Elipticidad: una condición local con consecuencias globales**

La teoría elíptica adquirió su forma moderna al reconocerse que los términos de orden máximo controlan la regularidad, mientras que los términos inferiores pueden tratarse como perturbaciones. El símbolo principal codifica esa parte dominante en el cotangente. Su invertibilidad fuera de la sección cero es una condición puntual, pero conduce a estimaciones globales, núcleos de dimensión finita y estabilidad del índice. Este contraste entre una hipótesis microlocal y consecuencias globales acompañará el resto de la obra.

## 11.1 El símbolo principal

Recordemos que $\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ denota el espacio de operadores diferenciales parciales de orden a lo sumo $m$ de la Definición 8.1.3. Para $f \in C^\infty(M)$ escribimos $\operatorname{ad}(f)(P) = [P, f]$, donde $[P,f](u) = P(fu) - fP(u)$. La Proposi-

ción 8.1.25 muestra que la evaluación puntual de un conmutador iterado de longitud $m$ depende únicamente de los diferenciales de las funciones involucradas.

**Definición 11.1.1.** (Símbolo principal) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, con $m \geq 1$. Para $x \in M$, $\xi_1,\dots,\xi_m \in T_x^*M$ y $v \in \mathbf{E}_x$, elegimos funciones $f_1,\dots,f_m \in C^\infty(M)$ tales que $df_j(x) = \xi_j$ y definimos

$$\widetilde{\sigma}_m(P)_x(\xi_1,\dots,\xi_m)v := \frac{1}{m!}\operatorname{ad}(f_1)\cdots\operatorname{ad}(f_m)(P)|_x(v).$$

La **forma polarizada del símbolo principal** es el mapeo $\widetilde{\sigma}_m(P)_x\colon (T_x^*M)^m \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbf{E}_x,\mathbf{F}_x)$, y el **símbolo principal** de $P$ es el mapeo

$$\sigma_m(P)\colon T^*M \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}), \qquad \sigma_m(P)(x,\xi) := \widetilde{\sigma}_m(P)_x(\xi,\dots,\xi).$$

Si $m = 0$, el operador $P$ es $C^\infty(M)$-lineal y corresponde a un homomorfismo de haces; en ese caso ponemos $\sigma_0(P)(x) := P_x$.

La normalización por $m!$ hace que, en coordenadas, el símbolo sea exactamente el polinomio homogéneo formado por los coeficientes de orden $m$.

**Proposición 11.1.2.** (Buena definición y propiedades elementales) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. La forma $\widetilde{\sigma}_m(P)_x$ está bien definida, es simétrica y multilineal en las covariables. Además, $\sigma_m(P)$ es suave y satisface

$$\sigma_m(P)(x,t\xi) = t^m\sigma_m(P)(x,\xi)$$

para todo $x \in M$, $\xi \in T_x^*M$ y $t \in \mathbb{R}$.

*Demostración.* La independencia de las funciones elegidas es precisamente el contenido de la Proposición 8.1.25. Probemos la linealidad en la primera covariable; los demás argumentos se tratan del mismo modo. Sean $\xi,\eta,\xi_2,\dots,\xi_m \in T_x^*M$ y $a,b \in \mathbb{R}$. Elijamos funciones suaves $f,g,f_2,\dots,f_m$ tales que $df(x) = \xi$, $dg(x) = \eta$ y $df_j(x) = \xi_j$. Como $d(af+bg)(x) = a\xi + b\eta$, la proposición citada permite utilizar $af+bg$ para representar esta covariable. La linealidad de $f \mapsto \operatorname{ad}(f)$ da entonces

$$\widetilde{\sigma}_m(P)_x(a\xi+b\eta,\xi_2,\dots,\xi_m) = a\widetilde{\sigma}_m(P)_x(\xi,\xi_2,\dots,\xi_m) + b\widetilde{\sigma}_m(P)_x(\eta,\xi_2,\dots,\xi_m).$$

El Lema 8.1.21 permite intercambiar dos conmutadores consecutivos; por lo tanto, la forma es simétrica y la linealidad recién probada en la primera entrada implica la linealidad en todas las entradas.
Resta comprobar la suavidad. En una carta $(U,\varphi)$, con $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$, y en marcos locales $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ de $\mathbf{E}$ y $(\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_s)$ de $\mathbf{F}$, el Corolario 8.1.35 permite escribir

$$P\left(\sum_{a=1}^{r} u^a\mathbf{e}_a\right) = \sum_{b=1}^{s}\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{a=1}^{r}(A_\alpha)_{ba}D^\alpha u^a\right)\mathbf{f}_b,$$

donde $A_\alpha : U \longrightarrow M_{s\times r}(\mathbb{K})$ es suave. Para $x \in U$ y $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, \mathbf{d}x^i|_x$, consideremos, alrededor de $x$, la función coordenada lineal $\ell_\xi := \sum_{i=1}^{n} \xi_i x^i$. Multiplicándola por una función suave que sea igual a uno en una vecindad de $x$, obtenemos una función de $C^\infty(M)$ con el mismo diferencial en $x$. La Proposición 8.1.25 permite, por lo tanto, emplear $\ell_\xi$ en las $m$ entradas que definen $\sigma_m(P)(x,\xi)$.
Como $[\partial_i, \ell_\xi] = \xi_i \operatorname{Id}$ y $[AB, \ell_\xi] = A[B,\ell_\xi] + [A,\ell_\xi]B$, cada conmutador sustituye uno de los $|\alpha|$ factores diferenciales de $D^\alpha$ por la componente correspondiente de $\xi$. Si $|\alpha| < m$, el resultado se anula después de $m$ conmutadores. Si $|\alpha| = m$, para que sobreviva un término cada uno de los $m$ factores debe ser sustituido exactamente una vez, y los conmutadores pueden escogerlos en $m!$ órdenes. En consecuencia,

$$\operatorname{ad}(\ell_\xi)^m(D^\alpha) = \begin{cases} m!\,\xi^\alpha \operatorname{Id}, & |\alpha| = m, \\ 0, & |\alpha| < m. \end{cases}$$

Las matrices $A_\alpha$ actúan por multiplicación y conmutan con las funciones escalares. Al dividir por la normalización $m!$ de la definición obtenemos

$$\sigma_m(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Los coeficientes $A_\alpha$ son suaves y el miembro derecho es un polinomio homogéneo de grado $m$ en $\xi$; por lo tanto, $\sigma_m(P)$ es suave y $\sigma_m(P)(x,t\xi) = t^m \sigma_m(P)(x,\xi)$. □

**Proposición 11.1.3.** (Expresión local) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. En una carta y en marcos locales en los que $P = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha D^\alpha$, si $\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx^j|_x$, entonces

$$\sigma_m(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)\xi^\alpha, \qquad \xi^\alpha := \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{\alpha_j}.$$

Por consiguiente, $P$ tiene orden a lo sumo $m-1$ si y sólo si $\sigma_m(P) = 0$.

*Demostración.* La fórmula es el cálculo diagonal efectuado en la prueba de la Proposición 11.1.2. Si $P$ tiene orden a lo sumo $m-1$, no aparecen coeficientes $A_\alpha$ con $|\alpha| = m$ y el símbolo se anula. Recíprocamente, si $\sigma_m(P) = 0$, cada entrada de la matriz polinómica $\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)\xi^\alpha$ es nula para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. La unicidad de los coeficientes de un polinomio implica $A_\alpha(x) = 0$ para todo $|\alpha| = m$ y todo $x$ de la carta. El Corolario 8.1.35 muestra entonces que $P \in \mathbf{PDO}^{(m-1)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. □

**Observación 11.1.4.** La definición anterior no incluye potencias de $i$. Con esta convención, el símbolo de $-\partial_j^2$ es $-\xi_j^2$. Al aplicar la transformada de Fourier aparece, en cambio, el multiplicador $(i\xi)^\alpha$. Esta distinción se tendrá en cuenta de manera explícita en la prueba de las estimaciones elípticas.

### 11.1.1 Cálculo simbólico elemental

El símbolo principal registra la parte de mayor orden de un operador. Antes de usarlo para formular la elipticidad, necesitamos comprobar cómo se comporta bajo composición y adjunción.

**Proposición 11.1.5.** (Símbolo de una composición) Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{G} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito. Sean $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $Q \in \mathbf{PDO}^{(\ell)}(\mathbf{F},\mathbf{G})$. Entonces $Q \circ P \in \mathbf{PDO}^{(m+\ell)}(\mathbf{E},\mathbf{G})$ y

$$\sigma_{m+\ell}(Q \circ P)(x,\xi) = \sigma_{\ell}(Q)(x,\xi) \circ \sigma_m(P)(x,\xi).$$

*Demostración.* La pertenencia a $\mathbf{PDO}^{(m+\ell)}(\mathbf{E},\mathbf{G})$ fue probada en la Proposición 8.1.19. En una carta y en marcos locales escribimos

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha D^\alpha, \qquad Q = \sum_{|\beta| \le \ell} B_\beta D^\beta.$$

Al desarrollar $Q(Pu)$, los términos de orden $m+\ell$ aparecen únicamente cuando todas las derivadas $D^\beta$ actúan sobre $D^\alpha u$ y ninguna actúa sobre $A_\alpha$. La parte de orden máximo es, por lo tanto,

$$\sum_{|\beta|=\ell} \sum_{|\alpha|=m} B_\beta A_\alpha D^{\alpha+\beta} u.$$

Al evaluar el símbolo en $\xi$ obtenemos

$$\sum_{|\beta|=\ell} \sum_{|\alpha|=m} B_\beta(x) A_\alpha(x) \xi^{\alpha+\beta} = \left( \sum_{|\beta|=\ell} B_\beta(x) \xi^\beta \right) \left( \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) \xi^\alpha \right),$$

que es la identidad afirmada. □

El adjunto hermitiano formal ya fue construido en el Teorema 8.2.3. Sólo necesitamos registrar el efecto de aquella construcción sobre la parte principal.

**Proposición 11.1.6.** (Símbolo del adjunto hermitiano formal) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito provistos de métricas fibradas reales o hermitianas $\mathbf{h_E}$ y $\mathbf{h_F}$. Si $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $P_h^*$ es su adjunto hermitiano formal, entonces

$$\sigma_m(P_h^*)(x,\xi) = (-1)^m \sigma_m(P)(x,\xi)^*,$$

donde el adjunto del miembro derecho se toma entre las fibras $(\mathbf{E}_x,\mathbf{h_E})$ y $(\mathbf{F}_x,\mathbf{h_F})$.

*Demostración.* En marcos locales ortonormales o unitarios, escribamos

$$P\left( \sum_{i=1}^{r} u^i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{j=1}^{s} \left( \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha| \le m} a_{\alpha i}^{j} D_\varphi^\alpha u^i \right) \mathbf{f}_j.$$

El Teorema 8.2.3 muestra que la componente sobre $\mathbf{e}_i$ de $P_h^*(\sum_{j=1}^{s} v^j \mathbf{f}_j)$ es

$$\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g})}} \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D_\varphi^\alpha \left( \sqrt{\det(\mathbf{g})}\, \overline{a_{\alpha i}^j}\, v^j \right).$$

Los términos de orden $m$ se obtienen únicamente cuando las $|\alpha|$ derivadas actúan sobre $v^j$. Si

$$A_\alpha = (a_{\alpha i}^j) \colon U \longrightarrow M_{s\times r}(\mathbb{K}),$$

sus coeficientes forman, punto a punto, la matriz $(-1)^m A_\alpha^*$ para $|\alpha| = m$. La Proposición 11.1.3 da

$$\boldsymbol{\sigma}_m(P_h^*)(x,\xi) = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)^* \xi^\alpha = (-1)^m \boldsymbol{\sigma}_m(P)(x,\xi)^*.$$

□

**Corolario 11.1.7.** (Símbolo de la conjugación) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos suaves de rango finito y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Entonces

$$\boldsymbol{\sigma}_m(\overline{P})(x,\xi) = \overline{\boldsymbol{\sigma}_m(P)(x,\xi)} \colon \overline{\mathbf{E}_x} \longrightarrow \overline{\mathbf{F}_x}.$$

En particular, $P$ es elíptico si y sólo si $\overline{P}$ es elíptico.

*Demostración.* En marcos conjugados, los coeficientes principales de $\overline{P}$ son $\overline{A_\alpha}$ por la Proposición 8.1.36. La Proposición 11.1.3 da la fórmula; la conjugación preserva la invertibilidad. □

**Corolario 11.1.8.** (Símbolo del transpuesto formal) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Si $P'$ es su transpuesto formal bilineal, entonces

$$\boldsymbol{\sigma}_m(P')(x,\xi) = (-1)^m \boldsymbol{\sigma}_m(P)(x,\xi)^T \colon \mathbf{F}_x^* \longrightarrow \mathbf{E}_x^*, \tag{11.1}$$

donde $T$ es el transpuesto algebraico, sin conjugación. Por lo tanto, $P$ es elíptico si y sólo si $P'$ es elíptico.

*Demostración.* El Corolario 10.2.15 muestra que el coeficiente de $D^\alpha$ de orden $m$ es $(-1)^m A_\alpha^T$; toda derivada que cae sobre el peso coordenado de la medida o sobre $A_\alpha$ tiene orden menor. La fórmula local del símbolo concluye (11.1). El transpuesto de un mapeo finito–dimensional es invertible exactamente cuando el mapeo lo es. □

**Ejemplo 11.1.9.** (La conexión) Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$. Por la Proposición 8.1.12, $\nabla^{\mathbf{E}}$ es un operador diferencial de primer orden de $\mathbf{E}$ a $T^*M \otimes \mathbf{E}$. La regla de Leibniz da

$$[\nabla^{\mathbf{E}}, f]\mathbf{u} = df \otimes \mathbf{u},$$

y, en consecuencia,

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\nabla^{\mathbf{E}})(x,\xi)v = \xi \otimes v.$$

Este símbolo es inyectivo para $\xi \neq 0$, aunque no es suprayectivo cuando $n > 1$.

**Ejemplo 11.1.10.** (El laplaciano de Bochner) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada real o hermitiana $\mathbf{h_E}$ y conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. El laplaciano de Bochner $\Delta_B = (\nabla^{\mathbf{E}})_h^* \nabla^{\mathbf{E}}$, definido en la Definición 8.2.10, satisface

$$\sigma_2(\Delta_B)(x,\xi) = -\|\xi\|_{\mathbf{g}}^2 \operatorname{Id}_{\mathbf{E}_x}.$$

La identidad se obtiene de las Proposiciones 11.1.5 y 11.1.6, pues

$$\sigma_1((\nabla^{\mathbf{E}})_h^*)(x,\xi)(\eta \otimes v) = -\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbf{g}} v.$$

## 11.2 Operadores elípticos

La elipticidad expresa que el símbolo principal es invertible en toda dirección cotangente no nula. Esta condición permite recuperar derivadas de la solución a partir de la ecuación y conduce a las estimaciones de regularidad.

**Definición 11.2.1.** (Elipticidad) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, con $m \geq 1$. Decimos que $P$ es **elíptico** si, para todo $x \in M$ y todo $\xi \in T_x^* M \setminus \{0\}$, el mapeo

$$\sigma_m(P)(x,\xi) \colon \mathbf{E}_x \longrightarrow \mathbf{F}_x$$

es un isomorfismo lineal.

La definición obliga a que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ tengan el mismo rango. Cuando el símbolo sólo es inyectivo o sólo es suprayectivo se habla, respectivamente, de un operador sobredeterminado o subdeterminado elíptico. Estas variantes serán útiles en teoría del índice, pero no se necesitarán para las estimaciones de este capítulo.

**Proposición 11.2.2.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera, sean $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito, provistos de métricas fibradas, y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

(a) $P$ es elíptico si y sólo si $P_h^*$ es elíptico;

(b) si $P$ es elíptico, entonces $P_h^* P$ y $P P_h^*$ son elípticos de orden $2m$;

(c) si $Q \in \mathbf{PDO}^{(\ell)}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ y tanto $P$ como $Q$ son elípticos, entonces $Q \circ P$ es elíptico.

*Demostración.* El inciso (a) se sigue de la Proposición 11.1.6, porque un mapeo lineal entre espacios de dimensión finita es invertible si y sólo si su adjunto lo es. Para (b), las Proposiciones 11.1.5 y 11.1.6 dan

$$\sigma_{2m}(P_h^* P)(x,\xi) = (-1)^m \sigma_m(P)(x,\xi)^* \sigma_m(P)(x,\xi),$$

que es invertible para $\xi \neq 0$. El argumento para $P P_h^*$ es idéntico. El inciso (c) se obtiene porque la composición de isomorfismos es un isomorfismo. □

**Ejemplo 11.2.3.** El laplaciano de Bochner es elíptico por el Ejemplo 11.1.10. La identidad de Weitzenböck, Teorema 8.2.33, muestra que el laplaciano de Hodge con valores en un haz difiere del laplaciano de Bochner por un endomorfismo de orden cero. Ambos tienen, por lo tanto, el mismo símbolo principal y son elípticos.

**Proposición 11.2.4.** (Símbolo diferencial de un operador de tipo Dirac) Sea $(\mathbf{S}, c, \nabla^{\mathbf{S}})$ un módulo de Clifford con conexión y sea $D = c \circ \nabla^{\mathbf{S}}$ el operador de la Definición 8.3.1. Su símbolo principal diferencial es

$$\sigma_1(D)(x,\xi) = c(\xi)\colon \mathbf{S}_x \longrightarrow \mathbf{S}_x. \tag{11.2}$$

En particular, $D$ es elíptico y, para $\xi \neq 0$,

$$\sigma_1(D)(x,\xi)^{-1} = -\frac{c(\xi)}{|\xi|_{\mathbf{g}}^2}.$$

Si el módulo está graduado, el bloque $D^+\colon \Gamma(\mathbf{S}^+) \to \Gamma(\mathbf{S}^-)$ es elíptico y su símbolo es la restricción $c(\xi)\colon \mathbf{S}_x^+ \to \mathbf{S}_x^-$.

*Demostración.* Por (8.26), para cualquier función $f$ con $df_x = \xi$,

$$\sigma_1(D)(x,\xi) = [D, f]_x = c(df_x) = c(\xi).$$

La relación de Clifford $c(\xi)^2 = -|\xi|_{\mathbf{g}}^2 I$ proporciona la inversa indicada. En el caso graduado, $c(\xi)$ es impar y su cuadrado tiene la misma identidad en cada sumando, por lo que sus dos restricciones son isomorfismos para $\xi \neq 0$. □

## 11.3 Estimaciones elípticas en haces vectoriales

Probaremos primero la estimación para sistemas con coeficientes constantes, después congelaremos los coeficientes en un punto y, finalmente, globalizaremos el resultado mediante una partición de la unidad. El único ingrediente de análisis de Fourier que interviene es la identidad de Plancherel.

### 11.3.1 Una desigualdad de interpolación

En las estimaciones locales aparecen términos de orden inferior que deben absorberse. La desigualdad siguiente cuantifica esa absorción mediante una pequeña porción de la norma superior y una norma de orden más bajo.

**Lema 11.3.1.** (Interpolación entre órdenes enteros) Sean $m \in \mathbb{N}$ y $0 \le j < m$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^j(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le \varepsilon \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + C_\varepsilon \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}$$

para toda $u \in H^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$.

*Demostración.* Usamos la transformada de Fourier con normalización unitaria, escribimos $\langle \xi \rangle := (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}$ y ponemos

$$\|u\|_{s,\mathbf{F}} := \|\langle \xi \rangle^s \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

Para cada $s \in \mathbb{N}_0$, la fórmula de Leibniz para $(1+\|\xi\|^2)^s$ y Plancherel proporcionan constantes $a_s, b_s > 0$, dependientes sólo de $n$, $r$, $s$ y de la normalización fijada para la norma de Sobolev, tales que

$$a_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le \|u\|_{s,\mathbf{F}} \le b_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

Sea $R \ge 1$ y pongamos $\mathbf{E}_R := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi \rangle \le R\}$. En $\mathbf{E}_R$ se cumple $\langle \xi \rangle^j \le R^j$, mientras que en $\mathbf{E}_R^c$ se tiene $\langle \xi \rangle^{j-m} \le R^{j-m}$. Por la desigualdad triangular en $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$, aplicada componente a componente, y por la identidad de Plancherel,

$$\begin{aligned} \|u\|_{j,\mathbf{F}} &= \|\langle \xi \rangle^j \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \\ &\le \|\mathbf{1}_{\mathbf{E}_R} \langle \xi \rangle^j \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|\mathbf{1}_{\mathbf{E}_R^c} \langle \xi \rangle^j \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \\ &\le R^j \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + R^{j-m} \|\langle \xi \rangle^m \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \\ &= R^j \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + R^{j-m} \|u\|_{m,\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

Sea $\delta := \frac{a_j \varepsilon}{b_m}$ y elijamos $R_\varepsilon := \max\left\{1, \delta^{-\frac{1}{m-j}}\right\}$. Entonces $R_\varepsilon^{j-m} \le \delta$ y, usando las dos desigualdades anteriores,

$$\|u\|_{H^j(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le a_j^{-1} \|u\|_{j,\mathbf{F}} \le \varepsilon \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + a_j^{-1} R_\varepsilon^j \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

Por lo tanto, basta tomar $C_\varepsilon := a_j^{-1} R_\varepsilon^j$. □

### 11.3.2 Sistemas con coeficientes constantes

Congelar los coeficientes reduce primero el problema a un sistema invariante por traslaciones. En ese modelo, la transformada de Fourier convierte la elipticidad en una estimación algebraica del símbolo.

**Lema 11.3.2.** (Estimación para un sistema elíptico constante) Sean $n, r, m \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y sean $A_\alpha \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^r)$ para $|\alpha| \le m$. Sea el operador

$$P_0(D)\colon C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r), \qquad P_0(D)u = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha D^\alpha u,$$

con coeficientes constantes, y supongamos que

$$p_m(\xi) := \sum_{|\alpha| = m} A_\alpha \xi^\alpha$$

es invertible para $\xi \neq 0$. Existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C\left(\|P_0(D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\right)$$

para toda $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$.

*Demostración.* Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, complexificamos el sistema para usar la transformada de Fourier; la estimación obtenida se restringe después a las funciones reales. La función $(\xi, v) \mapsto \|p_m(\xi)v\|_{\mathbb{C}^r}$ es continua en el compacto

$S^{n-1}\times S^{2r-1}$ y no se anula. Existe, por lo tanto, $c>0$ tal que

$$\|p_m(\xi)v\|_{\mathbb{C}^r}\geq c\|\xi\|^m\|v\|_{\mathbb{C}^r}$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ y $v\in\mathbb{C}^r$.
Debemos distinguir el símbolo principal anterior del multiplicador de Fourier. Ponemos

$$p^{\#}(\xi):=\sum_{|\alpha|\leq m}A_\alpha(i\xi)^\alpha,\qquad p_m^{\#}(\xi):=\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha(i\xi)^\alpha=i^m p_m(\xi).$$

Como $|i^m|=1$, la estimación precedente da $\|p_m^{\#}(\xi)v\|_{\mathbb{C}^r}\geq c\|\xi\|^m\|v\|_{\mathbb{C}^r}$. Si

$$r^{\#}(\xi):=p^{\#}(\xi)-p_m^{\#}(\xi),$$

entonces existe $C_0>0$ tal que $\|r^{\#}(\xi)v\|_{\mathbb{C}^r}\leq C_0(1+\|\xi\|)^{m-1}\|v\|_{\mathbb{C}^r}$. En consecuencia,

$$\|p^{\#}(\xi)v\|_{\mathbb{C}^r}\geq c\|\xi\|^m\|v\|_{\mathbb{C}^r}-C_0(1+\|\xi\|)^{m-1}\|v\|_{\mathbb{C}^r}.$$

Elegimos $R>1$ de modo que $C_0(1+\|\xi\|)^{m-1}\leq\frac{c}{2}\|\xi\|^m$ para $\|\xi\|\geq R$. En esa región,

$$(1+\|\xi\|^2)^{\frac{m}{2}}\|v\|_{\mathbb{C}^r}\leq C_1\|p^{\#}(\xi)v\|_{\mathbb{C}^r}.$$

Para $\|\xi\|<R$ se tiene $(1+\|\xi\|^2)^{\frac{m}{2}}\|v\|_{\mathbb{C}^r}\leq C_R\|v\|_{\mathbb{C}^r}$. Por lo tanto,

$$(1+\|\xi\|^2)^{\frac{m}{2}}\|\widehat{u}(\xi)\|_{\mathbb{C}^r}\leq C\big(\|p^{\#}(\xi)\widehat{u}(\xi)\|_{\mathbb{C}^r}+\|\widehat{u}(\xi)\|_{\mathbb{C}^r}\big).$$

Elevamos al cuadrado, integramos y usamos Plancherel. Como

$$\widehat{P_0(D)u}(\xi)=p^{\#}(\xi)\widehat{u}(\xi),$$

se obtiene la estimación afirmada. □

**Lema 11.3.3.** (Estimación constante en un orden de Sobolev arbitrario) Sean $n,r,m\in\mathbb{N}$, sea $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ y sean $A_\alpha\in\mathrm{End}(\mathbb{K}^r)$ para $|\alpha|=m$. Sea el operador

$$P_m(D)\colon\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)\longrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r),\qquad P_m(D)v=\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha D^\alpha v,$$

un sistema homogéneo con coeficientes constantes, y supongamos que su símbolo

$$p_m(\xi):=\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha\xi^\alpha$$

es invertible para $\xi\neq0$. Para todo $s\in\mathbb{R}$ existe $C_s>0$ tal que

$$\|v\|_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\leq C_s\big(\|P_m(D)v\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}+\|v\|_{H^{s+m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big)$$

para todo $v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$.

*Demostración.* Como en la prueba del Lema 11.3.2, la elipticidad y la compacidad de la esfera proporcionan $c>0$ tal que

$$\|p_m^{\#}(\xi)z\|_{\mathbb{C}^r} \geq c\|\xi\|^m\|z\|_{\mathbb{C}^r}, \qquad p_m^{\#}(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (i\xi)^\alpha,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{C}^r$. Elegimos $R \geq 1$. Si $\|\xi\| \geq R$, la desigualdad anterior implica

$$\langle \xi \rangle^{s+m}\|z\|_{\mathbb{C}^r} \leq C_{s,R}\langle \xi \rangle^s \|p_m^{\#}(\xi)z\|_{\mathbb{C}^r}.$$

Si $\|\xi\| < R$, entonces

$$\langle \xi \rangle^{s+m}\|z\|_{\mathbb{C}^r} \leq C_{s,R}\langle \xi \rangle^{s+m-1}\|z\|_{\mathbb{C}^r}.$$

Combinando ambas regiones obtenemos, para todo $\xi$ y todo $z$,

$$\langle \xi \rangle^{s+m}\|z\|_{\mathbb{C}^r} \leq C_s\left(\langle \xi \rangle^s \|p_m^{\#}(\xi)z\|_{\mathbb{C}^r} + \langle \xi \rangle^{s+m-1}\|z\|_{\mathbb{C}^r}\right).$$

Aplicamos esta desigualdad a $z = \widehat{v}(\xi)$, elevamos al cuadrado e integramos. Como $\widehat{P_m(D)v} = p_m^{\#}\widehat{v}$, la identidad de Plancherel concluye la prueba. □

### 11.3.3 Congelación de coeficientes

Un operador variable se compara, en una bola pequeña, con el operador de coeficientes constantes obtenido al fijar en el centro únicamente los coeficientes de su parte principal. Ésta determina la elipticidad. El error principal conserva el orden $m$, pero sus coeficientes se hacen pequeños; los términos restantes no necesitan ser pequeños porque tienen orden a lo sumo $m-1$.

**Lema 11.3.4.** (Estimación local para sistemas elípticos) Sean $n, r, m \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sean $A_\alpha \in C^\infty(U; \mathrm{End}(\mathbb{K}^r))$. Sea

$$P\colon C_c^\infty(U,\mathbb{K}^r) \longrightarrow C_c^\infty(U,\mathbb{K}^r), \qquad Pu = \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u,$$

un sistema elíptico con coeficientes suaves. Para cada $x_0 \in U$ existen un abierto $V$, con $x_0 \in V \Subset U$, y una constante $C>0$ tales que

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \leq C\big(\|Pu\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big)$$

para toda $u \in C_c^\infty(V,\mathbb{K}^r)$, extendida por cero fuera de $V$.

*Demostración.* Congelamos únicamente los coeficientes principales en $x_0$ y escribimos

$$P = P_{x_0}^{(m)} + R_1 + R_0,$$

donde

$$P_{x_0}^{(m)} := \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0) D^\alpha, \qquad R_1 := \sum_{|\alpha|=m} \big(A_\alpha(x) - A_\alpha(x_0)\big) D^\alpha,$$

y $R_0$ reúne los términos de orden a lo sumo $m-1$. Para todo $W \Subset U$, los operadores $P_{x_0}^{(m)}$, $R_1$ y $R_0$ envían

$C_c^\infty(W,\mathbb{K}^r)$ en $C_c^\infty(U,\mathbb{K}^r)$. El Lema 11.3.2 aplicado a $P_{x_0}^{(m)}$ da

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_0\big(\|P_{x_0}^{(m)}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big).$$

Elijamos $r_0>0$ de modo que $\overline{B(x_0,r_0)}\subseteq U$. Para $|\alpha|=m$ ponemos

$$C_\alpha(r_0) := \sup_{z\in\overline{B(x_0,r_0)}} \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^j}(z)\right\|, \qquad C_*(r_0) := \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha(r_0).$$

El Lema de Hadamard 1.4.10, aplicado a las entradas matriciales de $A_\alpha$, da, para $x\in B(x_0,r_0)$,

$$A_\alpha(x)-A_\alpha(x_0) = \sum_{j=1}^n (x^j-x_0^j)\int_0^1 \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^j}\big(x_0+t(x-x_0)\big)\,dt. \tag{11.3}$$

Como el segmento está contenido en la bola, para $0<r\le r_0$ se deduce la cota cuantitativa

$$\sup_{x\in B(x_0,r)} \|A_\alpha(x)-A_\alpha(x_0)\| \le rC_\alpha(r_0). \tag{11.4}$$

Elegimos $r\in(0,r_0)$ tan pequeño que

$$rC_*(r_0)\le \frac{1}{4C_0C_1}$$

y tomamos $V=B(x_0,r)$. Si $C_*(r_0)=0$, cualquier $r<r_0$ satisface esta condición. Entonces

$$\sup_{x\in V}\sum_{|\alpha|=m}\|A_\alpha(x)-A_\alpha(x_0)\| \le \frac{1}{4C_0C_1},$$

donde $C_1$ satisface $\displaystyle\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_1\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}$. Entonces

$$\|R_1u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le \frac{1}{4C_0}\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

Como $R_0$ tiene orden a lo sumo $m-1$, existe $C_2>0$ tal que $\|R_0u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\le C_2\|u\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}$. Aplicamos el Lema 11.3.1 con $\varepsilon=(4C_0C_2)^{-1}$ y obtenemos

$$\|R_0u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le \frac{1}{4C_0}\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + C_3\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

Como $P_{x_0}^{(m)}u = Pu - R_1u - R_0u$,

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_0\|Pu\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \frac{1}{2}\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + C_4\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

El término intermedio pasa al miembro izquierdo y concluye la prueba. □

**Proposición 11.3.5.** (Estimación local en un orden de Sobolev arbitrario) Sean $n,r,m\in\mathbb{N}$, sea $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$,

sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sean $A_\alpha \in C^\infty(U; \mathrm{End}(\mathbb{K}^r))$. Sea

$$P\colon C_c^\infty(U,\mathbb{K}^r) \longrightarrow C_c^\infty(U,\mathbb{K}^r), \qquad Pv = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x) D^\alpha v,$$

un sistema elíptico con coeficientes suaves. Fijados $x_0 \in U$ y $s \in \mathbb{R}$, existen un abierto $V$, con $x_0 \in V \Subset U$, y una constante $C_s > 0$ tales que

$$\|v\|_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_s\big(\|Pv\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|v\|_{H^{s+m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big)$$

para toda $v \in C_c^\infty(V,\mathbb{K}^r)$, extendida por cero fuera de $V$.

*Demostración.* Congelamos únicamente los coeficientes principales en $x_0$ y ponemos

$$P_{x_0}^{(m)} := \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0) D^\alpha.$$

El Lema 11.3.3 proporciona una constante $C_0 > 0$ tal que

$$\|v\|_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_0\big(\|P_{x_0}^{(m)} v\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|v\|_{H^{s+m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big).$$

Escribimos

$$P = P_{x_0}^{(m)} + R_1 + R_0,$$

donde

$$R_1 := \sum_{|\alpha|=m} \big(A_\alpha(x) - A_\alpha(x_0)\big) D^\alpha$$

y $R_0$ reúne los términos de orden a lo sumo $m-1$. Para todo $W \Subset U$, los operadores $P_{x_0}^{(m)}$, $R_1$ y $R_0$ envían $C_c^\infty(W,\mathbb{K}^r)$ en $C_c^\infty(U,\mathbb{K}^r)$.

La estimación afinada para la multiplicación, Lema 6.1.8, se aplicará después de extender los coeficientes a todo $\mathbb{R}^n$. Precisamos esta localización. Elegimos $r_0 > 0$ con $\overline{B(x_0,r_0)} \subseteq U$ y definimos $C_\alpha(r_0)$ y $C_*(r_0)$ como en la prueba anterior. Las identidades (11.3) y (11.4) muestran que, para $0 < r < r_0$,

$$\sum_{|\alpha|=m} \sup_{x\in B(x_0,r)} \|A_\alpha(x) - A_\alpha(x_0)\| \le r C_*(r_0). \tag{11.5}$$

Sea $C_1 > 0$ una constante que domine el producto de la constante matricial del Lema 6.1.8 por las normas de los operadores $D^\alpha\colon H^{s+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$, $|\alpha| = m$. Esta constante depende de $n, s, m$ y de los rangos, pero no de $r$, de $\theta$ ni de los coeficientes. Elegimos $r \in (0, r_0)$ de modo que $C_0 C_1 r C_*(r_0) \le \frac{1}{2}$ y tomamos $V = B(x_0, r/2)$. Elegimos $\theta \in C_c^\infty(B(x_0,r))$ con $0 \le \theta \le 1$ y $\theta = 1$ en una vecindad de $\overline{V}$. Si $v \in C_c^\infty(V,\mathbb{K}^r)$, podemos reemplazar cada coeficiente de $R_1$ por

$$B_\alpha(x) := \theta(x)\big(A_\alpha(x) - A_\alpha(x_0)\big),$$

entendido como cero fuera de $B(x_0,r)$. Este coeficiente es suave y coincide con $A_\alpha - A_\alpha(x_0)$ en una vecindad

del soporte de $v$. Además, como $0 \le \theta \le 1$ y su soporte está contenido en $B(x_0, r)$, la estimación (11.5) da

$$\sum_{|\alpha|=m} \|B_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le rC_*(r_0).$$

El Lema 6.1.8, aplicado componente a componente, y la continuidad de $D^\alpha \colon H^{s+m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$ dan

$$\|R_1 v\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_1 rC_*(r_0)\|v\|_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + C_2\|v\|_{H^{s+m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

Aquí el segundo término reúne los restos que pierden una derivada; sus constantes pueden depender de las derivadas de los coeficientes y de $\theta$, pero no de $v$.
Para tratar $R_0$, extendemos del mismo modo sus coeficientes mediante $\theta$ y después por cero a $\mathbb{R}^n$. Como cada sumando tiene la forma $B_\alpha D^\alpha v$ con $|\alpha| \le m-1$, el Lema 6.1.8, junto con la Proposición 6.1.6, proporciona

$$\|R_0 v\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_3\|v\|_{H^{s+m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

La identidad $P^{(m)}_{x_0} v = Pv - R_1 v - R_0 v$ implica

$$\|v\|_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_0\|Pv\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + C_0C_1 rC_*(r_0)\|v\|_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + C_4\|v\|_{H^{s+m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

La elección del radio satisface $C_0C_1 rC_*(r_0) \le \frac{1}{2}$; si $C_*(r_0) = 0$, basta cualquier radio para el cual las localizaciones anteriores estén definidas. Esta condición explica cuantitativamente por qué el término $R_1$, aunque conserva el orden $m$, puede absorberse en el miembro izquierdo. Los coeficientes de $R_0$ no se han hecho pequeños: la pérdida de un orden es la que permite conservarlos en el último término. Se obtiene así la estimación afirmada. □

**Proposición 11.3.6.** (Estimación local de orden superior) Bajo las hipótesis del Lema 11.3.4, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ el abierto $V$ puede reducirse, si es necesario, de modo que exista $C_k > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^{k+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_k\big(\|Pu\|_{H^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big)$$

para toda $u \in C^\infty_c(V, \mathbb{K}^r)$, extendida por cero fuera de $V$.

*Demostración.* Aplicamos la Proposición 11.3.5 con $s = k$. Después de reducir $V$ si es necesario, obtenemos

$$\|u\|_{H^{k+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_1\big(\|Pu\|_{H^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|u\|_{H^{k+m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big).$$

El Lema 11.3.1, aplicado con los órdenes $k+m-1$ y $k+m$, proporciona, para todo $\varepsilon > 0$, una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^{k+m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le \varepsilon\|u\|_{H^{k+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + C_\varepsilon\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

Elegimos $\varepsilon$ de modo que $C_1\varepsilon < 1$ y absorbemos el término correspondiente en el miembro izquierdo. Se obtiene

$$\|u\|_{H^{k+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_k\big(\|Pu\|_{H^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big),$$

como se quería. □

### 11.3.4 Globalización en una variedad cerrada

Las estimaciones locales se convierten en una estimación global mediante una partición finita de la unidad. Los conmutadores con los cortes tienen orden inferior, por lo que la desigualdad de interpolación controla los términos que introduce el pegado.

**Teorema 11.3.7.** (Estimación elíptica global) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales suaves con métricas fibradas $\mathbf{h_E},\mathbf{h_F}$, y sea $P\in\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ elíptico. Para todo $k\in\mathbb{N}_0$ existe $C_k>0$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{k+m}(M,\mathbf{E})}\le C_k\big(\|P\mathbf{u}\|_{H^k(M,\mathbf{F})}+\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\big)$$

para toda $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$. Además, $P$ se extiende de manera única a un operador lineal continuo

$$P\colon H^{k+m}(M,\mathbf{E})\longrightarrow H^k(M,\mathbf{F}).$$

*Demostración.* La continuidad de $P\colon H^{k+m}(M,\mathbf{E})\longrightarrow H^k(M,\mathbf{F})$ se obtiene de la expresión local del Corolario 8.1.35. Cada derivada de orden a lo sumo $k$ de $P\mathbf{u}$ es una suma finita de coeficientes suaves multiplicados por derivadas de las componentes de $\mathbf{u}$ de orden a lo sumo $k+m$. El Lema 9.1.44, aplicado con $p=2$, identifica localmente la norma definida con derivadas covariantes con la suma de las normas de Sobolev de las componentes. Esto permite sumar las estimaciones en una cubierta finita.

Si $m=0$, el operador $P$ es un homomorfismo suave de haces y la elipticidad afirma que cada $P_x$ es invertible. En marcos locales la fórmula de la matriz inversa muestra que $P^{-1}$ es suave. La misma estimación de Leibniz, aplicada a $P^{-1}$ en una cubierta finita, da $\|\mathbf{u}\|_{H^k(M,\mathbf{E})}\le C_k\|P\mathbf{u}\|_{H^k(M,\mathbf{F})}$. Esto prueba también la desigualdad inversa en orden cero.

Supongamos ahora $m\ge 1$. Para la desigualdad inversa, elegimos una cubierta finita $(U_a)_{a=1}^N$ por cartas sobre las que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ admiten marcos suaves, y una partición de la unidad $(\chi_a)_{a=1}^N$ subordinada a ella. Refinamos la cubierta de modo que $\operatorname{supp}(\chi_a)$ quede contenido en un abierto donde sea válida la Proposición 11.3.6. En coordenadas y componentes,

$$\|\chi_a\mathbf{u}\|_{H^{k+m}(M,\mathbf{E})}\le C_a\big(\|P(\chi_a\mathbf{u})\|_{H^k(M,\mathbf{F})}+\|\chi_a\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\big).$$

Como

$$P(\chi_a\mathbf{u})=\chi_aPu+[P,\chi_a]\mathbf{u}$$

y $[P,\chi_a]$ tiene orden a lo sumo $m-1$,

$$\|[P,\chi_a]\mathbf{u}\|_{H^k(M,\mathbf{F})}\le C_a'\|\mathbf{u}\|_{H^{k+m-1}(M,\mathbf{E})}.$$

Al sumar sobre $a$ y usar nuevamente el Lema 9.1.44,

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{k+m}(M,\mathbf{E})}\le C\big(\|P\mathbf{u}\|_{H^k(M,\mathbf{F})}+\|\mathbf{u}\|_{H^{k+m-1}(M,\mathbf{E})}+\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\big).$$

La versión global del Lema 11.3.1, obtenida al aplicarlo en las finitísimas cartas, da

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{k+m-1}(M,\mathbf{E})}\le\varepsilon\|\mathbf{u}\|_{H^{k+m}(M,\mathbf{E})}+C_\varepsilon\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}.$$

Elegimos $\varepsilon$ de modo que el primer término pueda absorberse en el miembro izquierdo. Esto prueba la estimación para secciones suaves. La continuidad de $P$ y la densidad de $\Gamma(\mathbf{E})$ en $H^{k+m}(M,\mathbf{E})$ proporcionan la extensión indicada y prolongan la desigualdad a todo $H^{k+m}(M,\mathbf{E})$. □

**Corolario 11.3.8.** (Equivalencia con la norma de gráfica) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada, sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales suaves con métricas fibradas $\mathbf{h_E},\mathbf{h_F}$, y sea $P\in\mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ elíptico. Para cada $k\in\mathbb{N}_0$ existen constantes $c_P,C_P>0$, dependientes de $P$, $k$ y de los datos geométricos fijos, tales que

$$c_P\|\mathbf{u}\|_{H^{k+m}(M,\mathbf{E})}\le\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}+\|P\mathbf{u}\|_{H^k(M,\mathbf{F})}\le C_P\|\mathbf{u}\|_{H^{k+m}(M,\mathbf{E})}$$

para todo $\mathbf{u}\in H^{k+m}(M,\mathbf{E})$.

*Demostración.* El Teorema 11.3.7 da una de las desigualdades. La otra se sigue de la continuidad de $P\colon H^{k+m}(M,\mathbf{E})\longrightarrow H^k(M,\mathbf{F})$ y de la inclusión continua $H^{k+m}(M,\mathbf{E})\hookrightarrow L^2(M,\mathbf{E})$. □

La estimación anterior coincide, en el lenguaje de operadores sobre haces, con la desigualdad elíptica fundamental de [21, Ejercicio 9.12(b)]. Una construcción alternativa de la regularidad elíptica, basada en herramientas microlocales que todavía no se han definido, se desarrollará en el Capítulo 15.

## 11.4 Regularidad elíptica

El operador $P$ actúa sobre distribuciones mediante la construcción del Capítulo 10; véase la Proposición 10.2.18. Por lo tanto, la ecuación $P\mathbf{u}=\mathbf{f}$ tiene sentido para $\mathbf{u}\in\mathcal{D}'(M,\mathbf{E})$ con la definición de derivada distribucional ya establecida.

**Lema 11.4.1.** (Ganancia local de una derivada) Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, sea

$$P=\sum_{|\alpha|\le m}A_\alpha(x)D^\alpha$$

un sistema elíptico con coeficientes suaves y sea $t\in\mathbb{Z}$. Si

$$v\in H^t_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{K}^r)\qquad\text{y}\qquad Pv\in H^{t-m+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{K}^r),$$

entonces

$$v\in H^{t+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{K}^r).$$

*Demostración.* Fijemos $x_0\in\Omega$. Aplicamos la Proposición 11.3.5 con el índice

$$s:=t-m+1.$$

Obtenemos un abierto $V_0$, con $x_0\in V_0\Subset\Omega$, y una constante $C>0$ tales que

$$\|z\|_{H^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\le C\big(\|Pz\|_{H^{t-m+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}+\|z\|_{H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big)$$

para toda $z\in C^\infty_c(V_0,\mathbb{K}^r)$.

Elegimos abiertos $W, V$ tales que

$$x_0 \in W \Subset V \Subset V_0$$

y una función $\chi \in C_c^\infty(V)$ que sea igual a uno en una vecindad de $\overline{W}$. Definimos

$$w := \chi v,$$

extendida por cero fuera de $\Omega$. Como $v \in H^t_{\mathrm{loc}}$, la Definición 6.1.7 da $w \in H^t(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$ y $\operatorname{supp}(w) \subseteq \operatorname{supp}(\chi) \Subset V$.

En el sentido de las distribuciones,

$$Pw = \chi Pv + [P, \chi]v.$$

Justificamos la regularidad de ambos sumandos. Por la hipótesis sobre $Pv$, se tiene $\chi Pv \in H^{t-m+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$. Por otra parte, $[P, \chi]$ es un sistema diferencial de orden a lo sumo $m-1$. Elegimos $\eta \in C_c^\infty(V_0)$ tal que $\eta = 1$ en una vecindad de $\operatorname{supp}(\chi)$. La localidad de los operadores diferenciales permite escribir

$$[P, \chi]v = [P, \chi](\eta v).$$

Como $\eta v \in H^t(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r)$, la continuidad de las derivadas y de la multiplicación por coeficientes suaves, Proposición 6.1.6 y Lema 6.1.8, proporciona

$$[P, \chi]v \in H^{t-m+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r).$$

Por lo tanto,

$$Pw \in H^{t-m+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r).$$

Sea $J_\varepsilon$ el molificador de la Proposición 6.1.11 y pongamos $w_\varepsilon := J_\varepsilon w$. Como $\operatorname{supp}(w) \Subset V$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\operatorname{supp}(w_\varepsilon) \subseteq V_0 \qquad \text{para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Además, $w_\varepsilon \in C_c^\infty(V_0, \mathbb{K}^r)$, de modo que la estimación elíptica anterior es aplicable:

$$\|w_\varepsilon\|_{H^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C\big(\|Pw_\varepsilon\|_{H^{t-m+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|w_\varepsilon\|_{H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big).$$

Para controlar el primer término, extendemos los coeficientes de $P$ fuera de $V_0$. Elegimos $\vartheta \in C_c^\infty(\Omega)$ que sea igual a uno en una vecindad de $\overline{V_0}$ y sustituimos $A_\alpha$ por la extensión por cero de $\vartheta A_\alpha$ a $\mathbb{R}^n$. Esta sustitución no altera $Pw$, $Pw_\varepsilon$ ni el conmutador en sus soportes. Entonces

$$Pw_\varepsilon = P(J_\varepsilon w) = J_\varepsilon(Pw) + [P, J_\varepsilon]w.$$

La Proposición 6.1.11 y el Corolario 6.1.13 dan, uniformemente para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\|Pw_\varepsilon\|_{H^{t-m+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le \|Pw\|_{H^{t-m+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + C_1\|w\|_{H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}.$$

También $\|w_\varepsilon\|_{H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le \|w\|_{H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}$. En consecuencia,

$$\|w_\varepsilon\|_{H^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} \le C_2\big(\|Pw\|_{H^{t-m+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)} + \|w\|_{H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)}\big),$$

y el miembro derecho no depende de $\varepsilon$.
El espacio $H^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ es de Hilbert. Por lo tanto, existe una sucesión $\varepsilon_j \to 0$ y un elemento $z \in H^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ tales que $w_{\varepsilon_j} \rightharpoonup z$ débilmente en $H^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$. La inclusión continua $H^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r) \hookrightarrow H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$ implica que la misma sucesión converge débilmente a $z$ en $H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$. Sin embargo, la Proposición 6.1.11 da $w_{\varepsilon_j} \to w$ fuertemente en $H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$. La unicidad del límite débil muestra que $z = w$. Por consiguiente, $w \in H^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r)$.
Como $\chi = 1$ en una vecindad de $\overline{W}$, se tiene $v = w$ en $W$. Así, $v \in H^{t+1}_{\mathrm{loc}}(W,\mathbb{K}^r)$ en una vecindad de $x_0$. Como $x_0$ era arbitrario, el criterio de localización del Lema 6.1.9 concluye que $v \in H^{t+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{K}^r)$. □

**Teorema 11.4.2.** (Regularidad elíptica local) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ elíptico y sea $k \in \mathbb{N}_0$. Si $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(M,\mathbf{E})$ y $P\mathbf{u} \in H^k_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{F})$, entonces $\mathbf{u} \in H^{k+m}_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$. En particular, si $P\mathbf{u}$ es suave, entonces $\mathbf{u}$ es suave.

*Demostración.* Si $m = 0$, la elipticidad da un homomorfismo inverso suave $P^{-1}$. La multiplicación de distribuciones por sus coeficientes suaves es compatible con la composición, de modo que $\mathbf{u} = P^{-1}(P\mathbf{u})$. Leibniz en cada carta prueba la continuidad local de $P^{-1}$ en $H^k$ y su conservación de la suavidad. Las dos conclusiones se siguen directamente en este caso.
Supongamos $m \geq 1$ y fijemos $x_0 \in M$. Elegimos una bola coordenada regular $(U,\varphi)$ alrededor de $x_0$, con $\Omega := \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, y marcos suaves

$$\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r \qquad \text{y} \qquad \mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_r$$

para $\mathbf{E}|_U$ y $\mathbf{F}|_U$, respectivamente. Los rangos coinciden porque el símbolo principal de un operador elíptico es un isomorfismo entre las fibras. Reduciendo $U$ si es necesario, podemos suponer que $U$ es relativamente compacto y que $x_0$ corresponde al punto $y_0 := \varphi(x_0)$.
Sea $q \in C^\infty(\Omega)$ el peso coordenado positivo de la medida riemanniana, caracterizado por la fórmula de cambio de variables

$$\int_U \eta \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_\Omega (\eta \circ \varphi^{-1})(y) q(y) \, d\lambda_n(y)$$

para toda función integrable $\eta$ con soporte en $U$. Sean $\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^r$ y $\mathbf{f}^1,\dots,\mathbf{f}^r$ los marcos duales de $\mathbf{E}^*|_U$ y $\mathbf{F}^*|_U$, respectivamente. La representación local de $\mathbf{u}$ es la distribución vectorial

$$\widehat{u} = (u^1,\dots,u^r) \in \mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{K}^r)$$

definida por

$$\langle u^a,\psi\rangle := \mathbf{u}\left(((q^{-1}\psi)\circ\varphi)\mathbf{e}^a\right), \qquad \psi \in C^\infty_c(\Omega),$$

donde la sección de prueba se extiende por cero fuera de $U$. Definimos $\widehat{Pu} = ((Pu)^1,\dots,(Pu)^r)$ mediante

$$\langle (Pu)^b,\psi\rangle := P\mathbf{u}\left(((q^{-1}\psi)\circ\varphi)\mathbf{f}^b\right), \qquad \psi \in C^\infty_c(\Omega), \quad 1 \leq b \leq r,$$

prolongando también por cero la sección de prueba. Esta normalización por $q^{-1}$ hace que las componentes se interpreten respecto de la medida de Lebesgue en $\Omega$.

En los marcos elegidos, el operador tiene la forma

$$P_U = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(y) D^\alpha.$$

La extensión distribucional de $P$ es compatible con esta representación local. Verifiquemos la afirmación. Si $\Psi = (\Psi_1,\dots,\Psi_r) \in C_c^\infty(\Omega,(\mathbb{K}^r)^*)$, identificamos $q^{-1}\Psi$ con la sección de $\mathbf{F}^*|_U$ dada por $\sum_{b=1}^{r}((q^{-1}\Psi_b)\circ\varphi)\mathbf{f}^b$. Sea $P_U^{\mathrm{t}}$ el transpuesto formal bilineal del sistema respecto de la medida de Lebesgue; sus matrices son transpuestas, no conjugadas. El Corolario 10.2.15 da

$$P'\big(q^{-1}\Psi\big) = q^{-1}P_U^{\mathrm{t}}\Psi.$$

Por la definición de la acción distribucional,

$$\langle\widehat{Pu},\Psi\rangle = (P\mathbf{u})(q^{-1}\Psi) = \mathbf{u}\big(P'(q^{-1}\Psi)\big) = \langle\widehat{u},P_U^{\mathrm{t}}\Psi\rangle = \langle P_U\widehat{u},\Psi\rangle.$$

Así,

$$\widehat{Pu} = P_U\widehat{u} \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{K}^r).$$

Por la Proposición 11.1.3, el símbolo principal del sistema es

$$p_m(y,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(y)\xi^\alpha.$$

La elipticidad de $P$ afirma que $p_m(y,\xi)$ es invertible para todo $y\in\Omega$ y todo $\xi\neq 0$. Por lo tanto, $P_U$ es un sistema elíptico con coeficientes suaves.

La hipótesis $P\mathbf{u}\in H^k_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{F})$ y el Lema 9.1.44 implican que las componentes de $P\mathbf{u}$ en el marco $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_r$ pertenecen a $H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{K}^r)$. La normalización anterior sólo multiplica las funciones de prueba por la función suave positiva $q^{-1}$, de modo que la representación local satisface

$$P_U\widehat{u} = \widehat{Pu} \in H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{K}^r).$$

Necesitamos ahora un punto inicial para la iteración. Elegimos $\chi_0\in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi_0 = 1$ en una vecindad de $y_0$. Por la Proposición 6.1.10, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\chi_0\widehat{u}\in H^{-N}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}^r).$$

El criterio de localización, Lema 6.1.9, muestra que

$$\widehat{u}\in H^{-N}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\mathbb{K}^r)$$

en alguna vecindad abierta $\Omega_0\Subset\Omega$ de $y_0$ sobre la cual $\chi_0 = 1$.

Aplicamos repetidamente el Lema 11.4.1. En el primer paso tomamos $t = -N$. Como

$$-N - m + 1 \le k,$$

la inclusión continua de la Proposición 6.1.6 da

$$P_U \widehat{u} \in H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega_0) \hookrightarrow H^{-N-m+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0).$$

El lema de ganancia proporciona

$$\widehat{u} \in H^{-N+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0).$$

Supongamos inductivamente que, para algún entero $t$ con

$$-N \le t < k+m,$$

se ha obtenido $\widehat{u} \in H^t_{\mathrm{loc}}(\Omega_0)$. Como $t \le k+m-1$, se cumple $t-m+1 \le k$, y nuevamente

$$P_U \widehat{u} \in H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega_0) \hookrightarrow H^{t-m+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0).$$

El Lema 11.4.1 implica

$$\widehat{u} \in H^{t+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0).$$

Después de un número finito de pasos alcanzamos

$$\widehat{u} \in H^{k+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \mathbb{K}^r).$$

El Lema 9.1.44, aplicado en el marco $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$, identifica la regularidad Sobolev de una sección con la de sus componentes locales. Por lo tanto,

$$\mathbf{u} \in H^{k+m}_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$$

en una vecindad de $x_0$. Como $x_0$ era arbitrario, la primera afirmación queda demostrada.
Supongamos finalmente que $P\mathbf{u}$ es suave. Entonces $P\mathbf{u} \in H^k_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{F})$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, y la primera parte proporciona

$$\mathbf{u} \in H^{k+m}_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E}) \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}_0.$$

Fijemos $\ell \in \mathbb{N}_0$ y elijamos $k$ de modo que $k+m > \ell + \dfrac{n}{2}$. En una carta y un marco local, el encaje de Sobolev euclidiano da

$$H^{k+m}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r) \hookrightarrow C^{\ell}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^r).$$

Por lo tanto, $\mathbf{u} \in C^{\ell}(\mathbf{E})$. Como $\ell$ era arbitrario, concluimos que $\mathbf{u}$ es suave. □

**Observación 11.4.3.** La parte genuinamente geométrica de la prueba consiste en identificar, mediante una carta y marcos locales, el símbolo del sistema con el símbolo intrínseco del operador. Una vez hecha esta identificación, el argumento analítico es el mismo para funciones y para secciones: las matrices $A_\alpha$ acoplan las componentes, pero la invertibilidad uniforme del símbolo en la esfera de covectores proporciona la misma estimación de Fourier.

### 11.4.1 Realizaciones mínima y maximal en una variedad cerrada

Sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ y supongamos que $M$ es cerrada. Definimos la realización inicial

$$P_0 \colon \Gamma(\mathbf{E}) \subseteq L^2(M, \mathbf{E}) \longrightarrow L^2(M, \mathbf{F}), \qquad P_0\mathbf{u} := P\mathbf{u}.$$

Como $\Gamma(\mathbf{E})$ es denso, $P_0$ es densamente definido. Su cerradura, cuando existe, se denomina realización mínima y se denota por $P_{\min}$. La realización maximal se define mediante la extensión distribucional de $P$:

$$\mathcal{D}(P_{\max}) := \{\mathbf{u} \in L^2(M,\mathbf{E}) \mid P\mathbf{u} \in L^2(M,\mathbf{F}) \text{ en el sentido distribucional}\}, \qquad P_{\max}\mathbf{u} := P\mathbf{u}.$$

**Teorema 11.4.4.** (Dominio de un operador elíptico en una variedad cerrada) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves provistos de métricas fibradas y sea $P \in \mathbf{PDO}^{(m)}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ elíptico. Entonces $P_0$ es cerrable,

$$P_{\min} = P_{\max}, \qquad \mathcal{D}(P_{\min}) = \mathcal{D}(P_{\max}) = H^m(M,\mathbf{E}),$$

y existen constantes $c_P, C_P > 0$, dependientes de $P$ y de los datos geométricos fijos, tales que

$$c_P\|\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|P_{\max}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{F})} \le C_P\|\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})}$$

para todo $\mathbf{u} \in H^m(M,\mathbf{E})$. En particular, toda realización cerrada de $P$ que se encuentre entre las realizaciones mínima y maximal coincide con ellas.

*Demostración.* Sea $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(P_{\max})$. Entonces $\mathbf{u} \in L^2(M,\mathbf{E})$ y $P\mathbf{u} \in L^2(M,\mathbf{F})$ distribucionalmente. El Teorema 11.4.2 con $k = 0$ da $\mathbf{u} \in H^m_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$. Como $M$ es compacta, una cubierta finita por cartas convierte esta regularidad local en $\mathbf{u} \in H^m(M,\mathbf{E})$. Así,

$$\mathcal{D}(P_{\max}) \subseteq H^m(M,\mathbf{E}).$$

La inclusión recíproca se sigue de la continuidad $P\colon H^m(M,\mathbf{E}) \longrightarrow L^2(M,\mathbf{F})$ del Teorema 11.3.7. Por lo tanto, $\mathcal{D}(P_{\max}) = H^m(M,\mathbf{E})$. El Corolario 11.3.8 muestra que este dominio es completo con la norma de gráfica; en consecuencia, $P_{\max}$ es cerrado. Como $P_0 \subseteq P_{\max}$, el operador inicial es cerrable.
Ahora tomemos $\mathbf{u} \in H^m(M,\mathbf{E})$. Por densidad existe una sucesión $(\mathbf{u}_j) \subseteq \Gamma(\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $H^m(M,\mathbf{E})$. La continuidad de $P$ da $P\mathbf{u}_j \to P\mathbf{u}$ en $L^2(M,\mathbf{F})$. Luego $(\mathbf{u}_j, P\mathbf{u}_j)$ converge a $(\mathbf{u}, P\mathbf{u})$ en $L^2(M,\mathbf{E}) \times L^2(M,\mathbf{F})$, lo que muestra que $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(P_{\min})$ y $P_{\min}\mathbf{u} = P\mathbf{u}$. Se obtiene $H^m(M,\mathbf{E}) \subseteq \mathcal{D}(P_{\min})$. Como siempre $P_{\min} \subseteq P_{\max}$, ambas realizaciones coinciden.
La equivalencia entre la norma de gráfica y la norma de $H^m(M,\mathbf{E})$ es el Corolario 11.3.8 con $k = 0$. Si $\widetilde{P}$ es cualquier realización cerrada de $P$ que satisface

$$P_{\min} \subseteq \widetilde{P} \subseteq P_{\max},$$

entonces las igualdades ya probadas implican $P_{\min} = \widetilde{P} = P_{\max}$. Esto demuestra la última afirmación. □

**Corolario 11.4.5.** (Realización cerrada del laplaciano de conexión) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada y sea $(\mathbf{E},\mathbf{h}_{\mathbf{E}},\nabla^{\mathbf{E}})$ un haz vectorial real con métrica fibrada o un haz hermitiano con conexión compatible. Considérese

$$L_{\mathbf{E},0} := (\nabla^{\mathbf{E}})^*_h\nabla^{\mathbf{E}}\colon \Gamma(\mathbf{E}) \subset L^2(M,\mathbf{E}) \longrightarrow L^2(M,\mathbf{E}).$$

Entonces

$$\overline{L_{\mathbf{E},0}} = L_{\mathbf{E},\min} = L_{\mathbf{E},\max} = L^*_{\mathbf{E},0}, \qquad \mathcal{D}(\overline{L_{\mathbf{E},0}}) = H^2(M,\mathbf{E}). \tag{11.6}$$

Esta realización es autoadjunta, no negativa y coincide con la realización de Friedrichs. En particular, $L_{\mathbf{E},0}$ es esencialmente autoadjunto.

*Demostración.* El operador diferencial $L_{\mathbf{E},0}$ es elíptico de orden dos y formalmente autoadjunto. El Teorema 11.4.4 da $L_{\mathbf{E},\min} = L_{\mathbf{E},\max}$ y dominio $H^2(M,\mathbf{E})$. Por la definición del adjunto de un operador densamente definido y la identidad de adjunción formal,

$$\mathbf{v} \in \mathcal{D}(L^*_{\mathbf{E},0}) \iff L_{\mathbf{E},0}\mathbf{v} \in L^2(M,\mathbf{E}) \text{ distribucionalmente}, \qquad L^*_{\mathbf{E},0}\mathbf{v} = L_{\mathbf{E},0}\mathbf{v};$$

por lo tanto, $L^*_{\mathbf{E},0} = L_{\mathbf{E},\max}$. Como la realización mínima es la cerradura del operador inicial, se obtiene (11.6), y la igualdad con su adjunto prueba la autoadjunción.
Para $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$\langle L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})} = \|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} \geq 0.$$

La cerradura conserva la no negatividad. La realización de Friedrichs es una extensión autoadjunta de $L_{\mathbf{E},0}$ contenida en $L^*_{\mathbf{E},0}$; como las realizaciones mínima y maximal coinciden, no existe una extensión cerrada intermedia distinta y la realización de Friedrichs es la de (11.6). La igualdad $\overline{L_{\mathbf{E},0}} = L^*_{\mathbf{E},0}$ es precisamente la esencial autoadjunción del operador inicial. □

## 11.5 Potencias del laplaciano de Bochner

La equivalencia del Teorema 9.1.42 se obtuvo mediante integración por partes e identidades de conmutación de derivadas covariantes. La teoría elíptica permite interpretarla como una equivalencia de normas de gráfica.

**Corolario 11.5.1.** (Potencias del laplaciano y normas de Sobolev) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada real o hermitiana $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $L_{\mathbf{E}} = (\nabla^{\mathbf{E}})^*_h\nabla^{\mathbf{E}}$ la realización de (11.6). Para todo $q \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}(L^q_{\mathbf{E}}) = H^{2q}(M,\mathbf{E}),$$

y existen constantes $c_q, C_q > 0$ tales que

$$c_q\|\mathbf{u}\|_{H^{2q}(M,\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|L^q_{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \leq C_q\|\mathbf{u}\|_{H^{2q}(M,\mathbf{E})}.$$

Además,

$$\bigcap_{q=1}^{\infty} \mathcal{D}(L^q_{\mathbf{E}}) = \Gamma(\mathbf{E}).$$

*Demostración.* La Proposición 11.1.5 y el Ejemplo 11.1.10 muestran que el operador diferencial $((\nabla^{\mathbf{E}})^*_h\nabla^{\mathbf{E}})^q$ es elíptico de orden $2q$. El Teorema 11.4.4 proporciona su dominio maximal $H^{2q}(M,\mathbf{E})$ y constantes $c_q, C_q > 0$ tales que

$$c_q\|\mathbf{u}\|_{H^{2q}(M,\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|L^q_{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \leq C_q\|\mathbf{u}\|_{H^{2q}(M,\mathbf{E})}.$$

El operador $L_{\mathbf{E}}$ es no negativo y autoadjunto. Por el Teorema espectral B.4.6, la potencia $L^q_{\mathbf{E}}$ está cerrada. Sobre $\Gamma(\mathbf{E})$ coincide con la potencia diferencial $L^q_{\mathbf{E},0}$ y, por lo tanto, extiende a ese operador inicial. Además, si

$\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L^q_{\mathbf{E}})$, entonces $L^q_{\mathbf{E},0}\mathbf{u} = L^q_{\mathbf{E}}\mathbf{u} \in L^2(M,\mathbf{E})$ en el sentido distribucional; por ello, $L^q_{\mathbf{E}}$ está contenido en la realización maximal de $L^q_{\mathbf{E},0}$. El Teorema 11.4.4, aplicado al operador elíptico $L^q_{\mathbf{E},0}$, afirma que sus realizaciones mínima y maximal coinciden. Se tiene, por lo tanto,

$$(L^q_{\mathbf{E},0})_{\min} \subseteq L^q_{\mathbf{E}} \subseteq (L^q_{\mathbf{E},0})_{\max} = (L^q_{\mathbf{E},0})_{\min},$$

y las tres realizaciones son iguales. De aquí se siguen la identidad del dominio y las dos estimaciones. La desigualdad directa también puede leerse en el Teorema 9.1.42, donde la norma de $H^{2q}(M,\mathbf{E})$ se expresa mediante potencias del laplaciano y derivadas covariantes intermedias.

Si $\mathbf{u}$ pertenece a todos los dominios, entonces $\mathbf{u} \in H^{2q}(M,\mathbf{E})$ para todo $q$. Los encajes locales de Sobolev implican $\mathbf{u} \in C^k(M,\mathbf{E})$ para cada $k$, de modo que $\mathbf{u}$ es suave. La inclusión recíproca es inmediata. □

**Observación 11.5.2.** En una variedad completa, no compacta y sin frontera, la regularidad elíptica local sigue siendo válida, pero una estimación global con una sola constante requiere control uniforme de la geometría y de los coeficientes. Bajo hipótesis de geometría acotada se recuperan estimaciones análogas; este punto se retomará en el capítulo correspondiente.

El símbolo principal que hemos construido es también el que interviene en teoría del índice. Si $\pi\colon T^*M \longrightarrow M$ es la proyección, un operador elíptico determina sobre $T^*M \setminus 0_M$ un isomorfismo

$$\pi^*\mathbf{E} \longrightarrow \pi^*\mathbf{F}, \qquad (x,\xi,v) \longmapsto (x,\xi,\sigma_m(P)(x,\xi)v).$$

La restricción de este isomorfismo al haz de coesferas contiene la información topológica que se utilizará más adelante. Esta formulación covariante coincide con la desarrollada en [21, Definición 6.36 y Capítulo 9].

# 12

# Espacios de Sobolev fraccionarios en haces vectoriales y el núcleo del calor: enfoque intrínseco

Los espacios de Sobolev de orden entero estudiados en los capítulos anteriores se construyen mediante las derivadas covariantes $\nabla^j \mathbf{u}$. Cuando el orden deja de ser entero, ya no existe una familia finita de derivadas que proporcione por sí sola una definición intrínseca. Una alternativa consiste en elegir un operador elíptico no negativo, construir el semigrupo generado por ese operador y definir sus potencias negativas mediante una integral de Laplace. Éste es el punto de vista de los potenciales de Bessel.

El semigrupo aparece al resolver el problema de evolución

$$\partial_t \mathbf{u} + L_{\mathbf{E}} \mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Formalmente, su solución es $\mathbf{u}(t) = e^{-tL_{\mathbf{E}}}\mathbf{u}_0$. Integrar estos operadores respecto de $t$ con el peso adecuado produce las potencias negativas de $I + L_{\mathbf{E}}$ y, con ellas, una escala de regularidad fraccionaria. El calor enlaza así una EDP parabólica con el cálculo funcional del operador elíptico.

El desarrollo tiene dos niveles. En $L^2(M, \mathbf{E})$ se dispone de la estructura de Hilbert, de las formas sesquilineales cerradas y del cálculo espectral para operadores autoadjuntos. Una vez construido el semigrupo del calor en ese espacio, la desigualdad de Kato–Simon permite compararlo con el semigrupo escalar y extenderlo de manera consistente a $L^p(M, \mathbf{E})$. Los potenciales de Bessel se definen entonces mediante integrales de Bochner. Para funciones escalares sobre variedades completas, este programa fue desarrollado por Strichartz; véase [137, Teoremas 3.5 y 4.2]. Aquí lo formularemos directamente para secciones y probaremos los pasos covariantes que intervienen en la construcción.

Durante todo el capítulo, $(M, \mathbf{g})$ será una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera. El haz $\mathbf{E} \to M$ será un haz vectorial suave, real o complejo, de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, hermitiana en el caso complejo, y $\nabla^{\mathbf{E}}$ será una conexión compatible con $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. En el caso real se aplicará la teoría espectral a la complexificación de $\mathbf{E}$; el laplaciano, el semigrupo y los potenciales de Bessel de orden real preservan las secciones

reales. Escribiremos $L^p(M,\mathbf{E})$ para los espacios definidos con respecto a la medida de Riemann–Lebesgue $\lambda_{\mathbf{g}}$. Sobre clases de Sobolev, $\nabla^j\mathbf{u}$ denota la derivada covariante débil $\nabla^j_w\mathbf{u}$.

**El calor como instrumento de regularidad**

Desde Fourier, la ecuación del calor ha servido para separar y amortiguar frecuencias. En una variedad, el semigrupo generado por un laplaciano conserva esa función, aunque ya no dispongamos de traslaciones globales. La teoría espectral permite construir el calor a partir del operador; sus estimaciones revelan la geometría de la variedad; las integrales del semigrupo producen potenciales de Bessel y órdenes fraccionarios. El mismo objeto conecta así evolución, regularización y análisis funcional.

## 12.1 El laplaciano de conexión en $L^2(M,\mathbf{E})$

Conviene fijar desde el principio la relación entre los dos signos que se utilizan en el libro. Para funciones,

$$\Delta_{\mathbf{g}} = \operatorname{div}_{\mathbf{g}}\operatorname{grad}_{\mathbf{g}} = \operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2)$$

tiene símbolo de Fourier $-|\xi|^2_{\mathbf{g}}$, mientras que $d^*d = -\Delta_{\mathbf{g}}$ es no negativo. Para una conexión compatible definimos análogamente la traza covariante

$$\Delta_{\mathbf{E}}\mathbf{u} := \operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2\mathbf{u}), \qquad (\nabla^{\mathbf{E}})^*_h\nabla^{\mathbf{E}} = -\Delta_{\mathbf{E}}$$

en secciones suaves de soporte compacto; la traza contrae los dos primeros índices derivativos de $\nabla^2\mathbf{u}$. El operador $L_{\mathbf{E}}$ construido a continuación es la realización no negativa de $(\nabla^{\mathbf{E}})^*_h\nabla^{\mathbf{E}}$; por lo tanto, la ecuación $\partial_t\mathbf{u} + L_{\mathbf{E}}\mathbf{u} = 0$ equivale en el régimen suave a $\partial_t\mathbf{u} = \Delta_{\mathbf{E}}\mathbf{u}$.

### 12.1.1 La realización determinada por la forma de energía

El laplaciano de Bochner fue definido en la Definición 8.2.10. En este capítulo usaremos la notación

$$L_{\mathbf{E},0} := \Delta_B\restriction_{\Gamma_c(\mathbf{E})} = (\nabla^{\mathbf{E}})^*_h\nabla^{\mathbf{E}} = -\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2), \qquad \mathcal{D}(L_{\mathbf{E},0}) = \Gamma_c(\mathbf{E}),$$

para su restricción inicial a las secciones suaves de soporte compacto. Su acción distribucional no requiere una definición nueva: se obtiene aplicando la Proposición 10.2.18 al operador diferencial $L_{\mathbf{E},0}$. En particular, si $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(M,\mathbf{E})$, la expresión $L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}$ tiene el significado fijado en el capítulo de distribuciones en haces vectoriales.

La fórmula local del laplaciano de Bochner, demostrada en el capítulo de operadores diferenciales parciales, da

$$L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{e}_i}\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{u} - \nabla^{\mathbf{E}}_{\nabla^{TM}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_i}\mathbf{u}\right)$$

en cualquier marco ortonormal local $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ de $TM$. El Ejemplo 11.1.10 muestra que su símbolo principal es $-|\xi|^2_{\mathbf{g}}\operatorname{Id}_{\mathbf{E}_x}$; por lo tanto, es elíptico.

**Notación 12.1.1.** (Laplaciano de conexión) En lo que sigue, llamaremos **laplaciano de conexión inicial** al operador $L_{\mathbf{E},0}$ anterior. La letra $L_{\mathbf{E}}$ se reservará para su realización autoadjunta en $L^2(M,\mathbf{E})$.

**Corolario 12.1.2.** (Caso cerrado) Si, además, $M$ es cerrada, los resultados elípticos ya demostrados dan

$$\overline{L_{\mathbf{E},0}} = L_{\mathbf{E},\min} = L_{\mathbf{E},\max} = L^*_{\mathbf{E},0}, \qquad \mathcal{D}(\overline{L_{\mathbf{E},0}}) = H^2(M,\mathbf{E}).$$

La realización común es autoadjunta, no negativa y coincide con la realización de Friedrichs. En particular, el operador inicial $L_{\mathbf{E},0}$ es esencialmente autoadjunto.

*Demostración.* Es el Corolario 11.4.5, obtenido a partir de la regularidad elíptica, la igualdad de las realizaciones mínima y maximal y la adjunción formal. □

**Proposición 12.1.3.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. El operador $L_{\mathbf{E},0}$ es densamente definido, simétrico y no negativo. Para cualesquiera $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\Gamma_c(\mathbf{E})$ se tiene

$$\langle L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})} = \int_M \langle\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}} = \langle\mathbf{u},L_{\mathbf{E},0}\mathbf{v}\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})}.$$

En particular,

$$\langle L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})} = \|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}.$$

*Demostración.* La densidad de $\Gamma_c(\mathbf{E})$ en $L^2(M,\mathbf{E})$ fue probada en el capítulo de Sobolev en haces. La primera igualdad es la fórmula de integración por partes que caracteriza a $(\nabla^{\mathbf{E}})^*_h$; la segunda se obtiene intercambiando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y usando la simetría hermitiana del producto interno. Al tomar $\mathbf{v}=\mathbf{u}$ se obtiene la última identidad y, con ella, la no negatividad. □

Definimos en $\Gamma_c(\mathbf{E})$ la forma

$$\mathfrak{q}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_M \langle\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Su cerradura tiene dominio $W^{1,2}_0(M,\mathbf{E})$. Para identificar este espacio con $W^{1,2}(M,\mathbf{E})$ necesitaremos funciones de corte cuyo gradiente tienda uniformemente a cero. Antes de construirlas probaremos con detalle la existencia de una función de agotamiento suave con gradiente acotado.

**Lema 12.1.4.** (Suavización de funciones Lipschitz) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera. Sea $f: M\longrightarrow\mathbb{R}$ una función $L$-Lipschitz con respecto a la distancia riemanniana, y sea $\varepsilon>0$. Existe $h\in C^\infty(M)$ tal que

$$|h-f|<\varepsilon \qquad \text{y} \qquad |dh|_{\mathbf{g}}\le L+\varepsilon$$

en todo $M$.

*Demostración.* Si $L=0$, la conexidad de $M$ implica que $f$ es constante, y basta tomar $h=f$. Supongamos $L>0$ y fijemos

$$\theta := \min\left\{\frac{1}{4},\frac{\varepsilon}{16L}\right\}.$$

Para cada $p\in M$, la Proposición 2.8.10, aplicada con este valor de $\theta$, proporciona una bola coordenada

normal regular $U_p$ y una carta normal $\kappa_p\colon U_p \longrightarrow B_{\mathrm{euc}}(0,r_p)$ tales que, para todo $z \in B_{\mathrm{euc}}(0,r_p)$ y $w \in \mathbb{R}^n$,

$$(1-\theta)\|w\| \le \left| d(\kappa_p^{-1})_z w \right|_{\mathbf{g}} \le (1+\theta)\|w\|.$$

Estas bolas cubren $M$. Consideremos la familia $\mathcal{B}$ de las bolas coordenadas regulares $V$ para las cuales $\overline{V} \subseteq U_p$ para algún $p \in M$. Esta familia es una base: si $q \in O$ y $O$ es abierto, elegimos $p$ con $q \in U_p$ y, dentro del abierto euclidiano $\kappa_p(O \cap U_p)$, dos bolas concéntricas centradas en $\kappa_p(q)$ cuyos radios satisfagan $0 < s < s'$ y cuya bola cerrada de radio $s'$ esté contenida en $\kappa_p(O \cap U_p)$. La preimagen de la bola de radio $s$ es una bola coordenada regular $V$ tal que $q \in V$ y $\overline{V} \subseteq O \cap U_p$, de acuerdo con la Definición 1.2.9. El Teorema 1.2.8 permite elegir de $\mathcal{B}$ un refinamiento numerable y localmente finito $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de la cubierta $(U_p)_{p\in M}$. Para cada $j$ fijamos una bola normal $U_j$ de la cubierta original tal que $\overline{V}_j \subseteq U_j$ y denotamos por $\kappa_j\colon U_j \longrightarrow B_{\mathrm{euc}}(0,r_j)$ su carta normal. Sea $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una partición suave de la unidad subordinada a $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$, cuya existencia está garantizada por el Teorema 1.3.5. Como $\operatorname{supp}(\varphi_j)$ es cerrado en $M$ y está contenido en el compacto $\overline{V}_j$, los números

$$C_j := \|d\varphi_j\|_{L^\infty(M,T^*M)}, \qquad \delta_j := \min\left\{ \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2^{j+4}(1+C_j)} \right\}$$

están bien definidos, con $C_j \ge 0$ y $\delta_j > 0$.
Fijemos $j \in \mathbb{N}$ y escribamos $F_j := f \circ \kappa_j^{-1}$. Si $z, z' \in B_{\mathrm{euc}}(0,r_j)$, el segmento que los une permanece en esta bola euclidiana. La curva $\gamma(t) := \kappa_j^{-1}((1-t)z + tz')$ está contenida en $U_j$ y satisface

$$d_{\mathbf{g}}\big(\kappa_j^{-1}(z), \kappa_j^{-1}(z')\big) \le L_{\mathbf{g}}(\gamma) \le (1+\theta)\|z - z'\|.$$

Como $f$ es $L$-Lipschitz respecto de $d_{\mathbf{g}}$, se sigue que

$$|F_j(z) - F_j(z')| \le L(1+\theta)\|z - z'\|.$$

Así, $F_j$ es $L_j$-Lipschitz, donde $L_j := L(1+\theta)$. El Teorema de extensión de McShane, Teorema B.1.6, proporciona una extensión $\widetilde{F}_j\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con la misma constante $L_j$. Tomemos el molificador $\rho$ del Teorema B.9.1 y pongamos

$$\tau_j := \min\left\{ 1, \frac{\delta_j}{2L_j m_1(\rho)} \right\}, \qquad f_j := \big(\widetilde{F}_j * \rho_{\tau_j}\big) \circ \kappa_j \quad \text{en } U_j.$$

Las estimaciones de dicho teorema implican $|f_j - f| \le \dfrac{\delta_j}{2}$ en $U_j$ y $\|D(\widetilde{F}_j * \rho_{\tau_j})\| \le L_j$. Si $q \in U_j$, $z = \kappa_j(q)$ y $v \in T_qM$ satisface $|v|_{\mathbf{g}} = 1$, la primera desigualdad métrica da $\|d\kappa_j(v)\| \le \dfrac{1}{1-\theta}$. Por lo tanto,

$$|df_j|_{\mathbf{g}} \le \sup_{\substack{v\in T_qM \\ |v|_{\mathbf{g}}=1}} \left| D(\widetilde{F}_j * \rho_{\tau_j})_z\big(d\kappa_j(v)\big) \right| \le \frac{L_j}{1-\theta} = L\frac{1+\theta}{1-\theta}.$$

Además,

$$L\frac{1+\theta}{1-\theta} - L = \frac{2L\theta}{1-\theta} \le \frac{\varepsilon}{6}.$$

En efecto, si $\theta = \dfrac{\varepsilon}{16L}$, usamos $\theta \le \dfrac{1}{4}$; si $\theta = \dfrac{1}{4}$, entonces $\varepsilon \ge 4L$ y se obtiene la misma cota.

Cada producto $\varphi_j f_j$, definido como cero fuera de $U_j$, es suave porque $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq V_j \Subset U_j$. Definimos $h := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j f_j$. La suma es localmente finita y, por lo tanto, $h \in C^\infty(M)$. Puesto que $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j = 1$ y $\varphi_j \geq 0$,

$$|h - f| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j |f_j - f| \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \delta_j \leq \frac{\varepsilon}{8} < \varepsilon.$$

La identidad $\sum_{j=1}^{\infty} d\varphi_j = 0$ permite escribir, sin derivar la función Lipschitz $f$,

$$dh = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \, df_j + \sum_{j=1}^{\infty} (f_j - f) \, d\varphi_j.$$

Por las cotas anteriores y la localidad finita,

$$|dh|_{\mathbf{g}} \leq L + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j C_j \leq L + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j-4} < L + \varepsilon.$$

Esto prueba las dos afirmaciones. □

**Observación 12.1.5.** En la demostración anterior no se necesita que las bolas $U_j$ sean fuertemente convexas en el sentido geodésico. La convexidad utilizada es la de $\kappa_j(U_j) = B_{\mathrm{euc}}(0, r_j)$: el segmento euclidiano determina una curva contenida en $U_j$, y su longitud proporciona una cota superior para la distancia riemanniana. Por ello, el control local de la Proposición 2.8.10 es exactamente el resultado geométrico requerido.

**Proposición 12.1.6.** (Función de agotamiento con gradiente acotado) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera. Existe una función propia $\rho \in C^\infty(M)$, estrictamente positiva, tal que

$$|d\rho|_{\mathbf{g}} \leq 2$$

en todo $M$.

*Demostración.* Fijemos $o \in M$ y consideremos $r(x) := d_{\mathbf{g}}(o, x)$. La desigualdad triangular muestra que $r$ es 1-Lipschitz. Como $M$ es completa, el Teorema de Hopf–Rinow, Teorema 2.9.9, implica que las bolas cerradas $\overline{B}_{\mathbf{g}}(o, R)$ son compactas; por lo tanto, $r$ es propia.
Aplicamos el Lema 12.1.4 a $r$ con $\varepsilon = 1$. Obtenemos $h \in C^\infty(M)$ tal que $|h - r| < 1$ y $|dh|_{\mathbf{g}} \leq 2$. En particular, $|h(o)| < 1$ porque $r(o) = 0$. Ponemos $\rho := h - h(o) + 2$. Esta función es estrictamente positiva porque

$$\rho(x) \geq r(x) - 1 - h(o) + 2 \geq 1 - h(o) > 0,$$

y es propia: si $\rho(x) \leq R$, entonces $r(x) \leq R + h(o) - 1$, de modo que el subnivel $\{\rho \leq R\}$ está contenido en una bola cerrada y es cerrado; por el Teorema 2.9.9 es compacto. Finalmente, $d\rho = dh$, por lo que $|d\rho|_{\mathbf{g}} \leq 2$. □

**Lema 12.1.7.** (Funciones de corte en variedades completas) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera. Existe una sucesión $(\chi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(M)$ tal que $0 \le \chi_j \le 1$, $\chi_j \to 1$ uniformemente sobre cada compacto y

$$\|d\chi_j\|_{L^\infty(M,T^*M)} \longrightarrow 0.$$

*Demostración.* Sea $\rho$ la función de la Proposición 12.1.6. Elegimos una función no creciente $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le \eta \le 1$, $\eta(s) = 1$ para $s \le 1$ y $\eta(s) = 0$ para $s \ge 2$, y definimos

$$\chi_j(x) := \eta\left(\frac{\rho(x)}{j}\right).$$

El soporte de $\chi_j$ está contenido en el subnivel $\{\rho \le 2j\}$, que es compacto porque $\rho$ es propia. Como $\rho > 0$ y $\eta$ es no creciente, la sucesión $(\chi_j)$ es creciente. Si $K \subseteq M$ es compacto y $R_K := \max_{x\in K} \rho(x)$, entonces $\chi_j = 1$ en $K$ para todo entero $j \ge \max\{1, \lceil R_K \rceil\}$. En particular, $\chi_j$ converge puntualmente a 1. Por último,

$$|d\chi_j|_{\mathbf{g}} = \frac{1}{j}\left|\eta'\left(\frac{\rho}{j}\right)\right| |d\rho|_{\mathbf{g}} \le \frac{2\|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{j},$$

lo que prueba la convergencia afirmada. □

**Proposición 12.1.8.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Entonces $W_0^{1,2}(M,\mathbf{E}) = W^{1,2}(M,\mathbf{E})$.

*Demostración.* Sea $\mathbf{u} \in W^{1,2}(M,\mathbf{E})$ y sean $(\chi_j)$ las funciones del lema anterior. La regla de Leibniz débil da

$$\nabla^{\mathbf{E}}(\chi_j \mathbf{u}) = d\chi_j \otimes \mathbf{u} + \chi_j \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}.$$

Como $0 \le \chi_j \le 1$ y $\chi_j \to 1$ puntualmente, se tiene

$$|(1-\chi_j)\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le |\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}, \qquad |(1-\chi_j)\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le |\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Los dos dominantes son integrables. El Teorema de convergencia dominada de Lebesgue B.6.14 implica

$$(1-\chi_j)\mathbf{u} \longrightarrow 0 \quad \text{en } L^2(M,\mathbf{E})$$

y

$$(1-\chi_j)\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} \longrightarrow 0 \quad \text{en } L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E}).$$

Además,

$$\|d\chi_j \otimes \mathbf{u}\|_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} \le \|d\chi_j\|_{L^\infty(M,T^*M)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $\chi_j\mathbf{u} \to \mathbf{u}$ en $W^{1,2}(M,\mathbf{E})$. Para cada $j$, el Teorema de Meyers–Serrin para haces, Teorema 9.1.48, aproxima $\chi_j\mathbf{u}$ en $W^{1,2}(M,\mathbf{E})$ por secciones suaves $\mathbf{u}_{j,k}$. Elegimos $\zeta_j \in C_c^\infty(M)$ igual a 1 en una vecindad de $\operatorname{supp}(\chi_j\mathbf{u})$. Como la multiplicación por $\zeta_j$ es continua en $W^{1,2}(M,\mathbf{E})$, se tiene $\zeta_j\mathbf{u}_{j,k} \to \chi_j\mathbf{u}$, y ahora $\zeta_j\mathbf{u}_{j,k} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$. Así, $\mathbf{u} \in W_0^{1,2}(M,\mathbf{E})$. □

La cerradura de $\mathfrak{q}_{\mathbf{E}}$ es, en consecuencia, una forma sesquilineal densamente definida, simétrica, no negativa y cerrada, con dominio $W^{1,2}(M,\mathbf{E})$.

**Teorema 12.1.9.** (Realización de Friedrichs del laplaciano de conexión) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Existe un único operador autoadjunto no negativo

$$L_{\mathbf{E}}\colon \mathcal{D}(L_{\mathbf{E}})\subseteq L^2(M,\mathbf{E})\longrightarrow L^2(M,\mathbf{E})$$

tal que $\mathcal{D}(L_{\mathbf{E}})\subseteq W^{1,2}(M,\mathbf{E})$ y

$$\mathfrak{q}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\langle L_{\mathbf{E}}\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})},\qquad \mathbf{u}\in\mathcal{D}(L_{\mathbf{E}}),\quad \mathbf{v}\in W^{1,2}(M,\mathbf{E}).$$

Su dominio es

$$\mathcal{D}(L_{\mathbf{E}})=\left\{\mathbf{u}\in W^{1,2}(M,\mathbf{E})\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{existe } \mathbf{f}\in L^2(M,\mathbf{E}) \text{ tal que}\\ \mathfrak{q}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\langle \mathbf{f},\mathbf{v}\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})} \text{ para todo } \mathbf{v}\in W^{1,2}(M,\mathbf{E})\end{array}\right\},$$

y, en ese caso, $L_{\mathbf{E}}\mathbf{u}=\mathbf{f}$. Además, $L_{\mathbf{E}}$ extiende a $L_{\mathbf{E},0}$.

*Demostración.* La existencia, la unicidad y la caracterización del dominio se obtienen del Teorema B.4.2. Si $\mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E})$, la Proposición 12.1.3 da

$$\mathfrak{q}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\langle L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})}$$

para $\mathbf{v}\in\Gamma_c(\mathbf{E})$. Ambos miembros dependen continuamente de $\mathbf{v}$ en la norma de $W^{1,2}(M,\mathbf{E})$, y $\Gamma_c(\mathbf{E})$ es denso en ese espacio por la Proposición 12.1.8. La identidad se extiende a todo $\mathbf{v}\in W^{1,2}(M,\mathbf{E})$, lo cual prueba que $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(L_{\mathbf{E}})$ y $L_{\mathbf{E}}\mathbf{u}=L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}$. □

**Teorema 12.1.10.** (Autoadjunción esencial) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. El operador $L_{\mathbf{E},0}$ es esencialmente autoadjunto en $L^2(M,\mathbf{E})$ y su cerradura coincide con $L_{\mathbf{E}}$.

*Demostración.* Como $L_{\mathbf{E},0}$ es simétrico y no negativo, la Proposición B.4.5 reduce la prueba a verificar que $\ker(L_{\mathbf{E},0}^{*}+I)=\{0\}$. Sea $\mathbf{u}$ un elemento de ese núcleo. Entonces

$$L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}=-\mathbf{u}$$

en el sentido distribucional. El Teorema 11.4.2, aplicado al operador elíptico $L_{\mathbf{E},0}+I$, implica que $\mathbf{u}$ es suave. Tomemos las funciones de corte $(\chi_j)$ del Lema 12.1.7. Las identidades de Leibniz

$$\nabla^{\mathbf{E}}(\chi_j\mathbf{u})=d\chi_j\otimes\mathbf{u}+\chi_j\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$$

y

$$\nabla^{\mathbf{E}}(\chi_j^2\mathbf{u})=2\chi_j d\chi_j\otimes\mathbf{u}+\chi_j^2\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$$

proporcionan, después de expandir y tomar la parte real,

$$|\nabla^{\mathbf{E}}(\chi_j \mathbf{u})|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = \mathrm{Re}\langle \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}, \nabla^{\mathbf{E}}(\chi_j^2\mathbf{u})\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + |d\chi_j \otimes \mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

La sección $\chi_j^2\mathbf{u}$ es suave y tiene soporte compacto. Al integrar y usar la definición del adjunto distribucional,

$$\|\nabla^{\mathbf{E}}(\chi_j \mathbf{u})\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} = \mathrm{Re}\langle L^*_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}, \chi_j^2\mathbf{u}\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|d\chi_j \otimes \mathbf{u}\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}.$$

Como $L^*_{\mathbf{E},0}\mathbf{u} = -\mathbf{u}$,

$$0 \le \|\nabla^{\mathbf{E}}(\chi_j \mathbf{u})\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} = -\|\chi_j\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|d\chi_j \otimes \mathbf{u}\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}.$$

Por lo tanto,

$$\|\chi_j\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} \le \|d\chi_j\|^2_{L^\infty(M,T^*M)}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} \longrightarrow 0.$$

Por otra parte, $|\chi_j\mathbf{u}-\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = |1-\chi_j|^2|\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le |\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$, la función dominante pertenece a $L^1(M)$ y $\chi_j\mathbf{u} \to \mathbf{u}$ puntualmente. El Teorema de convergencia dominada de Lebesgue B.6.14 da entonces $\|\chi_j\mathbf{u}-\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \to 0$. Como al mismo tiempo $\|\chi_j\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \to 0$, se sigue que $\mathbf{u} = 0$. □

### 12.1.2 El semigrupo espectral y el semigrupo escalar

Para $t \ge 0$ definimos

$$P^{\mathbf{E}}_t := e^{-tL_{\mathbf{E}}}$$

mediante el cálculo espectral. En el haz trivial de rango uno escribiremos $L = \Delta_B = -\Delta$ para la realización escalar positiva y $P_t = e^{-tL}$.

**Teorema 12.1.11.** (Semigrupo del calor covariante en $L^2$) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. La familia $(P^{\mathbf{E}}_t)_{t\ge0}$ satisface:

(a) $P^{\mathbf{E}}_0 = I$ y $P^{\mathbf{E}}_{t+s} = P^{\mathbf{E}}_t P^{\mathbf{E}}_s$ para $s,t \ge 0$;

(b) cada $P^{\mathbf{E}}_t$ es autoadjunto y $\|P^{\mathbf{E}}_t\|_{\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}))} \le 1$;

(c) $P^{\mathbf{E}}_t\mathbf{u} \to \mathbf{u}$ en $L^2(M,\mathbf{E})$ cuando $t \to 0^+$;

(d) si $t > 0$, entonces $P^{\mathbf{E}}_t\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L^m_{\mathbf{E}})$ para todo $m \in \mathbb{N}$;

(e) para $\mathbf{u} \in L^2(M,\mathbf{E})$, el mapeo $t \mapsto P^{\mathbf{E}}_t\mathbf{u}$ es diferenciable en $(0,\infty)$ y

$$\frac{d}{dt}P^{\mathbf{E}}_t\mathbf{u} = -L_{\mathbf{E}}P^{\mathbf{E}}_t\mathbf{u};$$

si $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_{\mathbf{E}})$, la derivada por la derecha en $t = 0$ existe y vale $-L_{\mathbf{E}}\mathbf{u}$.

*Demostración.* Es la Proposición B.4.9 aplicada a $A = L_{\mathbf{E}}$. Para la regularización basta notar que, si $t > 0$, la función $\lambda \mapsto \lambda^m e^{-t\lambda}$ es acotada en $[0,\infty)$. □

Antes de comparar los semigrupos escalar y covariante necesitaremos la positividad del resolvente escalar.

**Lema 12.1.12.** (Positividad y cota uniforme del resolvente escalar) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera. Sea $\lambda>0$ y sea $R_\lambda=(\lambda I+L)^{-1}$. Entonces:

(a) si $f\in L^2(M)$ es real y $f\geq 0$, entonces $R_\lambda f\geq 0$ casi en todas partes;

(b) si $f\in L^2(M)\cap L^\infty(M)$, entonces
$$\|R_\lambda f\|_{L^\infty(M)}\leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^\infty(M)}.$$

*Demostración.* Sea $u=R_\lambda f$. La caracterización variacional del resolvente, Corolario B.4.3, da
$$\int_M \langle du,d\varphi\rangle_{\mathbf{g}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}+\lambda\int_M u\varphi\,d\lambda_{\mathbf{g}}=\int_M f\varphi\,d\lambda_{\mathbf{g}}$$
para toda $\varphi\in W^{1,2}(M)$.
Supongamos primero que $f\geq 0$ y tomemos $u_-:=\max\{-u,0\}$. El Teorema 9.1.49, aplicado a la parte negativa, da $u_-\in W^{1,2}(M)$ y
$$du_-=-\mathbf{1}_{\{u<0\}}du$$
casi en todas partes. Al elegir $\varphi=u_-$ obtenemos
$$-\|du_-\|^2_{L^2(M,T^*M)}-\lambda\|u_-\|^2_{L^2(M)}=\int_M f u_-\,d\lambda_{\mathbf{g}}\geq 0.$$
El miembro izquierdo no es positivo; por lo tanto, $u_-=0$.
Para la cota uniforme podemos suponer primero que $f$ es real. El resolvente preserva las funciones reales, pues la forma que lo define tiene coeficientes reales. Sea $c=\frac{\|f\|_{L^\infty(M)}}{\lambda}$. Si $c=0$, la primera parte aplicada a $u$ y a $-u$ da $u=0$. Supongamos, pues, que $c>0$ y pongamos $z=(u-c)_+$. La función $z$ pertenece a $W^{1,2}(M)$; además, el conjunto $\{u>c\}$ tiene medida finita porque $u\in L^2(M)$, y la desigualdad de Cauchy–Schwarz del Teorema B.3.2 da $z\in L^1(M)$. En $\{u>c\}$ se cumple $u=z+c$, mientras que $dz=du$. Tomando $\varphi=z$,
$$\|dz\|^2_{L^2(M,T^*M)}+\lambda\|z\|^2_{L^2(M)}+\lambda c\int_M z\,d\lambda_{\mathbf{g}}=\int_M fz\,d\lambda_{\mathbf{g}}\leq \lambda c\int_M z\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$
Así, $z=0$ y $u\leq c$. Aplicando el mismo argumento a $-u$ se obtiene $|u|\leq c$. Sea ahora $f$ compleja y escribamos nuevamente $u=R_\lambda f$. El resolvente preserva las funciones reales y es positivo. Para cada $\theta\in\mathbb{R}$,
$$\operatorname{Re}(e^{-i\theta}u)=R_\lambda\big(\operatorname{Re}(e^{-i\theta}f)\big)\leq R_\lambda|f|.$$
La identidad $|z|=\sup_{\theta\in 2\pi\mathbb{Q}}\operatorname{Re}(e^{-i\theta}z)$, válida para todo $z\in\mathbb{C}$, y la numerabilidad de $2\pi\mathbb{Q}$ permiten tomar el supremo fuera de un único conjunto nulo. Así, $|R_\lambda f|\leq R_\lambda|f|$ casi en todas partes. Aplicando la cota real ya demostrada a $|f|$, obtenemos $|u|\leq\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^\infty(M)}$. □

**Corolario 12.1.13.** (Propiedad submarkoviana del semigrupo escalar) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera. El semigrupo $(P_t)_{t\geq 0}$ preserva la positividad. Además, para $f\in$

$L^2(M)\cap L^\infty(M)$,

$$\|P_t f\|_{L^\infty(M)} \le \|f\|_{L^\infty(M)}.$$

*Demostración.* La fórmula exponencial de la Proposición B.4.16, aplicada al generador $-L$, da

$$P_t f = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n}L\right)^{-n} f$$

en $L^2(M)$. Cada factor es

$$\left(I + \frac{t}{n}L\right)^{-1} = \frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}I + L\right)^{-1}$$

y, por el lema anterior, preserva la positividad y es una contracción en $L^\infty(M)$. Las iteraciones tienen las mismas propiedades. De la convergencia en $L^2(M)$ extraemos una subsucesión que converge casi en todas partes; al pasar al límite se conservan la positividad y la cota puntual. □

### 12.1.3 La desigualdad de Kato–Simon

La desigualdad débil de Kato, Corolario 9.5.7, asegura que si $\mathbf{u}\in W^{1,2}(M,\mathbf{E})$, entonces $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}\in W^{1,2}(M)$ y

$$|d|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}|_{\mathbf{g}} \le |\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}$$

casi en todas partes. Para obtener la dominación de semigrupos probaremos primero una desigualdad de resolventes.

**Lema 12.1.14.** (Dominación de resolventes) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Para $\lambda>0$ y $\mathbf{f}\in L^2(M,\mathbf{E})$,

$$\left|(\lambda I + L_{\mathbf{E}})^{-1}\mathbf{f}\right|_{\mathbf{h_E}} \le (\lambda I + L)^{-1}|\mathbf{f}|_{\mathbf{h_E}}$$

casi en todas partes.

*Demostración.* Ponemos

$$\mathbf{u} := (\lambda I + L_{\mathbf{E}})^{-1}\mathbf{f}$$

y, para $\varepsilon>0$,

$$a_\varepsilon := \left(|\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h_E}} + \varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La función $a_\varepsilon$ pertenece a $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(M)$ y

$$da_\varepsilon(\mathbf{X}) = \frac{\mathrm{Re}\langle\nabla^{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{h_E}}}{a_\varepsilon}$$

para casi todo punto y todo campo vectorial $\mathbf{X}$. En particular,

$$|da_\varepsilon|_{\mathbf{g}} \le |\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}.$$

Sea $0\le\varphi\in C^\infty_c(M)$. La sección

$$\mathbf{v}_\varepsilon := \frac{\varphi}{a_\varepsilon}\mathbf{u}$$

pertenece a $W^{1,2}(M,\mathbf{E})$ y tiene soporte compacto. La ecuación variacional del resolvente es la del Corolario B.4.3 aplicada a la forma $\mathfrak{q}_{\mathbf{E}}$:

$$\mathfrak{q}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{v}_\varepsilon)+\lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{v}_\varepsilon\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})}=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}_\varepsilon\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})}.$$

La regla de Leibniz da

$$\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}_\varepsilon=\frac{d\varphi}{a_\varepsilon}\otimes\mathbf{u}+\frac{\varphi}{a_\varepsilon}\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}-\frac{\varphi}{a_\varepsilon^2}da_\varepsilon\otimes\mathbf{u}.$$

Al contraer con $\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ y tomar partes reales, el primer término produce $\langle da_\varepsilon,d\varphi\rangle_{\mathbf{g}}$. Para los otros dos términos se obtiene

$$\operatorname{Re}\left\langle\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u},\frac{\varphi}{a_\varepsilon}\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}-\frac{\varphi}{a_\varepsilon^2}da_\varepsilon\otimes\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}=\frac{\varphi}{a_\varepsilon}\left(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}-|da_\varepsilon|^2_{\mathbf{g}}\right)\geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Re}\mathfrak{q}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{v}_\varepsilon)\geq\int_M\langle da_\varepsilon,d\varphi\rangle_{\mathbf{g}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Además,

$$\operatorname{Re}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}_\varepsilon\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}=\varphi\frac{|\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}}{a_\varepsilon}=\varphi\left(a_\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{a_\varepsilon}\right),$$

y

$$\operatorname{Re}\langle\mathbf{f},\mathbf{v}_\varepsilon\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\leq\varphi|\mathbf{f}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\frac{|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}}{a_\varepsilon}\leq\varphi|\mathbf{f}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Sustituyendo estas estimaciones en la ecuación variacional,

$$\int_M\langle da_\varepsilon,d\varphi\rangle_{\mathbf{g}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}+\lambda\int_M a_\varepsilon\varphi\,d\lambda_{\mathbf{g}}\leq\int_M|\mathbf{f}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\varphi\,d\lambda_{\mathbf{g}}+\lambda\varepsilon\int_M\varphi\,d\lambda_{\mathbf{g}},$$

pues $\frac{\varepsilon^2}{a_\varepsilon}\leq\varepsilon$.
Ahora hacemos $\varepsilon\to 0^+$. Se tiene $a_\varepsilon\to|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$ puntualmente y $|a_\varepsilon-|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}|\leq\varepsilon$, por lo que el término de orden cero converge. Asimismo,

$$da_\varepsilon=\frac{\operatorname{Re}\langle\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}}{a_\varepsilon}\longrightarrow d|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$$

casi en todas partes; en el conjunto donde $\mathbf{u}=0$, el diferencial débil de $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$ se anula casi en todas partes. Como $|da_\varepsilon|_{\mathbf{g}}\leq|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$ y $d\varphi$ es acotada y tiene soporte compacto, el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue B.6.14 da

$$\int_M\langle d|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}},d\varphi\rangle_{\mathbf{g}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}+\lambda\int_M|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\varphi\,d\lambda_{\mathbf{g}}\leq\int_M|\mathbf{f}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\varphi\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Sea

$$w:=(\lambda I+L)^{-1}|\mathbf{f}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Restando la ecuación débil de $w$, queremos usar como función de prueba

$$z:=(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}-w)_+.$$

El Teorema 9.1.49, aplicado a $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} - w$ y a la función $t \mapsto t_+$, muestra que $z \in W^{1,2}(M)$ y que

$$dz = \mathbf{1}_{\{|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} > w\}}(d|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} - dw)$$

casi en todas partes. Por la Proposición 12.1.8, $W^{1,2}(M) = W_0^{1,2}(M)$. Para utilizar $z$ como función de prueba, combinaremos una aproximación suave con truncaciones no negativas. Elegimos $\varphi_j \in C_c^\infty(M)$ con $\varphi_j \to z$ en $W^{1,2}(M)$ y, después de tomar una subsucesión, suponemos que $\varphi_j \to z$ casi en todas partes. Para $\delta > 0$ sea $\vartheta_\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función convexa tal que

$$\vartheta_\delta(t) = 0 \quad \text{si } t \le 0, \qquad 0 \le \vartheta_\delta'(t) \le 1, \qquad |\vartheta_\delta(t) - t_+| \le \delta.$$

Estas funciones se obtienen integrando una aproximación suave y no decreciente de la función indicadora de $(0, +\infty)$. Elegimos $\delta_j \to 0^+$ de manera que

$$\delta_j \, \lambda_{\mathbf{g}}(\operatorname{supp} \varphi_j)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

y definimos $z_j := \vartheta_{\delta_j}(\varphi_j)$. Entonces $z_j \in C_c^\infty(M)$, $z_j \ge 0$ y

$$\|z_j - z\|_{L^2(M)} \le \|\varphi_j - z\|_{L^2(M)} + \delta_j \lambda_{\mathbf{g}}(\operatorname{supp} \varphi_j)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0.$$

La regla de la cadena da $dz_j = \vartheta_{\delta_j}'(\varphi_j) d\varphi_j$. Por lo tanto,

$$|dz_j - dz|_{\mathbf{g}} \le |d\varphi_j - dz|_{\mathbf{g}} + |\vartheta_{\delta_j}'(\varphi_j) - \mathbf{1}_{\{z>0\}}| |dz|_{\mathbf{g}}.$$

El primer término converge a cero en $L^2(M, T^*M)$. En el segundo, el factor que multiplica a $|dz|_{\mathbf{g}}$ converge a cero casi en todas partes: esto es inmediato en $\{z > 0\}$, mientras que $dz = 0$ casi en todas partes en el conjunto de nivel $\{z = 0\}$. Como dicho factor está acotado por 1, el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue B.6.14 muestra que $dz_j \to dz$ en $L^2(M, T^*M)$. Así, $z_j \to z$ en $W^{1,2}(M)$.
La desigualdad débil anterior es continua respecto de esa norma, pues $d|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} - dw \in L^2(M, T^*M)$ y $\lambda(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} - w) \in L^2(M)$. Podemos, por lo tanto, aplicarla a $z_j$ y pasar al límite. En el conjunto $\{z > 0\}$ se tiene $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} - w = z$, y obtenemos

$$\int_M |dz|_{\mathbf{g}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} + \lambda \int_M z^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} \le 0.$$

Ambos términos son no negativos, así que $z = 0$ casi en todas partes. Esto equivale a $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \le w$. □

**Teorema 12.1.15.** (Desigualdad de Kato–Simon) Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Para todo $t \ge 0$ y todo $\mathbf{u} \in L^2(M, \mathbf{E})$,

$$|P_t^{\mathbf{E}} \mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \le P_t(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})$$

casi en todas partes.

*Demostración.* Para $\tau > 0$, el lema anterior con $\lambda = \frac{1}{\tau}$ equivale a

$$\left| (I + \tau L_{\mathbf{E}})^{-1} v \right|_{\mathbf{h_E}} \le (I + \tau L)^{-1} |v|_{\mathbf{h_E}}.$$

Fijemos $\tau > 0$ y escribamos $R_{\mathbf{E}} = (I + \tau L_{\mathbf{E}})^{-1}$ y $R = (I + \tau L)^{-1}$. La desigualdad anterior es el caso $k = 1$ de $|R_{\mathbf{E}}^k \mathbf{u}| \le R^k |\mathbf{u}|$. Si vale para $k \in \mathbb{N}$, la aplicamos primero a $R_{\mathbf{E}}^k \mathbf{u}$ y usamos después que $R$ preserva la positividad:

$$|R_{\mathbf{E}}^{k+1}\mathbf{u}| \le R\big(|R_{\mathbf{E}}^k \mathbf{u}|\big) \le R\big(R^k|\mathbf{u}|\big) = R^{k+1}|\mathbf{u}|.$$

Esto prueba la desigualdad para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado $t > 0$, tomamos $\tau = t/N$ y $k = N$, con $N \in \mathbb{N}$, y obtenemos

$$\left| \left(I + \frac{t}{N} L_{\mathbf{E}}\right)^{-N} \mathbf{u} \right|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le \left(I + \frac{t}{N} L\right)^{-N} |\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

La Proposición B.4.16 muestra que el primer miembro converge en $L^2(M, \mathbf{E})$ a $P_t^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ y el segundo en $L^2(M)$ a $P_t|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$. Elegimos una subsucesión común que converja casi en todas partes y pasamos al límite en la desigualdad puntual. La desigualdad resultante es la afirmada para $t > 0$; en $t = 0$ ambos miembros coinciden. □

## 12.2 El núcleo del calor covariante

El núcleo $\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}$ es una sección de $\mathbf{E} \boxtimes \mathbf{E}^* \to M_x \times M_y$, provisto de la conexión producto. En todo cálculo diferencial distinguiremos las variables mediante

$$\nabla_x^r \nabla_y^s \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}.$$

Después de fijar cartas o marcos, sus componentes se escribirán

$$\big(\nabla_x^r \nabla_y^s \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}\big)_{i_1 \cdots i_r \,; j_1 \cdots j_s},$$

donde el punto y coma separa los índices de $x$ de los de $y$. Cada grupo respeta la convención recursiva del Capítulo 9; en particular, no se mezclarán estas derivadas con composiciones indexadas no declaradas. Denotaremos por

$$\Delta_{B,\mathbf{E}}^{(x)} \quad \text{y} \quad \Delta_{B,\mathbf{E}^*}^{(y)}$$

los laplacianos de Bochner positivos que actúan, respectivamente, en el factor $\mathbf{E}_x$ y en el factor dual $\mathbf{E}_y^*$ de la conexión producto.

### 12.2.1 Regularización y continuidad de las evaluaciones

El paso esencial para construir el núcleo es que $P_t^{\mathbf{E}}$ transforma secciones de $L^2(M, \mathbf{E})$ en secciones suaves cuando $t > 0$. Esta propiedad es una consecuencia directa del cálculo espectral y de la regularidad elíptica desarrollada en el capítulo anterior.

**Lema 12.2.1.** (Regularización del semigrupo) Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $t > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $K \subseteq M$ compacto. El operador $P_t^{\mathbf{E}}$ induce un mapeo lineal continuo

$$P_t^{\mathbf{E}} \colon L^2(M, \mathbf{E}) \longrightarrow C^k(K, \mathbf{E}).$$

En particular, $P_t^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ tiene un representante suave para todo $\mathbf{u} \in L^2(M, \mathbf{E})$.

*Demostración.* Pongamos $\mathbf{v} = P_t^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$. El cálculo espectral da $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(L_{\mathbf{E}}^m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y

$$L_{\mathbf{E},0}^j \mathbf{v} = L_{\mathbf{E}}^j \mathbf{v} \in L^2(M,\mathbf{E}), \qquad j \in \mathbb{N}_0,$$

donde la primera igualdad es distribucional. Veamos cómo se obtiene la regularidad local. Si $\mathbf{v}, L_{\mathbf{E},0}\mathbf{v} \in L^2$, el Teorema 11.4.2 da $\mathbf{v} \in H^2_{\mathrm{loc}}$. Supongamos que la presencia de las potencias hasta orden $m$ en $L^2$ ya implica regularidad $H^{2m}_{\mathrm{loc}}$. Si existen también las potencias hasta orden $m+1$, aplicamos esa afirmación a $L_{\mathbf{E},0}\mathbf{v}$ y obtenemos $L_{\mathbf{E},0}\mathbf{v} \in H^{2m}_{\mathrm{loc}}$. El mismo teorema de regularidad elíptica, ahora con segundo miembro en $H^{2m}_{\mathrm{loc}}$, da $\mathbf{v} \in H^{2m+2}_{\mathrm{loc}}$. Esto prueba la afirmación para cada $m \in \mathbb{N}$. Los encajes locales del Capítulo 9 proporcionan un representante suave.

La continuidad puede expresarse con una cota que también controla el tiempo. Elegimos vecindades relativamente compactas de $K$, una contenida con su clausura en la siguiente. Aplicamos la estimación elíptica local al operador $L_{\mathbf{E},0}^m$, de orden $2m$, y después el encaje de Sobolev con $2m > k + n/2$. Se obtiene

$$\|\mathbf{v}\|_{C^k(K,\mathbf{E})} \le C_{K,k,m}\big(\|L_{\mathbf{E}}^m \mathbf{v}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|\mathbf{v}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\big).$$

La constante usa sólo las cartas, los marcos y los coeficientes en las vecindades compactas elegidas. Por el cálculo espectral,

$$\|L_{\mathbf{E}}^m P_t^{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \le \sup_{\lambda \in [0,\infty)} \lambda^m e^{-t\lambda} = \left(\frac{m}{et}\right)^m.$$

Junto con la contracción de $P_t^{\mathbf{E}}$, esto da

$$\|P_t^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{C^k(K,\mathbf{E})} \le C_{K,k,m}\left(1 + \left(\frac{m}{et}\right)^m\right)\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}. \tag{12.1}$$

En particular, la cota es uniforme para $t \ge t_0 > 0$. Aquí la constante puede depender del compacto $K$; la completitud por sí sola no impone uniformidad respecto de su posición en $M$. □

Para $t > 0$ y $x \in M$ denotaremos por

$$R_{t,x} \colon L^2(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \mathbf{E}_x, \qquad R_{t,x}\mathbf{u} := P_t^{\mathbf{E}}\mathbf{u}(x),$$

el operador de evaluación regularizada. El lema anterior muestra que $R_{t,x}$ es continuo.

**Teorema 12.2.2.** (Núcleo del calor covariante) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Existe un único mapeo suave

$$\mathbf{K}^{\mathbf{E}} \colon (0,\infty) \times M \times M \longrightarrow \mathbf{E} \boxtimes \mathbf{E}^*, \qquad (t,x,y) \longmapsto \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y) \in \mathrm{Hom}(\mathbf{E}_y, \mathbf{E}_x),$$

tal que, para todo $t > 0$, $\mathbf{u} \in L^2(M,\mathbf{E})$ y $x \in M$,

$$P_t^{\mathbf{E}}\mathbf{u}(x) = \int_M \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\mathbf{u}(y)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y).$$

La integral es absolutamente convergente en la fibra finito-dimensional $\mathbf{E}_x$. Además:

(a) $\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(y,x) = \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)^*$;

(b) para $s,t>0$,

$$\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_{t+s}(x,y)=\int_M \mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t(x,z)\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_s(z,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(z);$$

(c) el núcleo satisface, suavemente en ambas variables,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t=-\Delta^{(x)}_{B,\mathbf{E}}\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t=-\Delta^{(y)}_{B,\mathbf{E}^*}\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t.$$

En particular, para $y\in M$ y $\eta\in\mathbf{E}_y$, la primera igualdad se obtiene al evaluar el núcleo sobre $\eta$;

(d) si $p_t(x,y)$ es el núcleo obtenido por la misma construcción para el haz trivial de rango uno, entonces

$$\|\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t(x,y)\|_{\mathcal{L}((\mathbf{E}_y,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(y)),(\mathbf{E}_x,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)))}\le p_t(x,y).$$

*Demostración.* Fijemos $t>0$ y pongamos $s=\frac{t}{2}$. Como $R_{s,x}$ es continuo, tiene un adjunto

$$R^*_{s,x}\colon \mathbf{E}_x\longrightarrow L^2(M,\mathbf{E}).$$

Definimos

$$\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t(x,y):=R_{s,x}R^*_{s,y}.$$

Esta fórmula ya muestra que $\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t(x,y)$ es un mapeo lineal de $\mathbf{E}_y$ en $\mathbf{E}_x$.
*Suavidad.* Sean $U,V\subseteq M$ abiertos sobre los cuales existen marcos ortonormales suaves $(\mathbf{e}_a)_{a=1}^r$ y $(\mathbf{f}_b)_{b=1}^r$ de $\mathbf{E}$. Para $s>0$ y $y\in V$ definimos

$$\mathbf{\Psi}_b(s,y):=R^*_{s,y}\mathbf{f}_b(y)\in L^2(M,\mathbf{E}).$$

Fijemos $\mathbf{u}\in L^2(M,\mathbf{E})$. Por la definición del adjunto,

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{\Psi}_b(s,y)\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})}=\langle P^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}(y),\mathbf{f}_b(y)\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}. \tag{12.2}$$

Comprobemos la regularidad conjunta que se utilizará. Sea $(s_0,y_0)\in(0,\infty)\times V$ y elijamos un intervalo compacto $J\Subset(0,\infty)$ que contenga a $s_0$ en su interior. Para $a\in\mathbb{N}_0$ se tiene, en $L^2(M,\mathbf{E})$,

$$\partial_s^a P^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}=(-L_{\mathbf{E}})^a P^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u},\qquad s\in J.$$

La función $s\mapsto(-L_{\mathbf{E}})^aP^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}$ es continua en $L^2(M,\mathbf{E})$. Sea $\delta>0$ tal que $2\delta<\inf_{s\in J}s$. Para $s\in J$ escribimos

$$(-L_{\mathbf{E}})^aP^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}=P^{\mathbf{E}}_\delta\big((-L_{\mathbf{E}})^aP^{\mathbf{E}}_{s-\delta}\mathbf{u}\big).$$

El mapeo $s\mapsto(-L_{\mathbf{E}})^aP^{\mathbf{E}}_{s-\delta}\mathbf{u}$ es continuo en $L^2(M,\mathbf{E})$, mientras que, por el Lema 12.2.1, $P^{\mathbf{E}}_\delta\colon L^2(M,\mathbf{E})\longrightarrow C^q(K,\mathbf{E})$ es continuo para todo $q\in\mathbb{N}_0$ y todo compacto $K\Subset V$. Por lo tanto,

$$s\longmapsto(-L_{\mathbf{E}})^aP^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}$$

es continua, sobre $J$, con valores en cada uno de esos espacios $C^q(K,\mathbf{E})$. En una trivialización sobre $V$, para cada multiíndice $\beta$ la derivada

$$\partial_s^a\partial_y^\beta\langle P^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}(y),\mathbf{f}_b(y)\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$$

es, por Leibniz, una suma finita de emparejamientos entre derivadas coordenadas de $(-L_{\mathbf{E}})^a P_s^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ y derivadas del marco $\mathbf{f}_b$. Cada sumando es continuo en $(s,y)$. Por consiguiente, el miembro derecho de (12.2) es suave conjuntamente en $(s,y)$.

Hemos probado que $(s,y)\mapsto \mathbf{\Psi}_b(s,y)$ es débilmente suave con valores en el espacio de Hilbert $L^2(M,\mathbf{E})$. El Teorema B.3.26, aplicado en las cartas de $(0,\infty)\times V$, muestra que este mapeo es suave en la norma de $L^2(M,\mathbf{E})$.

Si $s=\frac{t}{2}$, entonces

$$\left\langle \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\mathbf{f}_b(y),\mathbf{e}_a(x)\right\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = \left\langle \mathbf{\Psi}_b(s,y),\mathbf{\Psi}_a(s,x)\right\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})}.$$

El producto interno es un mapeo continuo y sesquilineal; por ello, la última expresión es suave en $(t,x,y)$. Como esto vale para todas las componentes en marcos locales, $\mathbf{K}^{\mathbf{E}}$ es una sección suave de $\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{E}^*$.

*Representación integral.* Fijemos $x\in M$ y $\xi\in\mathbf{E}_x$. Para $\mathbf{u}\in L^2(M,\mathbf{E})$, la sección

$$y\longmapsto \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)^*\xi = R_{s,y}R_{s,x}^*\xi = P_s^{\mathbf{E}}(R_{s,x}^*\xi)(y)$$

pertenece a $L^2(M,\mathbf{E})$. La desigualdad de Cauchy–Schwarz del Teorema B.3.2 muestra que el producto escalar con $\mathbf{u}$ es integrable. Usando la definición de adjunto y la autoadjunción de $P_s^{\mathbf{E}}$,

$$\begin{aligned}\int_M \left\langle \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\mathbf{u}(y),\xi\right\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} d\lambda_{\mathbf{g}}(y) &= \left\langle \mathbf{u},P_s^{\mathbf{E}}R_{s,x}^*\xi\right\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})}\\ &= \left\langle P_s^{\mathbf{E}}\mathbf{u},R_{s,x}^*\xi\right\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})}\\ &= \left\langle R_{s,x}P_s^{\mathbf{E}}\mathbf{u},\xi\right\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\\ &= \left\langle P_t^{\mathbf{E}}\mathbf{u}(x),\xi\right\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.\end{aligned}$$

La convergencia es también absoluta en la norma de la fibra. Si $(\boldsymbol{\xi}_a)_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}}$ es una base ortonormal de $\mathbf{E}_x$, entonces

$$\int_M |\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\mathbf{u}(y)|\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\le \sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}}\|\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,\cdot)^*\boldsymbol{\xi}_a\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}<\infty.$$

Como $\xi\in\mathbf{E}_x$ era arbitrario, se obtiene la fórmula integral.

Si otro núcleo suave satisface la misma fórmula, la diferencia, emparejada con marcos locales, integra a cero contra toda sección suave de soporte compacto. El lema fundamental de la teoría de distribuciones implica que cada componente se anula; por lo tanto, el núcleo es único.

*Simetría y propiedad de semigrupo.* La definición da

$$\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(y,x)^* = (R_{s,y}R_{s,x}^*)^* = R_{s,x}R_{s,y}^* = \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y).$$

Para la propiedad de semigrupo, fijemos $\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{E}_y$. La sección $z\mapsto \mathbf{K}_s^{\mathbf{E}}(z,y)\boldsymbol{\eta}$ pertenece a $L^2(M,\mathbf{E})$ porque puede escribirse como $P_{\frac{s}{2}}^{\mathbf{E}}R_{\frac{s}{2},y}^*\boldsymbol{\eta}$. Aplicando la fórmula integral y $P_t^{\mathbf{E}}P_s^{\mathbf{E}}=P_{t+s}^{\mathbf{E}}$,

$$\int_M \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,z)\mathbf{K}_s^{\mathbf{E}}(z,y)\boldsymbol{\eta}\,d\lambda_{\mathbf{g}}(z) = P_t^{\mathbf{E}}\big(\mathbf{K}_s^{\mathbf{E}}(\cdot,y)\boldsymbol{\eta}\big)(x) = \mathbf{K}_{t+s}^{\mathbf{E}}(x,y)\boldsymbol{\eta}.$$

*Ecuación del calor.* Fijemos $t > 0$, $y \in M$ y $\eta \in \mathbf{E}_y$. Elegimos $t_0 \in (0,t)$ y ponemos

$$\mathbf{w} := \mathbf{K}^{\mathbf{E}}_{t_0}(\cdot, y)\eta \in L^2(M,\mathbf{E}).$$

La propiedad de semigrupo da

$$\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_{\tau}(\cdot, y)\eta = P^{\mathbf{E}}_{\tau - t_0}\mathbf{w}, \qquad \tau > t_0.$$

Como $\mathbf{w} = P^{\mathbf{E}}_{\frac{t_0}{2}} R^*_{\frac{t_0}{2}, y}\eta$, el cálculo espectral muestra que $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(L^r_{\mathbf{E}})$ para todo $r \in \mathbb{N}$. La diferenciabilidad del semigrupo proporciona, para $h \to 0^+$,

$$\frac{P^{\mathbf{E}}_{\tau - t_0 + h}\mathbf{w} - P^{\mathbf{E}}_{\tau - t_0}\mathbf{w}}{h} \longrightarrow -L_{\mathbf{E}} P^{\mathbf{E}}_{\tau - t_0}\mathbf{w}$$

en $L^2(M,\mathbf{E})$. Como el núcleo ya se demostró suave respecto de la variable temporal, esta derivada lateral identifica la derivada ordinaria. La convergencia tiene lugar también en la norma de la gráfica de $L^r_{\mathbf{E}}$. En efecto, las potencias de $L_{\mathbf{E}}$ conmutan con el semigrupo y

$$L^r_{\mathbf{E}}\left(\frac{P^{\mathbf{E}}_h - I}{h} P^{\mathbf{E}}_{\tau - t_0}\mathbf{w} + L_{\mathbf{E}} P^{\mathbf{E}}_{\tau - t_0}\mathbf{w}\right) = \left(\frac{P^{\mathbf{E}}_h - I}{h} + L_{\mathbf{E}}\right) L^r_{\mathbf{E}} P^{\mathbf{E}}_{\tau - t_0}\mathbf{w} \longrightarrow 0$$

en $L^2(M,\mathbf{E})$.

Sea $K \subseteq M$ compacto y elijamos $r$ con $2r > k + \frac{n}{2}$. Las estimaciones elípticas locales para la expresión $(\Delta^{(x)}_{B,\mathbf{E}})^r$ convierten la convergencia en la norma de gráfica en convergencia en $H^{2r}_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ y, en particular, sobre una vecindad de $K$. El encaje local de Sobolev para haces la convierte, a su vez, en convergencia en $C^k(K,\mathbf{E})$. Por lo tanto, la derivada temporal existe como sección suave y

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t(\cdot, y)\eta = -\Delta^{(x)}_{B,\mathbf{E}}\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t(\cdot, y)\eta.$$

Como $k$ y $K$ eran arbitrarios, la igualdad vale en $\Gamma(\mathbf{E})$. Aplicando esta igualdad al haz dual y usando $\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t(y,x) = \mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t(x,y)^*$ se obtiene, al intercambiar $x$ e $y$,

$$\partial_t \mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t = -\Delta^{(y)}_{B,\mathbf{E}^*}\mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t.$$

*Dominación puntual del núcleo.* Fijemos $y \in M$ y $\eta \in \mathbf{E}_y$. Sea $r_{\mathbf{E}} = \operatorname{rank}\mathbf{E}$. Elegimos un abierto $V$ alrededor de $y$ con un marco ortonormal suave $(\mathbf{e}_a)_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}}$ y escribimos $\eta = \sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}} \eta_a \mathbf{e}_a(y)$. Definimos la sección local de norma constante, con $\eta_a \in \mathbb{K}$ para $a \in \{1,\dots,r_{\mathbf{E}}\}$,

$$\widetilde{\eta}(z) := \sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}} \eta_a \mathbf{e}_a(z).$$

Construiremos explícitamente la aproximación de la identidad que se necesita. Tomemos una carta $\kappa\colon V \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\kappa(y) = 0$ y elijamos $\rho > 0$ de modo que $\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,\rho) \subseteq \Omega$. Sea $a \in C^\infty(\Omega)$ el peso coordenado positivo de la medida riemanniana, determinado por

$$\int_V \varphi \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_\Omega (\varphi \circ \kappa^{-1})(z) a(z) \, d\lambda_n(z)$$

para toda función integrable $\varphi$ con soporte en $V$. Denotemos por $\omega$ el molificador del Teorema B.9.1; para $j \in \mathbb{N}$ definimos

$$\varepsilon_j := \frac{\rho}{j+1}, \qquad c_j := \left( \int_\Omega \varepsilon_j^{-n} \omega\left(\frac{z}{\varepsilon_j}\right) a(z)\, dz \right)^{-1},$$

donde el integrando se anula fuera de $\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon_j) \subseteq \Omega$. El número $c_j$ está bien definido y es positivo. Ponemos

$$\rho_j(q) := \begin{cases} c_j \varepsilon_j^{-n} \omega\left(\dfrac{\kappa(q)}{\varepsilon_j}\right), & q \in V, \\ 0, & q \notin V. \end{cases}$$

Como el soporte de la primera expresión es compacto y está contenido en $V$, su extensión por cero es suave. Además, $\rho_j \geq 0$, $\displaystyle\int_M \rho_j \, d\lambda_{\mathbf{g}} = 1$ y $\operatorname{supp}(\rho_j) \subseteq \kappa^{-1}(\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon_j))$. Si $W$ es una vecindad de $y$, elegimos $0 < r_W \leq \rho$ tal que $\kappa^{-1}(B_{\mathrm{euc}}(0,r_W)) \subseteq W$; entonces $\operatorname{supp}(\rho_j) \subseteq W$ para todo $j$ que satisfaga $j+1 > \dfrac{\rho}{r_W}$. Ponemos $\mathbf{u}_j = \rho_j \widetilde{\eta}$. Entonces

$$|\mathbf{u}_j|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} = |\eta|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \rho_j.$$

La desigualdad de Kato–Simon da inicialmente, para casi todo $x \in M$,

$$|P_t^{\mathbf{E}} \mathbf{u}_j(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \leq |\eta|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} P_t \rho_j(x).$$

Para $t > 0$, las dos funciones que aparecen en esta desigualdad son continuas, pues el semigrupo escalar y el covariante son regularizantes. Si la desigualdad fallara en un punto, fallaría en un abierto no vacío y, por lo tanto, en un conjunto de medida positiva. En consecuencia, vale para todo $x \in M$. Por la fórmula integral,

$$P_t^{\mathbf{E}} \mathbf{u}_j(x) = \int_M \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,z) \widetilde{\eta}(z) \rho_j(z)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(z).$$

La función $z \mapsto \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,z)\widetilde{\eta}(z)$ es continua. Dado $\delta > 0$, existe una vecindad $W$ de $y$ tal que su diferencia respecto de $\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\eta$ tiene norma menor que $\delta$ en $W$. La elección explícita anterior proporciona un índice a partir del cual $\operatorname{supp}(\rho_j) \subseteq W$, y entonces

$$\left| P_t^{\mathbf{E}} \mathbf{u}_j(x) - \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\eta \right|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \leq \int_M \delta \rho_j \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \delta.$$

Por lo tanto, $P_t^{\mathbf{E}} \mathbf{u}_j(x) \to \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\eta$. La misma argumentación aplicada al núcleo escalar da $P_t \rho_j(x) \to p_t(x,y)$. Al pasar al límite,

$$|\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\eta|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \leq p_t(x,y) |\eta|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}.$$

Tomando el supremo sobre los vectores unitarios de $\mathbf{E}_y$ se obtiene la cota del operador. □

**Observación 12.2.3.** (Alcance de la construcción del núcleo) La construcción anterior proporciona un núcleo suave para todo $t > 0$ y la estimación de dominación $\|\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\| \leq p_t(x,y)$. La estimación (12.1) describe la regularización en compactos y es uniforme cuando el tiempo permanece separado de cero. Las expansiones asintóticas cuando $t \to 0^+$ requieren además el análisis local del Capítulo 15. Para la construcción escalar de esas expansiones puede consultarse [34, Capítulo VI, §§3–4].

Las propiedades escalares siguientes sí serán necesarias para extender el semigrupo a toda la escala $L^p$.

**Proposición 12.2.4.** (Propiedades del núcleo escalar) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera. El núcleo escalar $p_t(x,y)$ es suave, simétrico y no negativo. Satisface

$$p_{t+s}(x,y) = \int_M p_t(x,z)p_s(z,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(z)$$

y

$$\int_M p_t(x,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y) \le 1.$$

*Demostración.* La suavidad, la simetría y la identidad de composición son el caso del haz trivial en el teorema anterior. Supongamos que $p_t(x_0,y_0) < 0$. Por continuidad existen una vecindad $W$ de $y_0$ y una constante $c > 0$ tales que $p_t(x_0,y) \le -c$ para todo $y \in W$. Elijamos una función no nula $f \in C_c^\infty(W)$ con $f \ge 0$. Entonces

$$P_t f(x_0) = \int_W p_t(x_0,y)f(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y) \le -c\int_W f\,d\lambda_{\mathbf{g}} < 0,$$

lo cual contradice la positividad del semigrupo escalar probada en el Corolario 12.1.13. Por lo tanto, $p_t \ge 0$. Tomemos las funciones $(\chi_j)$ del Lema 12.1.7. Hemos elegido esta sucesión de manera que $0 \le \chi_j \le 1$, que sea creciente y que converja puntualmente a 1. La contractividad en $L^\infty(M)$ proporciona $0 \le P_t\chi_j(x) \le 1$. Puesto que $p_t(x,y) \ge 0$, la sucesión $p_t(x,\cdot)\chi_j$ también es creciente y converge puntualmente a $p_t(x,\cdot)$. El Teorema de convergencia monótona B.6.11 da

$$\int_M p_t(x,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y) = \lim_{j\to\infty}\int_M p_t(x,y)\chi_j(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y) = \lim_{j\to\infty} P_t\chi_j(x) \le 1.$$

□

## 12.3 Extensión del semigrupo a $L^p(M,\mathbf{E})$

### 12.3.1 El semigrupo escalar en la escala $L^p$

**Proposición 12.3.1.** (Semigrupo escalar en $L^p$) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera. Para cada $1 \le p \le \infty$ y $t \ge 0$, el operador $P_t$ se extiende a una contracción positiva $P_t^p$ en $L^p(M)$. Las extensiones son consistentes. Si $1 \le p < \infty$, $(P_t^p)_{t\ge 0}$ es un $C_0$-semigrupo.

*Demostración.* La cota en $L^\infty$ fue probada en el Corolario 12.1.13. Para $f \in L^1(M)\cap L^2(M)$, la autoadjunción y la cota en $L^\infty$ dan

$$\|P_t f\|_{L^1(M)} = \sup_{\substack{\varphi\in L^2(M)\cap L^\infty(M)\\ \|\varphi\|_{L^\infty(M)}\le 1}} \left|\int_M (P_t f)\varphi\,d\lambda_{\mathbf{g}}\right| = \sup_{\substack{\varphi\in L^2(M)\cap L^\infty(M)\\ \|\varphi\|_{L^\infty(M)}\le 1}} \left|\int_M f(P_t\varphi)\,d\lambda_{\mathbf{g}}\right| \le \|f\|_{L^1(M)}.$$

En la primera línea la norma se entiende inicialmente con valor en $[0,\infty]$; la última cota prueba a posteriori que $P_t f \in L^1$. Justifiquemos, sin presuponer esa conclusión, la fórmula del supremo. Si $h \in L^2(M)$, elegimos una exhaustión creciente $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ por compactos; cada $K_j$ tiene medida finita. En el caso real ponemos $\varphi_j =$

$\mathbf{1}_{K_j}\operatorname{sgn}(h)$ y, en el caso complejo,

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} \mathbf{1}_{K_j}(x)\,\dfrac{\overline{h(x)}}{|h(x)|}, & h(x)\neq 0,\\ 0, & h(x)=0. \end{cases}$$

Entonces $\varphi_j \in L^2(M)\cap L^\infty(M)$, $\|\varphi_j\|_{L^\infty(M)}\le 1$ y

$$\left|\int_M h\varphi_j\, d\lambda_{\mathbf{g}}\right| = \int_{K_j} |h|\, d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow \int_M |h|\, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

por convergencia monótona, incluso si el valor es infinito. La desigualdad opuesta vale para cada $\varphi$ por la definición de la integral extendida. El Teorema de Riesz–Thorin 5.7.7 proporciona la contracción en $L^p(M)$ para $1<p<\infty$. La densidad de $L^2(M)\cap L^p(M)$ en $L^p(M)$, cuando $p<\infty$, da la extensión única. Para $p=\infty$, la fórmula integral con $p_t\ge 0$ y masa a lo sumo uno define la extensión en $L^\infty(M)$.

La fórmula integral también representa las extensiones de exponente finito. En efecto, si $f\in L^p(M)$ y $1\le p<\infty$, Jensen para la medida subprobabilidad $p_t(x,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$ da

$$\Big(\int_M p_t(x,y)|f(y)|\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\Big)^p \le \int_M p_t(x,y)|f(y)|^p\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y).$$

Para $p=1$ esta desigualdad es una igualdad. Tonelli, la simetría del núcleo y su cota de masa muestran que la integral del miembro derecho respecto de $x$ no excede $\|f\|_{L^p(M)}^p$. La integral del núcleo es, por tanto, absolutamente convergente para casi todo $x$ y define una contracción en $L^p(M)$. Coincide con $P_t$ en la intersección con $L^2$, y la densidad identifica esa contracción con $P_t^p$.

Para la consistencia, sean $p,q<\infty$ y $f\in L^p(M)\cap L^q(M)$. Con la exhaustión $(K_j)$ anterior, pongamos

$$f_j = \mathbf{1}_{K_j}\mathbf{1}_{\{|f|\le j\}}f.$$

Cada $f_j$ es acotada y tiene soporte de medida finita; por tanto, pertenece simultáneamente a $L^2(M)$, $L^p(M)$ y $L^q(M)$. La convergencia dominada aplicada a $|f_j-f|^p$ y $|f_j-f|^q$ da convergencia en ambos espacios. Por contractividad, $P_t^p f_j\to P_t^p f$ en $L^p(M)$ y $P_t^q f_j\to P_t^q f$ en $L^q(M)$. Los miembros de ambas sucesiones coinciden para cada $j$ porque proceden del mismo operador de $L^2(M)$. Al emparejar con una función de prueba suave de soporte compacto, Hölder identifica sus límites distribucionales; así, $P_t^p f = P_t^q f$ casi en todas partes. Si uno de los exponentes es infinito, la fórmula integral ya demostrada para cada exponente da directamente la misma función.

Para $p<\infty$, tomamos ahora $f_j\to f$ en $L^p(M)$ con $f_j\in L^2(M)\cap L^p(M)$. La consistencia permite aplicar la identidad de semigrupo de $L^2(M)$ a cada $f_j$, y

$$\|P_t^pP_s^pf - P_{t+s}^pf\|_{L^p(M)} \le \|P_t^pP_s^p(f-f_j)\|_{L^p(M)} + \|P_{t+s}^p(f_j-f)\|_{L^p(M)} \le 2\|f-f_j\|_{L^p(M)}\longrightarrow 0.$$

Para $p=\infty$ y $s,t>0$, la integral doble que aparece al componer los núcleos es absolutamente convergente, pues

$$\int_M\int_M p_t(x,z)p_s(z,y)|f(y)|\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(z) \le \|f\|_{L^\infty(M)}.$$

Fubini y la identidad de Chapman–Kolmogorov del núcleo dan $P_t^\infty P_s^\infty f = P_{t+s}^\infty f$. Cuando uno de los tiempos es cero, la igualdad se sigue de $P_0^p = I$.

Probemos la continuidad fuerte para $p<\infty$. Si $f\in C_c^\infty(M)$, entonces $Lf\in L^p(M)\cap L^2(M)$. En $L^2(M)$, la diferenciabilidad espectral da

$$P_tf-f=-\int_0^t P_s(Lf)\,ds.$$

Justifiquemos la medibilidad fuerte del integrando antes de usar la continuidad fuerte que estamos demostrando. Pongamos $g=Lf$ y usemos los cortes $\chi_j$ del Lema 12.1.7. Para $s>0$, el mapeo $s\mapsto \chi_jP_sg$ es continuo con valores en $L^p(M)$: la regularización del calor da continuidad uniforme sobre el soporte compacto de $\chi_j$ en cada intervalo temporal compacto de $(0,\infty)$. Para cada $s>0$, la convergencia dominada en $M$ da $\chi_jP_sg\to P_s^pg$ en $L^p(M)$. Así, $s\mapsto P_s^pg$ es el límite puntual de mapeos fuertemente medibles; asignar su valor en $s=0$ no cambia esa propiedad. Además, su norma no excede $\|g\|_{L^p(M)}$. La integral de Bochner existe en $L^p(M)$. Al emparejar las integrales en $L^2$ y en $L^p$ con funciones de prueba suaves de soporte compacto, la consistencia da el mismo resultado; sus realizaciones distribucionales coinciden. Por lo tanto, la misma identidad vale en $L^p(M)$:

$$P_t^pf-f=-\int_0^t P_s^p(Lf)\,ds.$$

Por lo tanto,

$$\|P_t^pf-f\|_{L^p(M)}\le\int_0^t\|P_s^p(Lf)\|_{L^p(M)}\,ds\le t\|Lf\|_{L^p(M)}\longrightarrow 0$$

cuando $t\to0^+$. Para $f\in L^p(M)$, tomemos $g_j\in C_c^\infty(M)$ con $g_j\to f$ en $L^p(M)$. Entonces

$$\|P_t^pf-f\|_{L^p(M)}\le 2\|f-g_j\|_{L^p(M)}+t\|Lg_j\|_{L^p(M)}.$$

Primero fijamos $j$ para controlar el primer término y después hacemos $t\to0^+$. Esto prueba continuidad fuerte en cero para cada $f$. La propiedad de semigrupo y la contractividad la trasladan a cualquier tiempo: para $h>0$, tanto la diferencia hacia la derecha como la diferencia hacia la izquierda en un tiempo positivo se acotan por $\|P_h^pf-f\|_{L^p(M)}$. □

### 12.3.2 El semigrupo covariante en $L^p(M,\mathbf{E})$

**Teorema 12.3.2.** (Semigrupo covariante en $L^p$) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sea $1\le p\le\infty$. Para cada $t\ge0$, $P_t^{\mathbf{E}}$ admite una extensión contractiva

$$P_t^{\mathbf{E},p}\colon L^p(M,\mathbf{E})\longrightarrow L^p(M,\mathbf{E}).$$

Las extensiones son consistentes y satisfacen:

(a) $P_{t+s}^{\mathbf{E},p}=P_t^{\mathbf{E},p}P_s^{\mathbf{E},p}$;

(b) si $1\le p<\infty$, $(P_t^{\mathbf{E},p})_{t\ge0}$ es un $C_0$-semigrupo;

(c) si $t>0$ y $\mathbf{u}\in L^p(M,\mathbf{E})$,

$$P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}(x)=\int_M\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\mathbf{u}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$$

para casi todo $x$;

(d) para $t \geq 0$,

$$|P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \leq P_t^p(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})$$

casi en todas partes.

Para $p = \infty$ las conclusiones anteriores no incluyen continuidad fuerte en $t = 0$.

*Demostración.* Si $\mathbf{u} \in L^2(M,\mathbf{E}) \cap L^p(M,\mathbf{E})$, la desigualdad de Kato–Simon y la contractividad escalar dan

$$\|P_t^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq \|P_t^p(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})\|_{L^p(M)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

Para $p < \infty$, el subespacio $L^2(M,\mathbf{E}) \cap L^p(M,\mathbf{E})$ es denso en $L^p(M,\mathbf{E})$, y el Teorema B.2.36 proporciona la extensión única. La desigualdad puntual pasa al límite: si $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$, entonces, después de extraer una subsucesión, $P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}_j \to P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}$ y $P_t^p(|\mathbf{u}_j|_{\mathbf{h_E}}) \to P_t^p(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})$ casi en todas partes.
Para $p = \infty$ y $t > 0$ definimos

$$P_t^{\mathbf{E},\infty}\mathbf{u}(x) := \int_M \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\mathbf{u}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y),$$

y ponemos $P_0^{\mathbf{E},\infty} := I$. La cota del núcleo y la Proposición 12.2.4 dan

$$|P_t^{\mathbf{E},\infty}\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{h_E}} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})} \int_M p_t(x,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y) \leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(M,\mathbf{E})}.$$

La misma estimación prueba la convergencia absoluta de la integral y la dominación puntual.
Para $p < \infty$ y $\mathbf{u} \in L^p(M,\mathbf{E})$, la dominación del núcleo y el argumento de Jensen y Tonelli de la proposición escalar muestran que

$$\int_M \|\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\mathbf{u}(y)\|_{\mathbf{h_E}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y) \leq P_t^p(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})(x) < \infty$$

para casi todo $x$. Esta integral define un operador contractivo en $L^p(M,\mathbf{E})$ que coincide con $P_t^{\mathbf{E}}$ sobre $L^2(M,\mathbf{E}) \cap L^p(M,\mathbf{E})$. La aproximación se obtiene tomando

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{1}_{K_j}\mathbf{1}_{\{|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}} \leq j\}}\mathbf{u}.$$

Entonces $\mathbf{u}_j \in L^2(M,\mathbf{E}) \cap L^p(M,\mathbf{E})$ y $\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \to 0$. Tanto el operador integral como $P_t^{\mathbf{E},p}$ llevan esta diferencia a una sección cuya norma no excede $\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}$. Sus límites coinciden, lo que prueba la fórmula integral para todo $\mathbf{u}$.
Como todos los exponentes se representan mediante el mismo núcleo, las extensiones son consistentes, incluido el exponente infinito. Para $s,t > 0$, la norma del integrando al componer los operadores queda dominada por

$$p_t(x,z)p_s(z,y)|\mathbf{u}(y)|_{\mathbf{h_E}}.$$

La integral doble de esta función es $P_{t+s}^p(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})(x)$, por Tonelli y la identidad de Chapman–Kolmogorov escalar. Es finita para casi todo $x$ cuando $p < \infty$, y para todo $x$ cuando $p = \infty$. Fubini en la fibra de dimensión finita $\mathbf{E}_x$ permite entonces intercambiar las integrales. La identidad de composición del núcleo covariante da $P_t^{\mathbf{E},p}P_s^{\mathbf{E},p}\mathbf{u} = P_{t+s}^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}$ casi en todas partes. Los tiempos nulos se incluyen mediante $P_0^{\mathbf{E},p} = I$.

Finalmente, si $\mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E})$, entonces $L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}\in L^p(M,\mathbf{E})\cap L^2(M,\mathbf{E})$. La identidad

$$P_t^{\mathbf{E}}\mathbf{u}-\mathbf{u}=-\int_0^t P_s^{\mathbf{E}}(L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u})\,ds$$

se obtiene primero en $L^2(M,\mathbf{E})$. La medibilidad fuerte en $L^p(M,\mathbf{E})$ se comprueba como en la Proposición 12.3.1: para cada corte compacto $\chi_j$, la regularización covariante hace continuo $s\mapsto \chi_j P_s^{\mathbf{E}}(L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u})$ cuando $s>0$, y esos mapeos convergen puntualmente en $L^p$ al integrando. La contractividad acota su norma por $\|L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}$, de modo que es integrable en el sentido de Bochner. La consistencia, comprobada contra secciones de prueba, identifica esta integral con la obtenida en $L^2$. Por lo tanto,

$$P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}-\mathbf{u}=-\int_0^t P_s^{\mathbf{E},p}(L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u})\,ds.$$

Así,

$$\|P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}-\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}\le t\|L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}\longrightarrow 0$$

cuando $t\to 0^+$. Para una sección arbitraria $\mathbf{u}\in L^p(M,\mathbf{E})$, elegimos $\mathbf{v}_j\in\Gamma_c(\mathbf{E})$ con $\mathbf{v}_j\to\mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$ y usamos

$$\|P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}-\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}\le 2\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_j\|_{L^p(M,\mathbf{E})}+t\|L_{\mathbf{E},0}\mathbf{v}_j\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

Primero se fija $j$ y después se hace $t\to 0^+$; finalmente se hace $j\to\infty$. La propiedad de semigrupo traslada la continuidad fuerte a todos los tiempos, igual que en el caso escalar. □

**Definición 12.3.3.** (Generador en $L^p$) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sea $1\le p<\infty$. Definimos

$$\mathcal{D}(L_{\mathbf{E},p}):=\left\{\mathbf{u}\in L^p(M,\mathbf{E})\,\middle|\,\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathbf{u}-P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}}{t}\text{ existe en }L^p(M,\mathbf{E})\right\}$$

y

$$L_{\mathbf{E},p}\mathbf{u}:=\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathbf{u}-P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}}{t}.$$

Entonces $-L_{\mathbf{E},p}$ es el generador de $(P_t^{\mathbf{E},p})_{t\ge 0}$.

**Proposición 12.3.4.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Para $1\le p<\infty$, $L_{\mathbf{E},p}$ es cerrado, densamente definido y maximalmente acretivo. Además,

$$\Gamma_c(\mathbf{E})\subseteq\mathcal{D}(L_{\mathbf{E},p}),\qquad L_{\mathbf{E},p}\mathbf{u}=L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}\quad\text{para }\mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E}),$$

y $L_{\mathbf{E},2}=L_{\mathbf{E}}$.

*Demostración.* Las propiedades de cerradura y densidad del dominio se siguen de la Proposición B.4.12; la maximal acretividad es el Teorema de Lumer–Phillips, Teorema B.4.15, aplicado al generador $-L_{\mathbf{E},p}$. Si

$\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$, entonces

$$\frac{\mathbf{u} - P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t P_s^{\mathbf{E},p}(L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u})\,ds.$$

La continuidad fuerte del semigrupo implica que el miembro derecho converge a $L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$ cuando $t \to 0^+$. Para $p = 2$, los semigrupos definidos por extensión y por cálculo espectral coinciden; la unicidad del generador da $L_{\mathbf{E},2} = L_{\mathbf{E}}$. □

## 12.4 Potenciales de Bessel y espacios de orden real

### 12.4.1 Potenciales de Bessel

El cálculo funcional del laplaciano permite trasladar a la variedad el multiplicador euclidiano $(1 + \|\xi\|^2)^{-\frac{s}{2}}$. Los potenciales de Bessel resultantes codifican ganancia de regularidad sin elegir coordenadas.

**Definición 12.4.1.** (Potencial de Bessel) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $s > 0$ y $1 \le p < \infty$. Definimos

$$J_{s,p}^{\mathbf{E}}\mathbf{u} := \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}\,dt, \qquad \mathbf{u} \in L^p(M,\mathbf{E}),$$

donde la integral es una integral de Bochner en $L^p(M,\mathbf{E})$.

**Proposición 12.4.2.** (Propiedades de los potenciales de Bessel) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $r, s > 0$ y $1 \le p, q < \infty$.

(a) $J_{s,p}^{\mathbf{E}} \in \mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}))$ y $\|J_{s,p}^{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}))} \le 1$;

(b) $J_{s,p}^{\mathbf{E}} J_{r,p}^{\mathbf{E}} = J_{s+r,p}^{\mathbf{E}}$;

(c) $J_{2,p}^{\mathbf{E}} = (I + L_{\mathbf{E},p})^{-1}$ y

$$J_{2m,p}^{\mathbf{E}} = (I + L_{\mathbf{E},p})^{-m}$$

para $m \in \mathbb{N}$;

(d) $J_{s,p}^{\mathbf{E}}$ es inyectivo y su rango es denso en $L^p(M,\mathbf{E})$;

(e) si $\mathbf{u} \in L^p(M,\mathbf{E}) \cap L^q(M,\mathbf{E})$, entonces $J_{s,p}^{\mathbf{E}}\mathbf{u} = J_{s,q}^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ casi en todas partes.

*Demostración.* La contractividad del semigrupo da

$$\int_0^\infty \left\| \frac{t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}}{\Gamma(\frac{s}{2})} P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u} \right\|_{L^p(M,\mathbf{E})} dt \le \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}\,dt = \|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

Esto prueba que la integral de Bochner converge y que $\|J_{s,p}^{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}))} \le 1$.

Para la ley de semigrupo, la norma del integrando doble queda acotada por

$$\frac{t^{\frac{s}{2}-1}\tau^{\frac{r}{2}-1}e^{-(t+\tau)}}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{r}{2})}\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

La integral de esta función en $(0,\infty)^2$ es $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}$. Por lo tanto, el Teorema de Fubini para integrales de Bochner B.6.26 es aplicable y

$$J^{\mathbf{E}}_{s,p}J^{\mathbf{E}}_{r,p}\mathbf{u} = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{r}{2})}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\tau^{\frac{r}{2}-1}e^{-(t+\tau)}P^{\mathbf{E},p}_{t+\tau}\mathbf{u}\,d\tau\,dt.$$

Hacemos el cambio

$$a = t+\tau, \qquad \theta = \frac{t}{t+\tau}.$$

Su jacobiano es $a$, y la identidad beta–gamma del Lema B.4.18 da

$$\int_0^1 \theta^{\frac{s}{2}-1}(1-\theta)^{\frac{r}{2}-1}\,d\theta = \frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{r}{2})}{\Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)}.$$

Se obtiene $J^{\mathbf{E}}_{s+r,p}\mathbf{u}$.
La fórmula del resolvente, Proposición B.4.14, aplicada al generador $-L_{\mathbf{E},p}$ con $\lambda = 1$, da $J^{\mathbf{E}}_{2,p} = (I+L_{\mathbf{E},p})^{-1}$.
La ley de semigrupo proporciona la fórmula para $J^{\mathbf{E}}_{2m,p}$.
Si $J^{\mathbf{E}}_{s,p}\mathbf{u} = 0$, elegimos $m\in\mathbb{N}$ con $2m > s$. Entonces

$$J^{\mathbf{E}}_{2m,p}\mathbf{u} = J^{\mathbf{E}}_{2m-s,p}J^{\mathbf{E}}_{s,p}\mathbf{u} = 0.$$

El operador $(I+L_{\mathbf{E},p})^{-m}$ es inyectivo, de modo que $\mathbf{u} = 0$. Para la densidad observamos que

$$J^{\mathbf{E}}_{2m,p} = J^{\mathbf{E}}_{s,p}J^{\mathbf{E}}_{2m-s,p}.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Ran}(J^{\mathbf{E}}_{2m,p}) \subseteq \operatorname{Ran}(J^{\mathbf{E}}_{s,p}).$$

Además,

$$\operatorname{Ran}(J^{\mathbf{E}}_{2m,p}) = \operatorname{Ran}\big((I+L_{\mathbf{E},p})^{-m}\big) = \mathcal{D}\big((I+L_{\mathbf{E},p})^{m}\big),$$

donde el último espacio se considera con su inclusión en $L^p(M,\mathbf{E})$. El dominio de una potencia del generador es denso por la Proposición B.4.12. En consecuencia, $\operatorname{Ran}(J^{\mathbf{E}}_{s,p})$ es denso en $L^p(M,\mathbf{E})$.
Finalmente, la consistencia de los semigrupos implica que, para $\mathbf{u}\in L^p(M,\mathbf{E})\cap L^q(M,\mathbf{E})$, las integrales truncadas

$$J^{\mathbf{E},[a,b]}_{s}\mathbf{u} := \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_a^b t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}P^{\mathbf{E}}_t\mathbf{u}\,dt$$

son las mismas secciones para todos $0<a<b<\infty$. Cuando $a\to 0^+$ y $b\to+\infty$, estas secciones convergen a $J^{\mathbf{E}}_{s,p}\mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$ y a $J^{\mathbf{E}}_{s,q}\mathbf{u}$ en $L^q(M,\mathbf{E})$. De cualquier sucesión de intervalos que agote $(0,+\infty)$ puede extraerse una subsucesión que converja casi en todas partes en ambos espacios: primero se extrae para la convergencia en $L^p(M,\mathbf{E})$ y después una subsucesión de ésta para la convergencia en $L^q(M,\mathbf{E})$. Los dos límites puntuales son iguales, y por ello $J^{\mathbf{E}}_{s,p}\mathbf{u} = J^{\mathbf{E}}_{s,q}\mathbf{u}$ casi en todas partes. □

### 12.4.2 El núcleo de Bessel

La representación espectral del potencial puede convertirse en una representación integral. Su núcleo separa la singularidad cercana a la diagonal del decaimiento a larga distancia y hace visibles las propiedades de regularización.

**Definición 12.4.3.** (Núcleo de Bessel covariante) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Para $s>0$ definimos

$$G_s^{\mathbf{E}}(x,y):=\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\,dt$$

si la integral converge. Definimos asimismo

$$g_s(x,y):=\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}p_t(x,y)\,dt,$$

permitiendo inicialmente el valor $+\infty$.

**Proposición 12.4.4.** Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Para casi todo $(x,y)\in M\times M$, $g_s(x,y)<\infty$, la integral que define $G_s^{\mathbf{E}}(x,y)$ converge y

$$\|G_s^{\mathbf{E}}(x,y)\|_{\mathcal{L}((\mathbf{E}_y,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(y)),(\mathbf{E}_x,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)))}\le g_s(x,y).$$

Además,

$$\int_M g_s(x,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\le 1$$

para todo $x$, y, si $\mathbf{u}\in L^p(M,\mathbf{E})$ con $1\le p<\infty$,

$$J_{s,p}^{\mathbf{E}}\mathbf{u}(x)=\int_M G_s^{\mathbf{E}}(x,y)\mathbf{u}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$$

para casi todo $x$.

*Demostración.* La función $(t,x,y)\mapsto p_t(x,y)$ es no negativa y medible. Por lo tanto, $g_s$ es medible como integral de una función no negativa. Para cada $x\in M$, el Teorema de Tonelli B.6.17 y la cota de la masa de $p_t$ dan

$$\begin{aligned}\int_M g_s(x,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)&=\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}\left(\int_M p_t(x,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\right)dt\\&\le\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}\,dt=1.\end{aligned}$$

Como $p_t(x,y)=p_t(y,x)$, también

$$g_s(x,y)=g_s(y,x). \tag{12.3}$$

En particular, $g_s(x,\cdot)$ es finita casi en todas partes para cada $x$. Como el conjunto

$$N_s := \{(x,y) \in M \times M \mid g_s(x,y) = +\infty\}$$

es medible, el Teorema de Tonelli aplicado a $\mathbf{1}_{N_s}$ muestra que $(\lambda_{\mathbf{g}} \otimes \lambda_{\mathbf{g}})(N_s) = 0$.
Si $(x,y) \notin N_s$, la cota

$$\|\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\|_{\mathcal{L}((\mathbf{E}_y,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(y)),(\mathbf{E}_x,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)))} \le p_t(x,y)$$

prueba que la función con valores en el espacio finito-dimensional $\operatorname{Hom}(\mathbf{E}_y,\mathbf{E}_x)$ que aparece en la definición de $G_s^{\mathbf{E}}(x,y)$ es absolutamente integrable. Por lo tanto, la integral converge y

$$\|G_s^{\mathbf{E}}(x,y)\|_{\mathcal{L}((\mathbf{E}_y,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(y)),(\mathbf{E}_x,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)))} \le g_s(x,y).$$

En $N_s$ fijamos, en adelante, el valor $G_s^{\mathbf{E}}(x,y) = 0$. Esta elección da un núcleo medible. En efecto, sobre el producto de dos abiertos trivializantes, las componentes de

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_{\frac{1}{\nu}}^{\nu} t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} \mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\, dt, \qquad \nu \in \mathbb{N},$$

son funciones medibles, incluso suaves. Fuera de $N_s$ convergen componente a componente a las de $G_s^{\mathbf{E}}$, mientras que $N_s$ es medible. El límite definido en $M\times M\setminus N_s$ y prolongado por cero a $N_s$ es, por consiguiente, medible en cualquier par de marcos locales. Esto prueba las primeras afirmaciones.
Antes de tratar el núcleo covariante, registramos la acotación del operador integral escalar. Para una función medible $f \ge 0$, pongamos

$$(\mathcal{T}_s f)(x) := \int_M g_s(x,y) f(y)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y),$$

permitiendo inicialmente el valor $+\infty$. Si $1 \le p < \infty$, la desigualdad de Jensen respecto de la medida subprobabilidad $g_s(x,y)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$ da

$$|\mathcal{T}_s f(x)|^p \le \int_M g_s(x,y) |f(y)|^p\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y).$$

Para $p = 1$ la misma desigualdad es inmediata. Integramos en $x$, usamos Tonelli, la simetría (12.3) y la cota de la masa ya probada. Obtenemos

$$\|\mathcal{T}_s f\|_{L^p(M)} \le \|f\|_{L^p(M)}. \tag{12.4}$$

Por descomposición en partes positiva y negativa, la misma conclusión vale para funciones escalares arbitrarias. En particular, la integral que define $\mathcal{T}_s f$ es finita para casi todo $x$ cuando $f \in L^p(M)$. Para $f \in C_c^\infty(M)$, Fubini y la representación del semigrupo muestran que $\mathcal{T}_s f = J_{s,p} f$. La densidad y (12.4) extienden esta identidad a todo $L^p(M)$.
Sea primero $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$. Para casi todo $x$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^\infty \int_M t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} |\mathbf{K}_t^{\mathbf{E}}(x,y)\mathbf{u}(y)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\, dt \\ \le \int_M g_s(x,y) |\mathbf{u}(y)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y).\end{aligned}$$

El Teorema de Tonelli y la representación del semigrupo escalar por $p_t$ muestran, para casi todo $x$, que

$$\begin{aligned}\int_M g_s(x,y)|\mathbf{u}(y)|_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}P_t(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})(x)\,dt \\ &= \big(\mathcal{T}_s(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})\big)(x) = J_{s,p}(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})(x).\end{aligned}$$

Aquí $J_{s,p}$ denota el potencial de Bessel escalar. El último miembro pertenece a $L^p(M)$ y, por lo tanto, es finito para casi todo $x$. El Teorema de Fubini para integrales de Bochner B.6.26 permite entonces intercambiar las integrales y da

$$\begin{aligned}J^{\mathbf{E}}_{s,p}\mathbf{u}(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}\left(\int_M \mathbf{K}^{\mathbf{E}}_t(x,y)\mathbf{u}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\right)dt \\ &= \int_M G^{\mathbf{E}}_s(x,y)\mathbf{u}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\end{aligned}$$

para casi todo $x$.

Definamos, siempre que la integral sea absolutamente convergente,

$$\mathcal{G}^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}(x) := \int_M G^{\mathbf{E}}_s(x,y)\mathbf{u}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y).$$

La cota anterior proporciona

$$|\mathcal{G}^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{h_E}} \le \int_M g_s(x,y)|\mathbf{u}(y)|_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y) = J_{s,p}(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})(x) \tag{12.5}$$

para casi todo $x$. El último miembro es finito casi en todas partes y su norma $L^p$ no excede $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}$. Así, $\mathcal{G}^{\mathbf{E}}_s$ define un operador contractivo en el subespacio $\Gamma_c(\mathbf{E})$.

Tomemos ahora $\mathbf{u}\in L^p(M,\mathbf{E})$ y elijamos $\mathbf{u}_j\in\Gamma_c(\mathbf{E})$ con $\mathbf{u}_j\to\mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$. La desigualdad (12.5), aplicada a $\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_k$, muestra que $(\mathcal{G}^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}_j)_j$ es de Cauchy en $L^p(M,\mathbf{E})$. Por lo tanto, $\mathcal{G}^{\mathbf{E}}_s$ se extiende de manera única a un operador contractivo en $L^p(M,\mathbf{E})$. Como $\mathcal{G}^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}_j = J^{\mathbf{E}}_{s,p}\mathbf{u}_j$ y ambos operadores son continuos, se obtiene

$$\mathcal{G}^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u} = J^{\mathbf{E}}_{s,p}\mathbf{u}$$

en $L^p(M,\mathbf{E})$.

Finalmente, la identidad escalar anterior, ahora aplicada a $|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}$, muestra que

$$\big(\mathcal{T}_s(|\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})\big)(x) = \int_M g_s(x,y)|\mathbf{u}(y)|_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y) < \infty$$

para casi todo $x$. En esos puntos la integral

$$\int_M G^{\mathbf{E}}_s(x,y)\mathbf{u}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$$

es absolutamente convergente. Como $\mathcal{T}_s$ es contractivo en $L^p(M)$, $\mathcal{T}_s(|\mathbf{u}_j-\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})\to 0$ en $L^p(M)$. Elegimos una subsucesión, que no renombramos, para la cual

$$\mathcal{T}_s(|\mathbf{u}_j-\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}})(x)\longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{G}^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}_j(x)\longrightarrow \mathcal{G}^{\mathbf{E}}_s\mathbf{u}(x)$$

para casi todo $x$. Para cada $j$, sea $X_j$ un conjunto de medida total en el que vale la representación integral ya probada para $\mathbf{u}_j$. Al intersectar los conjuntos $X_j$, el conjunto donde son finitas las integrales escalares anteriores y los dos conjuntos de convergencia puntual, obtenemos un único conjunto $X \subseteq M$ de medida total en el que todas estas propiedades se cumplen simultáneamente. Si $x \in X$,

$$\begin{aligned}&\left|\mathcal{G}_s^{\mathbf{E}}\mathbf{u}_j(x) - \int_M G_s^{\mathbf{E}}(x,y)\mathbf{u}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\right|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\\ &\qquad \le \int_M g_s(x,y)|\mathbf{u}_j(y)-\mathbf{u}(y)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y) = \mathcal{T}_s(|\mathbf{u}_j-\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}})(x),\end{aligned}$$

de modo que el miembro izquierdo tiende a cero. Por unicidad del límite, la extensión $\mathcal{G}_s^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ coincide casi en todas partes con la integral del núcleo. Como $\mathcal{G}_s^{\mathbf{E}} = J_{s,p}^{\mathbf{E}}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$, se obtiene la representación afirmada. □

### 12.4.3 Definición de la escala fraccionaria

Con el potencial y su núcleo disponibles, podemos definir órdenes reales de regularidad de manera intrínseca. La definición se organiza para coincidir con los órdenes enteros y para ser estable bajo el cálculo espectral.

**Definición 12.4.5.** (Espacios de Sobolev de Bessel de orden positivo) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $s > 0$ y $1 \le p < \infty$. Definimos

$$H_{L_{\mathbf{E}}}^{s,p}(M,\mathbf{E}) := J_{s,p}^{\mathbf{E}}(L^p(M,\mathbf{E})).$$

Si $\mathbf{u} = J_{s,p}^{\mathbf{E}}\mathbf{f}$, ponemos

$$\|\mathbf{u}\|_{H_{L_{\mathbf{E}}}^{s,p}(M,\mathbf{E})} := \|\mathbf{f}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

La inyectividad de $J_{s,p}^{\mathbf{E}}$ garantiza que esta norma está bien definida. Para $s = 0$ ponemos $H_{L_{\mathbf{E}}}^{0,p}(M,\mathbf{E}) := L^p(M,\mathbf{E})$.

**Definición 12.4.6.** (Espacios de orden negativo) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $s < 0$ y $1 \le p < \infty$. Definimos $H_{L_{\mathbf{E}}}^{s,p}(M,\mathbf{E})$ como la completación de $L^p(M,\mathbf{E})$ respecto de la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{H_{L_{\mathbf{E}}}^{s,p}(M,\mathbf{E})} := \|J_{-s,p}^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

**Notación 12.4.7.** (Escala de Bessel escalar) En el haz trivial de rango uno, provisto de la conexión trivial, el laplaciano de conexión es la realización positiva $L = \Delta_B = -\Delta$ introducida en la sección del semigrupo escalar. Para todo $s \in \mathbb{R}$ y $1 \le p < \infty$ escribiremos

$$H_L^{s,p}(M) := H_{L_{\mathbf{E}}}^{s,p}(M,\mathbf{E})$$

en este caso. Así, $H_L^{s,p}(M)$ designa siempre la escala intrínseca construida mediante el semigrupo del calor y los potenciales $(I+L)^{-\frac{s}{2}}$, mientras que la notación sin subíndice se reservará para los espacios definidos por localización cuando éstos se introduzcan.

**Proposición 12.4.8.** (Conjugación de la escala de Bessel) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave complejo de rango finito con métrica hermitiana y conexión compatible. La conexión conjugada $\nabla^{\overline{\mathbf{E}}}$ es compatible con $\mathbf{h}_{\overline{\mathbf{E}}}$ y su laplaciano satisface

$$L_{\overline{\mathbf{E}},0}(\overline{\mathbf{u}}) = \overline{L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E}).$$

Para todo $1\le p<\infty$, $t\ge 0$ y $r>0$,

$$P_t^{\overline{\mathbf{E}},p}(\overline{\mathbf{u}}) = \overline{P_t^{\mathbf{E},p}\mathbf{u}},$$
$$J_{r,p}^{\overline{\mathbf{E}}}(\overline{\mathbf{u}}) = \overline{J_{r,p}^{\mathbf{E}}\mathbf{u}}.$$

En consecuencia, para cada $s\in\mathbb{R}$, el mapeo

$$\mathfrak{C}_{s,p,\mathbf{E}}\colon \overline{H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})} \longrightarrow H^{s,p}_{L_{\overline{\mathbf{E}}}}(M,\overline{\mathbf{E}}), \qquad \mathfrak{C}_{s,p,\mathbf{E}}(\overline{\mathbf{u}}) = \overline{\mathbf{u}}, \tag{12.6}$$

es un isomorfismo complejo–lineal isométrico.

*Demostración.* La compatibilidad de $\nabla^{\overline{\mathbf{E}}}$ y el paralelismo de $\mathcal{R}_{\mathbf{E}}$ se demostraron en la Proposición 2.5.7. Conjugar la fórmula local $L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u} = -\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2\mathbf{u})$ da la primera identidad. La conjugación de secciones es una isometría antilineal entre los espacios $L^2$ y entre los dominios de las formas de energía; por unicidad de la realización autoadjunta asociada, $L_{\overline{\mathbf{E}}}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}L_{\mathbf{E}}$. El cálculo espectral, y luego la unicidad de las extensiones consistentes a $L^p$, da la identidad de los semigrupos. Integrar esa identidad en la fórmula de Laplace de $J_{r,p}$ da la identidad de los potenciales.
Para $s>0$, la norma de la imagen de $J^{\mathbf{E}}_{s,p}\mathbf{u}$ es la norma de $\overline{\mathbf{u}}$ en $L^p(M,\overline{\mathbf{E}})$, igual a la de $\mathbf{u}$. Para $s<0$, la misma conclusión resulta de la norma que define la completación. La sobreyectividad se obtiene conjugando otra vez. Finalmente, la estructura escalar del espacio conjugado prueba que (12.6) es complejo–lineal. □

**Teorema 12.4.9.** (Propiedades de la escala de Bessel) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sea $1\le p<\infty$.

(a) $H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})$ es un espacio de Banach para todo $s\in\mathbb{R}$;

(b) si $s_1>s_0$, la inclusión
$$H^{s_1,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow H^{s_0,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})$$
es continua y tiene imagen densa;

(c) para $r>0$ y $s\in\mathbb{R}$, $J^{\mathbf{E}}_{r,p}$ se extiende a un isomorfismo isométrico
$$J^{\mathbf{E}}_{r,p}\colon H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^{s+r,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E});$$

(d) si $s>0$, $J^{\mathbf{E}}_{s,p}(\Gamma_c(\mathbf{E}))$ es denso en $H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})$;

(e) si $1<p<\infty$, $p'$ es el exponente conjugado y $s\in\mathbb{R}$, la dualidad integral, inicialmente definida en

$L^p(M,\mathbf{E})\times L^{p'}(M,\overline{\mathbf{E}})$, se prolonga de manera única a un emparejamiento complejo–bilineal continuo

$$\mathfrak{b}_{s,p;\mathbf{E}}\colon H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})\times H^{-s,p'}_{L_{\overline{\mathbf{E}}}}(M,\overline{\mathbf{E}})\longrightarrow\mathbb{C}$$

e induce el isomorfismo complejo–lineal isométrico

$$H^{-s,p'}_{L_{\overline{\mathbf{E}}}}(M,\overline{\mathbf{E}})\longrightarrow\big(H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})\big)',\qquad \mathbf{w}\longmapsto\big[\mathbf{u}\longmapsto\mathfrak{b}_{s,p;\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{w})\big]. \tag{12.7}$$

Equivalentemente, mediante (12.6), se obtiene

$$\overline{H^{-s,p'}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})}\longrightarrow\big(H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})\big)',\qquad \overline{\mathbf{v}}\longmapsto\left[\mathbf{u}\longmapsto\int_M\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{v})\,d\lambda_{\mathbf{g}}\right].$$

En la última fórmula la integral tiene su significado literal cuando $\mathbf{u}\in L^p(M,\mathbf{E})$ y $\mathbf{v}\in L^{p'}(M,\mathbf{E})$; para elementos de órdenes generales denota, por definición, la única prolongación continua $\mathfrak{b}_{s,p;\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathfrak{C}_{-s,p',\mathbf{E}}(\overline{\mathbf{v}}))$. Esta convención no atribuye valores puntuales a una distribución de orden negativo.

*Demostración.* Los incisos (a)–(c) son el Teorema B.4.19 aplicado al semigrupo $(P^{\mathbf{E},p}_t)_{t\geq0}$. Para (d), si $\mathbf{u}=J^{\mathbf{E}}_{s,p}\mathbf{f}$, elegimos $\mathbf{f}_j\in\Gamma_c(\mathbf{E})$ con $\mathbf{f}_j\to\mathbf{f}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$. Entonces

$$\|J^{\mathbf{E}}_{s,p}\mathbf{f}_j-\mathbf{u}\|_{H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})}=\|\mathbf{f}_j-\mathbf{f}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}\longrightarrow0.$$

Para la dualidad, la autoadjunción en $L^2$ y la consistencia de las extensiones implican

$$\int_M\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(P^{\mathbf{E},p}_t\mathbf{u},\mathbf{v})\,d\lambda_{\mathbf{g}}=\int_M\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},P^{\mathbf{E},p'}_t\mathbf{v})\,d\lambda_{\mathbf{g}}$$

para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en intersecciones densas. La integral que define $J^{\mathbf{E}}_{r,p}$ está dominada por

$$\frac{t^{\frac{r}{2}-1}e^{-t}}{\Gamma(\frac{r}{2})}\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{v}\|_{L^{p'}(M,\mathbf{E})},$$

que es integrable en $(0,\infty)$. El Teorema de Fubini para integrales de Bochner B.6.26 da

$$\int_M\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(J^{\mathbf{E}}_{r,p}\mathbf{u},\mathbf{v})\,d\lambda_{\mathbf{g}}=\int_M\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},J^{\mathbf{E}}_{r,p'}\mathbf{v})\,d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{12.8}$$

La Proposición B.4.23, aplicada al emparejamiento bilineal $L^p(M,\mathbf{E})\times L^{p'}(M,\overline{\mathbf{E}})$ inducido por $\mathcal{R}_{\mathbf{E}}$, usa (12.8) y prueba que (12.7) es isométrico y sobreyectivo. Es complejo–lineal en $\mathbf{w}$ porque $\mathcal{R}_{\mathbf{E}}\colon\overline{\mathbf{E}}\to\mathbf{E}^*$ lo es. Componer con el isomorfismo lineal $\mathfrak{C}_{-s,p',\mathbf{E}}$ da la formulación equivalente desde el espacio conjugado. En el caso real, $\overline{\mathbf{E}}=\mathbf{E}$ y se recupera la dualidad real usual. □

### 12.4.4 Caracterización espectral en $L^2$

**Teorema 12.4.10.** (Caracterización espectral) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Sea $s>0$. Entonces

$$J^{\mathbf{E}}_{s,2}=(I+L_{\mathbf{E}})^{-\frac{s}{2}}$$

y

$$H^{s,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})=\mathcal{D}\big((I+L_{\mathbf{E}})^{\frac{s}{2}}\big).$$

Para $\mathbf{u}$ en este espacio,

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{s,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})}=\|(I+L_{\mathbf{E}})^{\frac{s}{2}}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}.$$

En particular,

$$H^{1,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})=W^{1,2}(M,\mathbf{E})$$

y

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H^{1,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})}=\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})}+\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}.$$

*Demostración.* Para $\lambda\geq 0$,

$$(1+\lambda)^{-\frac{s}{2}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}e^{-t\lambda}\,dt.$$

Para justificar con precisión el paso al cálculo espectral, fijemos $\mathbf{u}\in L^2(M,\mathbf{E})$ y, para $0<\varepsilon<R<\infty$, pongamos

$$m_{\varepsilon,R}(\lambda):=\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_\varepsilon^R t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}e^{-t\lambda}\,dt.$$

En el intervalo compacto $[\varepsilon,R]$, el mapeo $t\mapsto e^{-tL_{\mathbf{E}}}$ es continuo en norma de operador: en efecto, el cálculo espectral del Teorema B.4.6 y el teorema fundamental del cálculo escalar dan

$$\|e^{-tL_{\mathbf{E}}}-e^{-\tau L_{\mathbf{E}}}\|_{\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}))}\leq|t-\tau|\sup_{\lambda\in[0,\infty)}\lambda e^{-\varepsilon\lambda}\leq\frac{|t-\tau|}{e\varepsilon}.$$

Al aproximar la integral por sumas de Riemann y usar las reglas del mismo cálculo funcional obtenemos

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_\varepsilon^R t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}e^{-tL_{\mathbf{E}}}\mathbf{u}\,dt=m_{\varepsilon,R}(L_{\mathbf{E}})\mathbf{u}.$$

Cuando $\varepsilon\to 0^+$ y $R\to\infty$, el lado izquierdo converge a $J^{\mathbf{E}}_{s,2}\mathbf{u}$ por el Teorema de convergencia dominada de Bochner B.6.25. Por otra parte, $m_{\varepsilon,R}(\lambda)\to(1+\lambda)^{-\frac{s}{2}}$ y $0\leq m_{\varepsilon,R}(\lambda)\leq 1$. La fórmula de la norma del Teorema B.4.6, seguida del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue B.6.14, implica

$$m_{\varepsilon,R}(L_{\mathbf{E}})\mathbf{u}\longrightarrow(I+L_{\mathbf{E}})^{-\frac{s}{2}}\mathbf{u}\quad\text{en } L^2(M,\mathbf{E}).$$

Por consiguiente, $J^{\mathbf{E}}_{s,2}\mathbf{u}=(I+L_{\mathbf{E}})^{-\frac{s}{2}}\mathbf{u}$. El Corolario B.4.8 identifica el rango de $(I+L_{\mathbf{E}})^{-\frac{s}{2}}$ con el dominio de $(I+L_{\mathbf{E}})^{\frac{s}{2}}$ y muestra que ambos operadores son inversos en esos espacios.

Para $s = 1$, el Corolario B.4.7 da

$$\mathcal{D}\big((I + L_{\mathbf{E}})^{\frac{1}{2}}\big) = W^{1,2}(M, \mathbf{E})$$

y

$$\|(I + L_{\mathbf{E}})^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} = \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} + \mathfrak{q}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

La definición de $\mathfrak{q}_{\mathbf{E}}$ concluye la prueba. □

**Proposición 12.4.11.** (Compatibilidad espectral, dual e interpolatoria en $L^2$) Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, hermitiana en el caso complejo, y conexión compatible. Supongamos primero que $\mathbf{E}$ es complejo y pongamos $B_{\mathbf{E}} := I + L_{\mathbf{E}}$. Sean $s_0 < s_1$, $0 < \theta < 1$ y $s_\theta := (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. Entonces

$$[H^{s_0,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E}), H^{s_1,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E})]_\theta = H^{s_\theta,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E}) \tag{12.9}$$

como espacios topológicos, con las normas determinadas por el cálculo espectral. Esta identificación es la identidad en la intersección de los dos extremos y conmuta con los potenciales de Bessel y con la conjugación (12.6).

Además, si $s > 0$, $\mathbf{w} \in H^{-s,2}_{L_{\overline{\mathbf{E}}}}(M, \overline{\mathbf{E}})$,

$$z := J^{\overline{\mathbf{E}}}_{s,2}\mathbf{w} \in L^2(M, \overline{\mathbf{E}})$$

y $\mathbf{u} \in H^{s,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E})$, denotamos por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle_{s,2;\mathbf{E}}$ el emparejamiento del Teorema 12.4.9. Éste viene dado por la fórmula espectral

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle_{s,2;\mathbf{E}} = \int_M \mathcal{R}_{\mathbf{E}}(z)\big(B^{\frac{s}{2}}_{\mathbf{E}}\mathbf{u}\big)\, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{12.10}$$

En particular,

$$H^{-s,2}_{L_{\overline{\mathbf{E}}}}(M, \overline{\mathbf{E}}) \xrightarrow{\cong} \big(\mathcal{D}(B^{\frac{s}{2}}_{\mathbf{E}}), \|B^{\frac{s}{2}}_{\mathbf{E}}\cdot\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\big)'$$

es precisamente la identificación de (12.7); no aparece una segunda convención de dualidad al pasar a la caracterización espectral. Al interpolar dos órdenes, el emparejamiento en el orden $s_\theta$ es la única prolongación continua de los mismos emparejamientos en el núcleo espectral común. Por lo tanto, dualidad, conjugación e interpolación forman identificaciones compatibles.

Si $\mathbf{E}$ es real, las mismas afirmaciones se obtienen en la complexificación y se restringen al subespacio real invariante; en la fórmula dual se omiten $\overline{\mathbf{E}}$ y $\mathcal{R}_{\mathbf{E}}$ y se usa el producto fibrado real.

*Demostración.* Probemos primero (12.9) cuando $0 \le s_0 < s_1$. Escribamos

$$a_j := \frac{s_j}{2}, \qquad a(z) := (1-z)a_0 + z a_1, \qquad a := a(\theta), \qquad \delta := a_1 - a_0.$$

Por el teorema anterior, $H^{s_j,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E}) = \mathcal{D}(B^{a_j}_{\mathbf{E}})$, con norma $\|B^{a_j}_{\mathbf{E}}\cdot\|_{L^2(M,\mathbf{E})}$. El cálculo espectral da

$$\|B^{it}_{\mathbf{E}}\mathbf{v}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} = \|\mathbf{v}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{12.11}$$

Sea $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(B^a_{\mathbf{E}})$. Para $\varepsilon > 0$, la familia

$$F_\varepsilon(z) := e^{\varepsilon(z-\theta)^2} B^{a-a(z)}_{\mathbf{E}}\mathbf{u}$$

es admisible para el método complejo. En efecto, esto se verifica primero tras truncar espectralmente $\mathbf{u}$ al intervalo $[1,N]$; la fórmula de la norma espectral y convergencia dominada permiten después hacer $N\to\infty$, uniformemente en subfranjas cerradas y en las dos normas de frontera. Para $j\in\{0,1\}$ y $t\in\mathbb{R}$,

$$B_{\mathbf{E}}^{a_j}F_\varepsilon(j+it)=e^{\varepsilon(j+it-\theta)^2}B_{\mathbf{E}}^{a-it\delta}\mathbf{u}.$$

La identidad (12.11) da

$$\|F_\varepsilon(j+it)\|_{H_{L_{\mathbf{E}}}^{s_j,2}(M,\mathbf{E})}\le e^{\varepsilon(j-\theta)^2}e^{-\varepsilon t^2}\|B_{\mathbf{E}}^{a}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}.$$

Como $F_\varepsilon(\theta)=\mathbf{u}$, hacemos $\varepsilon\to 0^+$ y obtenemos el encaje de $H_{L_{\mathbf{E}}}^{s_\theta,2}(M,\mathbf{E})$ en el miembro izquierdo de (12.9). Para el encaje inverso, sea $F$ una familia admisible con $\mathbf{u}=F(\theta)$, y sea

$$\mathscr{C}_{\mathbf{E}}:=\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\mathbf{1}_{[1,N]}(B_{\mathbf{E}})L^2(M,\mathbf{E}).$$

Este subespacio es un núcleo para toda potencia real no negativa de $B_{\mathbf{E}}$. Para $\mathbf{v}\in\mathscr{C}_{\mathbf{E}}$, la función

$$\Phi_v(z):=\int_M\mathbf{h}_{\mathbf{E}}\big(F(z),B_{\mathbf{E}}^{a(\overline{z})}\mathbf{v}\big)\,d\lambda_{\mathbf{g}}$$

es holomorfa: la segunda entrada es antiholomorfa y $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ es antilineal en esa entrada. En la frontera $z=j+it$, la autoadjunción y (12.11) implican

$$|\Phi_v(j+it)|\le\|F(j+it)\|_{H_{L_{\mathbf{E}}}^{s_j,2}(M,\mathbf{E})}\|B_{\mathbf{E}}^{-a_j}B_{\mathbf{E}}^{a_j-it\delta}\mathbf{v}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}=\|F(j+it)\|_{H_{L_{\mathbf{E}}}^{s_j,2}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{v}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}.$$

El Lema de las tres líneas 5.7.3 da

$$\left|\int_M\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},B_{\mathbf{E}}^{a}\mathbf{v})\,d\lambda_{\mathbf{g}}\right|\le\|F\|_{\mathscr{F}}\|\mathbf{v}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}.$$

Como $\mathscr{C}_{\mathbf{E}}$ es un núcleo para $B_{\mathbf{E}}^{a}$, al conjugar la desigualdad anterior obtenemos un funcional lineal acotado

$$\mathbf{v}\longmapsto\int_M\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(B_{\mathbf{E}}^{a}\mathbf{v},\mathbf{u})\,d\lambda_{\mathbf{g}}$$

sobre $\mathscr{C}_{\mathbf{E}}$, con respecto a la norma de $L^2(M,\mathbf{E})$. Éste se prolonga a todo $L^2(M,\mathbf{E})$ y el Teorema de representación de Riesz B.3.12 proporciona $\mathbf{g}\in L^2(M,\mathbf{E})$ tal que

$$\int_M\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(B_{\mathbf{E}}^{a}\mathbf{v},\mathbf{u})\,d\lambda_{\mathbf{g}}=\int_M\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{v},\mathbf{g})\,d\lambda_{\mathbf{g}},\qquad\mathbf{v}\in\mathscr{C}_{\mathbf{E}}.$$

Como $\mathscr{C}_{\mathbf{E}}$ es un núcleo para $B_{\mathbf{E}}^{a}$, la identidad se extiende a todo $v\in\mathcal{D}(B_{\mathbf{E}}^{a})$. Por la definición del adjunto y la autoadjunción de $B_{\mathbf{E}}^{a}$, esto prueba que $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(B_{\mathbf{E}}^{a})$, $B_{\mathbf{E}}^{a}\mathbf{u}=\mathbf{g}$ y $\|B_{\mathbf{E}}^{a}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\le\|F\|_{\mathscr{F}}$. Tomando el ínfimo sobre $F$ se obtiene el encaje inverso.

Para órdenes $s_0<s_1$ arbitrarios, elegimos $r>\max\{0,-s_0\}$. El mismo potencial $J_{r,2}^{\mathbf{E}}$ es, por el Teorema 12.4.9, un isomorfismo isométrico simultáneo

$$H_{L_{\mathbf{E}}}^{s_j,2}(M,\mathbf{E})\longrightarrow H_{L_{\mathbf{E}}}^{s_j+r,2}(M,\mathbf{E}),\qquad j\in\{0,1\},$$

y también en el orden intermedio. El Teorema de interpolación compleja de operadores 5.7.5, aplicado a $J^{\mathbf{E}}_{r,2}$ y a su inverso en esos pares compatibles, reduce el caso general al ya probado.

Probemos ahora (12.10). Pongamos $\mathbf{f} := B^{\frac{s}{2}}_{\mathbf{E}}\mathbf{u}$, de modo que $\mathbf{u} = J^{\mathbf{E}}_{s,2}\mathbf{f}$. La simetría bilineal de los potenciales, escrita entre $\mathbf{E}$ y $\overline{\mathbf{E}}$, da

$$\langle J^{\mathbf{E}}_{s,2}\mathbf{f}, \mathbf{w}\rangle_{s,2;\mathbf{E}} = \int_M \mathcal{R}_{\mathbf{E}}(J^{\overline{\mathbf{E}}}_{s,2}\mathbf{w})(\mathbf{f})\, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

que es exactamente la fórmula afirmada. Los operadores $J_{r,2}$, las potencias espectrales de exponente real y la conjugación conmutan porque sus multiplicadores escalares son reales. Finalmente, las truncaciones espectrales forman un subespacio denso en todos los órdenes; sobre ese subespacio, todas las identificaciones anteriores son las mismas fórmulas algebraicas. La unicidad de las prolongaciones continuas prueba la compatibilidad final. □

**Observación 12.4.12.** (Interpolación compleja fuera de $L^2$) La demostración hilbertiana usa que $(I + L_{\mathbf{E}})^{it}$ es unitario en $L^2$ para $t \in \mathbb{R}$. Para $1 < p < \infty$, el argumento requiere una cota de esas potencias en $L^p(M, \mathbf{E})$; la contracción del calor no proporciona por sí sola esa cota para un semigrupo abstracto. El Lema 13.3.26 la demostrará para el laplaciano covariante sobre una variedad completa, y el Teorema 13.3.27 obtendrá la interpolación correspondiente. La comparación con las normas localizadas requiere además geometría acotada de la base y del haz; se establece en el Teorema 14.5.6.

**Corolario 12.4.13.** Sean $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana conexa, completa y sin frontera y $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave de rango finito con métrica fibrada y conexión compatible. Si $m \in \mathbb{N}$ y $1 \le p < \infty$, entonces

$$H^{2m,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E}) = \mathcal{D}\big((I + L_{\mathbf{E},p})^m\big)$$

y

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{2m,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})} = \|(I + L_{\mathbf{E},p})^m \mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

*Demostración.* La Proposición 12.4.2 da

$$J^{\mathbf{E}}_{2m,p} = (I + L_{\mathbf{E},p})^{-m}.$$

El rango de este resolvente iterado es el dominio de $(I + L_{\mathbf{E},p})^m$, y la norma de rango coincide con la norma indicada. □

**Corolario 12.4.14.** (Comparación en una variedad cerrada) Si $M$ es cerrada, entonces, para todo $m \in \mathbb{N}_0$,

$$H^{m,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E}) = H^m(M, \mathbf{E})$$

y existen constantes $c_m, C_m > 0$, dependientes sólo de $m$ y de los datos fijos $(M, g, \mathbf{E}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}, \nabla^{\mathbf{E}})$, tales que

$$c_m \|\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{u}\|_{H^{m,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})} \le C_m \|\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})}, \qquad \mathbf{u} \in H^m(M, \mathbf{E}).$$

*Demostración.* Para $m = 0$ las dos normas coinciden. Sea $m = 2q$ con $q \geq 1$. El Corolario 11.5.1 da

$$\mathcal{D}(L_{\mathbf{E}}^{q}) = H^{2q}(M, \mathbf{E})$$

y constantes $a_q, A_q > 0$ para las cuales

$$a_q \|\mathbf{u}\|_{H^{2q}(M,\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|L_{\mathbf{E}}^{q}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \leq A_q \|\mathbf{u}\|_{H^{2q}(M,\mathbf{E})}.$$

Para $\lambda \geq 0$,

$$1 + \lambda^{2q} \leq (1+\lambda)^{2q} \leq 2^{2q-1}(1+\lambda^{2q}).$$

El cálculo espectral, junto con

$$\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}^2 + \|L_{\mathbf{E}}^{q}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|L_{\mathbf{E}}^{q}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \leq \sqrt{2}\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}^2 + \|L_{\mathbf{E}}^{q}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

prueba la desigualdad afirmada con $c_{2q} = \frac{a_q}{\sqrt{2}}$ y $C_{2q} = 2^{q-\frac{1}{2}} A_q$.
Para $m = 2q+1$, el cálculo espectral da

$$\mathcal{D}\big((I+L_{\mathbf{E}})^{q+\frac{1}{2}}\big) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{D}\big((I+L_{\mathbf{E}})^{q}\big) \,\middle|\, (I+L_{\mathbf{E}})^{q}\mathbf{u} \in \mathcal{D}\big((I+L_{\mathbf{E}})^{\frac{1}{2}}\big) \right\}.$$

El Teorema 12.4.10 identifica el último dominio con $W^{1,2}(M, \mathbf{E})$. Pongamos

$$\mathcal{N}_q(\mathbf{u})^2 := \sum_{j=0}^{q} \|L_{\mathbf{E}}^{j}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}^2 + \|\nabla^{\mathbf{E}} L_{\mathbf{E}}^{q}\mathbf{u}\|_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}^2.$$

La identidad $\|\nabla^{\mathbf{E}} L_{\mathbf{E}}^{j}\mathbf{u}\|_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}^2 = \langle L_{\mathbf{E}}^{j+1}\mathbf{u}, L_{\mathbf{E}}^{j}\mathbf{u}\rangle_{L^2(M,\mathbf{E})}$ y Cauchy–Schwarz dan

$$\|\nabla^{\mathbf{E}} L_{\mathbf{E}}^{j}\mathbf{u}\|_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|L_{\mathbf{E}}^{j+1}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}^2 + \|L_{\mathbf{E}}^{j}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}^2\right), \qquad 0 \leq j < q.$$

Si $\|\mathbf{u}\|_{\Delta_B,2q+1}$ denota la norma del Teorema 9.1.42, estas desigualdades implican

$$\mathcal{N}_q(\mathbf{u})^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{\Delta_B,2q+1}^2 \leq (q+1)\mathcal{N}_q(\mathbf{u})^2.$$

El teorema citado proporciona $\alpha_q, b_q > 0$, dependientes sólo de $q$ y de los datos geométricos fijos, tales que

$$\alpha_q \|\mathbf{u}\|_{H^{2q+1}(M,\mathbf{E})}^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{\Delta_B,2q+1}^2 \leq b_q \|\mathbf{u}\|_{H^{2q+1}(M,\mathbf{E})}^2.$$

Por otra parte, para $\lambda \geq 0$,

$$\frac{1}{q+2}\left(\sum_{j=0}^{q}\lambda^{2j} + \lambda^{2q+1}\right) \leq (1+\lambda)^{2q+1} \leq 2^{2q}\left(\sum_{j=0}^{q}\lambda^{2j} + \lambda^{2q+1}\right).$$

El cálculo espectral convierte esta comparación polinómica en

$$\frac{1}{\sqrt{q+2}}\mathcal{N}_q(\mathbf{u}) \leq \|(I+L_{\mathbf{E}})^{q+\frac{1}{2}}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \leq 2^{q}\mathcal{N}_q(\mathbf{u}).$$

En consecuencia, pueden tomarse

$$c_{2q+1} := \sqrt{\frac{\alpha_q}{(q+1)(q+2)}}, \qquad C_{2q+1} := 2^q \sqrt{b_q}.$$

Además, $\Gamma(\mathbf{E})$ es densa para ambas normas: lo es en $H^{2q+1}(M,\mathbf{E})$ por definición y, como $M$ es compacta, también lo es en $H^{2q+1,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})$. En efecto, el cálculo espectral da

$$J^{\mathbf{E}}_{2q+1,2}(\Gamma(\mathbf{E})) \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(L^k_{\mathbf{E}}) = \Gamma(\mathbf{E}),$$

mientras que el inciso (d) del Teorema 12.4.9 afirma que el subconjunto del miembro izquierdo es denso en $H^{2q+1,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})$. Las desigualdades se prolongan, por lo tanto, a las completaciones y prueban simultáneamente la igualdad de los dos espacios. □

**Observación 12.4.15.** (Comparación fuera del caso compacto) La igualdad $H^{1,2}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E}) = W^{1,2}(M,\mathbf{E})$ vale en toda variedad completa. Para órdenes superiores y para $p \neq 2$, la identificación de la escala de Bessel con los espacios definidos mediante derivadas covariantes exige estimaciones elípticas globales. El capítulo de operadores elípticos proporciona esas estimaciones en variedades cerradas, mientras que el capítulo de geometría acotada explica las hipótesis uniformes necesarias en el caso no compacto. La completitud por sí sola garantiza la existencia de la escala de Bessel, pero no la equivalencia global con una norma formada por una cantidad finita de derivadas covariantes.

**Observación 12.4.16.** (Elección del operador) La construcción puede realizarse con otros operadores elípticos autoadjuntos y acotados inferiormente, siempre que sus semigrupos admitan extensiones consistentes a $L^p(M,\mathbf{E})$. En este capítulo se eligió el laplaciano de conexión porque está determinado por $(g,\mathbf{h}_{\mathbf{E}},\nabla^{\mathbf{E}})$, su forma cuadrática es exactamente la energía de la conexión y la desigualdad de Kato proporciona una comparación directa con el semigrupo escalar.

# 13

# Espacios de Sobolev en variedades de geometría acotada

Una estimación obtenida en una carta puede ser correcta y, aun así, no proporcionar ninguna información global: su constante puede crecer cuando el centro de la carta se aleja hacia el infinito. En una variedad compacta basta elegir una cubierta finita. En una variedad no compacta necesitamos otra propiedad: poder repetir el mismo argumento local con radios y constantes independientes del punto.

La geometría acotada permite hacerlo. El radio de inyectividad proporciona cartas normales de un tamaño común; las cotas de la curvatura y de sus derivadas controlan la métrica en esas cartas. A partir de estos datos construiremos cubiertas de multiplicidad uniforme y particiones de la unidad cuyas derivadas permanezcan acotadas. Éstas son las condiciones que permiten sumar las estimaciones locales sin perder el control de la norma.

Compararemos después los espacios definidos por localización con los que utilizan derivadas covariantes o potencias del laplaciano. En esa comparación hay que distinguir la regularidad entera de la fraccionaria y, dentro de esta última, los distintos órdenes de las sumas que definen los espacios de Besov y de Triebel–Lizorkin. Mantendremos esas distinciones también en las interpolaciones y en los argumentos de dualidad.

Las variedades de este capítulo se suponen sin frontera. El caso con frontera se desarrolla en el Capítulo 14, donde las cartas normales próximas a la frontera se sustituyen por cartas de Fermi y las normas euclidianas por normas de restricción al semiespacio.

### Uniformidad en espacios no compactos

En una variedad compacta, una cubierta finita permite absorber en una sola constante las distorsiones de las cartas y de la métrica. Esa ventaja desaparece en el caso no compacto. La geometría acotada sustituye la finitud por uniformidad: cartas de tamaño controlado, multiplicidad acotada y estimaciones independientes del centro. Los trabajos de Eichhorn y el marco de variedades uniformemente regulares desarrollado por Amann muestran dos maneras estrechamente relacionadas de convertir esa uniformidad geométrica en una teoría estable de espacios funcionales [53, 6].

## 13.1 Variedades riemannianas de geometría acotada

En el estudio analítico de una variedad riemanniana es fundamental disponer de sistemas de coordenadas locales en los que la geometría tenga un comportamiento controlado y comparable con el caso euclidiano. Una de las herramientas más eficaces para lograr esto son las coordenadas normales, construidas mediante la exponencial riemanniana en un punto. Estas coordenadas permiten representar la métrica de manera especialmente simple cerca del punto en el que están centradas y facilitan la transferencia de técnicas clásicas de $\mathbb{R}^n$ al contexto de variedades.

Sin embargo, la validez de este procedimiento está limitada: el mapeo exponencial puede dejar de ser un difeomorfismo en su imagen a cierta distancia debido a la aparición de puntos conjugados o a la intersección de geodésicas distintas que parten de un mismo punto. Surge así la necesidad de cuantificar el mayor radio en el cual las coordenadas normales se comportan de manera adecuada.

Este parámetro es el *radio de inyectividad* de la variedad, el cual desempeña un papel central en geometría y análisis. Una cota inferior positiva para este radio permite utilizar cartas normales de un tamaño común. Para controlar además sus coeficientes métricos y sus derivadas necesitaremos las cotas de curvatura que introduciremos a continuación. Ambas condiciones intervienen al comparar normas de Sobolev, Besov y Triebel–Lizorkin.

**Definición 13.1.1.** (Radio de inyectividad) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y $p \in M$. El *radio de inyectividad en* $p$, denotado $\operatorname{inj}(p)$, es el supremo de los números $r > 0$ tales que el mapeo exponencial riemanniano

$$\exp_p : B_{\mathbf{g}_p}(0, r) \subset T_pM \longrightarrow M$$

es un difeomorfismo sobre su imagen.
El *radio de inyectividad de* $M$ se define como

$$\operatorname{inj}(M) := \inf_{p \in M} \operatorname{inj}(p).$$

**Observación 13.1.2.** Sea $M$ una variedad riemanniana sin frontera. Si $\operatorname{inj}(M) > 0$, entonces cada componente conexa de $M$ es completa. En efecto, elijamos $0 < r < \operatorname{inj}(M)$. Toda geodésica unitaria definida en un intervalo maximal $[0, b)$, con $b < \infty$, puede prolongarse desde cualquier tiempo $t_0 < b$ al menos durante un tiempo $r$, porque $\exp_{\gamma(t_0)}$ está definida en la bola de radio $r$. Tomando $b - r < t_0 < b$ se obtiene una prolongación más allá de $b$, contradicción. Así, cada componente es geodésicamente completa; el Teorema de Hopf–Rinow 2.9.9 implica su completitud métrica.

Como $\operatorname{inj}(M) \geq 0$, solo hay dos posibilidades: $\operatorname{inj}(M) = 0$ o $\operatorname{inj}(M) > 0$. El primer comportamiento puede presentarse, por ejemplo, en variedades que contienen lazos geodésicos de longitud arbitrariamente pequeña, como se ilustra en la siguiente figura.

**Observación 13.1.3.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y supongamos que su radio de inyectividad satisface $\operatorname{inj}(M) > 0$. Entonces, para cada $p \in M$ y todo $0 < r < \operatorname{inj}(M)$, la exponencial

$$\exp_p : B_{\mathbf{g}_p}(0, r) \subseteq T_pM \longrightarrow B_{\mathbf{g}}(p, r) \subseteq M$$

es un difeomorfismo.

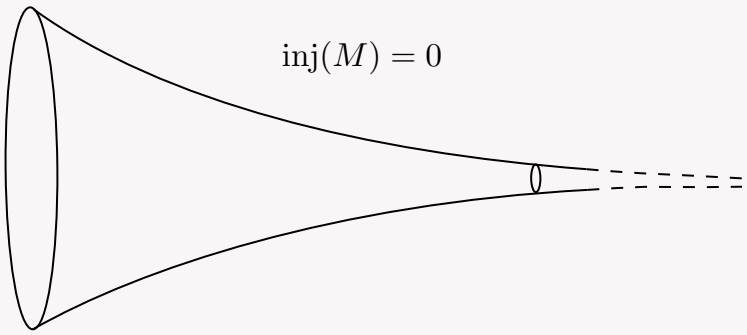



Figura 13.1. Representación esquemática de una variedad con lazos geodésicos de longitud arbitrariamente pequeña, un fenómeno que puede dar lugar a radio de inyectividad nulo.

En particular, todo punto $q \in B_{\mathbf{g}}(p,r)$ puede unirse con $p$ mediante una única geodésica minimizante de longitud menor que $r$, dada por

$$\gamma(t) = \exp_p(tv), \qquad t \in [0,1],$$

donde $v \in T_pM$ es tal que $\|v\|_{\mathbf{g}_p} < r$ y $\exp_p(v) = q$.

Para cuantificar cuánto se aproxima la métrica riemanniana a la euclidiana en coordenadas normales, estudiaremos el desarrollo de Taylor de sus coeficientes. La proposición siguiente hace explícita esa comparación.

**Proposición 13.1.4.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $p \in \mathrm{Int}(M)$. Si $(U,\varphi)$ es una carta de coordenadas normales centradas en $p$, con $\varphi(U)$ convexo y $\varphi(p) = 0$, entonces, para toda $q \in U$, si $x = (x^1,\dots,x^n) = \varphi(q)$, se tiene la siguiente expansión de Taylor

$$(g_{ij} \circ \varphi^{-1})(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{iklj}(p) x^k x^l + R_{2,0,g_{ij}\circ\varphi^{-1}}(x),$$

donde, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$|R_{2,0,g_{ij}\circ\varphi^{-1}}(x)| \le \varepsilon \|x\|^2 \quad \text{si } \|x\| < \delta_\varepsilon.$$

*Demostración.* Como $p \in \mathrm{Int}(M)$, podemos considerar la variedad sin frontera $\mathrm{Int}(M)$ con la métrica restringida. Por la Proposición 2.8.9, aplicada a esa variedad, en coordenadas normales centradas en $p$ se tiene

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \qquad \Gamma_{ij}^k(p) = 0.$$

Por el Corolario 2.4.16 (compatibilidad de la métrica),

$$\partial_k g_{ij} = g_{mj}\Gamma_{ik}^m + g_{im}\Gamma_{jk}^m. \tag{13.1}$$

Evaluando en $p$, usando $g_{mj}(p) = \delta_{mj}$, $g_{im}(p) = \delta_{im}$, y que los símbolos de Christoffel se anulan en $p$, obtenemos

$$(\partial_k g_{ij})(p) = 0.$$

Por lo tanto las derivadas de primer orden se anulan en $p$ y el término lineal correspondiente no aparece en el desarrollo de Taylor.

Ahora, si $v = v^i \partial_i|_p \in T_pM$ es arbitrario, la Proposición 2.8.9 nos dice que $\gamma_v(t) = (tv^1, \dots, tv^n)$, por lo que la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}(t) + \frac{dx^i}{dt}(t)\frac{dx^j}{dt}(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0$$

con $x(t) = \gamma_v(t)$ se convierte en

$$\Gamma_{ij}^k(tv)v^iv^j = 0.$$

Derivando respecto a $t$ obtenemos:

$$0 = \frac{d}{dt}(\Gamma_{ij}^k(tv)v^iv^j) = \left(\frac{d}{dt}(\Gamma_{ij}^k(tv))\right)v^iv^j = \partial_l(\Gamma_{ij}^k)(tv)\frac{d(tv^l)}{dt}v^iv^j = \partial_l(\Gamma_{ij}^k)(tv)v^iv^jv^l.$$

Evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$\partial_l\Gamma_{ij}^k(p)v^iv^jv^l = 0.$$

Este es un polinomio homogéneo de grado 3 que se anula idénticamente (pues $v$ era arbitrario). El coeficiente de cada término $v^iv^jv^l$ es la suma de 6 permutaciones de dichos índices ($i, j$ y $l$). Como $\partial_l\Gamma_{ij}^k = \partial_l\Gamma_{ji}^k$ obtenemos

$$\partial_l\Gamma_{ij}^k(p) + \partial_i\Gamma_{jl}^k(p) + \partial_j\Gamma_{li}^k(p) = 0. \tag{13.2}$$

Derivemos ahora de nuevo (13.1):

$$\partial_l\partial_k g_{ij} = \partial_l\left(g_{mj}\Gamma_{ik}^m + g_{im}\Gamma_{jk}^m\right) = (\partial_l g_{mj})\Gamma_{ik}^m + g_{mj}(\partial_l\Gamma_{ik}^m) + (\partial_l g_{im})\Gamma_{jk}^m + g_{im}(\partial_l\Gamma_{jk}^m).$$

Evaluando en $p$, y usando nuevamente que los símbolos de Christoffel y las parciales de orden 1 se anulan en $p$, sólo permanecen aquellos términos con derivadas de los símbolos de Christoffel, en consecuencia

$$(\partial_l\partial_k g_{ij})(p) = g_{mj}(p)(\partial_l\Gamma_{ik}^m)(p) + g_{im}(p)(\partial_l\Gamma_{jk}^m)(p).$$

Finalmente, usando que los coeficientes de la métrica evaluados en $p$ nos dan deltas de Kronecker nos queda:

$$(\partial_l\partial_k g_{ij})(p) = (\partial_l\Gamma_{ik}^j)(p) + (\partial_l\Gamma_{jk}^i)(p). \tag{13.3}$$

Por otro lado, la Proposición 2.10.3 nos dice que

$$R_{ijk}{}^l = \partial_i\Gamma_{jk}^l - \partial_j\Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l,$$

por lo que evaluando en $p$ usando que los símbolos de Christoffel se anulan en $p$, obtenemos

$$R_{ikl}{}^j(p) = \partial_i\Gamma_{kl}^j(p) - \partial_k\Gamma_{il}^j(p), \qquad R_{ilk}{}^j(p) = \partial_i\Gamma_{lk}^j(p) - \partial_l\Gamma_{ik}^j(p).$$

Sumando estos términos obtenemos

$$R_{ikl}{}^j(p) + R_{ilk}{}^j(p) = 2\partial_i\Gamma_{kl}^j(p) - \partial_l\Gamma_{ik}^j(p) - \partial_k\Gamma_{il}^j(p)$$

y usando (13.2) con $k$ intercambiado por $j$, obtenemos

$$\partial_l \Gamma^j_{ik}(p) + \partial_i \Gamma^j_{kl}(p) + \partial_k \Gamma^j_{li}(p) = 0,$$

por lo que

$$R_{ikl}{}^j + R_{ilk}{}^j = 3\partial_i \Gamma^j_{kl}(p).$$

Como $g_{ij} = \delta_{ij}$ en $p$, la identidad anterior se puede escribir en términos del tensor de curvatura de Riemann como sigue:

$$R_{iklj}(p) + R_{ilkj}(p) = R_{ikl}{}^j(p) + R_{ilk}{}^j(p) = 3\partial_i \Gamma^j_{kl}(p).$$

Al intercambiar $i$ con $l$, obtenemos

$$R_{likj}(p) + R_{lkij}(p) = 3\partial_l \Gamma^j_{ik}(p)$$

y al intercambiar $i$ con $l$ y posteriormente $i$ con $j$ obtenemos

$$R_{ljki}(p) + R_{lkji}(p) = 3\partial_l \Gamma^i_{jk}(p).$$

Usando la identidad (13.3) obtenemos

$$3\partial_l \partial_k g_{ij}(p) = R_{likj}(p) + R_{lkij}(p) + R_{ljki}(p) + R_{lkji}(p).$$

Por el Corolario 2.10.7, $R_{lkij}(p) = -R_{lkji}(p)$ y $R_{ljki}(p) = R_{kilj}(p)$ por lo que

$$\partial_l \partial_k g_{ij}(p) = \frac{1}{3}\left(R_{likj}(p) + R_{kilj}(p)\right) = -\frac{1}{3}(R_{iklj}(p) + R_{ilkj}(p)),$$

donde en la última igualdad hemos usado que $R_{likj}(p) = -R_{ilkj}(p)$ y $R_{kilj}(p) = -R_{iklj}(p)$.
Por el Teorema 1.4.9 (de Taylor),

$$\begin{aligned}(g_{ij} \circ \varphi^{-1})(x) &= \delta_{ij} + \partial_k g_{ij}(p)x^k + \frac{1}{2}\partial_k \partial_l g_{ij}(p)x^k x^l + R_{2,0,g_{ij}\circ\varphi^{-1}}(x) \\ &= \delta_{ij} - \frac{1}{6}\left(R_{iklj}(p) + R_{ilkj}(p)\right)x^k x^l + R_{2,0,g_{ij}\circ\varphi^{-1}}(x) \\ &= \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{iklj}(p)x^k x^l + R_{2,0,g_{ij}\circ\varphi^{-1}}(x).\end{aligned}$$

En la última igualdad se intercambian los índices mudos $k$ y $l$ en el segundo sumando. □

La curvatura determina, por tanto, la primera desviación de la métrica respecto de la euclidiana en coordenadas normales. En los desarrollos de orden superior intervienen sus derivadas covariantes; véase [106]. Sin embargo, una expansión en cada centro no da por sí sola un radio ni una cota uniforme para sus restos. Para obtener ese control trabajaremos directamente con la ecuación de Jacobi. Las hipótesis que permiten hacerlo son las siguientes.

**Definición 13.1.5.** (Variedades de geometría acotada) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera. Decimos que $M$ es de geometría acotada si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

(a) $\operatorname{inj}(M) > 0$.

(b) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe $C_k > 0$ tal que

$$\sup_{x \in M} |\nabla^k \mathbf{R}(x)|_{\mathbf{g}} \leq C_k.$$

Aquí $\mathbf{R} \in \Gamma(T^{(1,3)}(TM))$ es el tensor de curvatura de la Definición 2.10.1, $\nabla^k \mathbf{R}$ es su $k$-ésima derivada para la conexión tensorial inducida por la conexión de Levi–Civita y $|\cdot|_{\mathbf{g}}$ es la norma puntual inducida por $\mathbf{g}$ y su métrica dual en todos los factores tensoriales.

**Observación 13.1.6.** (Abiertos euclidianos y frontera de la variedad) Un abierto de $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana restringida no es, por ese solo hecho, de geometría acotada. Por ejemplo, sea $M = B_{\text{euc}}(0,1)$, considerado como variedad sin frontera. Su curvatura es cero, pero, si $x \in M$, la exponencial es $\exp_x(v) = x + v$ únicamente mientras el segmento correspondiente permanece en la bola. En consecuencia,

$$\operatorname{inj}(x) = 1 - |x|, \qquad \operatorname{inj}(M) = 0.$$

La geodésica radial que avanza hacia la esfera llega a ella en tiempo finito y no puede prolongarse dentro de $M$. La completitud no figura como una tercera hipótesis en la definición anterior: se deduce del radio de inyectividad positivo por la Observación 13.1.2, y precisamente esa condición falla aquí.
La esfera es la frontera de este abierto como subconjunto euclidiano; no es una frontera incorporada a la variedad $M$. En cambio, $\overline{B}_{\text{euc}}(0,1)$, con su estructura suave de variedad compacta con frontera y la misma métrica euclidiana, pertenece a la teoría con frontera del Capítulo 14. Son dos objetos geométricos distintos.
La métrica también importa: sustituirla por una métrica completa puede cambiar la conclusión de completitud. Por ello, los teoremas de Sobolev y de Rellich para abiertos euclidianos arbitrarios, en particular los argumentos de extensión por cero para $W_0^{m,p}$, no se obtienen simplemente aplicando los teoremas globales de geometría acotada.

Dado que a lo largo de este capítulo trabajaremos con ***coordenadas normales*** (también llamadas ***coordenadas geodésicas***) y con coordenadas en general, introduciremos cierta terminología que nos permitirá referirnos a ellas de manera más clara.

**Definición 13.1.7.** (Atlas geodésico) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera.
Denotaremos por

$$\mathcal{A}^{\text{geo}} = (U_i^{\text{geo}}, \varphi_i^{\text{geo}})_{i \in J}$$

a un atlas formado por cartas de coordenadas normales (véase la Proposición 2.8.9).
Más precisamente, para cada $i \in J$ existe un punto $p_i \in M$, un radio $r_i > 0$ y un isomorfismo lineal

$$B_{p_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{p_i} M,$$

que envía la base canónica de $\mathbb{R}^n$ en una base ortonormal de $T_{p_i}M$, tales que

$$U_i^{\text{geo}} = B_{\mathbf{g}}(p_i, r_i), \qquad \varphi_i^{\text{geo}} = B_{p_i}^{-1} \circ \exp_{p_i}^{-1}.$$

Diremos que $\mathcal{A}^{\mathrm{geo}}$ es un *atlas geodésico uniforme* si existe $r > 0$ tal que $r < \mathrm{inj}(M)$ y

$$U_i^{\mathrm{geo}} = B_{\mathbf{g}}(p_i, r)$$

para todo $i \in J$.

La condición de que las derivadas covariantes de la curvatura están acotadas se puede expresar de otras maneras que junto con la condición de $\mathrm{inj}(M) > 0$ nos dan equivalencias útiles de las variedades de geometría acotada.

**Teorema 13.1.8.** (Caracterizaciones equivalentes de la geometría acotada) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera tal que $\mathrm{inj}(M) > 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $C_k > 0$ tal que
$$|\nabla^k \mathbf{R}|_{\mathbf{g}} \le C_k.$$

(b) Existe $r_0$, con $0 < r_0 < \mathrm{inj}(M)$, tal que la familia completa de cartas normales de radio $r_0$ satisface lo siguiente: para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe $C_{k,r_0} > 0$ tal que, en cada carta, las componentes de $\mathbf{g}$ y de su inversa satisfacen
$$|D^\alpha g_{ij}| \le C_{k,r_0}, \qquad |D^\alpha g^{ij}| \le C_{k,r_0}, \qquad |\alpha| \le k.$$
Por restricción, las mismas estimaciones se cumplen en todo radio $0 < r \le r_0$.

Cuando se satisface cualquiera de estas condiciones, los cambios entre cartas normales de cualquier radio fijo $0 < r \le r_0$ tienen todos sus jets uniformemente acotados: para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe $A_{k,r} > 0$ tal que, si las cartas $i$ y $j$ se traslapan,
$$\left|D^\alpha(\varphi_j^{\mathrm{geo}} \circ (\varphi_i^{\mathrm{geo}})^{-1})(x)\right| \le A_{k,r}, \qquad |\alpha| \le k,$$
en todo el dominio de la transición. La misma afirmación vale con $i$ y $j$ intercambiados.

*Demostración.* Fijemos un radio común

$$0 < \rho < \min\{\mathrm{inj}(M), 1\}.$$

Cuando sea necesario lo reduciremos una sola vez; todas las cartas normales de radio $\rho$ seguirán cubriendo $M$. Para cada $p \in M$, elegimos una isometría lineal $B_p \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$ y escribimos

$$\Psi_p(v) := \exp_p(B_p v).$$

Denotamos por $g_{ij}^{(p)}$ y $g_{(p)}^{ij}$, respectivamente, las componentes de $\Psi_p^*\mathbf{g}$ y de su métrica inversa respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.
Supongamos primero (1). Para $v \in B(0,\rho)$ y $i \in \{1,\dots,n\}$, la variación

$$\alpha_i(s,t) := \exp_p\big(tB_p(v + se_i)\big)$$

produce el campo de Jacobi $\mathbf{J}_i(t) = \partial_s \alpha_i(0,t)$ a lo largo de $\gamma_v(t) = \Psi_p(tv)$. Sus datos iniciales y su ecuación son

$$\mathbf{J}_i(0) = 0, \qquad \frac{D\mathbf{J}_i}{dt}(0) = B_p e_i, \qquad \frac{D^2\mathbf{J}_i}{dt^2} + \mathbf{R}(\mathbf{J}_i, \dot\gamma_v)\dot\gamma_v = 0.$$

Además, $\mathbf{J}_i(1) = d\Psi_p(v)e_i$. Transportemos paralelamente la base $(B_p e_a)_{a=1}^n$ a lo largo de $\gamma_v$. En ese marco la ecuación es un sistema lineal

$$y_i''(t) + \mathcal{R}_{p,v}(t)y_i(t) = 0, \qquad y_i(0) = 0, \qquad y_i'(0) = e_i,$$

y $\|\mathcal{R}_{p,v}(t)\| \le C_0\|v\|^2$. Escribiéndolo como un sistema de primer orden y aplicando el Lema 1.8.19 se obtiene una cota, independiente de $p$ y $v$, para $\|y_i\| + \|y_i'\|$. La forma integral de la ecuación da también

$$\|y_i(t) - te_i\| \le C_0\|v\|^2 \int_0^t (t-\tau)\|y_i(\tau)\|\,d\tau.$$

Reducimos $\rho$, en función sólo de $C_0$ y de $n$, para que el miembro derecho en $t = 1$ sea menor que $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, para todo $i$. Si $\mathbf{Y}(v)$ es la matriz cuyas columnas son $y_i(1)$, entonces

$$\|\mathbf{Y}(v) - I\|_{\mathrm{op}} \le \|\mathbf{Y}(v) - I\|_{\mathrm{HS}} < \frac{1}{2}.$$

Por la serie de Neumann, $\mathbf{Y}(v)$ es invertible y $\|\mathbf{Y}(v)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \le 2$, uniformemente en $p$ y $v$. Puesto que el marco paralelo es ortonormal,

$$g_{ij}^{(p)}(v) = \langle \mathbf{J}_i(1), \mathbf{J}_j(1)\rangle_{\mathbf{g}},$$

lo cual prueba la elipticidad uniforme de la matriz de coeficientes $(g_{ij}^{(p)})$.
Justificamos ahora las derivadas de cualquier orden. Fijemos $m \in \mathbb{N}_0$, vectores $w_0, \dots, w_m \in \{e_1, \dots, e_n\}$ y, para $\boldsymbol{s} = (s_0, \dots, s_m)$ suficientemente pequeño, consideremos la variación multiparamétrica

$$\alpha(\boldsymbol{s}, t) := \exp_p\left(tB_p\left(v + \sum_{a=0}^{m} s_a w_a\right)\right), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} := \alpha^* TM$ y denotemos por $\mathbb{D}$ la conexión en $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ inducida por la conexión de Levi–Civita. Ponemos

$$D_t := \mathbb{D}_{\partial_t}, \qquad D_a := \mathbb{D}_{\partial_{s_a}}, \qquad \mathbf{T} := d\alpha(\partial_t), \qquad \mathbf{A}_a := d\alpha(\partial_{s_a}).$$

Para cada $\boldsymbol{s}$, la curva $t \mapsto \alpha(\boldsymbol{s}, t)$ es geodésica; además, como la conexión de Levi–Civita no tiene torsión,

$$D_t\mathbf{T} = 0, \qquad D_a\mathbf{T} = D_t\mathbf{A}_a.$$

Con la convención $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{Z}$, los conmutadores en el haz pullback son exactamente

$$(D_aD_t - D_tD_a)\mathbf{Z} = \mathbf{R}(\mathbf{A}_a, \mathbf{T})\mathbf{Z}, \qquad (D_aD_b - D_bD_a)\mathbf{Z} = \mathbf{R}(\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_b)\mathbf{Z}.$$

En particular, al derivar $D_t\mathbf{T} = 0$ en la dirección $s_a$ se obtiene, con este signo,

$$D_t^2\mathbf{A}_a + \mathbf{R}(\mathbf{A}_a, \mathbf{T})\mathbf{T} = 0.$$

Haremos la inducción sin permutar derivadas covariantes. Si $I = (a_1, \dots, a_k)$ es una palabra ordenada, escribimos

$$|I| = k, \qquad D_I := D_{a_k} \cdots D_{a_1}, \qquad I^- := (a_1, \dots, a_{k-1}),$$

y ponemos $D_{\varnothing} = \mathrm{id}$. Introduzcamos el operador

$$\mathcal{L}\mathbf{Z} := D_t^2\mathbf{Z} + \mathbf{R}(\mathbf{Z},\mathbf{T})\mathbf{T}, \qquad \mathcal{L}\colon \Gamma(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \longrightarrow \Gamma(\boldsymbol{\mathcal{E}}).$$

Un cálculo directo a partir de los conmutadores anteriores da, para todo $\mathbf{Z} \in \Gamma(\boldsymbol{\mathcal{E}})$,

$$\mathcal{L}(D_a\mathbf{Z}) = D_a(\mathcal{L}\mathbf{Z}) + \mathcal{C}(\mathbf{A}_a,\mathbf{Z}),$$

donde $\mathcal{C}(\mathbf{A},\mathbf{Z}) \in \Gamma(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\mathbf{A},\mathbf{Z}) = {} & -(\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{R})(\mathbf{A},\mathbf{T})\mathbf{Z} - \mathbf{R}(D_t\mathbf{A},\mathbf{T})\mathbf{Z} - 2\mathbf{R}(\mathbf{A},\mathbf{T})D_t\mathbf{Z} \\ & -(\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{R})(\mathbf{Z},\mathbf{T})\mathbf{T} - \mathbf{R}(\mathbf{Z},D_t\mathbf{A})\mathbf{T} - \mathbf{R}(\mathbf{Z},\mathbf{T})D_t\mathbf{A}.\end{aligned}$$

En efecto,

$$D_t^2 D_a\mathbf{Z} = D_a D_t^2\mathbf{Z} - (\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{R})(\mathbf{A}_a,\mathbf{T})\mathbf{Z} - \mathbf{R}(D_t\mathbf{A}_a,\mathbf{T})\mathbf{Z} - 2\mathbf{R}(\mathbf{A}_a,\mathbf{T})D_t\mathbf{Z},$$

y la derivada de $\mathbf{R}(\mathbf{Z},\mathbf{T})\mathbf{T}$, usando $D_a\mathbf{T} = D_t\mathbf{A}_a$, aporta precisamente los tres términos restantes. Esto verifica tanto los signos como los espacios tensoriales: cada sumando de $\mathcal{C}(\mathbf{A},\mathbf{Z})$ es una sección de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.
Para una letra distinguida $b \in \{0,\dots,m\}$, definimos

$$\mathbf{Z}_{I;b} := D_I\mathbf{A}_b \in \Gamma(\boldsymbol{\mathcal{E}}), \qquad \widetilde{\mathbf{Q}}_{\varnothing;b} := 0,$$

y, si $I = (I^-,a)$, definimos recursivamente

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{I;b} := D_a\widetilde{\mathbf{Q}}_{I^-;b} + \mathcal{C}(\mathbf{A}_a,\mathbf{Z}_{I^-;b}) \in \Gamma(\boldsymbol{\mathcal{E}}).$$

Probamos la recurrencia por inducción en $|I|$. Para $I = \varnothing$, la ecuación de Jacobi da

$$\mathcal{L}\mathbf{Z}_{\varnothing;b} = \mathcal{L}\mathbf{A}_b = 0 = \widetilde{\mathbf{Q}}_{\varnothing;b}.$$

Supongamos ahora que $\mathcal{L}\mathbf{Z}_{I^-;b} = \widetilde{\mathbf{Q}}_{I^-;b}$ y escribamos $I = (I^-,a)$. Como $\mathbf{Z}_{I;b} = D_a\mathbf{Z}_{I^-;b}$, la identidad de conmutación anterior da, término a término,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\mathbf{Z}_{I;b} &= \mathcal{L}(D_a\mathbf{Z}_{I^-;b}) \\ &= D_a(\mathcal{L}\mathbf{Z}_{I^-;b}) + \mathcal{C}(\mathbf{A}_a,\mathbf{Z}_{I^-;b}) \\ &= D_a\widetilde{\mathbf{Q}}_{I^-;b} + \mathcal{C}(\mathbf{A}_a,\mathbf{Z}_{I^-;b}) \\ &= \widetilde{\mathbf{Q}}_{I;b}.\end{aligned}$$

Así, por inducción en $|I|$, queda demostrada la identidad

$$\mathcal{L}\mathbf{Z}_{I;b} = \widetilde{\mathbf{Q}}_{I;b}.$$

Esta recurrencia enumera todos los sumandos. Para hacerlo visible, consideremos expresiones formales obtenidas contrayendo, mediante $\mathbf{g}$, factores $\nabla^r\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{Z}_{J;c}$ y $D_t\mathbf{Z}_{J;c}$, dejando un único índice vectorial libre.

Definimos una derivación formal $\mathfrak{d}_a$ por Leibniz sobre productos y contracciones y por las reglas

$$\mathfrak{d}_a \mathbf{T} = D_t \mathbf{A}_a, \qquad \mathfrak{d}_a \mathbf{Z}_{J;c} = \mathbf{Z}_{(J,a);c},$$
$$\mathfrak{d}_a (D_t \mathbf{Z}_{J;c}) = D_t \mathbf{Z}_{(J,a);c} + \mathbf{R}(\mathbf{A}_a, \mathbf{T})\mathbf{Z}_{J;c}, \qquad \mathfrak{d}_a (\nabla^r \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{A}_a}(\nabla^r \mathbf{R}) = (\nabla^{r+1}\mathbf{R})(\mathbf{A}_a, \cdot).$$

En la última regla $\cdot$ representa, en su orden original, los $r$ argumentos de derivación ya presentes; los índices propios de $\mathbf{R}$ permanecen dentro del tensor valor. El argumento nuevo ocupa el primer lugar. Los argumentos tensoriales restantes también se derivan, uno por uno, por Leibniz. No aparecen términos al derivar las contracciones porque $\nabla \mathbf{g} = 0$. Sean $\mathfrak{C}_{a,J;b}$ los seis sumandos, con sus coeficientes, de

$$\begin{aligned} &- (\nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{R})(\mathbf{A}_a, \mathbf{T})\mathbf{Z}_{J;b} - \mathbf{R}(D_t \mathbf{A}_a, \mathbf{T})\mathbf{Z}_{J;b} - 2\mathbf{R}(\mathbf{A}_a, \mathbf{T}) D_t \mathbf{Z}_{J;b} \\ &\quad - (\nabla_{\mathbf{A}_a} \mathbf{R})(\mathbf{Z}_{J;b}, \mathbf{T})\mathbf{T} - \mathbf{R}(\mathbf{Z}_{J;b}, D_t \mathbf{A}_a)\mathbf{T} - \mathbf{R}(\mathbf{Z}_{J;b}, \mathbf{T}) D_t \mathbf{A}_a. \end{aligned}$$

Definimos ahora multiconjuntos finitos de expresiones por

$$\mathfrak{A}_{\varnothing;b} := \varnothing, \qquad \mathfrak{A}_{(J,a);b} := \mathfrak{d}_a \mathfrak{A}_{J;b} \sqcup \mathfrak{C}_{a,J;b},$$

donde $\mathfrak{d}_a \mathfrak{A}_{J;b}$ contiene todos los sumandos producidos al aplicar las reglas anteriores, conservando multiplicidades y coeficientes. Verifiquemos la igualdad resultante. Para $I = \varnothing$, ambos miembros son cero porque $\widetilde{\mathbf{Q}}_{\varnothing;b} = 0$ y $\mathfrak{A}_{\varnothing;b} = \varnothing$. Supongamos que $\widetilde{\mathbf{Q}}_{J;b} = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_{J;b}} \mathfrak{a}$ y sea $I = (J, a)$. La derivación covariante $D_a$ actúa sobre cada producto y cada contracción exactamente según las reglas que definen $\mathfrak{d}_a$. Por ello,

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{I;b} = D_a \widetilde{\mathbf{Q}}_{J;b} + \mathcal{C}(\mathbf{A}_a, \mathbf{Z}_{J;b}) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_{J;b}} \mathfrak{d}_a \mathfrak{a} + \sum_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_{a,J;b}} \mathfrak{c} = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_{(J,a);b}} \mathfrak{a}.$$

Esto prueba por inducción en la longitud de $I$ que

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{I;b} = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_{I;b}} \mathfrak{a}. \tag{13.4}$$

Así, $\mathfrak{A}_{(J,a);b}$ queda determinado por $\mathfrak{A}_{J;b}$ mediante la unión anterior, que conserva el orden de las letras e indexa cada sumando.

La indexación tiene además una graduación exacta. Asignamos peso cero a $\mathbf{T}$ y peso $|J| + 1$ a cada aparición de $\mathbf{Z}_{J;c}$ o $D_t \mathbf{Z}_{J;c}$; en particular, $\mathbf{A}_c = \mathbf{Z}_{\varnothing;c}$ tiene peso uno. Si $|I| = k \geq 1$, cada sumando de (13.4) satisface

$$\sum_{\text{apariciones de } \mathbf{Z}_{J;c} \text{ o } D_t \mathbf{Z}_{J;c}} (|J| + 1) = k + 1. \tag{13.5}$$

Contiene uno o más factores $\nabla^r \mathbf{R}$, con $0 \leq r \leq k$, y en cada factor de campo aparece a lo más una derivada $D_t$. Además, todo campo que figura en la fuente tiene peso a lo más $k$, estrictamente menor que el peso $k + 1$ de la incógnita $\mathbf{Z}_{I;b}$. Comprobemos las cuatro afirmaciones simultáneamente. Si $|I| = 1$, escribimos $I = (a)$. Los seis términos de $\mathfrak{C}_{a,\varnothing;b}$ contienen los campos $\mathbf{A}_a$ y $\mathbf{A}_b$, o una de sus derivadas $D_t$; su peso total es $1 + 1 = 2 = |I| + 1$. Contienen un factor $\mathbf{R}$ o $\nabla \mathbf{R}$, no contienen ninguna segunda derivada temporal y los campos que aparecen tienen peso uno.

Supongamos ahora las afirmaciones para una palabra $J$ de longitud $k - 1$ y sea $I = (J, a)$. En los términos

procedentes de $\mathfrak{d}_a\mathfrak{R}_{J;b}$, Leibniz hace actuar $\mathfrak{d}_a$ sobre un solo factor cada vez. Si actúa sobre $\mathbf{Z}_{L;c}$ o $D_t\mathbf{Z}_{L;c}$, sustituye ese factor por uno de peso exactamente una unidad mayor; el término de curvatura adicional en la regla para $D_t\mathbf{Z}_{L;c}$ introduce además $\mathbf{A}_a$, también de peso uno. Si actúa sobre $\mathbf{T}$, introduce $D_t\mathbf{A}_a$, de peso uno; y si actúa sobre $\nabla^r\mathbf{R}$, eleva el orden de la derivada de curvatura de $r$ a $r+1$ e introduce el argumento $\mathbf{A}_a$. En todos los casos el peso total aumenta exactamente de $k$ a $k+1$, no aparece $D_t^2\mathbf{Z}$ y el orden de curvatura queda a lo más $k$. Por último, los seis términos nuevos de $\mathfrak{C}_{a,J;b}$ tienen peso $1+(|J|+1)=k+1$, orden de curvatura a lo más uno y sólo primeras derivadas temporales. Como el campo de mayor peso en ellos es $\mathbf{Z}_{J;b}$, de peso $k$, toda la fuente contiene únicamente campos de peso menor que $k+1$. Esto completa la inducción.

Al restringir a $\boldsymbol{s}=0$, ponemos

$$\mathbf{Y}_{I;b} := \mathbf{Z}_{I;b}|_{\boldsymbol{s}=0}, \qquad \mathbf{Q}_{I;b} := \widetilde{\mathbf{Q}}_{I;b}|_{\boldsymbol{s}=0} \in \Gamma(\gamma_v^* TM).$$

Por lo tanto,

$$\frac{D^2\mathbf{Y}_{I;b}}{dt^2} + \mathbf{R}(\mathbf{Y}_{I;b}, \dot\gamma_v)\dot\gamma_v = \mathbf{Q}_{I;b}.$$

Todos los datos iniciales son explícitos. Como $\alpha(\boldsymbol{s},0)=p$,

$$\mathbf{A}_b(\boldsymbol{s},0)=0, \qquad D_t\mathbf{A}_b(\boldsymbol{s},0)=B_p w_b;$$

de aquí, y de los mismos conmutadores, se sigue que

$$\begin{aligned} &\mathbf{Y}_{\varnothing;b}(0)=0, \quad \frac{D\mathbf{Y}_{\varnothing;b}}{dt}(0)=B_p w_b,\\ &\mathbf{Y}_{I;b}(0)=0, \quad \frac{D\mathbf{Y}_{I;b}}{dt}(0)=0, \qquad |I|\geq 1. \end{aligned}$$

En efecto, en $t=0$ todas las derivadas puramente paramétricas de $\mathbf{A}_b(\boldsymbol{s},0)=0$ se anulan, y cada término que aparece al conmutar $D_t$ con una palabra no vacía contiene uno de esos campos; además $B_p w_b$ no depende de $\boldsymbol{s}$.

La restricción de (13.4) conserva la graduación (13.5): reemplaza $\mathbf{T}$ por $\dot\gamma_v$, $\mathbf{Z}_{J;c}$ por $\mathbf{Y}_{J;c}$ y $D_t\mathbf{Z}_{J;c}$ por $\frac{D\mathbf{Y}_{J;c}}{dt}$. Como $|\dot\gamma_v|_{\mathbf{g}} = |B_p v|_{\mathbf{g}_p} = \|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq \rho$, la hipótesis sobre $\nabla^r\mathbf{R}$ permite expresar la cota mediante normas $L^\infty$ sobre el intervalo. Para $k\in\mathbb{N}$, sea $\mathcal{W}_{m,k} := \bigcup_{\nu=0}^{k-1}\{0,\dots,m\}^\nu$ el conjunto de palabras de longitud menor que $k$, incluida la palabra vacía. Definimos

$$\mathcal{M}_k := \sum_{J\in\mathcal{W}_{m,k}}\sum_{c=0}^{m}\left(\|\mathbf{Y}_{J;c}\|_{L^\infty([0,1])} + \left\|\frac{D\mathbf{Y}_{J;c}}{dt}\right\|_{L^\infty([0,1])}\right),$$

con las normas puntuales inducidas por $\mathbf{g}$. El conjunto de índices de la suma es finito. Por la graduación ya demostrada, cada factor de campo de $\mathbf{Q}_{I;b}$ tiene peso a lo más $k$ cuando $|I|=k$. Por lo tanto, existen $C_k>0$ y $N_k\in\mathbb{N}$, independientes de $p$, $v$ y de las direcciones coordenadas elegidas, tales que

$$\|\mathbf{Q}_{I;b}\|_{L^\infty([0,1])} \leq C_k(1+\mathcal{M}_k)^{N_k}, \qquad |I|=k.$$

Aquí $C_k$ y $N_k$ dependen únicamente de $n$, $k$, $\rho$, de las cotas $\|\nabla^r \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}}\|_\infty$ para $0\leq r\leq k$ y del número finito de

contracciones producido por la recurrencia $\widetilde{\mathbf{Q}}_{(I^-,a);b} = D_a\widetilde{\mathbf{Q}}_{I^-;b} + \mathcal{C}(\mathbf{A}_a, \mathbf{Z}_{I^-;b})$; en particular, no dependen del centro $p$.

Para establecer las cotas, fijamos $v$ y usamos a lo largo de $\gamma_v$ el marco ortonormal obtenido transportando paralelamente $(B_p e_r)_{r=1}^n$. En este marco la última ecuación tiene la forma

$$y''_{I;b}(t) + \mathcal{R}_{p,v}(t)y_{I;b}(t) = q_{I;b}(t), \qquad \|\mathcal{R}_{p,v}(t)\|_{\mathrm{op},\mathbb{R}^n} \le C_0\rho^2.$$

Equivale al sistema de primer orden

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_{I;b} \\ y'_{I;b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{R}_{p,v}(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{I;b} \\ y'_{I;b}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q_{I;b}\end{pmatrix}.$$

Procedemos por inducción en el peso. Para el peso uno, $I = \varnothing$ y la ecuación es la ecuación homogénea de Jacobi con datos iniciales $y_{\varnothing;b}(0) = 0$ y $y'_{\varnothing;b}(0) = w_b$; la estimación obtenida al principio de la prueba proporciona una constante $B_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \le B_1$.

Supongamos que, para cierto $k \ge 1$, todos los campos de pesos a lo más $k$ satisfacen las cotas correspondientes y, por lo tanto, $\mathcal{M}_k \le B_k$. Si $|I| = k$, la estimación anterior da

$$\|q_{I;b}\|_{L^\infty([0,1])} \le C_k(1 + B_k)^{N_k} =: Q_k.$$

Sea $z_{I;b} = (y_{I;b}, y'_{I;b})$. La matriz del sistema de primer orden tiene norma a lo más $L := 1 + C_0\rho^2$. Como $z_{I;b}(0) = 0$ para $k \ge 1$, la desigualdad integral asociada al sistema es

$$|z_{I;b}(t)| \le L\int_0^t |z_{I;b}(\tau)|\,d\tau + tQ_k.$$

El Lema de Grönwall 1.8.19 implica

$$\|y_{I;b}\|_{L^\infty([0,1])} + \|y'_{I;b}\|_{L^\infty([0,1])} \le 2Q_k e^L.$$

Sólo hay un número finito, dependiente de $k$ y $m$, de palabras $I$ y letras $b$. Sumando estas cotas a las que forman $\mathcal{M}_k$ obtenemos una constante $B_{k+1}$ con $\mathcal{M}_{k+1} \le B_{k+1}$. Esta constante depende únicamente de las cotas geométricas enumeradas arriba y de $B_1, \ldots, B_k$, nunca de $p$, $v$ ni de las letras elegidas. Así queda completa la inducción en el peso.

Resta pasar de estas derivadas covariantes a derivadas ordinarias de las matrices. Para ello, sobre la variación completa, sea $(\mathbf{E}_r(\boldsymbol{s}, t))_{r=1}^n$ el marco determinado por

$$D_t\mathbf{E}_r = 0, \qquad \mathbf{E}_r(\boldsymbol{s}, 0) = B_p e_r.$$

Es suave en $\boldsymbol{s}$ y ortonormal para cada $\boldsymbol{s}$. Si $\mathbf{W}_{I;r} := D_I\mathbf{E}_r$, entonces

$$D_t\mathbf{W}_{\varnothing;r} = 0, \qquad \mathbf{W}_{\varnothing;r}(0) = B_p e_r,$$

y, definiendo $\mathbf{S}_{\varnothing;r} := 0$ y, para $I = (I^-, a)$,

$$\mathbf{S}_{I;r} := D_a\mathbf{S}_{I^-;r} - \mathbf{R}(\mathbf{A}_a, \mathbf{T})\mathbf{W}_{I^-;r},$$

el conmutador ya fijado da exactamente

$$D_t \mathbf{W}_{I;r} = \mathbf{S}_{I;r}, \qquad \mathbf{W}_{I;r}(0) = 0 \quad (|I| \geq 1).$$

Tras desarrollar $D_a \mathbf{S}_{I^-;r}$, su lado derecho sólo contiene curvatura, campos variacionales ya acotados y $\mathbf{W}_{J;r}$ con $|J| < |I|$. Para $I = \varnothing$, $\mathbf{W}_{\varnothing;r} = \mathbf{E}_r$ es paralelo y unitario, de modo que $|\mathbf{W}_{\varnothing;r}|_{\mathbf{g}} = 1$. Si $I = (a)$, entonces

$$\mathbf{S}_{(a);r} = -\mathbf{R}(\mathbf{A}_a, \mathbf{T})\mathbf{E}_r, \qquad \mathbf{W}_{(a);r}(t) = \int_0^t \mathbf{S}_{(a);r}(\tau)\, d\tau,$$

donde la integral se toma después de identificar las fibras mediante el transporte paralelo; las cotas de $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}_a$ y $\mathbf{T}$ acotan uniformemente ambos miembros. Supongamos ahora acotados todos los $\mathbf{W}_{J;r}$ con $|J| < k$ y sea $|I| = k$. La expansión completa de $\mathbf{S}_{I;r}$ mediante Leibniz contiene sólo esos campos de orden menor, derivadas de curvatura de orden a lo más $k-1$ y los campos variacionales ya acotados. Por lo tanto existe $C_k$ tal que $\|\mathbf{S}_{I;r}\|_{L^\infty([0,1])} \leq C_k$. Como $\mathbf{W}_{I;r}(0) = 0$,

$$\mathbf{W}_{I;r}(t) = \int_0^t \mathbf{S}_{I;r}(\tau)\, d\tau, \qquad \|\mathbf{W}_{I;r}\|_{L^\infty([0,1])} \leq C_k.$$

Esto completa la inducción.

Tomemos ahora $w_0 = e_j$. Si

$$y_j^r(v,t) := \langle \mathbf{J}_j(t), \mathbf{E}_r(v,t) \rangle_{\mathbf{g}},$$

las variaciones con $w_1, \dots, w_k$ calculan sus derivadas ordinarias en $v$. Más precisamente, para una palabra ordenada $I = (a_1, \dots, a_k)$ y un subconjunto $S \subseteq \{1, \dots, k\}$, denotemos por $I_S$ la subpalabra que conserva el orden original. La compatibilidad métrica de la conexión y la regla de Leibniz dan la identidad triangular exacta

$$\partial_I y_j^r(v,t) = \sum_{S \subseteq \{1,\dots,k\}} \left\langle \mathbf{Y}_{I_S;0}(t), \mathbf{W}_{I_{S^c};r}(t) \right\rangle_{\mathbf{g}},$$

donde $\partial_I = \partial_{s_{a_k}} \cdots \partial_{s_{a_1}}|_{\mathbf{s}=0}$. El término correspondiente a $S = \{1, \dots, k\}$ es $\langle \mathbf{Y}_{I;0}, \mathbf{E}_r \rangle_{\mathbf{g}}$, y en todos los demás aparecen menos derivadas sobre $\mathbf{A}_0$. Las cotas obtenidas para $\mathbf{Y}_{I;0}$ y $\mathbf{W}_{I;r}$ implican, por lo tanto, cotas uniformes para todas las derivadas ordinarias de $y_j^r(v,t)$.

En $t = 1$, la matriz $\mathbf{Y}(v) = (y_j^r(v,1))_{rj}$ es la matriz de $d\Psi_p(v)$ en el marco paralelo y

$$g_{ij}^{(p)}(v) = \langle \mathbf{J}_i(1), \mathbf{J}_j(1) \rangle_{\mathbf{g}} = \sum_{r=1}^{n} y_i^r(v,1) y_j^r(v,1).$$

La regla de Leibniz escalar proporciona así, para todo multiíndice $\alpha$,

$$\sup_{p \in M} \sup_{v \in B(0,\rho)} |D^\alpha g_{ij}^{(p)}(v)| < \infty.$$

La elipticidad uniforme ya demostrada da una cota uniforme para $g_{(p)}^{ij}$. Para $|\alpha| \geq 1$, derivamos la identidad $\sum_{\ell=1}^{n} g_{(p)}^{i\ell} g_{\ell j}^{(p)} = \delta_j^i$, aislamos el término con $\beta = \alpha$ y multiplicamos por la métrica inversa. Se obtiene,

componente a componente,

$$D^\alpha g^{ik}_{(p)} = -\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\ \beta\le\alpha,\ \beta\neq\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{\ell,j=1}^{n} (D^\beta g^{i\ell}_{(p)})(D^{\alpha-\beta} g^{(p)}_{\ell j}) g^{jk}_{(p)}.$$

La inducción en $|\alpha|$ es ahora directa. Para $|\alpha| = 0$ ya se tiene la cota uniforme de $g^{ij}_{(p)}$. Supongamos acotadas todas las derivadas $D^\beta g^{ij}_{(p)}$ con $|\beta| < k$ y sea $|\alpha| = k$. En cada sumando de la fórmula anterior se cumple $|\beta| < k$ y $1 \le |\alpha - \beta| \le k$; por la hipótesis inductiva, por las cotas ya demostradas para $D^{\alpha-\beta} g^{(p)}_{\ell j}$ y por la cota de $g^{jk}_{(p)}$, cada producto está uniformemente acotado. La suma tiene un número finito de términos que depende sólo de $\alpha$. Por lo tanto $D^\alpha g^{ik}_{(p)}$ también está uniformemente acotada, y la inducción prueba la afirmación para todas las derivadas de las componentes $g^{ij}_{(p)}$.

Hemos probado (2) con $r_0 := \rho$. Para $0 < r \le r_0$, las cotas en las cartas de radio $r$ se obtienen restringiendo las cartas de radio $r_0$.

Probemos ahora la afirmación adicional sobre los cambios de coordenadas. Fijemos $0 < r \le r_0$. En un traslape ponemos $\Phi = \varphi_j^{\mathrm{geo}} \circ (\varphi_i^{\mathrm{geo}})^{-1}$. La identidad tensorial

$$g^{(i)}_{ab} = \sum_{\ell,m=1}^{n} (g^{(j)}_{\ell m} \circ \Phi)(\partial_a \Phi^\ell)(\partial_b \Phi^m)$$

y la elipticidad uniforme acotan $D\Phi$: en efecto, al evaluar la igualdad en un vector $\xi$, la cota inferior para $g^{(j)}$ y la superior para $g^{(i)}$ dan $c|D\Phi\,\xi|^2 \le C|\xi|^2$. Al intercambiar $i$ y $j$ se acota la diferencial de la transición inversa. Los símbolos de Christoffel y todas sus derivadas están uniformemente acotados porque sus componentes son expresiones universales en $g^{ab}_{(i)}$ y en las derivadas de $g^{(i)}_{ab}$. La ley de transformación de la conexión se escribe

$$\partial_a\partial_b \Phi^k = \Gamma^c_{i,ab}\,\partial_c \Phi^k - \Gamma^k_{j,\ell m}(\Phi)\partial_a\Phi^\ell\,\partial_b\Phi^m.$$

Esta igualdad acota $D^2\Phi$. Para el paso inductivo, supongamos que, para cierto $m \ge 2$, todas las derivadas de $\Phi$ de orden a lo más $m$ están uniformemente acotadas y sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| = m-1$. Aplicamos $D^\alpha$ a la identidad anterior. La regla de Leibniz expresa la derivada del primer sumando mediante derivadas de $\Gamma_i$ de orden a lo más $m-1$ y derivadas de $\Phi$ de orden a lo más $m$.

Para el segundo sumando se aplica primero Leibniz a sus tres factores. En el factor compuesto ponemos $A := \Gamma^k_{j,\ell m}$. La fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19, escrita con la misma notación de derivadas parciales que se usa aquí, dice que, para $1 \le |\mu| \le m-1$,

$$D^\mu(A\circ\Phi)(x) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n,\ 1\le|\beta|\le|\mu|\\ \gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_{|\beta|}),\quad |\gamma_\nu|>0\\ \gamma_1+\cdots+\gamma_{|\beta|}=\mu\\ l=(l_1,\dots,l_{|\beta|}),\quad l_\nu\in\{1,\dots,n\}\\ \#\{\nu\mid l_\nu=a\}=\beta_a,\quad 1\le a\le n}} c_{\mu,\beta,\gamma,l}\,(D^\beta A)(\Phi(x))\prod_{\nu=1}^{|\beta|} D^{\gamma_\nu}\Phi^{l_\nu}(x). \tag{13.6}$$

En cada término se tiene $|\beta| \le |\mu| \le m-1$, $\#\{\nu \mid l_\nu = a\} = \beta_a$ para $1 \le a \le n$, y $1 \le |\gamma_\nu| \le |\mu| \le m-1$. Por lo tanto, las derivadas de $A$ están acotadas por las cotas de la métrica y las derivadas de $\Phi$ que aparecen en (13.6) están acotadas por la hipótesis inductiva. Los otros dos factores son primeras derivadas de $\Phi$; después de

aplicar Leibniz aparecen en ellos derivadas de orden a lo más $m$. Todo término del miembro derecho queda así acotado por una constante independiente de las cartas. El miembro izquierdo es $D^{\alpha}\partial_a\partial_b\Phi^k$, de orden $m+1$, y esto completa la inducción: todo multiíndice de longitud $m+1\geq 2$ puede escribirse como $\alpha+e_a+e_b$, permitiendo $a=b$. Al intercambiar $i$ y $j$ se obtiene la misma estimación para la transición inversa.

Resta probar que (2) implica (1). Fijemos $x\in M$ y usemos la carta normal de radio $r_0$ centrada en $x$. La fórmula

$$\Gamma_{ij}^{\ell}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}g^{\ell a}\left(\partial_i g_{ja}+\partial_j g_{ia}-\partial_a g_{ij}\right)$$

da, para cada multiíndice $\alpha$, la identidad exacta

$$\partial^{\alpha}\Gamma_{ij}^{\ell}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\ \beta\leq\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}(\partial^{\beta}g^{\ell a})\left(\partial^{\alpha-\beta+e_i}g_{ja}+\partial^{\alpha-\beta+e_j}g_{ia}-\partial^{\alpha-\beta+e_a}g_{ij}\right).$$

La suma sobre $a$ y $\beta$ es finita y la condición (2) acota uniformemente cada uno de sus factores.

Las componentes de la curvatura satisfacen

$$R^{\ell}{}_{ijk}=\partial_i\Gamma_{jk}^{\ell}-\partial_j\Gamma_{ik}^{\ell}+\sum_{m=1}^{n}\left(\Gamma_{jk}^{m}\Gamma_{im}^{\ell}-\Gamma_{ik}^{m}\Gamma_{jm}^{\ell}\right).$$

De esta fórmula y de Leibniz se obtienen cotas uniformes para todas las derivadas parciales de $R$. Finalmente, la fórmula coordenada de la derivada covariante de un tensor es su derivada parcial más una suma finita de contracciones con símbolos de Christoffel. Procedemos por inducción sobre $q$. Para $q=0$, las componentes de $R$ y todas sus derivadas parciales están uniformemente acotadas por el cálculo anterior. Supongamos que cada componente de $\nabla^q R$ es una suma universal finita de productos formados por derivadas parciales de $R$ y derivadas parciales de los símbolos de Christoffel, todas de orden a lo más $q$. Escribimos el tensor de curvatura como tensor de tipo $(0,4)$, bajando su índice contravariante mediante $\mathbf{g}$. El Lema 9.1.28 da, para $I=(i_1,\dots,i_{q+4})\in\{1,\dots,n\}^{q+4}$ y $a\in\{1,\dots,n\}$,

$$(\nabla_a\nabla^q R)_{i_1\cdots i_{q+4}}=\partial_a(\nabla^q R)_{i_1\cdots i_{q+4}}-\sum_{\nu=1}^{q+4}\sum_{c=1}^{n}\Gamma_{ai_\nu}^{c}(\nabla^q R)_{i_1\cdots i_{\nu-1}ci_{\nu+1}\cdots i_{q+4}}.$$

Al derivar los productos de la hipótesis inductiva, Leibniz eleva en uno el orden de exactamente uno de sus factores; los términos de conexión añaden un factor $\Gamma$ sin elevar los demás órdenes. Así, cada componente de $\nabla^{q+1}R$ tiene la misma forma con órdenes a lo más $q+1$. Todas esas componentes están uniformemente acotadas, y la inducción queda concluida. En el centro de la carta normal se tiene $g_{ij}(x)=\delta_{ij}$; por consiguiente, la norma tensorial de $\nabla^q\mathbf{R}(x)$ está acotada por una constante que no depende de $x$. Como $x$ era arbitrario, se obtiene (1) y concluye la equivalencia. □

Para justificar el cálculo del radio de inyectividad de los modelos de curvatura no positiva que aparecerán enseguida, registramos el resultado global que se necesita.

**Teorema 13.1.9.** (Cartan–Hadamard) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa, conexa y sin frontera

cuya curvatura seccional sea no positiva. Para todo $p \in M$, el mapeo exponencial

$$\exp_p \colon T_pM \longrightarrow M$$

es un mapeo cubriente. Si, además, $M$ es simplemente conexa, $\exp_p$ es un difeomorfismo global y $\operatorname{inj}(p) = +\infty$.

*Demostración.* Sea $\gamma$ una geodésica que parte de $p$ y sea $\mathbf{J}$ un campo de Jacobi perpendicular a $\dot\gamma$, con $\mathbf{J}(0) = 0$. La ecuación de Jacobi y la hipótesis sobre la curvatura dan

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{J}(t)\|_{\mathbf{g}}^2 = \left\|\frac{D\mathbf{J}}{dt}(t)\right\|_{\mathbf{g}}^2 - \langle \mathbf{R}(\mathbf{J},\dot\gamma)\dot\gamma,\mathbf{J}\rangle_{\mathbf{g}} \geq 0.$$

Si $\mathbf{J}$ se anulara otra vez, la función convexa y no negativa $\|\mathbf{J}\|_{\mathbf{g}}^2$ se anularía entre ambos extremos; la unicidad para la ecuación de Jacobi implicaría $\mathbf{J} \equiv 0$. No hay, por lo tanto, puntos conjugados y $d\exp_p(v)$ es invertible para todo $v \in T_pM$; así, $\exp_p$ es un difeomorfismo local.

Para precisar la estimación diferencial, descomponemos el dato inicial de un campo de Jacobi con $\mathbf{J}(0) = 0$ en sus partes paralela y perpendicular a $\dot\gamma(0)$. Si $P_t$ denota el transporte paralelo a lo largo de $\gamma$, la parte paralela es exactamente $\mathbf{J}_{\parallel}(t) = tP_t(D_t\mathbf{J}(0)_{\parallel})$. Para la parte perpendicular, en los puntos donde $f(t) := \|\mathbf{J}(t)\|_{\mathbf{g}}$ no se anula, la ecuación de Jacobi da

$$f''(t) = \frac{\|D_t\mathbf{J}\|_{\mathbf{g}}^2 f(t)^2 - \langle D_t\mathbf{J},\mathbf{J}\rangle_{\mathbf{g}}^2 - \langle \mathbf{R}(\mathbf{J},\dot\gamma)\dot\gamma,\mathbf{J}\rangle_{\mathbf{g}} f(t)^2}{f(t)^3} \geq 0.$$

Aquí se usaron Cauchy–Schwarz y la curvatura seccional no positiva. Como $f(0) = 0$ y $f'(0^+) = \|D_t\mathbf{J}(0)\|_{\mathbf{g}}$, la convexidad implica $f(t) \geq t\|D_t\mathbf{J}(0)\|_{\mathbf{g}}$. Las partes paralela y perpendicular siguen siendo ortogonales. Evaluando en $t = 1$ obtenemos

$$\|d\exp_p(v)w\|_{\mathbf{g}} \geq \|w\|_{\mathbf{g}_p}, \qquad v, w \in T_pM.$$

En consecuencia, la métrica $\exp_p^*\mathbf{g}$ domina la métrica euclidiana de $T_pM$ y es completa: una sucesión de Cauchy para $\exp_p^*\mathbf{g}$ es de Cauchy en $T_pM$. Si $v$ es su límite, la continuidad y la positividad de $\exp_p^*\mathbf{g}$ proporcionan una vecindad $V$ de $v$ y constantes $c_v, C_v > 0$ tales que

$$c_v\|w\|_{\mathbf{g}_p}^2 \leq (\exp_p^*\mathbf{g})_z(w,w) \leq C_v\|w\|_{\mathbf{g}_p}^2, \qquad z \in V, \quad w \in T_pM.$$

La sucesión converge entonces también para la distancia de $\exp_p^*\mathbf{g}$.

La exponencial es sobreyectiva por Hopf–Rinow (Teorema 2.9.9). Registramos el paso de isometría local a mapeo cubriente. Sea $y \in M$ y elijamos $\varepsilon > 0$ de modo que $\exp_y$ sea un difeomorfismo en la bola de radio $\varepsilon$. Para cada $x \in \exp_p^{-1}(y)$, la completitud de $(T_pM, \exp_p^*\mathbf{g})$ permite definir

$$s_x(\exp_y v) := \exp_x^{\exp_p^*\mathbf{g}}\big((d\exp_p)_x^{-1}v\big), \qquad |v|_{\mathbf{g}_y} < \varepsilon.$$

Una isometría local lleva geodésicas en geodésicas y conserva sus datos iniciales; la unicidad geodésica prueba $\exp_p \circ s_x = \mathrm{id}_{B_{\mathbf{g}}(y,\varepsilon)}$. Las imágenes de $s_x$ son disjuntas: si dos de ellas contuvieran un mismo punto, los levantamientos de la geodésica radial inversa, con el mismo dato inicial determinado por $d\exp_p$,

coincidirían y tendrían el mismo extremo sobre $y$. Finalmente, si $q \in \exp_p^{-1}(B_{\mathbf{g}}(y,\varepsilon))$, levantamos desde $q$ la geodésica radial que termina en $y$; la completitud prolonga el levantamiento hasta su extremo $x \in \exp_p^{-1}(y)$, y la geodésica inversa muestra que $q = s_x(\exp_p(q))$. Por lo tanto,

$$\exp_p^{-1}(B_{\mathbf{g}}(y,\varepsilon)) = \coprod_{x \in \exp_p^{-1}(y)} s_x(B_{\mathbf{g}}(y,\varepsilon)),$$

y cada sumando se proyecta difeomórficamente sobre la bola. Esto prueba que $\exp_p$ es un mapeo cubriente. Como el espacio vectorial finito–dimensional $T_pM$ es simplemente conexo, se trata del espacio cubriente universal; si $M$ también es simplemente conexa, sólo tiene una hoja. La última afirmación se sigue de la Definición 13.1.1. □

**Ejemplo 13.1.10.** Presentamos algunos ejemplos fundamentales de variedades riemannianas suaves sin frontera y de geometría acotada, verificando explícitamente las condiciones de la Definición 13.1.5.

(a) El espacio euclidiano $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbf{g}})$ es de geometría acotada.

Trabajamos en las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^n$. En estas coordenadas se tiene $\overline{g}_{ij} = \delta_{ij}$, por lo que $\partial_k \overline{g}_{ij} = 0$ para cualesquiera $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$.

Por el Corolario 2.4.11, se deduce que los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi–Civita satisfacen $\Gamma_{ij}^k = 0$ para cualesquiera $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$.

Sustituyendo en la Proposición 2.10.3, obtenemos $R_{ijk}{}^l = 0$ para cualesquiera $i,j,k,l \in \{1,\dots,n\}$, y en consecuencia $\mathbf{R} = 0$. Por lo tanto, $\nabla^m \mathbf{R} = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}_0$.

Estudiemos ahora el mapeo exponencial. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $v \in T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. En coordenadas canónicas, la ecuación geodésica es $\dfrac{d^2x^k}{dt^2}(t) = 0$, $k \in \{1,\dots,n\}$, pues $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Integrando dos veces, se obtiene que toda solución es de la forma $x(t) = a + tb$, con $a,b \in \mathbb{R}^n$. Imponiendo las condiciones iniciales $x(0) = p$, $\dfrac{dx}{dt}(0) = v$, se deduce que $a = p$ y $b = v$, por lo que la geodésica con datos iniciales $(p,v)$ está dada por $\gamma_v(t) = p + tv$.

Por definición del mapeo exponencial, $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, y por lo tanto $\exp_p(v) = p + v$.

En particular, el mapeo exponencial $\exp_p\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo global, con inversa dada por $q \mapsto q - p$. En consecuencia, $\operatorname{inj}(p) = +\infty$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$, y por lo tanto $\operatorname{inj}(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

Concluimos que $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbf{g}})$ es de geometría acotada.

(b) Consideremos el semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

provisto de la métrica riemanniana

$$\mathbf{g} = \frac{(\mathbf{d}x)^2 + (\mathbf{d}y)^2}{y^2}.$$

Trabajamos en las coordenadas globales inducidas por la inclusión $\mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, es decir, $(x^1,x^2) = (x,y)$. Denotamos por $\partial_i := \partial/\partial x^i$ los campos coordenados.

Los coeficientes de la métrica y de su inversa están dados por $g_{ij} = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}$ y $g^{ij} = y^2\delta_{ij}$. En particular, $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$ y $g_{12} = g_{21} = 0$.

Como $g_{ij}$ depende únicamente de la variable $y = x^2$, se tiene $\partial_1 g_{ij} = 0$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2\}$, mientras que $\partial_2 g_{11} = \partial_2 g_{22} = -\frac{2}{y^3}$ y $\partial_2 g_{12} = \partial_2 g_{21} = 0$.

Usando el Corolario 2.4.11, obtenemos

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell}\left(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}\right).$$

Calculemos primero los símbolos con superíndice 1. Como $g^{11} = y^2$ y $g^{12} = 0$, se tiene

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{1\ell}\left(\partial_1 g_{1\ell} + \partial_1 g_{1\ell} - \partial_\ell g_{11}\right) = 0.$$

Además,

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{1\ell}\left(\partial_1 g_{2\ell} + \partial_2 g_{1\ell} - \partial_\ell g_{12}\right) = \frac{1}{2} g^{11}\partial_2 g_{11} = \frac{1}{2} y^2\left(-\frac{2}{y^3}\right) = -\frac{1}{y}.$$

Por simetría de la conexión de Levi–Civita, $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y}$. Finalmente,

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{1\ell}\left(\partial_2 g_{2\ell} + \partial_2 g_{2\ell} - \partial_\ell g_{22}\right) = 0.$$

Calculemos ahora los símbolos con superíndice 2. Como $g^{22} = y^2$ y $g^{21} = 0$, se obtiene

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{2\ell}\left(\partial_1 g_{1\ell} + \partial_1 g_{1\ell} - \partial_\ell g_{11}\right) = -\frac{1}{2} g^{22}\partial_2 g_{11} = -\frac{1}{2} y^2\left(-\frac{2}{y^3}\right) = \frac{1}{y}.$$

Asimismo,

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{2\ell}\left(\partial_1 g_{2\ell} + \partial_2 g_{1\ell} - \partial_\ell g_{12}\right) = 0,$$

y por simetría $\Gamma_{21}^2 = 0$. Por último,

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{2\ell}\left(\partial_2 g_{2\ell} + \partial_2 g_{2\ell} - \partial_\ell g_{22}\right) = \frac{1}{2} g^{22}\partial_2 g_{22} = \frac{1}{2} y^2\left(-\frac{2}{y^3}\right) = -\frac{1}{y}.$$

En resumen,

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \qquad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y}, \qquad \Gamma_{22}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \qquad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \qquad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}.$$

Calculamos ahora el tensor de curvatura usando la Proposición 2.10.3:

$$R_{ijk}{}^{\ell} = \partial_i \Gamma_{jk}^{\ell} - \partial_j \Gamma_{ik}^{\ell} + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^{\ell} - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^{\ell}.$$

Consideremos el componente $R_{122}{}^1$. Se tiene

$$\partial_1\Gamma^1_{22} = 0, \qquad \partial_2\Gamma^1_{12} = \partial_2\left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2}.$$

Además,

$$\Gamma^m_{22}\Gamma^1_{1m} = \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} = 0 + \left(-\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2},$$

y

$$\Gamma^m_{12}\Gamma^1_{2m} = \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} = \left(-\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y}\right) + 0 = \frac{1}{y^2}.$$

Por lo tanto,

$$R_{122}{}^1 = 0 - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

Bajando índices, obtenemos

$$R_{1221} = g_{1\ell}R_{122}{}^\ell = g_{11}R_{122}{}^1 = \frac{1}{y^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^4}.$$

Calculamos ahora la curvatura seccional del plano generado por $\partial_1$ y $\partial_2$. Por definición,

$$K(\partial_1,\partial_2) = \frac{\langle \mathbf{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_2,\partial_1\rangle}{\langle\partial_1,\partial_1\rangle\langle\partial_2,\partial_2\rangle - \langle\partial_1,\partial_2\rangle^2}.$$

El denominador es

$$\langle\partial_1,\partial_1\rangle\langle\partial_2,\partial_2\rangle - \langle\partial_1,\partial_2\rangle^2 = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = \frac{1}{y^4},$$

mientras que el numerador es

$$\langle \mathbf{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_2,\partial_1\rangle = R_{1221} = -\frac{1}{y^4}.$$

En consecuencia,

$$K(\partial_1,\partial_2) = \frac{-\frac{1}{y^4}}{\frac{1}{y^4}} = -1.$$

Hemos probado que la curvatura seccional es constante e igual a $-1$. Por el Teorema 2.10.12, se sigue que

$$\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} = -\big(\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\mathbf{X} - \mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\mathbf{Y}\big).$$

Verifiquemos ahora que $\nabla\mathbf{R} = 0$. Por definición de la derivada covariante de un tensor de tipo $(1,3)$,

$$(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{R})(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{W}}\big(\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}\big) - \mathbf{R}(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} - \mathbf{R}(\mathbf{X},\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Y})\mathbf{Z} - \mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Z}.$$

Sustituyendo la expresión anterior de $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}$, obtenemos

$$\nabla_{\mathbf{W}}\big(\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}\big) = -\nabla_{\mathbf{W}}\big(\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\mathbf{X} - \mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\mathbf{Y}\big).$$

Aplicando la regla de Leibniz para la conexión, se tiene

$$\nabla_{\mathbf{W}}\big(\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\mathbf{X}\big) = \mathbf{W}\big(\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\big)\mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{X},$$

$$\nabla_{\mathbf{W}}\big(\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\mathbf{Y}\big) = \mathbf{W}\big(\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)\mathbf{Y} + \mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Y}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla_{\mathbf{W}}\big(\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}\big) = -\Big(\mathbf{W}(\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z}))\mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{X} - \mathbf{W}(\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Z}))\mathbf{Y} - \mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Y}\Big).$$

Usando ahora la compatibilidad de la conexión de Levi–Civita con la métrica,

$$\mathbf{W}(\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y},\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Z}), \qquad \mathbf{W}(\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Z})) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{X},\mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{X},\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Z}),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{W}}\big(\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}\big) = -\Big(&\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Y},\mathbf{Z})\mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{Y},\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Z})\mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{X}\\ &-\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{X},\mathbf{Z})\mathbf{Y} - \mathbf{g}(\mathbf{X},\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Z})\mathbf{Y} - \mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Y}\Big).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} &= -\big(\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{X} - \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{X},\mathbf{Z})\mathbf{Y}\big),\\ \mathbf{R}(\mathbf{X},\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Y})\mathbf{Z} &= -\big(\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Y},\mathbf{Z})\mathbf{X} - \mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Y}\big),\\ \mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Z} &= -\big(\mathbf{g}(\mathbf{Y},\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Z})\mathbf{X} - \mathbf{g}(\mathbf{X},\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Z})\mathbf{Y}\big).\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la definición de $(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{R})(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}$, se observa que cada término coloreado en $\nabla_{\mathbf{W}}\big(\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}\big)$ se cancela exactamente con el término del mismo color proveniente de uno de los otros tres sumandos. Por lo tanto,

$$(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{R})(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z} = 0$$

para cualesquiera campos vectoriales $\mathbf{W},\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}$. En consecuencia,

$$\nabla^{k}\mathbf{R} = 0$$

para todo $k \geq 1$.

Probemos también las hipótesis globales que utilizaremos. Si $c(t) = (x(t), y(t))$ es una curva de clase $C^1$ a trozos en $\mathbb{H}^2$, entonces

$$L_{\mathbf{g}}(c) = \int \frac{\sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}}{y(t)}\,dt \geq \int \frac{|y'(t)|}{y(t)}\,dt \geq \big|\log y(b) - \log y(a)\big|.$$

Sea $q_j = (x_j, y_j)$ una sucesión de Cauchy para la distancia riemanniana. La desigualdad anterior muestra que $(\log y_j)$ es de Cauchy; en particular, para $j$ grande, $a \leq y_j \leq b$ con ciertas constantes $0 < a < b < \infty$. Dados dos índices grandes, elegimos una curva entre $q_j$ y $q_k$ cuya longitud sea menor que $2d_{\mathbf{g}}(q_j, q_k)$. Si esta longitud es menor que 1, la desigualdad ya probada, aplicada a cada subarco,

muestra que la coordenada $y$ de toda la curva es a lo más $eb$. Por consiguiente,

$$\|x_j - x_k\| \le eb\, L_{\mathbf{g}}(c) \le 2eb\, d_{\mathbf{g}}(q_j, q_k).$$

Así, $(x_j)$ también es de Cauchy y $q_j$ converge en el semiplano superior. Sea $q = (x, y)$ el límite euclidiano. Para $j$ grande, el segmento recto de $q_j$ a $q$ está contenido en una región donde la segunda coordenada es al menos $\frac{a}{2}$. En esa región, para todo vector $v$, $|v|_{\mathbf{g}} \le 2a^{-1}|v|$; por consiguiente, $d_{\mathbf{g}}(q_j, q) \le 2a^{-1}|q_j - q| \to 0$. Esto prueba la completitud. El semiplano superior es convexo y, por lo tanto, simplemente conexo.

El Teorema de Cartan–Hadamard 13.1.9 se aplica ahora: para todo $p \in \mathbb{H}^2$ el mapeo exponencial

$$\exp_p \colon T_p\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$$

es un difeomorfismo global. En particular,

$$\operatorname{inj}(p) = +\infty$$

para todo $p \in \mathbb{H}^2$, y por lo tanto

$$\operatorname{inj}(\mathbb{H}^2) = +\infty.$$

Concluimos que $(\mathbb{H}^2, \mathbf{g})$ es de geometría acotada.

(c) La esfera unitaria $(S^n, \mathbf{g}_{\mathrm{can}})$ es de geometría acotada. Su curvatura seccional es constante e igual a 1, de modo que el Teorema 2.10.12 da

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\mathbf{X} - \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})\mathbf{Y}.$$

La compatibilidad $\nabla \mathbf{g} = 0$ implica, mediante la misma regla de Leibniz utilizada en el ejemplo hiperbólico, que $\nabla \mathbf{R} = 0$ y, por lo tanto, $\nabla^k \mathbf{R} = 0$ para todo $k \ge 1$.

Resta calcular el radio de inyectividad, pues aquí no se puede aplicar Cartan–Hadamard. Para $p \in S^n$ y $v \in T_pS^n \setminus \{0\}$, la geodésica de datos iniciales $(p, v)$ es

$$\gamma_v(t) = \cos\bigl(t|v|_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p}\bigr)p + \sin\bigl(t|v|_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p}\bigr)\frac{v}{|v|_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p}};$$

esta fórmula se verifica derivando dos veces y observando que $\gamma_v''(t) = -|v|^2_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p}\gamma_v(t)$, cuya aceleración es normal a la esfera. En consecuencia,

$$\exp_p(v) = \cos\bigl(|v|_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p}\bigr)p + \sin\bigl(|v|_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p}\bigr)\frac{v}{|v|_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p}}.$$

Si $|v|_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p} < \pi$, el producto escalar euclidiano con $p$ determina $|v|_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p} = \arccos\langle p, \exp_p(v)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$, y después la componente ortogonal determina $\frac{v}{|v|_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p}}$. Por ello, $\exp_p$ es inyectiva en $B_{\mathbf{g}_{\mathrm{can}},p}(0, \pi)$. Comprobemos también que es un difeomorfismo local en esa bola. Si $v = re$, con $0 < r < \pi$ y $|e| = 1$, escribimos

$w = be + w_\perp$, con $w_\perp \perp e$. Al derivar la fórmula explícita obtenemos

$$d\exp_p(v)w = b(-\sin r\, p + \cos r\, e) + \frac{\sin r}{r} w_\perp, \qquad |d\exp_p(v)w|^2 = b^2 + \left(\frac{\sin r}{r}\right)^2 |w_\perp|^2.$$

Los dos sumandos vectoriales son ortogonales, y $\sin r/r > 0$. La diferencial es, por tanto, invertible; en $v = 0$ es la identidad. La inyectividad y el teorema de la función inversa prueban que $\exp_p$ es un difeomorfismo sobre su imagen en la bola indicada. En cambio, todos los vectores de norma $\mathbf{g}_{\mathrm{can},p}$ igual a $\pi$ se envían al punto antípoda $-p$. Se concluye que

$$\mathrm{inj}(p) = \pi, \qquad \mathrm{inj}(S^n) = \pi.$$

En particular, la esfera también satisface las dos condiciones de la Definición 13.1.5.

Obsérvese, en general, que una variedad riemanniana de curvatura seccional constante tiene el tensor de curvatura expresado algebraicamente en términos de la métrica y, por lo tanto, $\nabla\mathbf{R} = 0$. Los modelos $\mathbb{R}^n$, $S^n$ y $\mathbb{H}^n$ tienen así todas las derivadas de la curvatura acotadas. Sus radios de inyectividad son, respectivamente, $+\infty$, $\pi$ y $+\infty$ para las normalizaciones usadas aquí.

Las variedades riemannianas compactas resultan ser variedades de geometría acotada, lo cual nos proporciona varios ejemplos de estas variedades.

**Teorema 13.1.11.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta sin frontera. Entonces $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada.

*Demostración.* Las componentes conexas de una variedad son abiertas y forman una cubierta de $M$. La compacidad proporciona una subcubierta finita, de modo que sólo hay un número finito de componentes. Escribimos

$$M = \bigsqcup_{j=1}^{N} M_j,$$

donde cada $M_j$ es una componente conexa de $M$. Como las componentes conexas son cerradas en cualquier espacio topológico, cada $M_j$ es cerrada en $M$, y por lo tanto compacta.
En consecuencia, cada variedad riemanniana $(M_j, \mathbf{g}\restriction_{M_j})$ es compacta, y por lo tanto completa. Para cada $j \in \{1, \dots, N\}$, la Proposición 2.13.15 implica que la función

$$\mathrm{inj}\colon M_j \longrightarrow (0, \infty]$$

es continua (Note que $\mathrm{inj}_M(p) = \mathrm{inj}_{M_j}(p)\ \forall p \in M_j$, pues $M_j$ es una componente conexa de $M$ y las geodésicas de una variedad pertenecen a una sola componente conexa, por ello sólo lo denotamos como $\mathrm{inj}(p)$.). Como además $\mathrm{inj}(p) > 0$ para todo $p \in M_j$, existe $p_j \in M_j$ tal que

$$\mathrm{inj}(p_j) = \min_{p \in M_j} \mathrm{inj}(p) > 0.$$

Definimos

$$c := \min_{j \in \{1,\dots,N\}} \mathrm{inj}(p_j) > 0.$$

Entonces $\operatorname{inj}(p) \geq c$ para todo $p \in M$, y por consiguiente $\operatorname{inj}(M) > 0$. Por otra parte, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, el tensor $\nabla^k R$ es suave en $M$, por lo que la función

$$p \longmapsto |\nabla^k R(p)|_{\mathbf{g}}$$

es continua. Como $M$ es compacta, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $C_k > 0$ tal que $|\nabla^k R|_{\mathbf{g}} \leq C_k$. Por lo tanto $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada. □

Una norma localizada depende de tres elecciones: las cartas, sus dominios y las funciones de corte. Conviene reunirlas en un solo objeto para poder comparar dos construcciones sin perder de vista ninguna de ellas.

**Definición 13.1.12.** (Trivialización) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera. Decimos que $\mathcal{T} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i \in J}$ es una *trivialización* de $M$ si $(U_i, \varphi_i)_{i \in J}$ es un atlas de $M$ y $(h_i)_{i \in J}$ es una partición de la unidad subordinada a la cubierta abierta $(U_i)_{i \in J}$.

En una cubierta infinita, la finitud local por sí sola no permite sumar estimaciones con una misma constante. Necesitamos una cota uniforme para el número de cartas que pueden intervenir en cada traslape.

**Definición 13.1.13.** Si $X$ es un espacio topológico y $(U_i)_{i \in J}$ es una cubierta abierta de $X$, decimos que es uniformemente localmente finita si existe $L > 0$ tal que para cada $i \in J$,

$$\#\{j \in J \mid U_j \cap U_i \neq \varnothing\} \leq L.$$

Diremos que una trivialización es *uniformemente localmente finita* si su cubierta subyacente tiene esta propiedad.

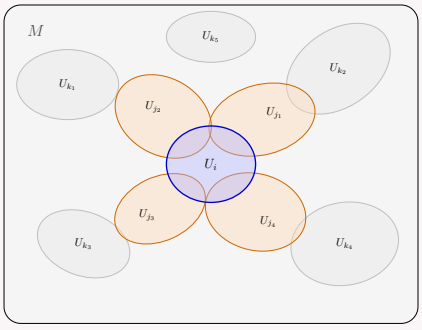



**Figura 13.2.** Cubierta uniformemente localmente finita. Para cualquier abierto $U_i$ de la cubierta, representado en azul, el número de abiertos de la cubierta que lo intersectan, representados en naranja, está acotado por una constante $L$ independiente de $i$.

**Definición 13.1.14.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada. Si $\mathcal{T} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i \in I}$ es una trivialización uniformemente localmente finita de $M$, decimos que $\mathcal{T}$ es *admisible* si se cumplen las siguientes condiciones:

(B1) Sea $r_0 > 0$ un radio para el cual se cumple la condición (2) del Teorema 13.1.8. Existe un atlas geodésico

uniforme

$$\mathcal{A} = (U_j^{\mathrm{geo}}, \varphi_j^{\mathrm{geo}})_{j\in J}$$

de radio común $0 < r \le \frac{r_0}{10}$, con centros $p_j$, para el cual las bolas $B_{\mathbf{g}}(p_j, \frac{r}{4})$ son disjuntas dos a dos y las bolas $B_{\mathbf{g}}(p_j, \frac{r}{2})$ cubren $M$. Además, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{i\in I} \#\{j \in J \mid U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}} \neq \varnothing\} \le N$$

y

$$\sup_{j\in J} \#\{i \in I \mid U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}} \neq \varnothing\} \le N.$$

Finalmente, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $C_k > 0$ con la propiedad siguiente: si $U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}} \neq \varnothing$ y $|\alpha| \le k$, entonces

$$\sup_{x\in\varphi_j^{\mathrm{geo}}(U_i\cap U_j^{\mathrm{geo}})} \left| D^\alpha \left(\varphi_i \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}\right)(x)\right| \le C_k,$$

y

$$\sup_{y\in\varphi_i(U_i\cap U_j^{\mathrm{geo}})} \left| D^\alpha \left(\varphi_j^{\mathrm{geo}} \circ \varphi_i^{-1}\right)(y)\right| \le C_k.$$

(B2) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe $c_k > 0$ tal que para toda $i \in I$ y todo multiíndice $|\alpha| \le k$, se tiene

$$\sup_{x\in\varphi_i(U_i)} \left| D^\alpha (h_i \circ \varphi_i^{-1})(x)\right| \le c_k.$$

(B3) Para cada $i \in I$ existe una función $\chi_i \in C_c^\infty(U_i)$ tal que

$$0 \le \chi_i \le 1, \qquad \chi_i = 1 \quad \text{en una vecindad de } \operatorname{supp}(h_i),$$

y, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $d_k > 0$, independiente de $i$, para el cual

$$\sup_{x\in\varphi_i(U_i)} \left| D^\alpha (\chi_i \circ \varphi_i^{-1})(x)\right| \le d_k, \qquad |\alpha| \le k.$$

Las funciones $\chi_i$ del inciso (B3) se llamarán *funciones de corte auxiliares* de la trivialización. Su presencia permite tomar la extensión por cero de una expresión localizada, que se denotará mediante una tilde, antes de aplicar un cambio de coordenadas. La condición no es redundante: las cotas de las derivadas de $h_i$ no proporcionan por sí solas una separación uniforme entre $\operatorname{supp}(h_i)$ y el borde de $U_i$.

**Lema 13.1.15.** (Margen uniforme de las funciones de corte) Las funciones auxiliares de (B3) pueden elegirse de modo que exista $\delta > 0$, independiente de $i \in I$, con

$$\operatorname{dist}_{\mathbb{R}^n}\left(\varphi_i(\operatorname{supp}\chi_i), \mathbb{R}^n \setminus \varphi_i(U_i)\right) \ge \delta.$$

Las nuevas funciones siguen siendo iguales a uno en una vecindad de $\operatorname{supp} h_i$ y conservan cotas uniformes de todas sus derivadas.

*Demostración.* Denotemos temporalmente por $\chi_i^0$ las funciones de (B3). Su representación coordenada, prolongada por cero, es suave en $\mathbb{R}^n$. La cota de sus primeras derivadas da una constante $D > 0$ tal que

$$\left\| \widetilde{D\chi_i^0 \circ \varphi_i^{-1}} \right\|_\infty \le D, \qquad i \in I.$$

Elegimos $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $0 \le \vartheta \le 1$, $\vartheta = 0$ en $(-\infty, 1/4]$ y $\vartheta = 1$ en $[1/2, \infty)$, y ponemos $\chi_i = \vartheta \circ \chi_i^0$. Si $x \in \varphi_i(\operatorname{supp} \chi_i)$, entonces $(\chi_i^0 \circ \varphi_i^{-1})(x) \ge 1/4$. Para $y \in \mathbb{R}^n \setminus \varphi_i(U_i)$ la prolongación vale cero. El teorema del valor medio sobre el segmento euclidiano de $x$ a $y$ implica $1/4 \le D|x - y|$. Tomando el ínfimo en esos $y$ obtenemos el margen $\delta = (4D)^{-1}$. La fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19, aplicada a la función fija $\vartheta$, proporciona las cotas de orden superior. Como $\chi_i^0 = 1$ cerca de $\operatorname{supp} h_i$, la nueva función también vale uno allí. □

En lo sucesivo elegimos las funciones auxiliares con este margen. Así, las constantes de una extensión por cero o de un cambio de coordenadas localizado incluyen una distancia positiva común al borde artificial de las cartas.

**Definición 13.1.16.** (Sistema cuadrático de localización) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada. Un *sistema cuadrático de localización* es una familia

$$\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i \in I}$$

tal que $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ es un atlas uniformemente localmente finito, $h_i \in C_c^\infty(U_i)$, $0 \le h_i \le 1$, y

$$\sum_{i \in I} h_i^2 = 1 \qquad \text{en } M.$$

Diremos que $\mathcal{Q}$ es *admisible* si el atlas satisface la condición (B1), las funciones $h_i$ satisfacen las estimaciones de (B2), con $h_i$ en lugar de las funciones de la partición, y existe una familia de funciones de corte auxiliares como en (B3), iguales a uno en una vecindad de $\operatorname{supp}(h_i)$.

**Observación 13.1.17.** Si $\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i \in I}$ es un sistema cuadrático de localización admisible y $\rho_i := h_i^2$, entonces $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$ y

$$\mathcal{T}_{\mathcal{Q}} := (U_i, \varphi_i, \rho_i)_{i \in I}$$

es una trivialización admisible. En efecto, la regla de Leibniz convierte las cotas uniformes de las derivadas de $h_i$ en las cotas correspondientes para $h_i^2$, y las mismas funciones de corte auxiliares sirven para ambas familias. Esta observación distingue el sistema cuadrático usado en las fórmulas de análisis y síntesis de la partición de la unidad genuina.

**Observación 13.1.18.** (Sentido y uso de la localización cuadrática) Una partición cuadrática no es una segunda definición de los espacios de funciones. Su utilidad consiste en que el mismo factor $h_i$ interviene en los operadores de análisis y de síntesis. El análisis envía $u$ a la familia

$$\left( \widetilde{(h_i u) \circ \varphi_i^{-1}} \right)_{i \in I}.$$

Para la síntesis, cada componente se multiplica primero por una función de corte cuyo soporte es compacto

en la imagen de la carta, se reconstruye en $U_i$, se extiende por cero a $M$ y se multiplica por $h_i$. La definición distribucional exacta se dará en la Proposición 13.3.11. La identidad $\sum_{i\in I} h_i^2 = 1$ hace que la composición de ambos operadores sea exactamente la identidad antes de comparar normas. Ésta es la convención empleada por Amann: el sistema de cortes aparece en [6, Lema 3.6], los dos operadores en las fórmulas (4.5)–(4.6) y la propiedad de retracción–corretracción en el Teorema 4.2 de esa referencia.

Las definiciones locales de los espacios que se dan más adelante utilizan, en cambio, una partición ordinaria $(\rho_i)$, como en [72, 130]. El Lema 13.3.10 prueba que, cuando $\rho_i = h_i^2$, ambas localizaciones satisfacen las desigualdades explícitas con constantes positivas $c_H, C_H, c_F, C_F$ de ese lema, independientes de la sección. Por ello conviene distinguir las dos familias en la notación, aunque describan el mismo espacio.

**Lema 13.1.19.** (Normalización cuadrática uniforme) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada y sea $\mathcal{T} = (U_i, \varphi_i, \psi_i)_{i\in I}$ una trivialización admisible tal que $0 \le \psi_i \le 1$ y $\operatorname{supp}\psi_i \Subset U_i$ para todo $i$. Definamos

$$S(x) := \left( \sum_{j\in I} \psi_j(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad h_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{S(x)}.$$

Entonces $\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i\in I}$ es un sistema cuadrático de localización admisible.

*Demostración.* La suma que define $S$ es localmente finita. Si $L$ es una cota uniforme para el número de miembros de la cubierta que pueden contener un mismo punto, la igualdad $\sum_{j\in I} \psi_j = 1$ y la desigualdad de Cauchy–Schwarz dan

$$1 = \left( \sum_{j\in I} \psi_j(x) \right)^2 \le L \sum_{j\in I} \psi_j(x)^2.$$

Como las funciones son no negativas, también $\sum_{j\in I} \psi_j(x)^2 \le (\sum_{j\in I} \psi_j(x))^2 = 1$. Por lo tanto,

$$L^{-\frac{1}{2}} \le S(x) \le 1 \qquad \text{para todo } x \in M.$$

En particular, $S$ es suave, $0 \le h_i \le 1$, $\operatorname{supp} h_i \subseteq \operatorname{supp}\psi_i \Subset U_i$, y

$$\sum_{i\in I} h_i^2 = S^{-2} \sum_{i\in I} \psi_i^2 = 1.$$

Falta comprobar la uniformidad de las derivadas. Fijemos una carta $(U_i, \varphi_i)$. Sólo intervienen los índices $j$ para los cuales $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, y su número es a lo más $L$. En la carta $i$, la representación de $\psi_j$ se entiende prolongada por cero fuera de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. Esa prolongación es suave: en los puntos donde $\psi_j$ puede ser no nula estamos dentro de $\operatorname{supp}(\psi_j) \Subset U_j$, mientras que fuera de ese soporte la función se anula en una vecindad. En el traslape se tiene

$$\psi_j \circ \varphi_i^{-1} = (\psi_j \circ \varphi_j^{-1}) \circ (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}).$$

Las cotas de los cambios de coordenadas se obtienen directamente de (B1): en una vecindad de cada punto

del traslape insertamos una carta geodésica del atlas que figura en esa condición y escribimos

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \left(\varphi_j \circ (\varphi_\nu^{\mathrm{geo}})^{-1}\right) \circ \left(\varphi_\nu^{\mathrm{geo}} \circ \varphi_i^{-1}\right).$$

La condición (B2), esas cotas y la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 acotan uniformemente todas las derivadas de estas funciones. La regla de Leibniz y la cota $L$ acotan entonces todas las derivadas de $\sum_{j\in I_i} (\psi_j \circ \varphi_i^{-1})^2$.
Esta última función toma valores en el intervalo compacto $[L^{-1}, 1]$. Al aplicar de nuevo Faà di Bruno a $t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$, cuyas derivadas están acotadas en ese intervalo, obtenemos cotas uniformes para las derivadas de $S^{-1} \circ \varphi_i^{-1}$. Finalmente, Leibniz aplicado a

$$h_i \circ \varphi_i^{-1} = (\psi_i \circ \varphi_i^{-1})(S^{-1} \circ \varphi_i^{-1})$$

da las estimaciones de (B2) para $h_i$. Esto prueba la admisibilidad: las funciones de corte auxiliares de la trivialización inicial siguen siendo iguales a uno en una vecindad de $\operatorname{supp}(h_i) \subseteq \operatorname{supp}(\psi_i)$, y conservan las estimaciones de (B3). □

**Observación 13.1.20.** Las estimaciones de cambios de coordenadas de (B1) no dependen del atlas normal particular. En efecto, si $0 < r' \le r_0$, se extienden, cuando sea necesario, las cartas de radios $r$ y $r'$ al radio $\max\{r, r'\} \le r_0$, se aplica la afirmación adicional del Teorema 13.1.8 y se restringe de nuevo.
La condición combinatoria tampoco depende del atlas cuando el segundo atlas, de radio $0 < r' \le \frac{r_0}{10}$, tiene bolas $B_{\mathbf{g}}(p'_j, \frac{r'}{4})$ disjuntas y las bolas $B_{\mathbf{g}}(p'_j, \frac{r'}{2})$ cubren $M$. Para comprobarlo, si una carta de radio $r$ corta una carta de radio $r'$, la bola disjunta de radio $\frac{r'}{4}$ asociada a la segunda queda contenida en una bola cuyo radio no excede $r + r' + \frac{r'}{4} < r_0$. Las cotas uniformes de la métrica y de su inversa en cartas normales, dadas por el Teorema 13.1.8, sitúan los valores propios de su matriz entre dos constantes positivas independientes del centro. Al integrar la raíz de su determinante se obtienen, para cada radio fijo menor que $r_0$, cotas superior e inferior uniformes para el volumen de las bolas. Comparar la bola grande con las bolas disjuntas de radio $\frac{r'}{4}$ acota uniformemente el número de estas últimas. Intercambiar $r$ y $r'$ da la otra cota de traslapes. Combinando este hecho con las dos cotas de traslapes de (B1), se transfieren también las cotas cruzadas entre $\mathcal{T}$ y el segundo atlas.
Además, (B1) controla las transiciones entre dos trivializaciones admisibles. Sean $\mathcal{T} = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{T}^\sharp = (U_j^\sharp, \varphi_j^\sharp)_{j\in J}$. Por los dos párrafos anteriores podemos fijar un mismo atlas geodésico uniforme $(U_\nu^{\mathrm{geo}}, \varphi_\nu^{\mathrm{geo}})_{\nu\in K}$ respecto del cual ambas satisfacen las cotas de (B1). Si $p \in U_i \cap U_j^\sharp$, elegimos $\nu$ con $p \in U_\nu^{\mathrm{geo}}$. En una vecindad de $p$ contenida en el triple traslape se tiene exactamente

$$\varphi_j^\sharp \circ \varphi_i^{-1} = \left(\varphi_j^\sharp \circ (\varphi_\nu^{\mathrm{geo}})^{-1}\right) \circ \left(\varphi_\nu^{\mathrm{geo}} \circ \varphi_i^{-1}\right).$$

La fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 expresa cada derivada de orden $k$ del miembro izquierdo en $p$ como una suma finita de productos de derivadas de los dos factores de órdenes a lo más $k$. Las cotas de (B1) son independientes de $i, j, \nu$; como $p$ es arbitrario, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe $C_k$, independiente de $i, j$, tal que

$$\left\| D^\alpha \left(\varphi_j^\sharp \circ \varphi_i^{-1}\right) \right\|_{L^\infty(\varphi_i(U_i \cap U_j^\sharp))} \le C_k, \qquad |\alpha| \le k.$$

Al intercambiar las dos trivializaciones se obtiene la misma estimación para la transición inversa. El caso $\mathcal{T}^\sharp = \mathcal{T}$ proporciona, en particular, el control uniforme de las transiciones internas de una trivialización admisible.

Las coordenadas geodésicas normales se pueden usar para definir una trivialización de cualquier variedad de geometría acotada que además tendrá la propiedad de ser *uniformemente localmente finita* y la llamaremos ***trivialización geodésica***.

**Lema 13.1.21.** (Control uniforme del volumen de bolas geodésicas) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada. Si $r_0 > 0$ es un radio para el cual se cumple la condición (2) del Teorema 13.1.8, entonces, para cada $0 < r \leq r_0$, existen constantes $v_-(r), v_+(r) > 0$ tales que

$$v_-(r) \leq \lambda_{\mathbf{g}}(B_{\mathbf{g}}(p,r)) \leq v_+(r), \qquad \forall p \in M.$$

*Demostración.* Fijamos $0 < r \leq r_0$ y sea $p \in M$. El mapeo exponencial riemanniano en $p$ induce una carta normal sobre $B_{\mathbf{g}}(p,r)$. Fijemos un isomorfismo lineal

$$B_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$$

que envía la base canónica de $\mathbb{R}^n$ en una base ortonormal de $T_pM$, y consideremos la carta

$$\varphi_p := B_p^{-1} \circ \exp_p^{-1} : B_{\mathbf{g}}(p,r) \longrightarrow B_{\text{euc}}(0,r).$$

Denotemos por $g_{ij}^{(p)}$ y $g_{(p)}^{ij}$ a las componentes de la métrica y de su inversa en estas coordenadas. Puesto que $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada, el Teorema 13.1.8 implica que existe una constante $C > 0$, independiente de $p$, tal que

$$|g_{ij}^{(p)}(q)| \leq C \qquad \text{y} \qquad |g_{(p)}^{ij}(q)| \leq C, \qquad \forall q \in B_{\mathbf{g}}(p,r),$$

para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
Fijemos $q \in B_{\mathbf{g}}(p,r)$ y sean $\lambda_1(q), \ldots, \lambda_n(q)$ los valores propios de la matriz de coeficientes $(g_{ij}^{(p)}(q))_{i,j=1}^n$. Esta matriz es simétrica y definida positiva. La cota de sus entradas implica que su norma de Frobenius es a lo más $nC$; por lo tanto,

$$\lambda_\ell(q) \leq nC, \qquad \ell = 1, \ldots, n.$$

La matriz inversa tiene coeficientes $(g_{(p)}^{ij}(q))$ y su norma de Frobenius también es a lo más $nC$. Sus valores propios son $\lambda_\ell(q)^{-1}$, de donde

$$\lambda_\ell(q)^{-1} \leq nC \quad \Longrightarrow \quad \lambda_\ell(q) \geq (nC)^{-1}.$$

Multiplicando las $n$ desigualdades obtenemos directamente

$$(nC)^{-n} \leq \det\big(\mathbf{g}^{(p)}(q)\big) \leq (nC)^n, \qquad q \in B_{\mathbf{g}}(p,r),$$

uniformemente en $p$. Por consiguiente,

$$(nC)^{-\frac{n}{2}} \leq \sqrt{\det\big(\mathbf{g}^{(p)}(q)\big)} \leq (nC)^{\frac{n}{2}}.$$

Usando la expresión local de la medida riemanniana, obtenemos

$$\lambda_{\mathbf{g}}(B_{\mathbf{g}}(p,r)) = \int_{B_{\mathrm{euc}}(0,r)} \sqrt{\det\big(\mathbf{g}^{(p)}(\varphi_p^{-1}(x))\big)}\, dx.$$

Por las cotas anteriores,

$$(nC)^{-\frac{n}{2}}\, \lambda_n(B_{\mathrm{euc}}(0,r)) \le \lambda_{\mathbf{g}}(B_{\mathbf{g}}(p,r)) \le (nC)^{\frac{n}{2}}\, \lambda_n(B_{\mathrm{euc}}(0,r)).$$

Basta entonces definir

$$v_-(r) := (nC)^{-\frac{n}{2}}\, \lambda_n(B_{\mathrm{euc}}(0,r)) \qquad \text{y} \qquad v_+(r) := (nC)^{\frac{n}{2}}\, \lambda_n(B_{\mathrm{euc}}(0,r)).$$

Esto concluye la demostración. □

**Teorema 13.1.22.** (Trivialización geodésica) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada. Entonces existe $r>0$ y una trivialización admisible

$$\mathcal{T}^{\mathrm{geo}} = \big(B_{\mathbf{g}}(p_i,2r), \varphi_i, h_i^{\mathrm{geo}}\big)_{i\in J}$$

de $M$ tal que:

(a) Para cada $i \in J$,
$$\varphi_i = B_{p_i}^{-1} \circ \exp_{p_i}^{-1} : B_{\mathbf{g}}(p_i,2r) \longrightarrow B_{\mathrm{euc}}(0,2r) \subseteq \mathbb{R}^n$$
es una carta de coordenadas normales, donde $B_{p_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{p_i}M$ es un isomorfismo.

(b) Las bolas $B_{\mathbf{g}}(p_i, \frac{r}{2})$ son ajenas dos a dos.

(c) $M = \bigcup_{i\in J} B_{\mathbf{g}}(p_i,r)$ y la cubierta $(B_{\mathbf{g}}(p_i,2r))_{i\in J}$ es uniformemente localmente finita.

(d) $(h_i^{\mathrm{geo}})_{i\in J}$ es una partición de la unidad subordinada a $(B_{\mathbf{g}}(p_i,2r))_{i\in J}$.

(e) Para todo $k \in \mathbb{N}_0$ existe $C_k > 0$ tal que
$$\left| D^\alpha (h_j^{\mathrm{geo}} \circ \varphi_i^{-1}) \right| \le C_k, \qquad |\alpha| \le k,$$
siempre que $B_{\mathbf{g}}(p_i,2r) \cap B_{\mathbf{g}}(p_j,2r) \neq \varnothing$.

(f) Existen funciones $\chi_i^{\mathrm{geo}} \in C_c^\infty(B_{\mathbf{g}}(p_i,2r))$, iguales a uno en una vecindad de $\mathrm{supp}(h_i^{\mathrm{geo}})$, cuyas representaciones en las cartas normales tienen derivadas de todo orden acotadas uniformemente en $i$.

*Demostración.* Como $(M,\mathbf{g})$ es de geometría acotada, se tiene $\mathrm{inj}(M) > 0$. Sea $r_0 > 0$ un radio para el cual se cumple la condición (2) del Teorema 13.1.8. Escogemos

$$0 < r < \min\left\{ \frac{\mathrm{inj}(M)}{5}, \frac{r_0}{20} \right\}.$$

Consideremos

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq M \mid d(p,q) \geq r \text{ para cualesquiera } p,q \in A, \text{ con } p \neq q\}.$$

Podemos ordenar $\mathcal{F}$ mediante la inclusión de conjuntos $\subseteq$ y verlo como un orden parcial. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una cadena, entonces $A_{\mathcal{C}} = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ pertenece a $\mathcal{F}$, pues dados $p,q \in A_{\mathcal{C}}$, como $(\mathcal{C},\subseteq)$ es un orden total, ambos pertenecen a un mismo elemento de la cadena. Entonces $A_{\mathcal{C}}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$, por lo que el Lema de Zorn, Teorema A.0.1, garantiza que existe un conjunto maximal $A = \{p_i\}_{i \in J}$. La maximalidad preserva la separación $d(p_i,p_j) \geq r$ cuando $i \neq j$, lo cual implica que las bolas $B_{\mathbf{g}}(p_i, \frac{r}{2})$ son disjuntas.

Afirmamos que $M = \bigcup_{i \in J} B_{\mathbf{g}}(p_i, r)$. En caso contrario, existiría $x \in M$ con $d(x,p_i) \geq r$ para toda $i \in J$. En particular, esto nos dice que $x \notin A$, por lo que

$$A \subsetneq A \cup \{x\} \in \mathcal{F},$$

lo cual contradice la maximalidad de $A$.

Para cada $i \in J$, como $2r < \operatorname{inj}(M)$, el mapeo exponencial riemanniano en $p_i$ induce una carta normal sobre $B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r)$. Definimos

$$\varphi_i := B_{p_i}^{-1} \circ \exp_{p_i}^{-1} : B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r) \longrightarrow B_{\mathrm{euc}}(0, 2r),$$

donde $B_{p_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{p_i}M$ es un isomorfismo que envía la base canónica en una base ortonormal. Esto prueba (a).

Probemos ahora que la cubierta $(B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r))_{i \in J}$ es uniformemente localmente finita. Fijado $i \in J$, definimos

$$J_i := \{j \in J \mid B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r) \cap B_{\mathbf{g}}(p_j, 2r) \neq \varnothing\}.$$

Si $j \in J_i$, entonces $B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r) \cap B_{\mathbf{g}}(p_j, 2r) \neq \varnothing$, de donde

$$d(p_i,p_j) < 4r, \qquad \text{y por lo tanto} \qquad p_j \in B_{\mathbf{g}}(p_i, 4r).$$

Las bolas $B_{\mathbf{g}}(p_j, \frac{r}{2})$ son disjuntas dos a dos y, además,

$$B_{\mathbf{g}}(p_j, \tfrac{r}{2}) \subseteq B_{\mathbf{g}}(p_i, \tfrac{9r}{2}), \qquad \forall j \in J_i.$$

Por el Lema 13.1.21, existen constantes $v_-, v_+ > 0$ tales que

$$\lambda_{\mathbf{g}}\big(B_{\mathbf{g}}(p, \tfrac{r}{2})\big) \geq v_-, \qquad \lambda_{\mathbf{g}}\big(B_{\mathbf{g}}(p, \tfrac{9r}{2})\big) \leq v_+, \qquad \forall p \in M.$$

Sumando volúmenes sobre $j \in J_i$, obtenemos

$$\sum_{j \in J_i} \lambda_{\mathbf{g}}\big(B_{\mathbf{g}}(p_j, \tfrac{r}{2})\big) \leq \lambda_{\mathbf{g}}\big(B_{\mathbf{g}}(p_i, \tfrac{9r}{2})\big),$$

y por lo tanto

$$\#J_i \, v_- \leq v_+, \qquad \text{de donde} \qquad \#J_i \leq \frac{v_+}{v_-}.$$

Esto implica que la cubierta $(B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r))_{i \in J}$ es uniformemente localmente finita. Esto prueba (c).

Construimos ahora una partición de la unidad. Usamos la función plana de la prueba del Teorema 1.3.5, que aquí escribimos de nuevo:

$$\vartheta(t) := \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Todas sus derivadas en el origen son nulas. Definimos explícitamente

$$\psi(x) := \frac{\vartheta\left((\frac{4r}{3})^2 - \|x\|^2\right)}{\vartheta\left((\frac{4r}{3})^2 - \|x\|^2\right) + \vartheta(\|x\|^2 - r^2)}.$$

El denominador no se anula y la planitud de $\vartheta$ en el origen muestra que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además,

$$0 \le \psi \le 1, \qquad \psi \equiv 1 \text{ en } B_{\text{euc}}(0, r), \qquad \operatorname{supp}(\psi) \subseteq B_{\text{euc}}(0, \frac{3r}{2}).$$

Para cada $i \in J$, definimos

$$\psi_i(x) := \begin{cases} \psi(\varphi_i(x)), & x \in B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $\psi_i$ es suave y

$$\operatorname{supp}(\psi_i) \subseteq B_{\mathbf{g}}(p_i, \frac{3r}{2}) \subset B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r),$$

por lo que la extensión por cero es suave.
Definimos

$$\Psi(x) := \sum_{i \in J} \psi_i(x).$$

Como la cubierta $(B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r))_{i \in J}$ es uniformemente localmente finita, para todo $x \in M$ existe una vecindad $U$ de $x$ tal que el conjunto

$$\{i \in J \mid U \cap B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r) \neq \varnothing\}$$

es finito. En particular, para todo $y \in U$ la suma que define $\Psi(y)$ tiene un número finito de sumandos no nulos, independiente de $y \in U$. Se sigue que $\Psi$ es una función suave en $M$.
Además, como

$$M = \bigcup_{i \in J} B_{\mathbf{g}}(p_i, r)$$

y $\psi_i \equiv 1$ en $B_{\mathbf{g}}(p_i, r)$, para todo $x \in M$ existe $i \in J$ tal que $\psi_i(x) = 1$. En consecuencia,

$$\Psi(x) \ge 1, \qquad \forall x \in M.$$

En particular, $\Psi$ no se anula en $M$, por lo que las funciones

$$h_i^{\text{geo}}(x) := \frac{\psi_i(x)}{\Psi(x)}$$

están bien definidas y son suaves. Además, como $0 \le \psi_i \le 1$ y $\Psi \ge 1$, se tiene

$$0 \le h_i^{\text{geo}} \le 1, \qquad \forall i \in J.$$

Entonces $(h_i^{\mathrm{geo}})_{i\in J}$ es una partición de la unidad subordinada a $(B_{\mathbf{g}}(p_i,2r))_{i\in J}$, lo cual prueba (d).
Probemos la acotación uniforme de derivadas. Fijados $i,j\in J$ tales que $B_{\mathbf{g}}(p_i,2r)\cap B_{\mathbf{g}}(p_j,2r)\neq\varnothing$, en coordenadas normales se tiene

$$h_j^{\mathrm{geo}}\circ\varphi_i^{-1}=\frac{\psi_j\circ\varphi_i^{-1}}{\sum_{k\in J_i}\psi_k\circ\varphi_i^{-1}},$$

donde $J_i$ es finito y su cardinalidad está uniformemente acotada.
Veamos primero que las funciones $\psi_k\circ\varphi_i^{-1}$ tienen derivadas uniformemente acotadas para cada orden. Fijado $m\in\mathbb{N}_0$, como $\psi$ es una función de corte fija en $\mathbb{R}^n$, con soporte compacto contenido en $B_{\mathrm{euc}}(0,\frac{3r}{2})$, existe una constante $A_m>0$ tal que

$$|D^\alpha\psi(x)|\le A_m,\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,\quad |\alpha|\le m.$$

Por otra parte, para cada $k\in J_i$ se tiene

$$\psi_k\circ\varphi_i^{-1}=\psi\circ\varphi_k\circ\varphi_i^{-1}.$$

La igualdad se usa en $\varphi_i(B_{\mathbf{g}}(p_i,2r)\cap B_{\mathbf{g}}(p_k,2r))$. Fuera de ese traslape se tiene $\psi_k\circ\varphi_i^{-1}=0$. En efecto, $\operatorname{supp}\psi\subset B_{\mathrm{euc}}(0,\frac{3r}{2})$, por lo que $\psi_k$ se anula en una vecindad del borde de $B_{\mathbf{g}}(p_k,2r)$. Así, la expresión coordenada es suave en todo $\varphi_i(B_{\mathbf{g}}(p_i,2r))$ y sus derivadas fuera del traslape son cero. Como los cambios de coordenadas geodésicos $\varphi_k\circ\varphi_i^{-1}$ tienen derivadas uniformemente acotadas hasta orden $m$ por el Teorema 13.1.8, la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 implica que existe una constante $C'_m>0$, independiente de $i$ y $k$, tal que

$$|D^\alpha(\psi_k\circ\varphi_i^{-1})|\le C'_m,\qquad |\alpha|\le m.$$

Además, como la suma en el denominador involucra un número uniformemente acotado de términos, se deduce que para cada $m\in\mathbb{N}_0$ existe una constante $C''_m>0$ tal que

$$\left|D^\alpha\left(\sum_{k\in J_i}\psi_k\circ\varphi_i^{-1}\right)\right|\le C''_m,\qquad |\alpha|\le m.$$

Por otra parte, para todo $x\in B_{\mathrm{euc}}(0,2r)$ se tiene

$$\sum_{k\in J_i}\psi_k\circ\varphi_i^{-1}(x)=\Psi\big(\varphi_i^{-1}(x)\big)\ge 1.$$

Así, el denominador está uniformemente acotado inferiormente por 1. Pongamos

$$F_i:=\sum_{k\in J_i}\psi_k\circ\varphi_i^{-1}.$$

La cota inferior da $\|F_i^{-1}\|_{L^\infty(B_{\mathrm{euc}}(0,2r))}\le 1$. Para $|\alpha|\ge 1$, Leibniz aplicado a $F_i^{-1}F_i=1$ y el aislamiento del

término $D^\alpha(F_i^{-1})F_i$ dan la recurrencia

$$D^\alpha(F_i^{-1}) = -F_i^{-1} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n \\ \beta\le\alpha,\ \beta\neq\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(F_i^{-1}) D^{\alpha-\beta}F_i.$$

Para $|\alpha| = 1$, el miembro derecho sólo contiene $F_i^{-1}$ y primeras derivadas de $F_i$, ya acotadas. Si las derivadas de $F_i^{-1}$ de orden menor que $|\alpha|$ están uniformemente acotadas, cada término de la suma lo está por la hipótesis inductiva y por las cotas de $F_i$. Así obtenemos, orden por orden, cotas uniformes para todas las derivadas de $F_i^{-1}$. Escribiendo

$$h_j^{\mathrm{geo}} \circ \varphi_i^{-1} = (\psi_j \circ \varphi_i^{-1}) \cdot F_i^{-1},$$

la regla de Leibniz para multiíndices y las cotas que acabamos de probar implican que para cada $m \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_m > 0$ tal que

$$|D^\alpha(h_j^{\mathrm{geo}} \circ \varphi_i^{-1})| \le C_m, \qquad |\alpha| \le m.$$

Esto prueba (e). El atlas subyacente tiene radio común $2r$; las bolas de radio $\frac{2r}{4} = \frac{r}{2}$ son disjuntas y las de radio $\frac{2r}{2} = r$ cubren $M$. Además, $2r < \frac{r_0}{10}$ por la elección del radio. Las cotas de traslapes ya probadas y la afirmación adicional del Teorema 13.1.8 verifican (B1), mientras que (e) verifica (B2).
Para construir las funciones de corte auxiliares usamos la misma función plana y ponemos

$$\chi(x) := \frac{\vartheta\big((\frac{15r}{8})^2 - \|x\|^2\big)}{\vartheta\big((\frac{15r}{8})^2 - \|x\|^2\big) + \vartheta\big(\|x\|^2 - (\frac{7r}{4})^2\big)}.$$

Entonces $\chi \in C_c^\infty(B_{\mathrm{euc}}(0,2r))$, $0 \le \chi \le 1$ y $\chi = 1$ en $B_{\mathrm{euc}}(0, \frac{7r}{4})$. Definimos

$$\chi_i^{\mathrm{geo}} := \begin{cases} \chi \circ \varphi_i, & \text{en } B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r), \\ 0, & \text{fuera de } B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r). \end{cases}$$

La construcción de $h_i^{\mathrm{geo}}$ muestra que su soporte está contenido en $B_{\mathbf{g}}(p_i, \frac{3r}{2})$; por lo tanto, $\chi_i^{\mathrm{geo}} = 1$ en una vecindad de ese soporte. En su propia carta la representación es la función fija $\chi$, de modo que las cotas requeridas son independientes de $i$. Esto verifica (B3) y el último inciso del enunciado. Por lo tanto, $\mathcal{T}^{\mathrm{geo}}$ es admisible. □

A continuación presentamos un lema que será de utilidad:

**Lema 13.1.23.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $\mathcal{T} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i\in I}$ una trivialización de $M$. Supongamos que existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $i \in I$, las componentes de la métrica y de su inversa en la carta $(U_i, \varphi_i)$ satisfacen

$$|g^{(i)}_{ab}(p)| \le C \qquad \text{y} \qquad |g^{ab}_{(i)}(p)| \le C$$

para todo $p \in U_i$ y cualesquiera $a, b \in \{1, \dots, n\}$.

Entonces existen constantes positivas $c_0, C_0$, independientes de $i$ y de $p$, tales que

$$c_0\|d(\varphi_i)_p(v)\|^2 \le |v|_{\mathbf{g}}^2 \le C_0\|d(\varphi_i)_p(v)\|^2, \qquad \forall p \in U_i,\ \forall v \in T_pM.$$

*Demostración.* Fijemos $i \in I$ y $p \in U_i$. Sea $v \in T_pM$ y definamos

$$w := d(\varphi_i)_p(v) \in \mathbb{R}^n.$$

Como $(U_i, \varphi_i)$ es una carta, el vector $v$ se escribe de manera única como

$$v = w^a \partial_a\Big|_p,$$

de modo que, por la definición de los coeficientes métricos,

$$|v|_{\mathbf{g}}^2 = \mathbf{g}_p(v,v) = \sum_{a,b=1}^{n} g_{ab}^{(i)}(p) w^a w^b. \tag{13.7}$$

Sean $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$ los valores propios de la matriz simétrica definida positiva $(g_{ab}^{(i)}(p))_{a,b=1}^n$. La cota de sus entradas da

$$\left( \sum_{a,b=1}^{n} |g_{ab}^{(i)}(p)|^2 \right)^{1/2} \le nC,$$

y el Teorema C.1.10 implica $\lambda_\ell(p) \le nC$. La matriz inversa tiene entradas $g_{(i)}^{ab}(p)$, por lo que el mismo argumento aplicado a ella da

$$\lambda_\ell(p)^{-1} \le nC \quad \Longrightarrow \quad \lambda_\ell(p) \ge \frac{1}{nC}.$$

El teorema espectral proporciona una base ortonormal $(\varepsilon_\ell)_{\ell=1}^n$ en la que, si $w = \sum_{\ell=1}^{n} w_\ell \varepsilon_\ell$, el último miembro de (13.7) es $\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell(p) w_\ell^2$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{nC}\|d(\varphi_i)_p(v)\|^2 \le |v|_{\mathbf{g}}^2 \le nC\,\|d(\varphi_i)_p(v)\|^2.$$

Las constantes $c_0 = (nC)^{-1}$ y $C_0 = nC$ son independientes de $i$ y $p$, como se requería. □

**Observación 13.1.24.** (Significado de la comparación uniforme en coordenadas) Si $\overline{\mathbf{g}}$ es la métrica euclidiana y $\boldsymbol{\delta}_i := \varphi_i^* \overline{\mathbf{g}}$, entonces

$$(\boldsymbol{\delta}_i)_p(v,v) = \|d(\varphi_i)_p(v)\|^2.$$

Por lo tanto, la conclusión del lema anterior se puede abreviar como $c_0\boldsymbol{\delta}_i \le \mathbf{g} \le C_0\boldsymbol{\delta}_i$ en el dominio de cada carta, con el significado de la Definición 2.1.5. La comparación intrínseca–coordenada del lema consiste precisamente en evaluar estas dos métricas en el mismo vector $v \in T_pM$. La Proposición 7.1.9 proporciona a partir de ella las cotas uniformes para covectores, tensores de cualquier tipo fijo y elementos de volumen. Aquí $c_0$ y $C_0$ son independientes del índice $i$ porque la hipótesis controla los coeficientes de todas las cartas

y de sus inversas con una sola constante. Aplicar la comparación sobre cada compacto por separado daría, en general, constantes $c_i, C_i$; una familia infinita de cartas no permite sustituirlas por constantes comunes sin demostrar además $\inf_{i\in I} c_i > 0$ y $\sup_{i\in I} C_i < \infty$.

## 13.2 Regularidad uniforme como formulación coordenada de la geometría acotada

La geometría acotada es la noción intrínseca que se adopta en este libro. La regularidad uniforme de Amann expresa el mismo control mediante un atlas de dominios normalizados; su utilidad consiste en hacer visibles las constantes de los coeficientes, de las funciones de corte y de los operadores de localización. No introduce una uniformidad sobre un conjunto de configuraciones; la noción basada en entornos de la diagonal se desarrolla en la Sección 27.2. Los espacios $BC^j$ y $BUC^j$, incluida la convención en una media caja, se definieron en la Definición 6.4.1.

Pongamos

$$Q^m := (-1,1)^m, \qquad Q^m_+ := [0,1)\times(-1,1)^{m-1}.$$

Si $0<\rho<1$, escribimos $\rho Q^m = (-\rho,\rho)^m$ y $\rho Q^m_+ = [0,\rho)\times(-\rho,\rho)^{m-1}$.

**Definición 13.2.1.** (Atlas uniformemente regular) Sea $M$ una variedad suave separable con o sin frontera y de dimensión $m$. Un atlas $\mathfrak{K} = (U_\kappa,\kappa)_{\kappa\in K}$ es *normalizado* si

$$\kappa\colon U_\kappa \longrightarrow Q_\kappa, \qquad Q_\kappa \in \{Q^m, Q^m_+\},$$

y se usa $Q^m_+$ precisamente para las cartas que cortan la frontera. Es *encogible* si existe un número $\rho\in(0,1)$, común a todas las cartas, tal que $\{\kappa^{-1}(\rho Q_\kappa)\mid \kappa\in K\}$ cubre $M$. Su multiplicidad es

$$\operatorname{mult}(\mathfrak{K}) := \sup_{p\in M} \#\{\kappa\in K \mid p\in U_\kappa\}.$$

El atlas es *uniformemente regular* si es normalizado, encogible, tiene multiplicidad finita y, para cada $j\in\mathbb{N}_0$, existe $C_{\mathrm{tr}}(j)>0$, independiente de las cartas, tal que

$$\|\widetilde{\kappa}\circ\kappa^{-1}\|_{BUC^j(\kappa(U_\kappa\cap U_{\widetilde{\kappa}}),\mathbb{R}^m)} \le C_{\mathrm{tr}}(j)$$

si $U_\kappa\cap U_{\widetilde{\kappa}}\neq\varnothing$. Equivalentemente, cada cambio pertenece a $BUC^\infty(\kappa(U_\kappa\cap U_{\widetilde{\kappa}}),\mathbb{R}^m)$ y, por lo tanto, a $BC^\infty$ en ese dominio, con cotas uniformes carta a carta para cada una de las seminormas de orden finito.

**Definición 13.2.2.** (Estructura uniformemente regular) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Dos atlas uniformemente regulares de $M$ son equivalentes si existe $N\in\mathbb{N}$ que acota, en ambos sentidos, el número de cartas de uno que cortan una carta del otro y si, para cada $j\in\mathbb{N}_0$, los cambios mixtos y sus inversos tienen norma $BUC^j$ acotada por una constante independiente de las cartas. Una clase de equivalencia es una *estructura uniformemente regular*.

**Definición 13.2.3.** (Variedad riemanniana uniformemente regular) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathfrak{K}$ un atlas uniformemente regular. Para cada carta se define, sin ambigüedad de pushforward,

$$\mathbf{g}_\kappa := (\kappa^{-1})^* \mathbf{g}.$$

La métrica es *uniformemente regular respecto de* $\mathfrak{K}$ si existen $c_{\mathbf{g}}, C_{\mathbf{g}} > 0$, independientes de $\kappa$, tales que

$$c_{\mathbf{g}} |\xi|^2 \leq \mathbf{g}_\kappa(x)(\xi, \xi) \leq C_{\mathbf{g}} |\xi|^2 \tag{13.8}$$

para todo $x \in Q_\kappa$ y $\xi \in \mathbb{R}^m$, y si, para cada $j \in \mathbb{N}_0$, existe $G_j > 0$, independiente de $\kappa$, tal que

$$\| (g_\kappa)_{ab} \|_{BUC^j(Q_\kappa)} \leq G_j, \qquad 1 \leq a, b \leq m. \tag{13.9}$$

Una variedad provista de la clase correspondiente se llama *riemanniana uniformemente regular*.

Las cotas de la métrica inversa no constituyen una hipótesis adicional. En efecto, (13.8) implica $\|\mathbf{g}_\kappa^{-1}(x)\|_{\mathrm{op}} \leq c_{\mathbf{g}}^{-1}$. Al diferenciar $\mathbf{g}_\kappa^{-1} \mathbf{g}_\kappa = I$ se obtiene

$$D(\mathbf{g}_\kappa^{-1})[v] = -\mathbf{g}_\kappa^{-1} D\mathbf{g}_\kappa[v] \mathbf{g}_\kappa^{-1}.$$

Para un multiíndice $\alpha \neq 0$, Leibniz aplicado a $\mathbf{g}_\kappa^{-1} \mathbf{g}_\kappa = I$ da

$$0 = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^m \\ \beta \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta \mathbf{g}_\kappa^{-1})(D^{\alpha-\beta} \mathbf{g}_\kappa).$$

Separando el término $\beta = \alpha$ y multiplicando a la derecha por $\mathbf{g}_\kappa^{-1}$ obtenemos la recurrencia exacta

$$D^\alpha \mathbf{g}_\kappa^{-1} = - \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^m \\ \beta \leq \alpha,\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta \mathbf{g}_\kappa^{-1})(D^{\alpha-\beta} \mathbf{g}_\kappa) \mathbf{g}_\kappa^{-1}. \tag{13.10}$$

El orden cero está acotado por $c_{\mathbf{g}}^{-1}$. Supongamos acotadas todas las derivadas de la inversa de orden menor que $j$ y sea $|\alpha| = j$. En cada sumando de (13.10) se tiene $|\beta| < j$ y $1 \leq |\alpha - \beta| \leq j$; la hipótesis inductiva, la cota $G_j$ para la métrica y la cota de orden cero para su inversa controlan el producto. La suma es finita y sus coeficientes dependen sólo de $\alpha$. Esto demuestra la cota de orden $j$ y completa la inducción. Por lo tanto, para cada $j$ existe una constante

$$G_j' = P_j(c_{\mathbf{g}}^{-1}, G_1, \dots, G_j) > 0,$$

donde $P_j$ es un polinomio universal de coeficientes no negativos, tal que

$$\| (\mathbf{g}_\kappa^{-1})^{ab} \|_{BUC^j(Q_\kappa)} \leq G_j' \tag{13.11}$$

para todas las cartas y todos los índices. La misma regla de transformación, la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 y las cotas de los cambios mixtos muestran que la definición no depende del atlas representante.

**Teorema 13.2.4.** (De geometría acotada a regularidad uniforme) Toda variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada admite una estructura uniformemente regular. Las constantes del atlas pueden elegirse en función de $m$, de un radio normal común y de las cotas de curvatura que figuran en la Definición 13.1.5, nunca de la carta.

*Demostración.* Sea $i_0 := \operatorname{inj}(M) > 0$ y sea $r_0 > 0$ el radio del Teorema 13.1.8. Elegimos $a > 0$ de modo que

$$4a\sqrt{m} < \min\{i_0, r_0\}, \qquad \delta := \frac{a}{4}, \qquad \rho := \frac{1}{2}.$$

Por el argumento maximal del Teorema 13.1.22, existe una familia $(p_i)_{i\in I}$ que es $\delta$-separada y cuyas bolas de radio $\delta$ cubren $M$. Elegimos isometrías $B_i\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow T_{p_i}M$ y definimos

$$\kappa_i^{-1}(x) := \exp_{p_i}(B_i(ax)), \qquad x \in Q^m.$$

Las cartas están bien definidas porque $aQ^m \subset B(0, a\sqrt{m})$. Si $p \in B_{\mathbf{g}}(p_i, \delta)$, entonces $p = \exp_{p_i}(B_i v)$ con $|v| < \frac{a}{4}$ y $\frac{v}{a} \in \rho Q^m$. Por lo tanto, las cartas encogidas cubren $M$.
Si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, entonces $d_{\mathbf{g}}(p_i, p_j) < 2a\sqrt{m}$. Las bolas $B_{\mathbf{g}}(p_j, \frac{\delta}{2})$ son ajenas dos a dos y, para todo índice que corta $U_i$, están contenidas en $B_{\mathbf{g}}(p_i, 2a\sqrt{m} + \frac{\delta}{2})$. Con las constantes del Lema 13.1.21 se obtiene

$$\operatorname{mult}(\tilde{\mathfrak{K}}) \le N_0 := \left\lceil \frac{v_+(2a\sqrt{m} + \frac{\delta}{2})}{v_-(\frac{\delta}{2})} \right\rceil. \tag{13.12}$$

Sea $\varphi_i = B_i^{-1} \circ \exp_{p_i}^{-1}$ la carta normal sin reescalar. Si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, entonces $d_{\mathbf{g}}(p_i, p_j) < 2a\sqrt{m}$ y, para todo $x \in Q^m$,

$$d_{\mathbf{g}}\big(p_j, \exp_{p_i}(B_i(ax))\big) < 3a\sqrt{m}.$$

La elección $4a\sqrt{m} < \min\{i_0, r_0\}$ permite, por lo tanto, extender el cambio de coordenadas a todo $Q^m$ mediante

$$T_{ji}^{\mathrm{ext}}(x) := a^{-1} B_j^{-1} \exp_{p_j}^{-1}\big(\exp_{p_i}(B_i(ax))\big).$$

El Teorema 13.1.8 proporciona constantes $A_\ell > 0$, independientes de $i, j$, para estas comparaciones exponenciales en los radios anteriores. Como, en el dominio efectivo del cambio,

$$\kappa_j \circ \kappa_i^{-1}(x) = a^{-1}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(ax),$$

se tiene, para $\ell \ge 1$,

$$\sup_{x \in \kappa_i(U_i \cap U_j)} \|D^\ell(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1})(x)\|_{\mathrm{op}} \le a^{\ell-1} A_\ell, \tag{13.13}$$

y el orden cero del cambio efectivo está acotado por $\sqrt{m}$ porque su imagen pertenece a $Q^m$. Como $Q^m$ es convexo, la estimación de orden $\ell + 1$ para $T_{ji}^{\mathrm{ext}}$ y el teorema del valor medio dan

$$\|D^\ell T_{ji}^{\mathrm{ext}}(x) - D^\ell T_{ji}^{\mathrm{ext}}(y)\|_{\mathrm{op}} \le a^\ell A_{\ell+1} |x - y|, \qquad x, y \in Q^m.$$

Al restringir a cada dominio de traslape se obtiene la continuidad uniforme requerida; las constantes dependen sólo de $a, m, A_1, \ldots, A_{\ell+1}$.

Denotemos por $C_\ell$ las cotas de los coeficientes métricos y de sus inversas en las cartas normales de radio $2a\sqrt{m}$. La regla de transformación bajo el reescalamiento $x \mapsto ax$ es, componente a componente,

$$(g_{\kappa_i})_{bc}(x) = a^2 (g_{\varphi_i})_{bc}(ax).$$

Las cotas de las entradas de $(g_{\varphi_i})_{bc}$ y de $(g_{\varphi_i})^{bc}$ implican, por el argumento espectral del Lema 13.1.23, que los valores propios de $(g_{\varphi_i})_{bc}$ pertenecen a $[(mC_0)^{-1}, mC_0]$. Por consiguiente,

$$c_{\mathbf{g}} := \frac{a^2}{mC_0}, \qquad C_{\mathbf{g}} := a^2 mC_0$$

satisfacen (13.8). Además,

$$\|D^\ell (\mathbf{g}_{\kappa_i})_{ab}\|_{L^\infty(Q^m)} \le a^{\ell+2} C_\ell, \qquad 0 \le \ell \le j.$$

La suma de estas cotas proporciona $G_j := \displaystyle\sum_{\ell=0}^{j} a^{\ell+2} C_\ell$ en (13.9); la cota de orden $j+1$ da la continuidad uniforme de la derivada de orden $j$. Esto completa todos los axiomas del atlas y de la métrica uniformemente regulares. □

**Teorema 13.2.5.** (Comparación completa sin frontera) Una variedad riemanniana sin frontera es uniformemente regular si y sólo si posee geometría acotada en el sentido de la Definición 13.1.5.

*Demostración.* La implicación desde geometría acotada es el teorema anterior. Para la recíproca, sea $\mathfrak{K}$ un atlas uniformemente regular con factor de encogimiento $\rho \in (0,1)$ y con las cotas métricas de (13.8). Trabajamos en las cartas normalizadas $Q^m = (-1,1)^m$; aquí no hay cartas de frontera. La fórmula

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{m} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc})$$

y (13.10) proporcionan constantes $A_0, A_1 \ge 0$ tales que

$$\|\Gamma(x)\|_{\mathrm{op}} \le A_0, \qquad \|D\Gamma(x)\|_{\mathrm{op}} \le A_1, \qquad x \in Q^m,$$

uniformemente en la carta. Consideramos $\Gamma(x)$ como una forma bilineal con valores en $\mathbb{R}^m$ y usamos normas euclidianas.

Pongamos $\delta = 1 - \rho > 0$. Elegimos $a > 0$ independiente de la carta, tan pequeño que

$$2a < \frac{\delta}{2}, \qquad 4A_0 a \le \frac{1}{2}, \qquad b := 4A_1 a^2 + 4A_0 a \le \frac{1}{4}.$$

Sea $p \in M$. La propiedad de encogimiento permite elegir una carta $\kappa$ con $x = \kappa(p) \in \rho Q^m$. Para $v \in \mathbb{R}^m$, $|v| < a$, resolvemos la ecuación geodésica coordenada

$$z''(t) = -\Gamma(z(t))(z'(t), z'(t)), \qquad z(0) = x, \quad z'(0) = v.$$

Mientras $0 \le t \le 1$ y $|z'(t)| \le 2a$, la forma integral de esta ecuación da

$$|z'(t)| \le a + 4A_0 a^2 \le \frac{3}{2}a, \qquad |z(t) - x| \le 2a < \frac{\delta}{2}.$$

Por continuidad, la velocidad no puede alcanzar $2a$ antes de $t = 1$. La posición permanece a distancia al menos $\delta/2$ de la frontera del cubo, y la velocidad permanece acotada. La solución se mantiene así en un compacto del dominio de la ecuación de primer orden para $(z, z')$, por lo que el Teorema B.13.4 la extiende a todo $[0, 1]$. En particular, la exponencial está definida sobre estos vectores iniciales.

Fijemos $w \in \mathbb{R}^m$ y denotemos por $Y(t) = D_v z(t)[w]$ la variación respecto de la velocidad inicial. La dependencia suave de las soluciones de una EDO respecto de sus datos, Teorema B.13.5, y la diferenciación de la ecuación dan

$$\begin{aligned} Y''(t) = &-D\Gamma(z(t))[Y(t)](z'(t), z'(t)) - 2\Gamma(z(t))(Y'(t), z'(t)), \\ Y(0) = 0, &\qquad Y'(0) = w. \end{aligned}$$

Sea $S = \max_{0 \le t \le 1} |Y'(t)|$. Como $|Y(t)| \le S$, la ecuación integrada proporciona

$$|Y'(t) - w| \le (4A_1 a^2 + 4A_0 a)S = bS.$$

Luego $S \le |w| + bS$, de donde

$$S \le \frac{|w|}{1-b}, \qquad |Y(1) - w| \le \frac{b}{1-b}|w| \le \frac{1}{3}|w|.$$

Si $F_x(v) = z(1)$, hemos obtenido $\|DF_x(v) - I\|_{\mathrm{op}} \le 1/3$ en $B(0, a)$. Este dominio es convexo; integrar la derivada sobre el segmento entre $v$ y $w$ da

$$|F_x(v) - F_x(w) - (v - w)| \le \frac{1}{3}|v - w|, \qquad |F_x(v) - F_x(w)| \ge \frac{2}{3}|v - w|.$$

Así, $F_x$ es inyectivo y su derivada es invertible. El teorema de la función inversa lo convierte en un difeomorfismo sobre su imagen. Como $F_x$ es la expresión coordenada de $\exp_p$ y

$$|d\kappa_p(\mathbf{v})| \le c_{\mathbf{g}}^{-1/2} |\mathbf{v}|_{\mathbf{g}_p}, \qquad \mathbf{v} \in T_p M,$$

la exponencial es un difeomorfismo sobre su imagen en la bola tangente de radio $a\sqrt{c_{\mathbf{g}}}$. Esta cota es independiente de $p$ y prueba

$$\mathrm{inj}(M) \ge a\sqrt{c_{\mathbf{g}}} > 0.$$

La completitud por componentes se sigue ahora de la Observación 13.1.2.

Quedan las cotas de curvatura. En cada carta,

$$R_{ijb}{}^{a} = \partial_i \Gamma^a_{jb} - \partial_j \Gamma^a_{ib} + \sum_{d=1}^{m} (\Gamma^d_{jb}\Gamma^a_{id} - \Gamma^d_{ib}\Gamma^a_{jd}).$$

Cada derivada coordenada de orden $k$ de estas componentes es una suma finita de productos de derivadas de $\Gamma$ de órdenes a lo más $k+1$. Éstas están uniformemente acotadas por las cotas de la métrica hasta orden $k+2$ y la recurrencia para su inversa. Para pasar a derivadas covariantes usamos la fórmula tensorial: a la

derivada coordenada se suma un término $\Gamma T$ por cada índice contravariante y se resta uno por cada índice covariante. En orden cero acabamos de acotar $R$. Si las componentes de $\nabla^j R$ se han expresado como sumas de productos de derivadas coordenadas de $R$ y de $\Gamma$, aplicar esa fórmula y Leibniz produce una expresión del mismo tipo para $\nabla^{j+1}R$, con órdenes aumentados a lo más en uno. La inducción proporciona cotas uniformes para todos esos componentes. Finalmente, (13.8) y las cotas de la métrica inversa convierten las cotas de componentes en las cotas tensoriales $\sup_{p\in M}|\nabla^k \mathbf{R}(p)|_{\mathbf{g}} < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Se satisfacen las dos condiciones de geometría acotada. □

Las definiciones y esta equivalencia corresponden a [6, Definiciones 3.1–3.3 y Teorema 3.5].

**Proposición 13.2.6.** (Sistema de localización de Amann) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathfrak{K}$ un atlas uniformemente regular de $M$ con factor de encogimiento $\rho$. Existen funciones $\pi_\kappa \in C_c^\infty(U_\kappa,[0,1])$ y una función $\chi \in C_c^\infty(Q^m,[0,1])$ tales que

$$\sum_{\kappa\in K}\pi_\kappa^2 = 1, \qquad \chi = 1 \quad \text{en } \operatorname{supp}(\pi_\kappa\circ\kappa^{-1}),$$

y, para cada $j\in\mathbb{N}_0$, existe $D_j>0$, independiente de $\kappa$, con

$$\|\pi_\kappa\circ\kappa^{-1}\|_{BUC^j(Q_\kappa)} \le D_j.$$

Si $\mathfrak{K}$ es el atlas construido en el Teorema 13.2.4, o un atlas uniformemente regular equivalente a él, este sistema es además un sistema cuadrático de localización admisible en el sentido de la Definición 13.1.16.

*Demostración.* Elegimos $\rho<\theta<\theta'<1$. Para $0<a<b<1$, sea

$$\eta_{a,b}(t) := \frac{\vartheta(b^2-t^2)}{\vartheta(b^2-t^2)+\vartheta(t^2-a^2)}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

donde $\vartheta$ es la función plana usada en la prueba del Teorema 1.3.5. Si $b_0=(\rho+\theta)/2$, definimos

$$\psi(x_1,\dots,x_m) := \prod_{a=1}^m \eta_{\rho,b_0}(x_a).$$

Entonces $\psi\in C_c^\infty(Q^m,[0,1])$, vale uno en $\rho Q^m$ y su soporte está contenido en $[-b_0,b_0]^m\subset\theta Q^m$. En una media caja se usa su restricción. Sea $\psi_\kappa=\psi\circ\kappa$ en $U_\kappa$, prolongada por cero, y pongamos

$$S(p) := \left(\sum_{\kappa\in K}\psi_\kappa(p)^2\right)^{\frac12}, \qquad \pi_\kappa := \frac{\psi_\kappa}{S}.$$

La familia de soportes que interviene en la suma no sólo es localmente finita: el número de esos soportes que cortan una carta dada posee una cota uniforme. Demostremos ambas afirmaciones a la vez. Pongamos

$$N := \operatorname{mult}(\mathfrak{K}), \qquad \varepsilon := \frac{1-\theta}{2\max\{1,C_{\mathrm{tr}}(1)\}} > 0.$$

Fijemos una carta $\kappa_0$ y consideremos los índices $\kappa$ para los cuales $\operatorname{supp}\psi_\kappa\cap U_{\kappa_0}\neq\varnothing$. Para cada uno elegimos

$q_\kappa \in \operatorname{supp}\psi_\kappa \cap U_{\kappa_0}$. Entonces $\kappa(q_\kappa) \in \operatorname{supp}\psi \subset \theta Q_\kappa$, cuya distancia a las caras no geométricas de $Q_\kappa$ es al menos $1-\theta$. La cota $BUC^1$ de $\kappa \circ \kappa_0^{-1}$ y el argumento de primer tiempo de salida, aplicado a cada segmento que parte de $\kappa_0(q_\kappa)$, muestran que

$$B\big(\kappa_0(q_\kappa), \varepsilon\big) \cap Q_{\kappa_0} \subseteq \kappa_0(U_\kappa \cap U_{\kappa_0}). \tag{13.14}$$

En una media caja, una trayectoria contenida en $Q_{\kappa_0}$ no puede salir por la cara geométrica: los cambios de cartas preservan la frontera. Por eso sólo interviene la distancia a las caras no geométricas.
Todos los conjuntos del miembro izquierdo de (13.14) están contenidos en el conjunto acotado

$$W := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \operatorname{dist}(x, Q_{\kappa_0}) < \varepsilon\}.$$

Como $Q_{\kappa_0}$ es una caja o una media caja, existe $c_m > 0$, dependiente sólo de la dimensión, tal que

$$\lambda_m\big(B(z,\varepsilon) \cap Q_{\kappa_0}\big) \geq c_m \varepsilon^m, \qquad z \in Q_{\kappa_0}.$$

Por otra parte, cada punto de $U_{\kappa_0}$ pertenece a lo sumo a $N$ cartas. Sumando las funciones características de las bolas anteriores e integrando en $W$ obtenemos

$$\#\{\kappa \mid \operatorname{supp}\psi_\kappa \cap U_{\kappa_0} \neq \varnothing\} c_m \varepsilon^m \leq N \lambda_m(W).$$

La medida de $W$ tiene una cota que depende sólo de $m$ y $\varepsilon$, no de $\kappa_0$. Existe, por lo tanto, un entero $N_1$, independiente de la carta, que acota el cardinal del conjunto de índices anterior. Esto prueba, en particular, la finitud local de la familia de soportes.
Como las cartas encogidas cubren, se tiene $1 \leq S \leq \sqrt{N}$. En la carta $\kappa$ intervienen a lo más $N_1$ funciones de la forma $\psi \circ \widetilde{\kappa} \circ \kappa^{-1}$. La fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19, las cotas de las transiciones y la regla de Leibniz acotan todas sus normas $BUC^j$ por constantes independientes de los índices. Si $F_\kappa := \sum_{\widetilde{\kappa} \in K} \psi_{\widetilde{\kappa}}^2$ se expresa en la carta $\kappa$, entonces $1 \leq F_\kappa \leq N$ y $S^{-1} = F_\kappa^{-1/2}$. Para $|\alpha| \geq 1$, la misma fórmula es una suma finita de términos de la forma

$$c_{\alpha,q,\beta}\, F_\kappa^{-\frac{1}{2}-q} \prod_{\nu=1}^{q} D^{\beta_\nu} F_\kappa, \qquad \beta_\nu \neq 0, \quad \beta_1 + \cdots + \beta_q = \alpha,$$

con $1 \leq q \leq |\alpha|$. La cota inferior de $F_\kappa$ y las cotas de sus derivadas controlan explícitamente cada producto, de modo uniforme en la carta. Leibniz aplicado a $\pi_\kappa = \psi_\kappa S^{-1}$ proporciona las cotas requeridas. Además, $\sum_{\kappa \in K} \pi_\kappa^2 = S^{-2} \sum_{\kappa \in K} \psi_\kappa^2 = 1$.
Si $b_1 = (\theta + \theta')/2$, tomamos

$$\chi(x_1, \ldots, x_m) := \prod_{a=1}^{m} \eta_{\theta, b_1}(x_a).$$

Entonces $\chi \in C_c^\infty(Q^m, [0,1])$, es igual a uno en $\theta Q^m$ y su soporte está contenido en $\theta' Q^m$. Por lo tanto, $\chi = 1$ en todos los soportes coordenados. Cuando $\widetilde{\mathfrak{K}}$ es el atlas normal reescalado del teorema anterior, las cotas de transición ya demostradas verifican (B1); las cotas que acabamos de obtener para los cortes verifican las restantes condiciones de la Definición 13.1.16. Para un atlas equivalente, las cotas de los cambios mixtos transfieren esas condiciones mediante la misma fórmula de Faà di Bruno y la regla de Leibniz. □

El sistema anterior da los siguientes operadores de localización. Al tomar $h_i = \pi_{\kappa_i}$ y $\chi_i := \chi \circ \kappa_i$, los operadores elementales sobre funciones suaves son

$$\mathcal{S}_0 u = \left( \widetilde{(h_i u) \circ \varphi_i^{-1}} \right)_{i \in I}, \qquad (\mathcal{R}_0 v)(p) = \sum_{\{i \in I \mid p \in U_i\}} h_i(p) \chi_i(p) v_i(\varphi_i(p)).$$

La segunda suma es localmente finita. Además, $\chi_i = 1$ en $\operatorname{supp} h_i$ y $\sum_{i \in I} h_i^2 = 1$; por lo tanto, $\mathcal{R}_0 \mathcal{S}_0 u = u$. Estas fórmulas sólo se usan aquí sobre funciones suaves. La reconstrucción de distribuciones y las cotas en normas de Sobolev se establecen después de definir esos espacios, a partir de las condiciones de admisibilidad verificadas para este sistema.

La parte diferencial de (B1) admite el siguiente criterio métrico. La hipótesis sobre los traslapes se mantiene separada porque no se deduce de las estimaciones de los coeficientes de la métrica.

**Lema 13.2.7.** (Criterio métrico de admisibilidad) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera con $\operatorname{inj}(M) > 0$ y sea $\mathcal{T} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i \in I}$ una trivialización uniformemente localmente finita. Supongamos, además, que las imágenes de las cartas están uniformemente normalizadas: existe $R > 0$ tal que $\varphi_i(U_i) \subseteq B_{\mathrm{euc}}(0, R)$ para todo $i \in I$. Supongamos que su cubierta satisface las dos cotas cruzadas de traslapes de (B1) respecto de un atlas geodésico uniforme con las propiedades de separación y cubierta allí indicadas, elegido con radio suficientemente pequeño. Sean $g_{ab}^{(i)}$ y $g_{(i)}^{ab}$ los coeficientes de $\mathbf{g}$ y de su inversa en las coordenadas $\varphi_i$. Entonces $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada y $\mathcal{T}$ satisface (B1) si y sólo si, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $C_k > 0$ tal que, para $|\alpha| \le k$,

$$|D^\alpha g_{ab}^{(i)}| \le C_k \qquad \text{y} \qquad |D^\alpha g_{(i)}^{ab}| \le C_k$$

en toda carta $(U_i, \varphi_i)$.

*Demostración.* ($\Leftarrow$) Supongamos que para toda $k \in \mathbb{N}_0$ existe $C_k > 0$ tal que, para toda carta $(U_i, \varphi_i)$ de la trivialización $\mathcal{T}$, se tiene

$$|D^\alpha g_{ab}^{(i)}| \le C_k \qquad \text{y} \qquad |D^\alpha g_{(i)}^{ab}| \le C_k, \qquad \forall |\alpha| \le k.$$

Primero probaremos que $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada. Como por hipótesis $\operatorname{inj}(M) > 0$, basta demostrar que para cada $m \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C'_m > 0$ tal que

$$|\nabla^m R|_{\mathbf{g}} \le C'_m$$

en todo $M$.

Fijemos una carta $(U_i, \varphi_i)$ de $\mathcal{T}$ y escribamos $\varphi_i = (x^1, \dots, x^n)$.

Para aligerar la notación, denotemos simplemente por

$$g_{ab}, \qquad g^{ab}, \qquad \Gamma_{ab}^c, \qquad R_{abc}{}^d$$

las componentes de la métrica, de la métrica inversa, de los símbolos de Christoffel y del tensor de curvatura en estas coordenadas, que desde luego dependen de $i$.

Por la Proposición 2.4.11 la expresión local de los símbolos de Christoffel respecto a la conexión de Levi–Civita es:

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{c\ell} \left( \partial_a g_{b\ell} + \partial_b g_{a\ell} - \partial_\ell g_{ab} \right).$$

Aplicando la regla de Leibniz y usando la hipótesis sobre las derivadas parciales de $g_{ab}$ y $g^{ab}$, concluimos que para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_k^{(1)} > 0$, independiente de la carta, tal que

$$|D^\alpha \Gamma_{ab}^c| \le C_k^{(1)}, \qquad |\alpha| \le k.$$

Usando ahora la expresión local del tensor de curvatura (Proposición 2.10.3),

$$R_{abc}{}^{\ell} = \partial_a \Gamma_{bc}^{\ell} - \partial_b \Gamma_{ac}^{\ell} + \Gamma_{bc}^{m}\Gamma_{am}^{\ell} - \Gamma_{ac}^{m}\Gamma_{bm}^{\ell},$$

obtenemos de nuevo por la regla de Leibniz que para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_k^{(2)} > 0$, independiente de la carta, tal que

$$|D^\alpha R_{abc}{}^{\ell}| \le C_k^{(2)}, \qquad |\alpha| \le k.$$

Finalmente, por el Lema 9.1.28, las componentes de $\nabla^m R$ en coordenadas se expresan como combinaciones lineales finitas de derivadas parciales de las componentes de $R$ de orden menor o igual que $m$, con coeficientes que son polinomios en los símbolos de Christoffel y sus derivadas parciales de orden menor o igual que $m-1$. Como todas estas cantidades están uniformemente acotadas, concluimos que para cada $m \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_m'' > 0$ tal que las componentes de $\nabla^m R$ están uniformemente acotadas en toda carta de $\mathcal{T}$.

Además, las cotas uniformes de las componentes de la métrica y de su inversa implican que, para el tipo tensorial fijo de $\nabla^m R$, existe $C_{m,\mathbf{g}} > 0$, independiente de la carta, tal que la norma puntual inducida por $\mathbf{g}$ no excede $C_{m,\mathbf{g}}$ veces la norma euclidiana de sus componentes. Por consiguiente, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_m' > 0$ tal que

$$|\nabla^m R|_{\mathbf{g}} \le C_m'$$

en todo $M$. Esto prueba que $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada.

Probemos ahora que $\mathcal{T}$ satisface (B1). Sea $r_0 > 0$ un radio para el cual se cumple la condición (2) del Teorema 13.1.8, y sea

$$\mathcal{A}^{\mathrm{geo}} = (U_j^{\mathrm{geo}}, \varphi_j^{\mathrm{geo}})_{j \in J}$$

el atlas geodésico de la hipótesis. La expresión «radio suficientemente pequeño» significa aquí que su radio común satisface $0 < r \le \frac{r_0}{10}$. Fijemos $i \in I$ y $j \in J$ tales que

$$U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}} \neq \varnothing.$$

Escribamos

$$\varphi_i = (x^1, \dots, x^n), \qquad \varphi_j^{\mathrm{geo}} = (y^1, \dots, y^n).$$

Denotemos por

$$\widetilde{g}_{ab}, \qquad \widetilde{g}^{ab}, \qquad \widetilde{\Gamma}_{ab}^{c}$$

las componentes de la métrica, de la métrica inversa y los símbolos de Christoffel en las coordenadas geodésicas $y$.

Como ya probamos que $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada, el Teorema 13.1.8 implica que en el atlas geodésico uniforme las componentes $\widetilde{g}_{ab}$, $\widetilde{g}^{ab}$ y todas sus derivadas parciales están uniformemente acotadas. En

particular, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe $A_k > 0$ tal que

$$|D^\alpha \widetilde{g}_{ab}| \le A_k \qquad \text{y} \qquad |D^\alpha \widetilde{g}^{ab}| \le A_k, \qquad \forall |\alpha| \le k.$$

El orden cero queda controlado por la normalización: la imagen de $\varphi_i \circ (\varphi_j^{\text{geo}})^{-1}$ está en $B_{\text{euc}}(0,R)$ y la de su inversa está en $B_{\text{euc}}(0,r)$. Las cotas métricas no sustituyen esta hipótesis, pues trasladar el origen de una carta no modifica sus coeficientes métricos. Comenzamos ahora con las derivadas de orden uno del cambio de coordenadas

$$\varphi_i \circ (\varphi_j^{\text{geo}})^{-1} \qquad \text{y} \qquad \varphi_j^{\text{geo}} \circ \varphi_i^{-1}.$$

Por hipótesis, las componentes de la métrica y de su inversa en la carta $(U_i, \varphi_i)$ están uniformemente acotadas. Como además $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada, lo mismo ocurre en la carta geodésica $(U_j^{\text{geo}}, \varphi_j^{\text{geo}})$. Por el Lema 13.1.23, existen constantes positivas $c_0, C_0$, independientes de $i$, $j$ y del punto considerado, tales que

$$c_0 \|d\varphi_i(v)\|^2 \le |v|_{\mathbf{g}}^2 \le C_0 \|d\varphi_i(v)\|^2$$

para todo $v \in TM\restriction_{U_i}$, y

$$c_0 \|d\varphi_j^{\text{geo}}(v)\|^2 \le |v|_{\mathbf{g}}^2 \le C_0 \|d\varphi_j^{\text{geo}}(v)\|^2$$

para todo $v \in TM\restriction_{U_j^{\text{geo}}}$.
Sea ahora

$$F_{ij} := \varphi_i \circ (\varphi_j^{\text{geo}})^{-1}.$$

Fijemos $p \in U_i \cap U_j^{\text{geo}}$ y sea $\xi \in \mathbb{R}^n$. Definimos

$$v := (d\varphi_j^{\text{geo}}|_p)^{-1}(\xi) \in T_pM.$$

Entonces

$$d\varphi_i|_p(v) = d(\varphi_i \circ (\varphi_j^{\text{geo}})^{-1})|_{\varphi_j^{\text{geo}}(p)}(\xi) = DF_{ij}\big(\varphi_j^{\text{geo}}(p)\big)\,\xi.$$

Aplicando las desigualdades anteriores a este vector $v$, obtenemos

$$c_0 \left\| DF_{ij}\big(\varphi_j^{\text{geo}}(p)\big)\,\xi \right\|^2 \le |v|_{\mathbf{g}}^2 \le C_0 \|\xi\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\left\| DF_{ij}\big(\varphi_j^{\text{geo}}(p)\big)\,\xi \right\| \le \sqrt{\frac{C_0}{c_0}}\,\|\xi\|,$$

y de aquí

$$\left\| DF_{ij}\big(\varphi_j^{\text{geo}}(p)\big) \right\|_{\text{op}} \le \sqrt{\frac{C_0}{c_0}}.$$

Como la norma de operador de $DF_{ij}$ está uniformemente acotada, concluimos que las derivadas parciales de orden 1 están uniformemente acotadas.
Para el cambio inverso definimos

$$G_{ij} := \varphi_j^{\text{geo}} \circ \varphi_i^{-1},$$

Tomando ahora $v = (d\varphi_i|_p)^{-1}(\xi)$ y aplicando las dos desigualdades métricas anteriores con las cartas inter-

cambiadas, para todo $p \in U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}}$ se obtiene

$$\left\| DG_{ij}\left(\varphi_i(p)\right)\right\|_{\mathrm{op}} \leq \sqrt{\frac{C_0}{c_0}}.$$

Pasamos ahora a las derivadas de orden dos. Aplicando el inciso (c) del Lema 2.4.12 a las cartas $(U_i, \varphi_i)$ y $(U_j^{\mathrm{geo}}, \varphi_j^{\mathrm{geo}})$, obtenemos que para todo $p \in U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}}$,

$$\Gamma_{rs}^k(p) = \frac{\partial x^k}{\partial y^c}(p)\frac{\partial y^a}{\partial x^r}(p)\frac{\partial y^b}{\partial x^s}(p)\widetilde{\Gamma}_{ab}^c(p) + \frac{\partial x^k}{\partial y^c}(p)\frac{\partial^2 y^c}{\partial x^r \partial x^s}(p).$$

Multiplicando por $\dfrac{\partial y^m}{\partial x^k}(p)$ y usando la regla de la cadena, concluimos que

$$\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^r \partial x^s}(p) = \frac{\partial y^m}{\partial x^k}(p)\Gamma_{rs}^k(p) - \frac{\partial y^a}{\partial x^r}(p)\frac{\partial y^b}{\partial x^s}(p)\widetilde{\Gamma}_{ab}^m(p).$$

Como

$$y^m = \pi_m \circ \varphi_j^{\mathrm{geo}} = \pi_m \circ G_{ij} \circ \varphi_i$$

en $U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}}$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 G_{ij}^m}{\partial x^r \partial x^s}\left(\varphi_i(p)\right) = \frac{\partial G_{ij}^m}{\partial x^k}\left(\varphi_i(p)\right)\Gamma_{rs}^k(p) - \frac{\partial G_{ij}^a}{\partial x^r}\left(\varphi_i(p)\right)\frac{\partial G_{ij}^b}{\partial x^s}\left(\varphi_i(p)\right)\widetilde{\Gamma}_{ab}^m(p).$$

Como ya sabemos que las derivadas de orden uno de $G_{ij}$ están uniformemente acotadas, y además las componentes de $\Gamma$ y $\widetilde{\Gamma}$ están uniformemente acotadas, concluimos que las derivadas de orden dos de $G_{ij}$ también están uniformemente acotadas.

Intercambiando ahora el papel de ambas cartas en el inciso (c) del Lema 2.4.12, obtenemos para todo $p \in U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}}$,

$$\widetilde{\Gamma}_{ab}^c(p) = \frac{\partial y^c}{\partial x^k}(p)\frac{\partial x^r}{\partial y^a}(p)\frac{\partial x^s}{\partial y^b}(p)\Gamma_{rs}^k(p) + \frac{\partial y^c}{\partial x^k}(p)\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^a \partial y^b}(p).$$

Multiplicando por $\dfrac{\partial x^m}{\partial y^c}(p)$, se sigue que

$$\frac{\partial^2 x^m}{\partial y^a \partial y^b}(p) = \frac{\partial x^m}{\partial y^c}(p)\widetilde{\Gamma}_{ab}^c(p) - \frac{\partial x^r}{\partial y^a}(p)\frac{\partial x^s}{\partial y^b}(p)\Gamma_{rs}^m(p).$$

Como

$$x^m = \pi_m \circ \varphi_i = \pi_m \circ F_{ij} \circ \varphi_j^{\mathrm{geo}}$$

en $U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}}$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 F_{ij}^m}{\partial y^a \partial y^b}\left(\varphi_j^{\mathrm{geo}}(p)\right) = \frac{\partial F_{ij}^m}{\partial y^c}\left(\varphi_j^{\mathrm{geo}}(p)\right)\widetilde{\Gamma}_{ab}^c(p) - \frac{\partial F_{ij}^r}{\partial y^a}\left(\varphi_j^{\mathrm{geo}}(p)\right)\frac{\partial F_{ij}^s}{\partial y^b}\left(\varphi_j^{\mathrm{geo}}(p)\right)\Gamma_{rs}^m(p).$$

Por lo tanto, las derivadas de orden dos de $F_{ij}$ también están uniformemente acotadas.

Procedemos ahora por inducción sobre el orden de derivación. Supongamos que para algún $k \geq 2$ ya sa-

bemos que todas las derivadas parciales de $F_{ij}$ y $G_{ij}$ de orden menor o igual que $k$ están uniformemente acotadas. Demostraremos que las derivadas de orden $k+1$ también lo están.
Consideremos la identidad

$$\frac{\partial^2 F_{ij}^m}{\partial y^a \partial y^b}\big(\varphi_j^{\mathrm{geo}}(p)\big) = \frac{\partial F_{ij}^m}{\partial y^c}\big(\varphi_j^{\mathrm{geo}}(p)\big)\,\widetilde{\Gamma}_{ab}^c(p) - \frac{\partial F_{ij}^r}{\partial y^a}\big(\varphi_j^{\mathrm{geo}}(p)\big)\frac{\partial F_{ij}^s}{\partial y^b}\big(\varphi_j^{\mathrm{geo}}(p)\big)\,\Gamma_{rs}^m(p).$$

Al componer con $(\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}$, obtenemos en el abierto euclidiano correspondiente

$$\frac{\partial^2 F_{ij}^m}{\partial y^a \partial y^b} = \frac{\partial F_{ij}^m}{\partial y^c}\,(\widetilde{\Gamma}_{ab}^c \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}) - \frac{\partial F_{ij}^r}{\partial y^a}\frac{\partial F_{ij}^s}{\partial y^b}\,(\Gamma_{rs}^m \circ \varphi_i^{-1} \circ F_{ij}).$$

Sea ahora $\alpha$ un multiíndice con $|\alpha| \le k-1$. Aplicamos $D^\alpha$ a esta identidad. Por la regla de Leibniz, el primer término del lado derecho queda expresado como suma finita de productos de derivadas de $F_{ij}$ de orden menor o igual que $k$ y derivadas de $\widetilde{\Gamma}_{ab}^c \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}$ de orden menor o igual que $k-1$, todas uniformemente acotadas.
Para el segundo término, usamos nuevamente la regla de Leibniz y, al derivar la composición

$$(\Gamma_{rs}^m \circ \varphi_i^{-1}) \circ F_{ij},$$

aplicamos la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 en la forma en que allí fue enunciada. Si

$$H := \Gamma_{rs}^m \circ \varphi_i^{-1}, \qquad F_{ij} = (F_{ij}^1, \dots, F_{ij}^n),$$

entonces, para $1 \le |\beta| \le k-1$,

$$D^\beta(H \circ F_{ij})(y) = \sum_{\substack{\delta \in \mathbb{N}_0^n \\ 1 \le |\delta| \le |\beta|}} \sum_{\substack{\gamma_1,\dots,\gamma_{|\delta|} \in \mathbb{N}_0^n \\ \gamma_1 + \cdots + \gamma_{|\delta|} = \beta \\ |\gamma_\nu| > 0}} \sum_{\substack{\ell_1,\dots,\ell_{|\delta|} \in \{1,\dots,n\} \\ \#\{\nu \mid \ell_\nu = a\} = \delta_a}} c_{\beta,\delta,\gamma,\ell}\big(D^\delta H\big)(F_{ij}(y)) \prod_{\nu=1}^{|\delta|} D^{\gamma_\nu} F_{ij}^{\ell_\nu}(y). \tag{13.15}$$

La suma es finita y sus coeficientes dependen sólo de los multiíndices. En cada sumando se cumple $|\delta| \le |\beta| \le k-1$ y $1 \le |\gamma_\nu| \le |\beta| \le k-1$. Las derivadas de $H$ están acotadas por las cotas ya obtenidas para los símbolos de Christoffel en la carta $i$, y las derivadas de $F_{ij}$ están acotadas por la hipótesis inductiva. Por consiguiente, toda derivada

$$D^\beta\big((\Gamma_{rs}^m \circ \varphi_i^{-1}) \circ F_{ij}\big), \qquad |\beta| \le k-1,$$

está acotada por una constante independiente de $i, j$. Tras aplicar Leibniz a los tres factores del segundo término, ninguna derivada de $F_{ij}$ que aparece en el miembro derecho tiene orden mayor que $k$. El miembro izquierdo es $D^\alpha \partial_{y^a}\partial_{y^b} F_{ij}^m$; haciendo variar $a, b$ y los multiíndices $\alpha$ con $|\alpha| = k-1$, se obtienen todas las derivadas de orden $k+1$. Concluimos que éstas están uniformemente acotadas.
Para la transición inversa partimos de la identidad

$$\frac{\partial^2 G_{ij}^m}{\partial x^r \partial x^s}\big(\varphi_i(p)\big) = \frac{\partial G_{ij}^m}{\partial x^k}\big(\varphi_i(p)\big)\,\Gamma_{rs}^k(p) - \frac{\partial G_{ij}^a}{\partial x^r}\big(\varphi_i(p)\big)\frac{\partial G_{ij}^b}{\partial x^s}\big(\varphi_i(p)\big)\,\widetilde{\Gamma}_{ab}^m(p),$$

la cual, tras componer con $\varphi_i^{-1}$, toma la forma

$$\frac{\partial^2 G_{ij}^m}{\partial x^r \partial x^s} = \frac{\partial G_{ij}^m}{\partial x^k}(\Gamma_{rs}^k \circ \varphi_i^{-1}) - \frac{\partial G_{ij}^a}{\partial x^r}\frac{\partial G_{ij}^b}{\partial x^s}(\widetilde{\Gamma}_{ab}^m \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1} \circ G_{ij}),$$

muestra que todas las derivadas de orden $k+1$ de $G_{ij}$ también están uniformemente acotadas. En este caso se usa exactamente (13.15) con $H = \widetilde{\Gamma}_{ab}^m \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}$ y $F_{ij}$ sustituido por $G_{ij}$; los mismos límites para $|\delta|$ y $|\gamma_\nu|$ verifican que sólo intervienen derivadas cubiertas por la hipótesis inductiva.

Por inducción, concluimos que para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_k > 0$, independiente de $i$ y $j$, tal que

$$|D^\alpha F_{ij}| \le C_k \qquad \text{y} \qquad |D^\alpha G_{ij}| \le C_k$$

para todo $|\alpha| \le k$. Junto con las dos cotas cruzadas de traslapes supuestas en el enunciado, esto prueba (B1).

*($\Rightarrow$)* Supongamos ahora que $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada y que la condición (B1) se satisface.

Sea

$$\mathcal{A}^{\mathrm{geo}} = (U_j^{\mathrm{geo}}, \varphi_j^{\mathrm{geo}})_{j \in J}$$

uno de los atlas geodésicos uniformes para los cuales se cumple (B1). Fijemos $i \in I$ y $j \in J$ tales que

$$U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}} \neq \varnothing.$$

Escribamos

$$\varphi_i = (x^1, \dots, x^n), \qquad \varphi_j^{\mathrm{geo}} = (y^1, \dots, y^n),$$

y sea

$$F_{ij} := \varphi_i \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}, \qquad G_{ij} := \varphi_j^{\mathrm{geo}} \circ \varphi_i^{-1}.$$

Por (B1), para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_k > 0$ tal que todas las derivadas parciales de $F_{ij}$ y $G_{ij}$ de orden menor o igual que $k$ están uniformemente acotadas.

Como $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada, el Teorema 13.1.8 implica que en el atlas geodésico uniforme las componentes de la métrica y de su inversa satisfacen cotas uniformes de todas sus derivadas. Denotemos por

$$\widetilde{g}_{ab}, \qquad \widetilde{g}^{ab}$$

las componentes de la métrica y de la métrica inversa en las coordenadas $y$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $A_k > 0$ tal que

$$|D^\alpha \widetilde{g}_{ab}| \le A_k \qquad \text{y} \qquad |D^\alpha \widetilde{g}^{ab}| \le A_k$$

para todo $|\alpha| \le k$.

Aplicando el inciso (a) del Lema 2.4.12 a las cartas $(U_i, \varphi_i)$ y $(U_j^{\mathrm{geo}}, \varphi_j^{\mathrm{geo}})$, obtenemos que para todo $p \in U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}}$,

$$g_{rs}(p) = \frac{\partial y^a}{\partial x^r}(p)\frac{\partial y^b}{\partial x^s}(p)\,\widetilde{g}_{ab}(p).$$

Como

$$y^a = \pi_a \circ G_{ij} \circ \varphi_i$$

en $U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}}$, al componer con $\varphi_i^{-1}$ obtenemos

$$g_{rs} \circ \varphi_i^{-1} = \frac{\partial G_{ij}^a}{\partial x^r} \frac{\partial G_{ij}^b}{\partial x^s} \left( \widetilde{g}_{ab} \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1} \circ G_{ij} \right).$$

Pongamos

$$K_{ab} := \widetilde{g}_{ab} \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}.$$

La regla de Leibniz para tres factores da, para todo multiíndice $\alpha$,

$$D^\alpha (g_{rs} \circ \varphi_i^{-1}) = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha}} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} D^{\alpha_1}(\partial_r G_{ij}^a) D^{\alpha_2}(\partial_s G_{ij}^b) \cdot D^{\alpha_3}(K_{ab} \circ G_{ij}). \tag{13.16}$$

En el último factor se aplica (13.15), con $H = K_{ab}$ y $F_{ij}$ sustituido por $G_{ij}$. Por lo tanto, sus sumandos contienen derivadas $D^\delta K_{ab}$ de orden $|\delta| \le |\alpha_3|$ y productos de derivadas de $G_{ij}$ de órdenes positivos cuya suma es $|\alpha_3|$. Los dos primeros factores de (13.16) contienen derivadas de $G_{ij}$ de órdenes a lo más $|\alpha_1| + 1$ y $|\alpha_2| + 1$. Todas estas cantidades tienen cotas uniformes por (B1) y por las estimaciones geodésicas. Así, la derivada

$$D^\alpha (g_{rs} \circ \varphi_i^{-1})$$

está uniformemente acotada. Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_k' > 0$ tal que

$$|D^\alpha (g_{rs} \circ \varphi_i^{-1})| \le C_k', \qquad \forall |\alpha| \le k.$$

Usando ahora la identidad

$$D^\alpha g_{rs} = \left( D^\alpha (g_{rs} \circ \varphi_i^{-1}) \right) \circ \varphi_i,$$

concluimos que las derivadas parciales de las componentes $g_{rs}$ están uniformemente acotadas en toda carta de $\mathcal{T}$.

Para acotar los coeficientes de la inversa de la métrica, aplicamos el inciso (b) del Lema 2.4.12. Para todo $p \in U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}}$,

$$g^{rs}(p) = \frac{\partial x^r}{\partial y^a}(p) \frac{\partial x^s}{\partial y^b}(p) \widetilde{g}^{ab}(p).$$

Como

$$x^r = \pi_r \circ F_{ij} \circ \varphi_j^{\mathrm{geo}}$$

en $U_i \cap U_j^{\mathrm{geo}}$, al componer con $(\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}$ obtenemos

$$(g^{rs} \circ \varphi_i^{-1} \circ F_{ij}) = \frac{\partial F_{ij}^r}{\partial y^a} \frac{\partial F_{ij}^s}{\partial y^b} (\widetilde{g}^{ab} \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}).$$

Componiendo ahora con $G_{ij}$, resulta

$$g^{rs} \circ \varphi_i^{-1} = \left( \frac{\partial F_{ij}^r}{\partial y^a} \circ G_{ij} \right) \left( \frac{\partial F_{ij}^s}{\partial y^b} \circ G_{ij} \right) (\widetilde{g}^{ab} \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1} \circ G_{ij}).$$

Para esta identidad, Leibniz vuelve a distribuir $\alpha$ entre tres factores. Si, por ejemplo, $Q_a^r := \partial_{y^a} F_{ij}^r$, la fórmula

(13.15), aplicada a $Q_a^r \circ G_{ij}$, contiene derivadas de $Q_a^r$ de orden a lo más $|\alpha|$, es decir, derivadas de $F_{ij}$ de orden a lo más $|\alpha|+1$, y derivadas de $G_{ij}$ de orden a lo más $|\alpha|$. El tercer factor se trata con $H = \widetilde{g}^{ab} \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}$. Las cotas de (B1) y las cotas geodésicas controlan uniformemente todos los factores. Concluimos que para cada multiíndice $\alpha$ existe $C''_\alpha > 0$, independiente de $i, j$, tal que

$$|D^\alpha (g^{rs} \circ \varphi_i^{-1})| \leq C''_\alpha.$$

En consecuencia, las derivadas parciales de las componentes $g^{rs}$ también están uniformemente acotadas. Esto concluye la demostración. □

## 13.3 Espacios de Sobolev fraccionarios, de Besov y de Triebel–Lizorkin en variedades riemannianas de geometría acotada

Las trivializaciones geodésicas nos permiten dar una definición de los espacios de Sobolev fraccionarios en variedades riemannianas de geometría acotada.

**Definición 13.3.1.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada y sea

$$\mathcal{T}^{\mathrm{geo}} = (U_i^{\mathrm{geo}}, \varphi_i^{\mathrm{geo}}, h_i^{\mathrm{geo}})_{i \in J}$$

una trivialización geodésica como la del Teorema 13.1.22. Sean $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < \infty$. Para $u \in \mathcal{D}'(M)$ y $i \in J$, la distribución $(h_i^{\mathrm{geo}} u) \circ (\varphi_i^{\mathrm{geo}})^{-1}$ tiene soporte compacto en $\varphi_i^{\mathrm{geo}}(U_i^{\mathrm{geo}})$. Denotamos por

$$\widetilde{(h_i^{\mathrm{geo}} u) \circ (\varphi_i^{\mathrm{geo}})^{-1}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

su extensión por cero. Definimos

$$H^{s,p}(M) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(M) \,\middle|\, \left( \sum_{i \in J} \left\| \widetilde{(h_i^{\mathrm{geo}} u) \circ (\varphi_i^{\mathrm{geo}})^{-1}} \right\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

$$\|u\|_{H^{s,p}(M)} := \left( \sum_{i \in J} \left\| \widetilde{(h_i^{\mathrm{geo}} u) \circ (\varphi_i^{\mathrm{geo}})^{-1}} \right\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Observación 13.3.2.** La componente coordenada de $h_i^{\mathrm{geo}} u$ se entiende en el sentido de la Proposición 10.2.34. La tilde siempre indica la extensión por cero desde el abierto coordenado $\varphi_i^{\mathrm{geo}}(U_i^{\mathrm{geo}})$ hasta $\mathbb{R}^n$. Esta extensión está bien definida porque el soporte de $h_i^{\mathrm{geo}} u$ está contenido en $\mathrm{supp}(h_i^{\mathrm{geo}}) \Subset U_i^{\mathrm{geo}}$. La segunda numerabilidad de $M$ y la finitud local de la cubierta implican que $J$ es numerable, de modo que la suma de la definición es una serie bien definida.

Más adelante veremos que esta definición no depende de la trivialización geodésica elegida. Para formular esa independencia, conviene introducir la misma construcción para una trivialización uniformemente localmente finita.

**Definición 13.3.3.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada y sea $\mathcal{T} = (U_i,\varphi_i,h_i)_{i\in I}$ una trivialización admisible. Sean $s\in\mathbb{R}$ y $1<p<\infty$. Para $u\in\mathcal{D}'(M)$, definimos

$$H^{s,p}_{\mathcal{T}}(M) := \left\{ u\in\mathcal{D}'(M) \,\middle|\, \left(\sum_{i\in I}\left\|\widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} <\infty \right\},$$

con la norma

$$\|u\|_{H^{s,p}_{\mathcal{T}}(M)} := \left(\sum_{i\in I}\left\|\widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La tilde indica la extensión por cero desde $\varphi_i(U_i)$ hasta $\mathbb{R}^n$; está bien definida por la función de corte auxiliar de (B3).

En general, los espacios $H^{s,p}_{\mathcal{T}}(M)$ dependen de la trivialización elegida y si $M$ no es una variedad de geometría acotada, podrían no tener propiedades funcionales deseables. En el caso de variedades riemannianas de geometría acotada y trivializaciones admisibles, todos estos espacios de Sobolev coinciden y tienen buenas propiedades como veremos más adelante.

**Lema 13.3.4.** (Transferencia uniforme entre dos localizaciones) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada. Sean

$$\mathcal{T} = (U_i,\varphi_i,h_i)_{i\in I}, \qquad \mathcal{T}^\sharp = (U_j^\sharp,\varphi_j^\sharp,h_j^\sharp)_{j\in J}$$

dos trivializaciones admisibles de $M$. Sean $(\chi_i)_{i\in I}$ y $(\chi_j^\sharp)_{j\in J}$ familias de funciones de corte auxiliares, de modo que

$$\operatorname{supp}(\chi_i)\Subset U_i, \qquad \operatorname{supp}(\chi_j^\sharp)\Subset U_j^\sharp,$$

y cada función vale uno en una vecindad del soporte del elemento correspondiente de la partición de la unidad. Para $U_i\cap U_j^\sharp\neq\varnothing$, pongamos

$$\Omega_{ij} := \varphi_i(U_i\cap U_j^\sharp), \qquad \Omega_{ji}^\sharp := \varphi_j^\sharp(U_i\cap U_j^\sharp)$$

y

$$\Phi_{ji} := \varphi_j^\sharp\circ\varphi_i^{-1} : \Omega_{ij}\longrightarrow\Omega_{ji}^\sharp.$$

La función

$$\eta_{ij} := (h_i\chi_j^\sharp)\circ\varphi_i^{-1}$$

tiene soporte compacto en $\Omega_{ij}$. Denotamos por $\widetilde{\eta}_{ij}\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ su extensión por cero.
Para una distribución $v\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la expresión $v\circ\Phi_{ji}$ significa el pullback de $v\restriction_{\Omega_{ji}^\sharp}$ por $\Phi_{ji}$, definido mediante

$$\langle v\circ\Phi_{ji},\varphi\rangle_{\Omega_{ij}} := \left\langle v, \widetilde{(\varphi\circ\Phi_{ji}^{-1})\left|\det D\Phi_{ji}^{-1}\right|}\right\rangle_{\mathbb{R}^n}, \qquad \varphi\in C_c^\infty(\Omega_{ij}). \tag{13.17}$$

La tilde del segundo miembro denota la extensión por cero desde $\Omega_{ji}^\sharp$ hasta $\mathbb{R}^n$. Es suave porque la función

que se extiende tiene soporte compacto en $\Omega_{ji}^{\sharp}$. Definimos

$$P_{ij}v := \widetilde{\eta_{ij}(v \circ \Phi_{ji})}, \tag{13.18}$$

donde la tilde del miembro derecho indica la extensión por cero desde $\Omega_{ij}$ hasta $\mathbb{R}^n$.
Si $A^s(\mathbb{R}^n)$ es uno de los espacios

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n), \qquad F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \qquad B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$$

en los rangos de Banach del Lema 6.4.3, existe una constante $C > 0$, independiente de $i$ y $j$, tal que

$$\|P_{ij}v\|_{A^s(\mathbb{R}^n)} \leq C\|v\|_{A^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{13.19}$$

Además, para toda $u \in \mathcal{D}'(M)$,

$$P_{ij}\left(\widetilde{(h_j^{\sharp}u) \circ (\varphi_j^{\sharp})^{-1}}\right) = \widetilde{(h_i h_j^{\sharp}u) \circ \varphi_i^{-1}}. \tag{13.20}$$

*Demostración.* El soporte de $h_i\chi_j^{\sharp}$ está contenido en

$$\operatorname{supp}(h_i) \cap \operatorname{supp}(\chi_j^{\sharp}) \Subset U_i \cap U_j^{\sharp}.$$

Por ello, $\eta_{ij}$ se anula en una vecindad relativa de $\partial\Omega_{ij}$ y su extensión por cero es suave. En $\Omega_{ij}$ se tiene

$$\eta_{ij} = (h_i \circ \varphi_i^{-1})\left[(\chi_j^{\sharp} \circ (\varphi_j^{\sharp})^{-1}) \circ \Phi_{ji}\right].$$

La regla de Leibniz, las cotas de (B2) y (B3), y la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 muestran que, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $C_k > 0$, independiente de $i$ y $j$, tal que

$$\|\widetilde{\eta}_{ij}\|_{BC^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_k.$$

Las derivadas de $\Phi_{ji}$ y de $\Phi_{ji}^{-1}$ se controlan uniformemente por (B1) y por la Observación 13.1.20.
Sea $K$ una cota común para las entradas de $D\Phi_{ji}$ y $D\Phi_{ji}^{-1}$ en todos los traslapes. La fórmula de Leibniz para el determinante da

$$|\det D\Phi_{ji}| \leq n!K^n.$$

Además,

$$\frac{1}{|\det D\Phi_{ji}(x)|} = |\det D\Phi_{ji}^{-1}(\Phi_{ji}(x))| \leq n!K^n.$$

Así, los jacobianos están acotados por arriba y separados uniformemente de cero. Para aplicar la versión localizada del lema de cambios de coordenadas también comprobamos sus márgenes. Elegimos los cortes según el Lema 13.1.15. El soporte de $h_i$ está en la región donde $\chi_i = 1$, y el soporte de $\chi_j^{\sharp}$ está separado del borde de su carta por una distancia fija. Las cotas de las primeras derivadas de las cartas y sus inversas convierten estos dos márgenes en una bola de radio común $\rho > 0$ alrededor de cada punto del soporte de $\eta_{ij}$, contenida en $\Omega_{ij}$, y en un margen análogo en la carta $j$. Para comprobar la primera afirmación se sigue un segmento coordenado desde ese punto: mientras su imagen permanezca en ambas cartas, su velocidad

en la segunda está uniformemente acotada; un segmento de longitud menor que el margen dividido por esa cota no puede alcanzar el borde de la segunda carta. El margen de la primera asegura que el segmento está definido durante todo ese recorrido.

La condición (B1) en orden cero sitúa todos los dominios coordenados en una bola euclidiana fija. Podemos cubrir el soporte de $\eta_{ij}$ por un número uniformemente acotado de bolas de radio $\rho/4$, con cortes subordinados cuyas derivadas tienen cotas uniformes. En cada bola mayor, de radio $\rho$, se cumplen las hipótesis de la versión localizada del Lema 6.4.3. Para el orden $s$ fijamos un entero $k > |s| + n + 1$; las derivadas de los multiplicadores hasta orden $k$ y de los cambios hasta orden $k+1$ están controladas por (B1)–(B3). La estimación local, sumada sobre esa cubierta finita uniforme, prueba (13.19) con una constante común.

Por último, $\chi_j^\sharp h_j^\sharp = h_j^\sharp$. En $\Omega_{ij}$, la definición del pullback de distribuciones y la compatibilidad de las representaciones coordenadas dan

$$\eta_{ij}\left[\widetilde{\left((h_j^\sharp u)\circ(\varphi_j^\sharp)^{-1}\right)}\circ\Phi_{ji}\right] = (h_i\chi_j^\sharp h_j^\sharp u)\circ\varphi_i^{-1}.$$

Ambos miembros tienen soporte compacto en $\Omega_{ij}$. Extenderlos por cero hasta $\mathbb{R}^n$ prueba (13.20). □

**Teorema 13.3.5.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada y $\mathcal{T} = (U_i,\varphi_i,h_i)_{i\in I}$ una trivialización admisible de $M$. Sean $s\in\mathbb{R}$ y $1<p<\infty$. Entonces

$$H_{\mathcal{T}}^{s,p}(M) = H^{s,p}(M),$$

donde $H^{s,p}(M)$ está definido como en la Definición 13.3.1. Más precisamente, existen constantes $c,C>0$, independientes de $u$, tales que

$$c\|u\|_{H^{s,p}(M)} \le \|u\|_{H_{\mathcal{T}}^{s,p}(M)} \le C\|u\|_{H^{s,p}(M)}.$$

*Demostración.* Sea

$$\mathcal{T}^{\mathrm{geo}} = (U_j^{\mathrm{geo}},\varphi_j^{\mathrm{geo}},h_j^{\mathrm{geo}})_{j\in J}$$

la trivialización del Teorema 13.1.22. Para $i\in I$ y $j\in J$, pongamos

$$J_i := \{j\in J \mid U_i\cap U_j^{\mathrm{geo}}\neq\varnothing\},\qquad I_j := \{i\in I \mid U_i\cap U_j^{\mathrm{geo}}\neq\varnothing\}.$$

Las dos cotas cruzadas de (B1), transferidas al atlas geodésico mediante la Observación 13.1.20, proporcionan enteros $N_1,N_2$ tales que

$$\#J_i\le N_1,\qquad \#I_j\le N_2$$

para todos los índices.

La identidad localmente finita $\sum_{j\in J} h_j^{\mathrm{geo}} = 1$ puede multiplicarse por la distribución $h_i u$. Después de pasar a la carta $i$ y extender cada componente por cero, obtenemos en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}} = \sum_{j\in J_i}\widetilde{(h_i h_j^{\mathrm{geo}} u)\circ\varphi_i^{-1}}.$$

El Lema 13.3.4, aplicado con $\mathcal{T}^\sharp = \mathcal{T}^{\mathrm{geo}}$, da una constante $C_0 > 0$, independiente de $i$ y $j$, tal que

$$\left\| \widetilde{(h_i h_j^{\mathrm{geo}} u) \circ \varphi_i^{-1}} \right\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le C_0 \left\| \widetilde{(h_j^{\mathrm{geo}} u) \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}} \right\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Pongamos

$$a_j := \left\| \widetilde{(h_j^{\mathrm{geo}} u) \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}} \right\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como cada suma tiene a lo más $N_1$ términos,

$$\left\| \widetilde{(h_i u) \circ \varphi_i^{-1}} \right\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \le C_0^p N_1^{p-1} \sum_{j \in J_i} a_j^p.$$

Al sumar sobre $i$ y reordenar las series no negativas mediante el Teorema de Tonelli B.6.17, resulta

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_T^{s,p}(M)}^p &\le C_0^p N_1^{p-1} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} a_j^p \\ &= C_0^p N_1^{p-1} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_j^p \\ &\le C_0^p N_1^{p-1} N_2 \|u\|_{H^{s,p}(M)}^p. \end{aligned}$$

El factor $N_1$ controla el número de términos en cada localización y $N_2$ controla cuántas veces aparece una localización geodésica en la suma global.
Para la desigualdad inversa usamos $\sum_{i \in I} h_i = 1$. En la carta geodésica $j$,

$$\widetilde{(h_j^{\mathrm{geo}} u) \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}} = \sum_{i \in I_j} \widetilde{(h_j^{\mathrm{geo}} h_i u) \circ (\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}}.$$

Se aplica el mismo lema con las dos trivializaciones intercambiadas y se repite el conteo anterior. Así,

$$\|u\|_{H^{s,p}(M)} \le C' \|u\|_{H_T^{s,p}(M)}.$$

Las dos estimaciones prueban la igualdad de los espacios como subespacios de $\mathcal{D}'(M)$ y, para todo $u$ de ese espacio,

$$(C')^{-1} \|u\|_{H^{s,p}(M)} \le \|u\|_{H_T^{s,p}(M)} \le C_0 N_1^{1-\frac{1}{p}} N_2^{\frac{1}{p}} \|u\|_{H^{s,p}(M)}.$$

□

Ya que hemos definido los espacios de Sobolev fraccionarios en variedades riemannianas, nos centraremos en los espacios de Besov y de Triebel–Lizorkin. En $\mathbb{R}^n$ suele darse prioridad a los espacios de Besov, que a primera vista parecen más simples que los de Triebel–Lizorkin. En una variedad no compacta la situación cambia: los espacios de Besov no satisfacen el principio fuerte de localización con suma exterior $\ell^p$ cuando el índice fino es distinto de $p$, como se demostró en el Teorema 6.4.4; véase también [146, Teorema 2.4.7(i)]. Por ello definiremos primero los espacios de Triebel–Lizorkin mediante localización y construiremos después los espacios de Besov por interpolación real.

**Definición 13.3.6.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada, sea $\mathcal{T} = (U_i,\varphi_i,h_i)_{i\in I}$ una trivialización admisible y sea $s\in\mathbb{R}$.

(a) Si $1\le p<\infty$ y $1\le q\le\infty$, definimos

$$F^s_{p,q,\mathcal{T}}(M) := \left\{ u\in\mathcal{D}'(M) \,\middle|\, \|u\|_{F^s_{p,q,\mathcal{T}}(M)}<\infty \right\},$$

donde

$$\|u\|_{F^s_{p,q,\mathcal{T}}(M)} := \left( \sum_{i\in I} \left\| \widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}} \right\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(b) Si $1\le p<\infty$, $1\le q\le\infty$ y $-\infty<s_0<s<s_1<\infty$, escribimos $s=(1-\Theta)s_0+\Theta s_1$, con $0<\Theta<1$, y definimos

$$B^s_{p,q,\mathcal{T}}(M) := \left(F^{s_0}_{p,p,\mathcal{T}}(M), F^{s_1}_{p,p,\mathcal{T}}(M)\right)_{\Theta,q}.$$

En el primer inciso, la tilde indica la extensión por cero de la componente coordenada desde $\varphi_i(U_i)$ hasta $\mathbb{R}^n$. En los rangos indicados, las expresiones anteriores son normas.

**Observación 13.3.7.** (a) Si $\mathcal{T}$ es la trivialización geodésica del Teorema 13.1.22, omitiremos la referencia a $\mathcal{T}$ y escribiremos simplemente

$$F^s_{p,q}(M) \qquad \text{y} \qquad B^s_{p,q}(M).$$

(b) En el intervalo adoptado aquí las expresiones anteriores definen normas. La teoría de Triebel admite también $0<p<1$ o $0<q<1$, pero exige métodos atómicos de espacios cuasi-Banach que no se necesitarán en este libro.

(c) La definición de $F^s_{p,q,\mathcal{T}}(M)$ se hace mediante localización en coordenadas. En cambio, para los espacios de Besov adoptamos la definición por interpolación real, pues en general no se dispone del mismo principio de localización que en el caso de los espacios de Triebel–Lizorkin.

(d) Para todo $s\in\mathbb{R}$ y todo $1\le p<\infty$, se tiene

$$B^s_{p,p,\mathcal{T}}(M) = F^s_{p,p,\mathcal{T}}(M)$$

y existen constantes $c_{s,p,\mathcal{T}}, C_{s,p,\mathcal{T}}>0$ tales que

$$c_{s,p,\mathcal{T}}\|u\|_{F^s_{p,p,\mathcal{T}}(M)} \le \|u\|_{B^s_{p,p,\mathcal{T}}(M)} \le C_{s,p,\mathcal{T}}\|u\|_{F^s_{p,p,\mathcal{T}}(M)}$$

para todo $u$ del espacio común.

(e) La definición de $B^s_{p,q,\mathcal{T}}(M)$ no depende de la elección de $s_0$ y $s_1$, siempre que

$$-\infty<s_0<s<s_1<\infty \qquad \text{y} \qquad s=(1-\Theta)s_0+\Theta s_1.$$

(f) De manera alternativa, pudimos haber definido

$$B^s_{p,p}(M) := (H^{s_0,p}(M), H^{s_1,p}(M))_{\Theta,p},$$

donde $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $0 < \Theta < 1$ y $s = (1-\Theta)s_0 + \Theta s_1$.

*Justificación de los incisos* (d)–(f). Para aplicar la interpolación, construiremos operadores de análisis y síntesis independientes del orden, que definan una retracción para todos los espacios considerados. Fijemos las funciones de corte auxiliares $\chi_i$ de (B3), pongamos $\Omega_i := \varphi_i(U_i)$ y, para $r \in \mathbb{R}$, escribamos

$$\mathbb{X}_r := \ell^p\big(I; F^r_{p,p}(\mathbb{R}^n)\big).$$

El operador de análisis es

$$\mathcal{S}u := \Big(\widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}}\Big)_{i\in I}.$$

Por definición, $\mathcal{S}\colon F^r_{p,p,\mathcal{T}}(M) \to \mathbb{X}_r$ es una isometría.
Definamos con precisión la síntesis. En la carta $i$ sea

$$a_i(x) := \sqrt{\det\big(\mathbf{g}^{(i)}(\varphi_i^{-1}(x))\big)}.$$

Si $z \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto contenido en $\Omega_i$, la distribución $\mathcal{E}_i z \in \mathcal{D}'(M)$ queda determinada por

$$\langle \mathcal{E}_i z, \psi\rangle := \Big\langle z, a_i\big((\psi\restriction_{U_i})\circ\varphi_i^{-1}\big)\Big\rangle, \qquad \psi \in C^\infty_c(M).$$

La expresión está bien definida porque sólo usa la función de prueba en una vecindad del soporte compacto de $z$; esto es la extensión de la acción establecida en la Proposición 10.2.32. Para $v = (v_i)_{i\in I}$ ponemos

$$\mathcal{R}v := \sum_{i\in I} \mathcal{E}_i\big(\widetilde{\chi}_i v_i\big), \qquad \widetilde{\chi}_i := \widetilde{\chi_i\circ\varphi_i^{-1}}.$$

La suma define una distribución: sobre el soporte de una función de prueba sólo intervienen finitos términos. Como $\chi_i = 1$ cerca de $\operatorname{supp}(h_i)$ y $\sum_{i\in I} h_i = 1$, se obtiene, primero sobre cada función de prueba y por lo tanto en $\mathcal{D}'(M)$,

$$\mathcal{R}\mathcal{S}u = \sum_{i\in I} h_i u = u.$$

Veamos que la síntesis es continua en cada orden. Al localizar $\mathcal{R}v$ con $h_j$, sólo aparecen los índices

$$I_j := \{i \in I \mid U_i \cap U_j \neq \varnothing\}.$$

La familia $I_j$ tiene cardinal uniformemente acotado. Cada sumando, escrito en la carta $j$, se obtiene de $\widetilde{\chi}_i v_i$ mediante un cambio de coordenadas y la multiplicación por una función suave cuyas derivadas están uniformemente acotadas. El Lema 13.3.4 da, con una constante $C_r$ independiente de $i$ y $j$,

$$\Big\|\widetilde{(h_j\mathcal{E}_\rangle(\widetilde{\ }_\rangle\sqsubseteq_\rangle))\circ\varphi_|^{-}\chi}\Big\|_{F^r_{p,p}(\mathbb{R}^n)} \le C_r\|v_i\|_{F^r_{p,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

La desigualdad de Hölder para la suma finita, seguida de Tonelli, muestra entonces que existe $C_r' > 0$ tal que

$$\|\mathcal{R}v\|_{F^r_{p,p,\mathcal{T}}(M)} \le C_r'\|v\|_{\mathbb{X}_r}.$$

Así, $F^r_{p,p,\mathcal{T}}(M)$ es una retracción de $\mathbb{X}_r$, y los operadores $\mathcal{S}$ y $\mathcal{R}$ no dependen de $r$. Además, $\mathcal{SR}$ es una proyección continua cuya imagen cerrada es $\mathcal{S}(F^r_{p,p,\mathcal{T}}(M))$. Como $\mathbb{X}_r$ es de Banach y $\mathcal{S}$ es isométrico, también lo es $F^r_{p,p,\mathcal{T}}(M)$. Esto comprueba que los pares que se interpolan a continuación son pares de Banach.
Sean ahora $r_0 < r_1$, $0 < \eta < 1$ y $r = (1-\eta)r_0 + \eta r_1$. La identidad euclidiana

$$(F^{r_0}_{p,p}(\mathbb{R}^n), F^{r_1}_{p,p}(\mathbb{R}^n))_{\eta,p} = F^r_{p,p}(\mathbb{R}^n)$$

se obtiene de la descomposición diádica, de $B^t_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^t_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ y de la Proposición 5.7.18; es válida también para $p = 1$. La misma proposición da

$$(\mathbb{X}_{r_0}, \mathbb{X}_{r_1})_{\eta,p} = \mathbb{X}_r.$$

El Teorema 5.3.1, aplicado a $\mathcal{S}$ y $\mathcal{R}$, conserva la identidad $\mathcal{RS} = I$ en los espacios interpolados. Por consiguiente,

$$(F^{r_0}_{p,p,\mathcal{T}}(M), F^{r_1}_{p,p,\mathcal{T}}(M))_{\eta,p} = F^r_{p,p,\mathcal{T}}(M) \tag{13.21}$$

con equivalencia de normas. Tomando $r_0 = s_0$, $r_1 = s_1$ y $\eta = \Theta$ se prueba el inciso (d).
Para el inciso (e), consideremos dos pares de extremos admisibles. Elegimos $a < s < b$ de modo que los cuatro extremos queden en $(a,b)$. Por (13.21), cada espacio extremo es un espacio $(F^a_{p,p,\mathcal{T}}, F^b_{p,p,\mathcal{T}})_{\rho,p}$, con el parámetro $\rho$ determinado afínmente por su orden. El Teorema de reiteración real 5.5.2 reduce las dos definiciones de $B^s_{p,q,\mathcal{T}}(M)$ al mismo espacio

$$(F^a_{p,p,\mathcal{T}}(M), F^b_{p,p,\mathcal{T}}(M))_{\rho_s,q}, \qquad \rho_s = \frac{s-a}{b-a}.$$

Esto prueba la independencia de los extremos, incluida la equivalencia de las normas resultantes.
Finalmente, si $1 < p < \infty$, el mismo análisis y la misma síntesis son continuos al reemplazar $F^r_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ por $H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$; la prueba usa exactamente las estimaciones de multiplicación, cambio de coordenadas y solapamiento anteriores. El inciso (a) del Teorema 6.3.11 identifica la interpolación real de los espacios euclidianos de Bessel con $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$. Al interpolar la retracción se obtiene

$$(H^{s_0,p}(M), H^{s_1,p}(M))_{\Theta,p} = F^s_{p,p}(M) = B^s_{p,p}(M),$$

que es el inciso (f). □

Estos espacios no dependen de la trivialización elegida (pues la variedad riemanniana es de geometría acotada) como veremos a continuación:

**Teorema 13.3.8.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada y sea $\mathcal{T} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i\in I}$ una trivialización admisible. Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$ y $1 \le q \le \infty$. Entonces

$$F^s_{p,q,\mathcal{T}}(M) = F^s_{p,q}(M) \qquad \text{y} \qquad B^s_{p,q,\mathcal{T}}(M) = B^s_{p,q}(M)$$

y existen constantes positivas $c_F, C_F, c_B, C_B$, dependientes de $s, p, q$ y de los datos uniformes de las dos trivializaciones, pero no de $u$, tales que

$$c_F\|u\|_{F^s_{p,q}(M)} \le \|u\|_{F^s_{p,q,\mathcal{T}}(M)} \le C_F\|u\|_{F^s_{p,q}(M)}$$

y

$$c_B\|u\|_{B^s_{p,q}(M)} \le \|u\|_{B^s_{p,q,\mathcal{T}}(M)} \le C_B\|u\|_{B^s_{p,q}(M)}.$$

*Demostración.* Para la escala $F$ repetimos el conteo de la prueba del Teorema 13.3.5. Si $\mathcal{T}^{\mathrm{geo}}$ es la trivialización geodésica, en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}} = \sum_{j\in J_i} \widetilde{(h_i h_j^{\mathrm{geo}} u)\circ\varphi_i^{-1}}.$$

El Lema 13.3.4, con $A^s = F^s_{p,q}$, proporciona

$$\left\|\widetilde{(h_i h_j^{\mathrm{geo}} u)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le C_0 \left\|\widetilde{(h_j^{\mathrm{geo}} u)\circ(\varphi_j^{\mathrm{geo}})^{-1}}\right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

La constante $C_0$ depende de $s,p,q$ y de las cotas uniformes de las funciones de corte, los cambios de coordenadas y sus jacobianos, pero no de $i$ ni de $j$. Si $N_1, N_2$ son las dos multiplicidades cruzadas, la suma exterior $\ell^p$ da

$$\|u\|^p_{F^s_{p,q,\mathcal{T}}(M)} \le C_0^p N_1^{p-1} N_2 \|u\|^p_{F^s_{p,q}(M)}.$$

Al intercambiar las trivializaciones se obtiene la estimación inversa. El argumento sigue siendo válido cuando $q=\infty$, pues se aplica a las normas locales, que son números no negativos, mientras que la suma exterior conserva el exponente $p<\infty$.

Para la escala $B$, fijemos $s_0 < s < s_1$ y $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. Las identidades sobre el espacio común $\mathcal{D}'(M)$ definen isomorfismos compatibles

$$F^{s_\nu}_{p,p,\mathcal{T}}(M) \longrightarrow F^{s_\nu}_{p,p}(M), \qquad \nu\in\{0,1\}.$$

El Teorema de interpolación de operadores para el método $K$ 5.3.1, aplicado también a la identidad inversa, da

$$\left(F^{s_0}_{p,p,\mathcal{T}}, F^{s_1}_{p,p,\mathcal{T}}\right)_{\theta,q} = \left(F^{s_0}_{p,p}, F^{s_1}_{p,p}\right)_{\theta,q}$$

con normas controladas en ambos sentidos por las normas de las identidades en los dos extremos y por sus inversas. Éstas son precisamente las constantes $c_B, C_B$ del enunciado. Ésta es la igualdad de los espacios de Besov del enunciado. El Teorema de reiteración 5.5.2 prueba además que la construcción no depende de los extremos auxiliares. □

### 13.3.1 Comparación con las definiciones intrínsecas

**Observación 13.3.9.** (El calor cuando hay varias componentes) En este capítulo no suponemos que $M$ sea conexa. Sus componentes $(M_\nu)_{\nu\in A}$ forman una familia a lo más numerable, porque son abiertas y $M$ tiene una base numerable. Cada una es completa por la Observación 13.1.2. Para aplicar las construcciones del capítulo del calor usamos

$$L^p(M,\mathbf{E}) = \ell^p\left(A; L^p(M_\nu, \mathbf{E}|_{M_\nu})\right), \qquad 1\le p<\infty,$$

y definimos el semigrupo por componentes. Es contractivo, pues cada semigrupo componente lo es. Si $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_\nu)_{\nu\in A}$, entonces

$$\|P_t^{\mathbf{E}}\mathbf{u} - \mathbf{u}\|^p_{L^p(M,\mathbf{E})} = \sum_{\nu\in A} \|P_t^{\mathbf{E}|_{M_\nu}}\mathbf{u}_\nu - \mathbf{u}_\nu\|^p_{L^p(M_\nu,\mathbf{E}\restriction_{M_\nu})} \longrightarrow 0:$$

cada sumando tiende a cero y está acotado por $2^p\|\mathbf{u}_\nu\|^p_{L^p(M_\nu,\mathbf{E}\restriction_{M_\nu})}$, una serie convergente. Así se conserva la continuidad fuerte, también para $p=1$. Las proyecciones a cada componente son continuas y conmutan con las integrales de Bochner que definen los potenciales. Por tanto, las escalas intrínsecas se construyen con el mismo semigrupo componente a componente. Las estimaciones siguientes usan constantes independientes de $\nu$, pues las cotas geométricas son uniformes sobre todo $M$. En el caso escalar se toma el haz trivial.

La comparación se apoyará en tres mecanismos distintos. El primero es la transferencia uniforme entre cartas, ya establecida en el Lema 13.3.4. El segundo compara, en órdenes enteros, derivadas parciales y derivadas covariantes. El tercero interpola esas identificaciones enteras y las contrasta con la escala generada por el laplaciano. Comenzamos por precisar el papel de las particiones cuadráticas.

**Lema 13.3.10.** (Equivalencia de la localización cuadrática) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada y sea $\mathcal{Q}=(U_i,\varphi_i,h_i)_{i\in I}$ un sistema cuadrático de localización admisible, sea $\rho_i:=h_i^2$ y sea $\mathcal{T}_\mathcal{Q}=(U_i,\varphi_i,\rho_i)_{i\in I}$ la trivialización asociada. Para $s\in\mathbb{R}$, $1<p<\infty$ y $1\le q\le\infty$ existen constantes $c_H,C_H,c_F,C_F>0$, independientes de $u$, tales que

$$c_H\|u\|_{H^{s,p}_{\mathcal{T}_\mathcal{Q}}(M)}\le\left(\sum_{i\in I}\left\|\widetilde{(h_iu)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac1p}\le C_H\|u\|_{H^{s,p}_{\mathcal{T}_\mathcal{Q}}(M)}$$

y

$$c_F\|u\|_{F^{s}_{p,q,\mathcal{T}_\mathcal{Q}}(M)}\le\left(\sum_{i\in I}\left\|\widetilde{(h_iu)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|^p_{F^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac1p}\le C_F\|u\|_{F^{s}_{p,q,\mathcal{T}_\mathcal{Q}}(M)}.$$

Cuando $q=p$, la segunda comparación proporciona también la localización de $B^s_{p,p}(M)$.

*Demostración.* Fijemos una de las dos elecciones

$$A^s(\mathbb{R}^n)=H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\qquad\text{o}\qquad A^s(\mathbb{R}^n)=F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$$

y pongamos

$$N_h(u):=\left(\sum_{i\in I}\left\|\widetilde{(h_iu)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|^p_{A^s(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac1p},$$

$$N_\rho(u):=\left(\sum_{i\in I}\left\|\widetilde{(\rho_iu)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|^p_{A^s(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac1p}.$$

Por definición, $N_\rho$ es la norma asociada a $\mathcal{T}_\mathcal{Q}$. Como $\operatorname{supp}(h_i)\Subset U_i$, la función $h_i\circ\varphi_i^{-1}$ tiene una extensión por cero $\widetilde{h_i\circ\varphi_i^{-1}}\in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, y

$$\widetilde{(\rho_iu)\circ\varphi_i^{-1}}=\widetilde{h_i\circ\varphi_i^{-1}}\,\widetilde{(h_iu)\circ\varphi_i^{-1}}.$$

El teorema de multiplicadores del Lema 6.4.3 y las cotas uniformes de (B2) dan una constante $K_0>0$, independiente de $i\in I$, tal que

$$\left\|\widetilde{(\rho_iu)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|_{A^s(\mathbb{R}^n)}\le K_0\left\|\widetilde{(h_iu)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|_{A^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Al elevar a la potencia $p$ y sumar sobre $i \in I$, obtenemos

$$N_\rho(u) \le K_0 N_h(u). \tag{13.22}$$

Para la estimación inversa usamos la identidad localmente finita

$$\sum_{j\in I} \rho_j = 1.$$

Para cada $i \in I$, definimos

$$I_i := \{j \in I \mid U_i \cap U_j \neq \varnothing\}.$$

La finitud uniforme de la cubierta proporciona $L \in \mathbb{N}$ tal que $\#I_i \le L$ para todo $i \in I$. Por lo tanto,

$$\widetilde{(h_i u)\circ \varphi_i^{-1}} = \sum_{j\in I_i} \widetilde{(h_i \rho_j u)\circ \varphi_i^{-1}} \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{13.23}$$

Fijemos $j \in I_i$ y sea $\chi_j$ la función de corte auxiliar asociada a $\rho_j$. En el traslape ponemos

$$\Omega_{ij} := \varphi_i(U_i \cap U_j), \qquad \Phi_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}.$$

De acuerdo con (13.17), definimos

$$P_{ij}^{h,\rho} z := \big(\widetilde{(h_i\chi_j)\circ\varphi_i^{-1}}\big)(z \circ \Phi_{ji}).$$

El soporte de $(h_i\chi_j)\circ\varphi_i^{-1}$ es compacto en $\Omega_{ij}$. La demostración del Lema 13.3.4, que para esta estimación no usa la identidad de partición de la unidad, proporciona una constante $K_1 > 0$, independiente de $i$ y $j$, tal que

$$\|P_{ij}^{h,\rho} z\|_{A^s(\mathbb{R}^n)} \le K_1 \|z\|_{A^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{13.24}$$

Como $\chi_j\rho_j = \rho_j$,

$$P_{ij}^{h,\rho}\left(\widetilde{(\rho_j u)\circ\varphi_j^{-1}}\right) = \widetilde{(h_i\rho_j u)\circ\varphi_i^{-1}}.$$

Las identidades anteriores implican

$$\left\|\widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|_{A^s(\mathbb{R}^n)} \le K_1 \sum_{j\in I_i} \left\|\widetilde{(\rho_j u)\circ\varphi_j^{-1}}\right\|_{A^s(\mathbb{R}^n)}.$$

La desigualdad de Hölder para una suma de a lo más $L$ términos da

$$\left(\sum_{j\in I_i} a_j\right)^p \le L^{p-1} \sum_{j\in I_i} a_j^p$$

para toda familia de números no negativos $(a_j)_{j\in I_i}$. Al aplicar esta desigualdad y sumar sobre $i \in I$, obtene-

mos

$$\begin{aligned} N_h(u)^p &\le K_1^p L^{p-1} \sum_{i\in I}\sum_{j\in I_i} \left\| \widetilde{(\rho_j u)\circ\varphi_j^{-1}} \right\|_{A^s(\mathbb{R}^n)}^p \\ &= K_1^p L^{p-1} \sum_{j\in I} \#I_j \left\| \widetilde{(\rho_j u)\circ\varphi_j^{-1}} \right\|_{A^s(\mathbb{R}^n)}^p \\ &\le K_1^p L^p N_\rho(u)^p. \end{aligned}$$

La igualdad intermedia usa la simetría de la relación $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. En consecuencia,

$$N_h(u) \le K_1 L\, N_\rho(u). \tag{13.25}$$

Las estimaciones (13.22) y (13.25) prueban las dos comparaciones. Para $A^s = F^s_{p,p}$ se usa además la identificación euclidiana

$$F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$$

del Teorema 6.3.14. □

**Proposición 13.3.11.** (Retracción, interpolación y dualidad distribucional) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada, $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 < s_1$, $1 < p < \infty$ y $0 < \theta < 1$. Si $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, entonces

$$[H^{s_0,p}(M), H^{s_1,p}(M)]_\theta = H^{s,p}(M) \tag{13.26}$$

y existen constantes $c_I, C_I > 0$, dependientes de $s_0, s_1, \theta, p$ y de los datos uniformes de la localización, tales que

$$c_I \|u\|_{H^{s,p}(M)} \le \|u\|_{[H^{s_0,p}(M),H^{s_1,p}(M)]_\theta} \le C_I \|u\|_{H^{s,p}(M)}.$$

Además, la identificación de las funciones localmente integrables con distribuciones regulares, construida mediante $d\lambda_{\mathbf{g}}$, induce en $C_c^\infty(M)$ el emparejamiento bilineal

$$\langle v, u\rangle_{\mathbf{g}} := T_v(u) = \int_M uv\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad u, v \in C_c^\infty(M). \tag{13.27}$$

Para todo $r \in \mathbb{R}$, este emparejamiento admite una única extensión bilineal continua

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{r,p;\mathbf{g}} \colon H^{-r,p'}(M) \times H^{r,p}(M) \longrightarrow \mathbb{K},$$

y el operador

$$\mathcal{J}_{r,p;\mathbf{g}} \colon H^{-r,p'}(M) \longrightarrow \big(H^{r,p}(M)\big)', \qquad \mathcal{J}_{r,p;\mathbf{g}}(v)(u) := \langle v, u\rangle_{r,p;\mathbf{g}},$$

es un isomorfismo topológico. En particular,

$$\big(H^{r,p}(M)\big)' \cong H^{-r,p'}(M) \tag{13.28}$$

y existen constantes $c_D, C_D > 0$, dependientes de $r, p$ y de los datos uniformes de la localización, tales que

$$c_D \|v\|_{H^{-r,p'}(M)} \le \|\mathcal{J}_{r,p;\mathbf{g}} v\|_{(H^{r,p}(M))'} \le C_D \|v\|_{H^{-r,p'}(M)}.$$

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, el emparejamiento (13.27) no contiene conjugación: es la dualidad distribucional inducida por la medida de Riemann–Lebesgue, no el producto interno hermitiano de $L^2(M)$.

*Demostración.* Partimos de una trivialización geodésica y aplicamos el Lema 13.1.19. Obtenemos un sistema cuadrático admisible

$$\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i\in I}, \qquad \sum_{i\in I} h_i^2 = 1,$$

y funciones de corte auxiliares $(\chi_i)_{i\in I}$ tales que

$$\chi_i = 1 \quad \text{en una vecindad de } \operatorname{supp}(h_i), \qquad \operatorname{supp}(\chi_i) \Subset U_i.$$

Escribamos

$$\Omega_i := \varphi_i(U_i), \qquad a_i(x) := \sqrt{\det\big(\mathbf{g}^{(i)}(\varphi_i^{-1}(x))\big)}, \qquad x \in \Omega_i.$$

La función $\chi_i \circ \varphi_i^{-1}$ tiene soporte compacto en $\Omega_i$. Denotaremos por

$$\widetilde{\chi_i} := \widetilde{\chi_i \circ \varphi_i^{-1}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

su extensión por cero desde $\Omega_i$ hasta $\mathbb{R}^n$.
Antes de definir la síntesis, precisemos cómo se reconstruye una distribución desde una carta. Si $z \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\operatorname{supp}(z) \Subset \Omega_i$, definimos $\mathcal{E}_i z \in \mathcal{D}'(M)$ mediante

$$\langle \mathcal{E}_i z, \psi\rangle := \Big\langle z, a_i \big((\psi \restriction_{U_i}) \circ \varphi_i^{-1}\big)\Big\rangle_{\mathbb{R}^n}, \qquad \psi \in C_c^\infty(M). \tag{13.29}$$

Aunque la función del segundo argumento no tiene necesariamente soporte compacto en $\Omega_i$, sólo se utiliza su restricción a una vecindad de $\operatorname{supp}(z)$. La expresión está bien definida por la extensión de la acción de una distribución con soporte compacto establecida en la Proposición 10.2.32. La definición de las componentes coordenadas de una distribución, dada en la Proposición 10.2.34, implica

$$\big((\mathcal{E}_i z) \restriction_{U_i}\big) \circ \varphi_i^{-1} = z \restriction_{\Omega_i} \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_i). \tag{13.30}$$

En efecto, para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_i)$,

$$\Big\langle \big((\mathcal{E}_i z) \restriction_{U_i}\big) \circ \varphi_i^{-1}, \varphi\Big\rangle = \Big\langle \mathcal{E}_i z, \Big(\frac{\varphi}{a_i} \circ \varphi_i\Big)\Big\rangle = \langle z, \varphi\rangle.$$

Si $z$ es una función localmente integrable con soporte compacto en $\Omega_i$, entonces $\mathcal{E}_i z$ es la distribución regular asociada a la función $z \circ \varphi_i$ en $U_i$, extendida por cero fuera de $U_i$. Esta construcción evita introducir un símbolo de transporte de distribuciones sin haber fijado antes su significado.
Definimos el operador de análisis por

$$\mathcal{S}u := \Big(\widetilde{(h_i u) \circ \varphi_i^{-1}}\Big)_{i\in I}$$

y, para $v = (v_i)_{i\in I}$, el operador de síntesis por

$$\mathcal{R}v := \sum_{i\in I} h_i\, \mathcal{E}_i(\widetilde{\chi}_i v_i). \tag{13.31}$$

El producto $\widetilde{\chi_i} v_i$ tiene soporte contenido en $\operatorname{supp}(\widetilde{\chi_i}) \Subset \Omega_i$, por lo que $\mathcal{E}_i(\widetilde{\chi_i} v_i)$ está definido por (13.29). La suma de (13.31) es localmente finita, pues su $i$-ésimo sumando tiene soporte contenido en $\operatorname{supp}(h_i)$ y la familia $(U_i)_{i\in I}$ es localmente finita.

La Definición 5.5.3 fija el significado de los espacios de sucesiones que usaremos. El Lema 13.3.10, junto con la independencia de la trivialización, muestra que, para cada $r \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{S}\colon H^{r,p}(M) \longrightarrow \ell^p\big(I; H^{r,p}(\mathbb{R}^n)\big)$$

es continuo.

Probemos la continuidad de $\mathcal{R}$. Para $j \in I$, pongamos

$$I_j := \{i \in I \mid U_i \cap U_j \neq \varnothing\}.$$

Existe $L \geq 1$ tal que $\#I_j \leq L$ para todo $j \in I$. Si $i \in I_j$, escribamos

$$\Omega_{ji} := \varphi_j(U_j \cap U_i), \qquad \Phi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\colon \Omega_{ji} \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j),$$

y definamos

$$\eta_{ji} := (h_j h_i \chi_i) \circ \varphi_j^{-1} \in C_c^\infty(\Omega_{ji}).$$

Su soporte es compacto en $\Omega_{ji}$ porque

$$\operatorname{supp}(h_j h_i \chi_i) \subseteq \operatorname{supp}(h_j) \cap \operatorname{supp}(h_i) \Subset U_j \cap U_i.$$

Sea $z \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. En el traslape usamos la restricción de $z$ a $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ y definimos su composición distribucional con $\Phi_{ij}$ mediante

$$\big\langle z \circ \Phi_{ij}, \varphi \big\rangle_{\Omega_{ji}} := \left\langle z, \widetilde{(\varphi \circ \Phi_{ij}^{-1}) \left|\det D\Phi_{ij}^{-1}\right|} \right\rangle_{\mathbb{R}^n}, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\Omega_{ji}). \tag{13.32}$$

Aquí la tilde indica la extensión por cero desde $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ hasta $\mathbb{R}^n$; la extensión es suave porque el soporte de la función está contenido de manera compacta en ese abierto. Para una función localmente integrable, esta definición coincide con la composición ordinaria $x \mapsto z(\Phi_{ij}(x))$. Ponemos

$$P_{ji} z := \widetilde{\eta_{ji}(z \circ \Phi_{ij})},$$

donde la tilde indica la extensión por cero desde $\Omega_{ji}$ hasta $\mathbb{R}^n$. El soporte compacto de $\eta_{ji}$ dentro de $\Omega_{ji}$ garantiza que esta extensión es una distribución bien definida. La transformación de las densidades de volumen en el traslape es

$$a_j(x) = a_i(\Phi_{ij}(x)) \left|\det D\Phi_{ij}(x)\right|, \qquad x \in \Omega_{ji}. \tag{13.33}$$

Al evaluar ambos miembros contra una función de prueba en $C_c^\infty(\Omega_{ji})$, la definición (13.29) y (13.33) proporcionan

$$\big(h_j h_i \widetilde{\mathcal{E}_{\rangle}(\widetilde{\ }_{\rangle} \sqsubset_{\rangle})}\big) \circ \varphi_{|}^{-} \overset{\infty}{\chi} = P_{ji} v_i. \tag{13.34}$$

Las cotas de (B1)–(B3), el teorema de multiplicadores y cambios de coordenadas del Lema 6.4.3, y las cotas uniformes de los jacobianos obtenidas en el Lema 13.3.4 proporcionan una constante $C_r > 0$, independiente

de $i$ y $j$, tal que

$$\|P_{ji} z\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_r \|z\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{13.35}$$

Por (13.34),

$$\left\| \widetilde{(h_j \mathcal{R} v) \circ \varphi_j^{-1}} \right\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_r \sum_{i \in I_j} \|v_i\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Elevamos a la potencia $p$ y usamos que cada suma contiene a lo más $L$ términos. Al sumar sobre $j \in I$ y contar de nuevo los traslapes,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in I} \left\| \widetilde{(h_j \mathcal{R} v) \circ \varphi_j^{-1}} \right\|^p_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad \leq C_r^p L^{p-1} \sum_{j \in I} \sum_{i \in I_j} \|v_i\|^p_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad = C_r^p L^{p-1} \sum_{i \in I} \#I_i \, \|v_i\|^p_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad \leq C_r^p L^p \sum_{i \in I} \|v_i\|^p_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Las dos desigualdades del Lema 13.3.10 comparan el primer miembro con la norma de $H^{r,p}(M)$ mediante $c_H$ y $C_H$. En consecuencia,

$$\|\mathcal{R} v\|_{H^{r,p}(M)} \leq C_r' \|v\|_{\ell^p(I; H^{r,p}(\mathbb{R}^n))}. \tag{13.36}$$

Como $\chi_i = 1$ en una vecindad de $\operatorname{supp}(h_i)$,

$$\widetilde{\chi_i} \widetilde{(h_i u) \circ \varphi_i^{-1}} = \widetilde{(h_i u) \circ \varphi_i^{-1}}.$$

La identidad (13.30), aplicada a la distribución $h_i u$, y la igualdad $\sum_{i \in I} h_i^2 = 1$ dan

$$\mathcal{R} \mathcal{S} u = \sum_{i \in I} h_i^2 u = u.$$

Así, $\mathcal{S}$ es una corretracción y $\mathcal{R}$ una retracción, y el mismo par funciona en todos los órdenes reales. Estas identidades justifican también la completitud antes de interpolar: el operador $\mathcal{S}\mathcal{R}$ es una proyección continua en el espacio de Banach $\ell^p(I; H^{r,p}(\mathbb{R}^n))$, y su imagen es exactamente $\mathcal{S}(H^{r,p}(M))$. Esa imagen es cerrada, pues es el núcleo de $I - \mathcal{S}\mathcal{R}$. Las comparaciones de normas para $\mathcal{S}$ y su inversa $\mathcal{R}$ identifican $H^{r,p}(M)$ con dicha imagen; por tanto, $H^{r,p}(M)$ es un espacio de Banach.

Este par prueba también la densidad de $C_c^\infty(M)$ en $H^{r,p}(M)$. Las sucesiones con soporte finito y componentes en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas en $\ell^p(I; H^{r,p}(\mathbb{R}^n))$. Si una sucesión de ese tipo aproxima a $\mathcal{S}u$, su imagen mediante $\mathcal{R}$ pertenece a $C_c^\infty(M)$ y converge a $u$ en $H^{r,p}(M)$ por (13.36).

Apliquemos la interpolación compleja. La Proposición 5.7.12 y la identidad euclidiana del Teorema 6.3.11 dan

$$\begin{aligned}
&[\ell^p(I; H^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)), \ell^p(I; H^{s_1,p}(\mathbb{R}^n))]_\theta \\
&\qquad = \ell^p(I; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)).
\end{aligned}$$

Interpolamos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{R}$ en los extremos y usamos $\mathcal{R}\mathcal{S} = I$. Las normas de esos operadores en los extremos, sus normas interpoladas y las cotas de localización producen las constantes $c_I, C_I > 0$ del enunciado; en particular, para todo $u$ del espacio común de (13.26),

$$c_I \|u\|_{H^{s,p}(M)} \le \|u\|_{[H^{s_0,p}(M),H^{s_1,p}(M)]_\theta} \le C_I \|u\|_{H^{s,p}(M)}.$$

Pasemos a la dualidad. De acuerdo con la Definición 10.2.10, cada $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ determina la distribución regular

$$T_v(u) = \int_M u v \, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad u \in C_c^\infty(M).$$

Así, (13.27) es la restricción a funciones suaves de la dualidad entre $\mathcal{D}'(M)$ y $\mathcal{D}(M)$ inducida por la medida de Riemann–Lebesgue.

El criterio métrico del Lema 13.2.7 y la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 muestran que $a_i$, $a_i^{-1}$ y todas sus derivadas están acotados por constantes independientes de $i$. Si $v \in \mathcal{D}'(M)$ y $u \in C_c^\infty(M)$, entonces

$$\begin{aligned} v(u) &= v\left(\sum_{i\in I} h_i^2 u\right) \\ &= \sum_{i\in I} \left\langle \widetilde{(h_i v)\circ\varphi_i^{-1}}, a_i \widetilde{\big((h_i u)\circ\varphi_i^{-1}\big)} \right\rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned} \tag{13.37}$$

La suma es finita porque $u$ tiene soporte compacto. La segunda igualdad es precisamente la definición de la componente coordenada de una distribución en la Proposición 10.2.34. Cuando $v$ es suave, aplicamos en cada carta la fórmula de cambio de variables

$$\int_{U_i} \eta \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\Omega_i} (\eta\circ\varphi_i^{-1})(x) a_i(x)\, d\lambda_n(x).$$

La identidad anterior se transforma entonces en

$$\int_M u v \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \sum_{i\in I} \int_{\Omega_i} \big((h_i u)\circ\varphi_i^{-1}\big)\big((h_i v)\circ\varphi_i^{-1}\big) a_i \, dx. \tag{13.38}$$

Sean $v \in H^{-r,p'}(M)$ y $u \in C_c^\infty(M)$. La dualidad euclidiana de la Proposición 6.1.3, la continuidad uniforme de la multiplicación por $a_i$ y la desigualdad de Hölder para sucesiones, aplicadas a (13.37), dan

$$\begin{aligned} |v(u)| &\le C \left(\sum_{i\in I} \left\| \widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}} \right\|^p_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad \cdot \left(\sum_{i\in I} \left\| \widetilde{(h_i v)\circ\varphi_i^{-1}} \right\|^{p'}_{H^{-r,p'}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\le C' \|u\|_{H^{r,p}(M)} \|v\|_{H^{-r,p'}(M)}. \end{aligned}$$

Por la densidad ya probada, $u \mapsto v(u)$ posee una única extensión continua a $H^{r,p}(M)$. Definimos $\langle v, u\rangle_{r,p;\mathbf{g}}$ como el valor de esa extensión. Entonces

$$\langle v, u\rangle_{r,p;\mathbf{g}} = v(u), \qquad v \in H^{-r,p'}(M), \quad u \in C_c^\infty(M), \tag{13.39}$$

y, para dos funciones suaves, el miembro derecho es $\int_M uv\,d\lambda_{\mathbf{g}}$. Esto demuestra explícitamente cómo la medida induce el emparejamiento y prueba la continuidad de $\mathcal{J}_{r,p;\mathbf{g}}$.

Falta probar la sobreyectividad. Sea $\Lambda \in (H^{r,p}(M))'$. Por (13.36), $\Lambda \circ \mathcal{R}$ es continuo en $\ell^p(I; H^{r,p}(\mathbb{R}^n))$. La dualidad euclidiana y el Lema 5.5.4 proporcionan

$$w = (w_i)_{i\in I} \in \ell^{p'}(I; H^{-r,p'}(\mathbb{R}^n))$$

tal que

$$(\Lambda \circ \mathcal{R})(z) = \sum_{i\in I} \langle w_i, z_i\rangle_{\mathbb{R}^n} \tag{13.40}$$

para todo $z = (z_i)_{i\in I}$, y

$$\|w\|_{\ell^{p'}(I;H^{-r,p'}(\mathbb{R}^n))} \le C\|\Lambda\|.$$

Como $\operatorname{supp}(\chi_i) \Subset U_i$, la función

$$(\chi_i \circ \varphi_i^{-1})a_i^{-1}$$

tiene una extensión por cero suave a $\mathbb{R}^n$. Denotémosla por

$$m_i := \widetilde{(\chi_i \circ \varphi_i^{-1})a_i^{-1}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Sus derivadas están acotadas uniformemente. Definimos

$$v := \sum_{i\in I} h_i\, \mathcal{E}_i(m_i w_i). \tag{13.41}$$

La demostración de (13.36), con $-r, p'$ en lugar de $r, p$ y con los multiplicadores $m_i$, prueba que $v \in H^{-r,p'}(M)$ y

$$\|v\|_{H^{-r,p'}(M)} \le C\|w\|_{\ell^{p'}(I;H^{-r,p'}(\mathbb{R}^n))} \le C'\|\Lambda\|. \tag{13.42}$$

Si $u \in C_c^\infty(M)$, sólo un número finito de términos de (13.41) actúa sobre $u$. La definición de $\mathcal{E}_i$ y la regla para multiplicar una distribución por una función suave dan

$$\begin{aligned}
\langle v, u\rangle_{r,p;\mathbf{g}} &= v(u)\\
&= \sum_{i\in I} \left\langle m_i w_i, a_i \widetilde{\left((h_i u)\circ\varphi_i^{-1}\right)} \right\rangle_{\mathbb{R}^n}\\
&= \sum_{i\in I} \left\langle w_i, \widetilde{(\chi_i h_i u)\circ\varphi_i^{-1}} \right\rangle_{\mathbb{R}^n}\\
&= \sum_{i\in I} \left\langle w_i, \widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}} \right\rangle_{\mathbb{R}^n}\\
&= (\Lambda\circ\mathcal{R})(\mathcal{S}u) = \Lambda(u).
\end{aligned}$$

En la tercera igualdad usamos que $\chi_i = 1$ cerca de $\operatorname{supp}(h_i)$, y en la penúltima usamos (13.40) y $\mathcal{R}\mathcal{S} = I$. La densidad de $C_c^\infty(M)$ extiende la igualdad a todo $H^{r,p}(M)$, por lo que $\mathcal{J}_{r,p;\mathbf{g}}$ es sobreyectivo. Si $\mathcal{J}_{r,p;\mathbf{g}}(v) = 0$, entonces $v$ se anula en $C_c^\infty(M)$ y es la distribución nula. Por lo tanto, también es inyectivo. La estimación directa proporciona $C_D$ y (13.42) proporciona $c_D$ en (13.28). □

**Corolario 13.3.12.** (Puente funcional con la localización de Amann) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada y sea $\mathfrak{K}$ el atlas construido en el Teorema 13.2.4, o un atlas uniformemente regular equivalente, y sea $\mathcal{Q}_{\mathfrak{K}} = (U_i,\varphi_i,h_i)_{i\in I}$ el sistema cuadrático de la Proposición 13.2.6. Para $s\in\mathbb{R}$ y $1<p<\infty$, los operadores de análisis y síntesis definidos por

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{K}}u := \Big(\widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}}\Big)_{i\in I}, \qquad \mathcal{R}_{\mathfrak{K}}v := \sum_{i\in I} h_i\,\mathcal{E}_i(\widetilde{\chi}_i v_i)$$

son continuos, satisfacen $\mathcal{R}_{\mathfrak{K}}\mathcal{S}_{\mathfrak{K}} = \mathrm{id}_{H^{s,p}(M)}$ y existen constantes $c_{s,p},C_{s,p},D_{s,p}>0$ tales que

$$c_{s,p}\|u\|_{H^{s,p}(M)} \le \|\mathcal{S}_{\mathfrak{K}}u\|_{\ell^p(I;H^{s,p}(\mathbb{R}^m))} \le C_{s,p}\|u\|_{H^{s,p}(M)} \tag{13.43}$$

y

$$\|\mathcal{R}_{\mathfrak{K}}v\|_{H^{s,p}(M)} \le D_{s,p}\|v\|_{\ell^p(I;H^{s,p}(\mathbb{R}^m))}.$$

Las constantes dependen de $m,s,p$, de la multiplicidad y de las cotas de los cambios de coordenadas y de los cortes hasta el orden exigido por los multiplicadores locales; no dependen de $i$, $u$ ni $v$.
Para $1\le q\le\infty$, la norma localizada con los factores $h_i$ y la norma de $F^s_{p,q}(M)$ definida mediante la partición ordinaria $\rho_i = h_i^2$ satisfacen también las dos desigualdades del Lema 13.3.10, con constantes $c_F,C_F>0$ independientes de $u$; cuando $q=p$, la misma afirmación vale para $B^s_{p,p}(M)$.

*Demostración.* La Proposición 13.2.6 prueba que $\mathcal{Q}_{\mathfrak{K}}$ es admisible. El Lema 13.3.10 proporciona las dos desigualdades de (13.43) y las comparaciones de Triebel–Lizorkin y Besov. La construcción distribucional de $\mathcal{E}_i$, la local finitud de la suma, la cota de síntesis y la identidad $\mathcal{R}\mathcal{S}=I$ se demostraron en la Proposición 13.3.11; su prueba sólo usa la admisibilidad del sistema cuadrático y, por lo tanto, se aplica sin cambios a $\mathcal{Q}_{\mathfrak{K}}$. Las dependencias declaradas son las de los multiplicadores, los cambios de carta y la suma de a lo más $L$ términos que aparecen en aquella prueba. □

La regularidad uniforme de Amann describe así las mismas normas mediante cartas normalizadas. Las comparaciones con el sistema cuadrático permiten usar las estimaciones euclidianas con constantes independientes de la carta. Para hacer lo mismo con secciones necesitamos controlar también la conexión del haz y las matrices de transición de sus marcos.

**Definición 13.3.13.** (Geometría acotada de un haz vectorial) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana de geometría acotada, sin frontera, y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave de rango finito provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, hermitiana cuando el haz es complejo, y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Denotemos por

$$\mathbf{R}^{\mathbf{E}} \in \Gamma\big(\Lambda^2 T^*M\otimes\mathrm{End}(\mathbf{E})\big)$$

la curvatura de $\nabla^{\mathbf{E}}$. Decimos que $(\mathbf{E},\mathbf{h}_{\mathbf{E}},\nabla^{\mathbf{E}})$ es un *haz de geometría acotada* si, para cada $k\in\mathbb{N}_0$, existe $C_k^{\mathbf{E}}>0$ tal que

$$\sup_{x\in M}\Big|(\nabla^{\Lambda^2T^*M\otimes\mathrm{End}(\mathbf{E})})^k\mathbf{R}^{\mathbf{E}}(x)\Big|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le C_k^{\mathbf{E}}. \tag{13.44}$$

Aquí se usa la conexión producto inducida por la conexión de Levi–Civita y por $\nabla^{\mathbf{E}}$.

**Proposición 13.3.14.** (Derivadas covariantes y localización en órdenes enteros) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada, sea $\mathbf{E}\to M$ un haz de geometría acotada de rango $r_{\mathbf{E}}$ y sea

$$\mathcal{T}^{\mathrm{geo}}=(U_i,\varphi_i,h_i)_{i\in I}$$

una trivialización geodésica. En $U_i$ usemos el marco síncrono $\mathbf{e}_i=(\mathbf{e}_{i,1},\dots,\mathbf{e}_{i,r_{\mathbf{E}}})$ de la Proposición 8.2.26 y escribamos

$$\mathbf{u}=\sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}}u_i^a\mathbf{e}_{i,a}.$$

Ponemos $W^{0,p}(M,\mathbf{E}):=L^p(M,\mathbf{E})$. Si $m\in\mathbb{N}_0$ y $1\le p<\infty$, existen constantes $c_{m,p},C_{m,p}>0$ tales que, para todo $\mathbf{u}\in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$,

$$\begin{aligned}c_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}&\le\left(\sum_{i\in I}\sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}}\left\|\widetilde{(h_iu_i^a)\circ\varphi_i^{-1}}\right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac1p}\\&\le C_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.\end{aligned}\tag{13.45}$$

Si además $1<p<\infty$, para el haz trivial de rango uno se obtiene

$$W^{m,p}(M)=H^{m,p}(M)\tag{13.46}$$

y existen constantes $c_{m,p}^{WH},C_{m,p}^{WH}>0$, dependientes de los datos geométricos uniformes pero no de $\mathbf{u}$, tales que

$$c_{m,p}^{WH}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M)}\le\|\mathbf{u}\|_{H^{m,p}(M)}\le C_{m,p}^{WH}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M)}.$$

*Demostración.* En la construcción del Teorema 13.1.22 se tiene $U_i=B_{\mathbf{g}}(p_i,2r)$. Como $3r<\mathrm{inj}(M)$ y $3r$ permanece dentro del radio uniforme del criterio métrico de geometría acotada, la carta normal se prolonga a

$$\widehat{\varphi}_i\colon\widehat{U}_i:=B_{\mathbf{g}}(p_i,3r)\longrightarrow B_{\mathrm{euc}}(0,3r),\qquad\widehat{\varphi}_i\restriction_{U_i}=\varphi_i.$$

Las cotas uniformes de la métrica, de los cambios entre cartas geodésicas y de las derivadas covariantes de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ verifican exactamente las hipótesis de la Proposición 8.2.26. En particular, el marco síncrono $\mathbf{e}_i$ está definido en una vecindad de $\overline{U_i}$ y sus coeficientes de conexión poseen cotas independientes de $i$. Además, cada $(U_i,\varphi_i)$ es una bola coordenada regular en el sentido del Capítulo 9. Podemos aplicar, por lo tanto, el Lema 9.1.44 a toda sección $\mathbf{v}$ con soporte compacto en $U_i$.

Las constantes de aquel lema dependen, hasta orden $m$, de las componentes de la métrica y de su inversa, de la densidad de volumen, de la métrica fibrada en el marco elegido y de los coeficientes de la conexión. En las cartas normales y los marcos síncronos presentes, todas esas cantidades y sus derivadas están acotadas uniformemente por el criterio métrico de geometría acotada y por la Proposición 8.2.26. Como el marco síncrono es ortonormal,

$$\left|\sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}}z^a\mathbf{e}_{i,a}(x)\right|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)}=|z|\qquad(x\in U_i,\ z\in\mathbb{K}^{r_{\mathbf{E}}}),$$

y esta identidad permite sustituir la suma de las normas de las componentes que aparece en el Lema 9.1.44

por su suma $\ell^p$. Así, existen $c_m^{\mathrm{loc}}, C_m^{\mathrm{loc}} > 0$, independientes de $i$, tales que

$$\begin{aligned} c_m^{\mathrm{loc}} \left( \sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}} \left\| \widetilde{v_i^a \circ \varphi_i^{-1}} \right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}} &\le \left( \sum_{q=0}^{m} \|\nabla^q \mathbf{v}\|_{L^p(U_i, T^{(0,q)}(TM)|_{U_i} \otimes \mathbf{E}|_{U_i})}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C_m^{\mathrm{loc}} \left( \sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}} \left\| \widetilde{v_i^a \circ \varphi_i^{-1}} \right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{13.47}$$

Apliquemos esta comparación a $\mathbf{v} = h_i \mathbf{u}$. Para $q \in \{0, \dots, m\}$, la regla de Leibniz iterada para la conexión producto es una suma finita, con coeficientes que dependen sólo de $q$, de términos obtenidos al contraer

$$\nabla^{q-\ell} h_i \otimes \nabla^\ell \mathbf{u}, \qquad \ell \in \{0, \dots, q\}.$$

En particular,

$$|\nabla^q (h_i \mathbf{u})|_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le C_q \sum_{\ell=0}^{q} |\nabla^{q-\ell} h_i|_{\mathbf{g}} \, |\nabla^\ell \mathbf{u}|_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}}. \tag{13.48}$$

Las derivadas de $h_i$ están acotadas uniformemente. Como cada punto pertenece a lo más a $L$ soportes, elevar (13.48) a la potencia $p$, sumar sobre $i \in I$ e integrar da

$$\sum_{i \in I} \sum_{q=0}^{m} \|\nabla^q (h_i \mathbf{u})\|_{L^p(U_i, T^{(0,q)}(TM)|_{U_i} \otimes \mathbf{E}|_{U_i})}^p \le C \sum_{\ell=0}^{m} \|\nabla^\ell \mathbf{u}\|_{L^p(M, T^{(0,\ell)}(TM) \otimes \mathbf{E})}^p. \tag{13.49}$$

La primera desigualdad local de (13.47), aplicada para cada $i \in I$, prueba la desigualdad derecha de (13.45). Para la comparación opuesta usamos la identidad localmente finita

$$\mathbf{u} = \sum_{i \in I} h_i \mathbf{u}.$$

Para cada $q \in \{0, \dots, m\}$ se tiene, en el sentido de distribuciones y puntualmente cuando $\mathbf{u}$ es suave,

$$\nabla^q \mathbf{u} = \sum_{i \in I} \nabla^q (h_i \mathbf{u}).$$

En cada punto hay a lo más $L$ sumandos no nulos, de modo que

$$|\nabla^q \mathbf{u}|_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}}^p \le L^{p-1} \sum_{i \in I} |\nabla^q (h_i \mathbf{u})|_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}}^p.$$

Integramos, sumamos sobre $q \in \{0, \dots, m\}$ y usamos la segunda desigualdad de (13.47). Resulta la desigualdad izquierda de (13.45).

Para extender las comparaciones a una sección $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M, \mathbf{E})$, el Teorema de Meyers–Serrin 9.1.48 proporciona $\mathbf{u}_j \in \Gamma(\mathbf{E}) \cap W^{m,p}(M, \mathbf{E})$ con $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M, \mathbf{E})$. Denotemos por $\mathcal{S}\mathbf{v}$ la familia de componentes $\widetilde{(h_i v_i^a) \circ \varphi_i^{-1}}$ que aparece en (13.45). La cota superior, aplicada a $\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k$, da

$$\|\mathcal{S}\mathbf{u}_j - \mathcal{S}\mathbf{u}_k\|_{\ell^p(I \times \{1, \dots, r_{\mathbf{E}}\}; W^{m,p}(\mathbb{R}^n))} \le C_{m,p} \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k\|_{W^{m,p}(M, \mathbf{E})}.$$

La completitud de este espacio de sucesiones da un límite $V$. Para cada $i, a$ fijo, la multiplicación por $h_i$ y la equivalencia local de normas dan convergencia a $\widetilde{(h_i u_i^a)\circ\varphi_i^{-1}}$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Como la proyección sobre una componente es continua, $V = \mathcal{S}\mathbf{u}$. En consecuencia, $\mathcal{S}\mathbf{u}_j \to \mathcal{S}\mathbf{u}$ en la norma de toda la familia, y no sólo componente a componente. La continuidad de las normas permite tomar límites en las dos desigualdades aplicadas a $\mathbf{u}_j$ y prueba (13.45) para $\mathbf{u}$. El argumento incluye $p = 1$: el factor $L^{p-1}$ vale entonces uno y el espacio de sucesiones sigue siendo completo. Para el haz trivial de rango uno y $1 < p < \infty$, el Teorema 6.3.10 identifica uniformemente las normas locales $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ y $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ mediante las constantes euclidianas de ese teorema. Al combinarlas con $c_{m,p}$ y $C_{m,p}$ de (13.45) se obtienen precisamente $c_{m,p}^{WH}$ y $C_{m,p}^{WH}$ sobre $C_c^\infty(M)$. Para justificar también la aproximación por soporte compacto, enumeramos la partición y ponemos $\chi_J := \sum_{i=1}^{J} h_i$. Entonces $0 \le \chi_J \le 1$, cada $\chi_J$ tiene soporte compacto y, en todo compacto fijo, $\chi_J = 1$ para $J$ suficientemente grande. La finitud local uniforme y las cotas de $\nabla^q h_i$ dan $\sup_{J\in\mathbb{N}} \|\nabla^q \chi_J\|_{L^\infty(M, T^{(0,q)}(TM))} < \infty$ para cada $q$. Para $0 \le q \le m$, Leibniz da una constante independiente de $J$ con

$$|\nabla_w^q((1-\chi_J)\mathbf{u})|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \le C_q \sum_{\ell=0}^{q} |\nabla^{q-\ell}(1-\chi_J)|_{\mathbf{g}} |\nabla_w^\ell \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}}.$$

Cada factor del primer tipo se anula eventualmente en todo compacto fijo y está uniformemente acotado. La potencia $p$ de la derecha está dominada por $C\sum_{\ell=0}^{m} |\nabla_w^\ell \mathbf{u}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} \in L^1(M)$. El Teorema B.6.14, aplicado a cada orden y a su suma finita, prueba $\chi_J \mathbf{u} \to \mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Para conservar soporte compacto en la aproximación suave, fijamos $\psi_J \in C_c^\infty(M)$ igual a uno cerca de $\operatorname{supp}\chi_J$. Si $\mathbf{v}_{J,k} \to \chi_J\mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es la aproximación de Meyers–Serrin, entonces

$$\|\psi_J \mathbf{v}_{J,k} - \chi_J \mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_J \|\mathbf{v}_{J,k} - \chi_J \mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Elegimos $k(J)$ para que este último miembro sea menor que $2^{-J}$. Las secciones $\psi_J \mathbf{v}_{J,k(J)} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$ convergen a $\mathbf{u}$ en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$, lo que demuestra la densidad afirmada. La densidad de $C_c^\infty(M)$ en $H^{m,p}(M)$, probada en la Proposición 13.3.11, y la aproximación anterior muestran que ambos espacios son las completaciones del mismo subespacio respecto de esas dos comparaciones explícitas. La identificación conserva sus realizaciones en $\mathcal{D}'(M)$ y prueba (13.46). □

**Corolario 13.3.15.** (Control uniforme del conmutador de Bochner) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Para $\ell \in \mathbb{N}_0$, sea

$$\mathbf{E}_\ell := T^{(0,\ell)}(TM) \otimes \mathbf{E}$$

con la métrica y la conexión producto inducidas. Escribimos

$$\nabla_\ell := \nabla^{\mathbf{E}_\ell} : \Gamma(\mathbf{E}_\ell) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}_{\ell+1}), \qquad \nabla^m := \nabla_{\ell+m-1} \circ \cdots \circ \nabla_\ell,$$

con el índice nuevo en el primer factor covariante, y ponemos $\Delta_{B,\ell} = (\nabla_\ell)_h^* \nabla_\ell = -\operatorname{tr}_\mathbf{g}(\nabla_\ell^2)$, donde la traza contrae los dos primeros factores derivativos, para el laplaciano de Bochner de signo positivo. Si $m \in \mathbb{N}$,

entonces, para toda $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$,

$$\Delta_{B,\ell+m}(\nabla^m \mathbf{u}) - \nabla^m(\Delta_{B,\ell}\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{m} \nabla^j \operatorname{Rm} * \nabla^{m-j}\mathbf{u}. \tag{13.50}$$

Aquí Rm representa, según el término, a $\mathbf{R}^M$ o a $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$, y $*$ absorbe las contracciones tensoriales y sus coeficientes universales. Además, existe $C_{\ell,m} > 0$ tal que

$$\left|\Delta_{B,\ell+m}(\nabla^m \mathbf{u}) - \nabla^m(\Delta_{B,\ell}\mathbf{u})\right|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le C_{\ell,m} \sum_{q=0}^{m} |\nabla^q \mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}. \tag{13.51}$$

*Demostración.* Aplicamos el Lema 9.1.41 a la sección $\mathbf{u}$ del haz $\mathbf{E}_\ell$. Ese resultado está formulado para los laplacianos de Bochner positivos de los haces tensoriales inducidos y da directamente (13.50).
La curvatura de $\mathbf{E}_\ell$ es la suma de la acción de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ en el factor del haz y de la acción de $\mathbf{R}^M$ en cada uno de los $\ell$ factores covariantes. La geometría acotada de $M$ y de $\mathbf{E}$ acota todas las derivadas covariantes de esas curvaturas. Cada término del miembro derecho de (13.50) queda, por lo tanto, acotado por un múltiplo uniforme de $|\nabla^{m-j}\mathbf{u}|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$. La suma finita proporciona (13.51). □

**Proposición 13.3.16.** (Cadena perturbada de laplacianos de Bochner) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada y sea $N \in \mathbb{N}$. Para $\ell \in \{0,\dots,N\}$, escribamos

$$\mathbf{E}_\ell := T^{(0,\ell)}(TM) \otimes \mathbf{E}, \qquad \nabla_\ell := \nabla^{\mathbf{E}_\ell} \colon \Gamma(\mathbf{E}_\ell) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}_{\ell+1}), \qquad L_{\ell,0} := (\nabla_\ell)_h^* \nabla_\ell = -\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla_\ell^2) \quad \text{en } \Gamma_c(\mathbf{E}_\ell),$$

y sea $L_{\ell,p}$ el generador positivo del semigrupo covariante en $L^p(M,\mathbf{E}_\ell)$. Existen secciones autoadjuntas

$$\mathbf{V}_\ell \in \Gamma\big(\operatorname{End}(\mathbf{E}_\ell)\big), \qquad \mathbf{V}_0 = 0,$$

y secciones

$$\mathbf{W}_\ell \in \Gamma\big(\operatorname{Hom}(\mathbf{E}_\ell, \mathbf{E}_{\ell+1})\big), \qquad 0 \le \ell < N,$$

que satisfacen

$$\nabla_\ell(L_{\ell,0} + \mathbf{V}_\ell)\mathbf{u} - (L_{\ell+1,0} + \mathbf{V}_{\ell+1})\nabla_\ell \mathbf{u} = \mathbf{W}_\ell \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E}_\ell). \tag{13.52}$$

Para cada $a \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C_{N,a} > 0$ tal que

$$\sup_{\ell \in \{0,\dots,N\}} \sup_{x \in M} |\nabla^a \mathbf{V}_\ell(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + \max_{\ell \in \{0,\dots,N-1\}} \sup_{x \in M} |\nabla^a \mathbf{W}_\ell(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le C_{N,a}. \tag{13.53}$$

Existe $\mu_N > 0$ tal que, para $1 \le p < \infty$ y $\ell \in \{0,\dots,N\}$, el operador

$$B_{\ell,p} := \mu_N I + L_{\ell,p} + \mathbf{V}_\ell, \qquad \mathcal{D}(B_{\ell,p}) = \mathcal{D}(L_{\ell,p}), \tag{13.54}$$

satisface

$$\|e^{-tB_{\ell,p}}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}_\ell))} \le e^{-t}, \qquad t \ge 0.$$

En particular, $-(B_{\ell,p} - I)$ genera un $C_0$-semigrupo de contracción.

*Demostración.* El haz $\mathbf{E}_\ell$ está provisto de la métrica y la conexión producto. Su curvatura es la suma de la acción de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ sobre el factor $\mathbf{E}$ y de la acción de $\mathbf{R}^M$ sobre cada uno de los $\ell$ factores covariantes. Por lo tanto, $\mathbf{E}_\ell$ es de geometría acotada.

Para un haz vectorial $\mathbf{F} \to M$ provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$ y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{F}}$, definimos los homomorfismos $\mathcal{V}_{\mathbf{F}} \in \Gamma(\mathrm{End}(T^*M \otimes \mathbf{F}))$ y $\mathcal{W}_{\mathbf{F}} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{F}, T^*M \otimes \mathbf{F}))$ mediante

$$(\mathcal{V}_{\mathbf{F}}\mathbf{a})(\mathbf{X}) = \mathbf{a}(\mathrm{Ric}^\sharp \mathbf{X}) + 2\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\mathbf{e}_i, \mathbf{X})\mathbf{a}(\mathbf{e}_i), \tag{13.55}$$

$$(\mathcal{W}_{\mathbf{F}}\mathbf{v})(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{R}^{\mathbf{F}})(\mathbf{e}_i, \mathbf{X})\mathbf{v}. \tag{13.56}$$

Aquí $\mathbf{X} \in T_xM$ es arbitrario, $\mathbf{a} \in T_x^*M \otimes \mathbf{F}_x$, $\mathbf{v} \in \mathbf{F}_x$ y $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ es una base ortonormal de $T_xM$. Las sumas son contracciones métricas y, por ello, no dependen de la base. La identidad exacta de primer orden demostrada en el Lema 9.1.41 afirma que

$$\nabla^{\mathbf{F}}\Delta_B^{\mathbf{F}}\mathbf{v} - \Delta_B^{T^*M\otimes\mathbf{F}}(\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v}) = \mathcal{V}_{\mathbf{F}}(\nabla^{\mathbf{F}}\mathbf{v}) + \mathcal{W}_{\mathbf{F}}\mathbf{v}. \tag{13.57}$$

El homomorfismo $\mathcal{V}_{\mathbf{F}}$ es autoadjunto. En efecto, $\mathrm{Ric}^\sharp$ es simétrico y, para el segundo término, el bloque que lleva la componente $i$ a la componente $j$ es $2\mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. La compatibilidad métrica de la conexión y la antisimetría de la curvatura dan

$$\big(\mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\big)^* = -\mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i),$$

que es exactamente la relación entre los bloques transpuestos adjuntos. Si $\mathbf{F}$ es de geometría acotada, todas las derivadas covariantes de $\mathcal{V}_{\mathbf{F}}$ y $\mathcal{W}_{\mathbf{F}}$ están uniformemente acotadas, porque ambas se obtienen mediante contracciones de la curvatura de $\mathbf{F}$, de $\mathbf{R}^M$ y de su primera derivada covariante.

Definimos recursivamente

$$\mathbf{V}_0 := 0, \qquad \mathbf{V}_{\ell+1} := I_{T^*M} \otimes \mathbf{V}_\ell + \mathcal{V}_{\mathbf{E}_\ell}, \qquad \mathbf{W}_\ell := \nabla\mathbf{V}_\ell + \mathcal{W}_{\mathbf{E}_\ell}. \tag{13.58}$$

Aquí usamos la identificación canónica $\mathbf{E}_{\ell+1} = T^*M \otimes \mathbf{E}_\ell$. Para $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$, la regla de Leibniz da

$$\nabla_\ell(\mathbf{V}_\ell\mathbf{u}) = (I_{T^*M} \otimes \mathbf{V}_\ell)\nabla_\ell\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{V}_\ell)\mathbf{u}.$$

Al sumar esta identidad a (13.57), con $\mathbf{F} = \mathbf{E}_\ell$, obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla_\ell(L_{\ell,0} + \mathbf{V}_\ell)\mathbf{u} - (L_{\ell+1,0} + \mathbf{V}_{\ell+1})\nabla_\ell\mathbf{u}\\ = (\nabla\mathbf{V}_\ell + \mathcal{W}_{\mathbf{E}_\ell})\mathbf{u} = \mathbf{W}_\ell\mathbf{u}.\end{aligned}$$

Ésta es (13.52). Verifiquemos la autoadjunción. El caso inicial es $\mathbf{V}_0 = 0$. Si $\mathbf{V}_\ell$ es autoadjunta, entonces $I_{T^*M} \otimes \mathbf{V}_\ell$ es autoadjunta respecto de la métrica producto de $\mathbf{E}_{\ell+1} = T^*M \otimes \mathbf{E}_\ell$; como $\mathcal{V}_{\mathbf{E}_\ell}$ también lo es, la recurrencia (13.58) muestra que $\mathbf{V}_{\ell+1}$ es autoadjunta. Esto completa la inducción. Para comprobar las cotas, fijemos $a \in \mathbb{N}_0$. Denotemos por $v_{\ell,a}$ una cota para $\|\nabla^a\mathbf{V}_\ell\|_\infty$, y por $A_{\ell,a}, D_{\ell,a}$ las cotas de $\|\nabla^a\mathcal{V}_{\mathbf{E}_\ell}\|_\infty$ y $\|\nabla^a\mathcal{W}_{\mathbf{E}_\ell}\|_\infty$, ya obtenidas de las curvaturas. La conexión preserva el tensor identidad, por lo que (13.58) implica

$$v_{0,a} = 0, \qquad v_{\ell+1,a} \le C_{n,a}\big(v_{\ell,a} + A_{\ell,a}\big), \qquad \ell \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Esta recurrencia empieza en cero y tiene exactamente $N$ pasos. En particular, cada $v_{\ell,a}$ se acota mediante una suma finita de los $A_{j,a}$ con $j<\ell$, multiplicados por potencias de $C_{n,a}$. Además,

$$\|\nabla^a \mathbf{W}_\ell\|_\infty \le C_{n,a}\big(v_{\ell,a+1}+D_{\ell,a}\big).$$

Las cotas para el orden $a+1$ se obtienen por la misma recurrencia, independientemente de las del orden $a$. Tomamos el máximo sobre los índices finitos de la cadena y obtenemos (13.53). Así se especifica qué derivadas de los potenciales intervienen en cada constante.

El Teorema 12.3.2, aplicado a $\mathbf{E}_\ell$, afirma que $-L_{\ell,p}$ genera un semigrupo de contracción. La multiplicación por $\mathbf{V}_\ell$ es un operador acotado en $L^p(M,\mathbf{E}_\ell)$ y su norma está acotada por la norma infinito de sus valores como operadores de las fibras. Si $\mathbf{h}_{\mathbf{E}_\ell}$ denota la métrica producto inducida por $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, ponemos

$$\|\mathbf{V}_\ell\|_{\infty,\mathrm{op}} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M}\ \sup_{0\neq v\in(\mathbf{E}_\ell)_x} \frac{|\mathbf{V}_\ell(x)v|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_\ell}}}{|v|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}_\ell}}}.$$

Por lo tanto, la norma del operador de multiplicación no excede

$$\|\mathbf{V}_\ell\|_{\infty,\mathrm{op}}.$$

Elegimos

$$\mu_N \ge 1+\max_{\ell\in\{0,\dots,N\}}\|\mathbf{V}_\ell\|_{\infty,\mathrm{op}}.$$

La Proposición B.4.17, aplicada al generador $-L_{\ell,p}$ y a la perturbación $-\mathbf{V}_\ell$, da

$$\|e^{-tB_{\ell,p}}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}_\ell))} \le \exp\big(-t\big(\mu_N-\|\mathbf{V}_\ell\|_{\infty,\mathrm{op}}\big)\big) \le e^{-t}.$$

Por último,

$$e^{-t(B_{\ell,p}-I)} = e^{t}e^{-tB_{\ell,p}},$$

de modo que $\|e^{-t(B_{\ell,p}-I)}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}_\ell))}\le 1$. Éste es el semigrupo de contracción generado por $-(B_{\ell,p}-I)$. □

La identidad diferencial anterior se utilizará también sobre secciones que no tienen soporte compacto. Para ello necesitamos reconocer el dominio $L^2$ del operador, no sólo su expresión local.

**Lema 13.3.17.** (Dominio maximal del laplaciano perturbado) Sea $(\mathbf{F},\mathbf{h}_{\mathbf{F}},\nabla^{\mathbf{F}})\to M$ un haz de geometría acotada sobre una variedad sin frontera de geometría acotada. Sea $\mathbf{V}$ un endomorfismo suave autoadjunto y acotado y sea $B=L_{\mathbf{F},2}+\mathbf{V}+\mu I$ la realización por la forma de energía. Si $\mathbf{w},\mathbf{f}\in L^2(M,\mathbf{F})$ y $B\mathbf{w}=\mathbf{f}$ en distribuciones, entonces $\mathbf{w}\in\mathcal{D}(B)$ y la igualdad vale en $L^2$.

*Demostración.* La regularidad elíptica local da $\mathbf{w}\in H^2_{\mathrm{loc}}$. Tomemos los cortes $\chi_J$ construidos en la prueba de la Proposición 13.3.14. Tienen soporte compacto, satisfacen $0\le\chi_J\le 1$, convergen localmente a uno y $|d\chi_J|\le C$ con una constante independiente de $J$. Probamos la ecuación contra $\chi_J^2\mathbf{w}$, usando una aproximación suave

en su soporte. La parte real de la integración por partes da

$$\begin{aligned}\|\chi_J\nabla\mathbf{w}\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{F})} &\le \|\mathbf{f}\|_{L^2(M,\mathbf{F})}\|\mathbf{w}\|_{L^2(M,\mathbf{F})}\\ &\quad + (\|\mathbf{V}\|_\infty + |\mu|)\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(M,\mathbf{F})}\\ &\quad + 2\|\chi_J\nabla\mathbf{w}\|_{L^2(M,T^*M\otimes\mathbf{F})}\,\big\|\,|d\chi_J|\mathbf{w}\big\|_{L^2(M,\mathbf{F})}.\end{aligned}$$

Young permite absorber la mitad del término de energía y proporciona una cota independiente de $J$. Fatou implica $\nabla\mathbf{w}\in L^2$. La densidad compacta de la proposición citada muestra entonces que $\mathbf{w}$ pertenece al dominio de la forma. Para toda sección de prueba $\boldsymbol{\varphi}$ se cumple

$$\int_M \langle\nabla\mathbf{w},\nabla\boldsymbol{\varphi}\rangle\,d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_M \langle(\mathbf{V}+\mu I)\mathbf{w},\boldsymbol{\varphi}\rangle\,d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Los tres términos son continuos para la norma de la forma; la densidad extiende la igualdad a todo su dominio. La definición del operador asociado a una forma cerrada da $\mathbf{w}\in\mathcal{D}(B)$ y $B\mathbf{w}=\mathbf{f}$. □

La identificación de los dominios fraccionarios que necesitaremos a continuación se obtendrá por interpolación. Antes de usar el cálculo funcional conviene registrar la interpolación de los espacios covariantes en los dos órdenes enteros que intervienen en la raíz cuadrada.

**Proposición 13.3.18.** (Interpolación entre los órdenes cero y dos en haces) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada y sea $\mathbf{F}\to M$ un haz de geometría acotada de rango finito. Si $1<p<\infty$, entonces

$$[\,L^p(M,\mathbf{F}),W^{2,p}(M,\mathbf{F})\,]_{1/2} = W^{1,p}(M,\mathbf{F}) \tag{13.59}$$

con equivalencia de normas.

*Demostración.* Si $\mathbf{F}$ es real, realizamos la interpolación en el haz complejificado y restringimos al subespacio real al final; la conexión, la métrica y los operadores de localización se complejifican sin cambiar sus normas sobre secciones reales. Usamos la misma trivialización geodésica $\mathcal{T}^{\mathrm{geo}}=(U_i,\varphi_i,h_i)_{i\in I}$ y los mismos marcos síncronos $\mathbf{e}_i=(\mathbf{e}_{i,1},\dots,\mathbf{e}_{i,r})$ que en la Proposición 13.3.14. Elegimos, como en la definición de trivialización admisible, funciones $\chi_i\in C^\infty_c(U_i)$ tales que

$$\chi_i = 1 \quad \text{en una vecindad de } \operatorname{supp}(h_i),$$

y cuyas derivadas en las coordenadas $\varphi_i$ están acotadas de manera uniforme en $i$. Denotamos por

$$\widetilde{\chi_i} := \widetilde{\chi_i\circ\varphi_i^{-1}} \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$$

su extensión por cero.
Para $k\in\{0,1,2\}$ definimos el operador de análisis

$$\mathcal{S}_{\mathbf{F}}\mathbf{u} := \Big(\widetilde{(h_i u_i^a)\circ\varphi_i^{-1}}\Big)_{(i,a)\in I\times\{1,\dots,r\}}, \qquad \mathbf{u}\restriction_{U_i} = \sum_{a=1}^{r} u_i^a\,\mathbf{e}_{i,a}.$$

La Proposición 13.3.14 muestra que $\mathcal{S}_{\mathbf{F}}$ es continuo de $W^{k,p}(M,\mathbf{F})$ en

$$\ell^p\left(I\times\{1,\dots,r\};W^{k,p}(\mathbb{R}^n)\right),$$

con una norma que depende de $k,p$ y de los datos uniformes, pero no de la carta.
Construimos una síntesis que funciona simultáneamente para los tres órdenes. Si $v=(v_i^a)_{i,a}$ es una familia con un número finito de componentes no nulas y cada $v_i^a\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, ponemos

$$\mathcal{R}_{\mathbf{F}}v:=\sum_{i\in I}\sum_{a=1}^{r}\left[\left((\widetilde{\chi}_i v_i^a)\restriction_{\varphi_i(U_i)}\right)\circ\varphi_i\right]\mathbf{e}_{i,a}, \tag{13.60}$$

donde cada sumando se prolonga por cero fuera de $U_i$. El producto con $\chi_i$ tiene soporte compacto en $U_i$, de modo que esa prolongación es suave. Para una familia general, la fórmula se interpreta primero en cada compacto: sólo interviene un número uniformemente finito de cartas y la suma es localmente finita.
Probemos la continuidad de la síntesis. En una carta $U_j$, las componentes del $i$-ésimo sumando de (13.60) se obtienen de $v_i=(v_i^1,\dots,v_i^r)$ mediante tres operaciones: una multiplicación por un corte con derivadas uniformemente acotadas, un cambio de coordenadas $\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ y la multiplicación por la matriz de cambio entre los marcos síncronos $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}_j$. Las cotas de geometría acotada para los marcos síncronos y las transiciones geodésicas implican que, para $k\in\{0,1,2\}$, esas tres operaciones están acotadas en $W^{k,p}$ con una constante independiente de $i,j$. Si $I_j$ denota el conjunto de índices cuyas cartas intersectan $U_j$, existe $L\geq 1$ con $\#I_j\leq L$. Por la desigualdad

$$\left(\sum_{i\in I_j}a_i\right)^p\leq L^{p-1}\sum_{i\in I_j}a_i^p,\qquad a_i\geq 0,$$

la equivalencia local de la Proposición 13.3.14 da

$$\|\mathcal{R}_{\mathbf{F}}v\|_{W^{k,p}(M,\mathbf{F})}\leq C_{k,p}\|v\|_{\ell^p(I\times\{1,\dots,r\};W^{k,p}(\mathbb{R}^n))},\qquad k\in\{0,1,2\}. \tag{13.61}$$

Por densidad, $\mathcal{R}_{\mathbf{F}}$ se extiende de manera continua a los tres espacios de sucesiones.
Si $v=\mathcal{S}_{\mathbf{F}}\mathbf{u}$, la igualdad $\chi_i=1$ cerca de $\operatorname{supp}(h_i)$ hace que el $i$-ésimo término reconstruido sea exactamente $h_i\mathbf{u}$. Como $(h_i)_{i\in I}$ es una partición de la unidad,

$$\mathcal{R}_{\mathbf{F}}\mathcal{S}_{\mathbf{F}}\mathbf{u}=\sum_{i\in I}h_i\mathbf{u}=\mathbf{u}. \tag{13.62}$$

Así, el mismo par análisis–síntesis es una corretracción–retracción para los órdenes $0,1,2$.
Por el Teorema 6.3.14 y la interpolación de la escala de Bessel euclidiana,

$$[L^p(\mathbb{R}^n),W^{2,p}(\mathbb{R}^n)]_{1/2}=W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

con normas equivalentes. La Proposición 5.7.12 permite tomar la suma exterior $\ell^p$ y la cantidad finita de componentes del haz. Interpolamos ahora $\mathcal{S}_{\mathbf{F}}$ y $\mathcal{R}_{\mathbf{F}}$ entre los órdenes 0 y 2 y usamos (13.62). Obtenemos ambas inclusiones de (13.59), y las normas de los operadores en los extremos proporcionan las constantes de equivalencia. □

La segunda herramienta es una estimación elíptica $L^p$ global con constantes uniformes. La demostramos di-

rectamente para los operadores de la cadena, pues de ese modo quedan visibles las constantes que se usarán en la raíz cuadrada.

**Proposición 13.3.19.** (Dominio $L^p$ de los operadores de la cadena) Bajo las hipótesis de la Proposición 13.3.16, sea $1 < p < \infty$. Para cada $\ell \in \{0, \dots, N\}$,

$$\mathcal{D}(B_{\ell,p}) = W^{2,p}(M, \mathbf{E}_\ell) \tag{13.63}$$

y existen constantes $c^{(2)}_{\ell,p}, C^{(2)}_{\ell,p} > 0$ tales que

$$c^{(2)}_{\ell,p} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(M,\mathbf{E}_\ell)} \le \|B_{\ell,p}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} \le C^{(2)}_{\ell,p} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(M,\mathbf{E}_\ell)}. \tag{13.64}$$

Las constantes pueden elegirse de manera uniforme cuando $\ell$ recorre el conjunto finito $\{0, \dots, N\}$.

*Demostración.* Fijemos $\ell$ y denotemos por

$$\mathcal{B}_\ell := \mu_N I + L_{\ell,0} + \mathbf{V}_\ell$$

la expresión diferencial suave cuya realización es $B_{\ell,p}$. En una carta geodésica uniforme y en el marco síncrono de $\mathbf{E}_\ell$, este operador tiene la forma

$$\mathcal{B}_i = -g_i^{ab}(x)\partial_a\partial_b + A_i^a(x)\partial_a + C_i(x). \tag{13.65}$$

Las matrices $A_i^a, C_i$ y todas las derivadas que necesitaremos están acotadas uniformemente; lo mismo ocurre con $g_i^{ab}$ y sus derivadas. Hay constantes $0 < \lambda_0 \le \Lambda_0 < \infty$, independientes de $i$, tales que

$$\lambda_0|\xi|^2 \le g_i^{ab}(x)\xi_a\xi_b \le \Lambda_0|\xi|^2. \tag{13.66}$$

Estas cotas son consecuencia del criterio métrico de geometría acotada y de las cotas de la Proposición 13.3.16.

Comenzamos con una estimación de coeficientes constantes. Para un punto $x_0$ de la carta pongamos

$$q_{x_0}(\xi) := g_i^{ab}(x_0)\xi_a\xi_b, \qquad P_{x_0} := -g_i^{ab}(x_0)\partial_a\partial_b.$$

Si $|\alpha| \le 2$, el símbolo

$$m_{\alpha,x_0}(\xi) := \frac{(i\xi)^\alpha}{1 + q_{x_0}(\xi)}$$

satisface las hipótesis del Teorema 6.3.1 con constantes independientes de $x_0$ e $i$. En efecto, al derivarlo $r$ veces se obtiene una suma finita de cocientes cuyos denominadores son potencias de $1 + q_{x_0}$ y cuyos numeradores son polinomios en $\xi$ con coeficientes acotados por $\lambda_0, \Lambda_0$; usando (13.66) se obtiene

$$|D^\beta_\xi m_{\alpha,x_0}(\xi)| \le C_{\alpha,\beta}|\xi|^{-|\beta|}, \qquad \xi \neq 0,$$

para todos los multiíndices requeridos por Mikhlin. Por lo tanto,

$$\|v\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \le C_p \|(I + P_{x_0})v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad v \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n), \tag{13.67}$$

con $C_p$ independiente de $x_0$ e $i$.
Usaremos también una desigualdad elemental de orden intermedio. Para $0 < \varepsilon \le 1$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, el símbolo

$$\frac{i\varepsilon\xi_j}{1+\varepsilon^2|\xi|^2}$$

y sus derivadas de Mikhlin están acotados uniformemente en $\varepsilon$. Aplicándolo a $(I-\varepsilon^2\Delta)v$ y sumando en $j$, obtenemos

$$\|Dv\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_p\left(\varepsilon\|D^2v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon^{-1}\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right), \qquad v \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n). \tag{13.68}$$

Las derivadas primeras de $g_i^{ab}$ tienen una cota uniforme. Elegimos $r > 0$, independiente de la carta, tan pequeño que, en toda bola euclidiana de radio $2r$ contenida en una carta mayor,

$$\|g_i^{ab} - g_i^{ab}(x_0)\|_{L^\infty(B_{\mathrm{euc}}(x_0,2r))} \le \delta,$$

donde $\delta > 0$ se fija de modo que el término correspondiente pueda absorberse en (13.67). Si $v \in C_c^\infty(B_{\mathrm{euc}}(x_0,2r))$, escribimos

$$(I+P_{x_0})v = \mathcal{B}_i v + (g_i^{ab} - g_i^{ab}(x_0))\partial_a\partial_b v - A_i^a\partial_a v + (I-C_i)v.$$

La estimación de coeficientes constantes, la elección de $\delta$ y (13.68), con $\varepsilon$ suficientemente pequeño y después fijo, dan

$$\|v\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|\mathcal{B}_i v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right), \tag{13.69}$$

con una constante independiente de la carta.
La estimación compactamente soportada implica una estimación interior sin suponer a priori una norma global de segundo orden. Sean $r \le s < t \le 2r$ y elijamos $\zeta_{s,t} \in C_c^\infty(B_{\mathrm{euc}}(x_0,t))$ tal que $\zeta_{s,t} = 1$ en $B_{\mathrm{euc}}(x_0,s)$ y

$$|D\zeta_{s,t}| \le C(t-s)^{-1}, \qquad |D^2\zeta_{s,t}| \le C(t-s)^{-2}.$$

Si $u$ es suave en una vecindad de $\overline{B_{\mathrm{euc}}(x_0,2r)}$, aplicamos (13.69) a $\zeta_{s,t}u$. La regla de Leibniz da

$$\|D^2u\|_{L^p(B_s)} \le C\|\mathcal{B}_i u\|_{L^p(B_t)} + \frac{C}{t-s}\|Du\|_{L^p(B_t)} + C\left(1+\frac{1}{(t-s)^2}\right)\|u\|_{L^p(B_t)}. \tag{13.70}$$

Aquí y en las dos fórmulas siguientes abreviamos $B_\rho = B_{\mathrm{euc}}(x_0,\rho)$.
Necesitamos eliminar el término de primer orden del miembro derecho. Las bolas $B_t$, $r \le t \le 2r$, son dominios Lipschitz obtenidos unos de otros por dilataciones con factores en el intervalo compacto $[1,2]$. Extendemos $u\restriction_{B_t}$ mediante el Teorema 3.6.2 y aplicamos (13.68) a la extensión. La estimación de segundo orden del operador de extensión contiene también $\|Du\|_{L^p(B_t)}$; multiplicamos por el parámetro pequeño de la desigualdad de interpolación y absorbemos ese término en el miembro izquierdo. Como los radios pertenecen al intervalo fijo $[r,2r]$, las constantes de extensión y de absorción son uniformes. Obtenemos así

$$\|Du\|_{L^p(B_t)} \le \eta\|D^2u\|_{L^p(B_t)} + C\eta^{-1}\|u\|_{L^p(B_t)}, \qquad 0 < \eta \le \eta_0. \tag{13.71}$$

Tomamos $\eta = \varepsilon(t-s)$, con $\varepsilon > 0$ fijo y suficientemente pequeño. Si

$$\Phi(\rho) := \|D^2 u\|_{L^p(B_\rho)},$$

las dos estimaciones anteriores dan números $0 < \vartheta < 1$ y $C > 0$, independientes de la carta, tales que

$$\Phi(s) \le \vartheta \Phi(t) + C\|\mathcal{B}_i u\|_{L^p(B_{2r})} + \frac{C}{(t-s)^2}\|u\|_{L^p(B_{2r})}, \qquad r \le s < t \le 2r. \tag{13.72}$$

Para iterar la desigualdad anterior, elegimos $\rho \in (\sqrt{\vartheta}, 1)$ y ponemos

$$r_k := 2r - r\rho^k, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces $r_0 = r$, $r_k \uparrow 2r$ y $r_{k+1} - r_k = r(1-\rho)\rho^k$. Iterando (13.72) $m$ veces obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi(r) \le \vartheta^m \Phi(r_m) &+ C\sum_{k=0}^{m-1} \vartheta^k \|\mathcal{B}_i u\|_{L^p(B_{2r})} \\ &+ \frac{C}{r^2(1-\rho)^2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\vartheta}{\rho^2}\right)^k \|u\|_{L^p(B_{2r})}.\end{aligned}$$

Como $u$ es suave en una vecindad de $\overline{B_{2r}}$, $\Phi(2r) < \infty$, de modo que $\vartheta^m \Phi(r_m) \to 0$. Las dos series geométricas convergen y, como $r$ es el mismo en todas las cartas, llegamos a

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_r)} \le C\left(\|\mathcal{B}_i u\|_{L^p(B_{2r})} + \|u\|_{L^p(B_{2r})}\right). \tag{13.73}$$

La componente de primer orden se recupera de (13.71); los términos de orden cero ya están en el miembro derecho.

Para obtener la estimación global, sumamos las estimaciones interiores sobre una cubierta de multiplicidad acotada. Usamos la trivialización geodésica del Teorema 13.1.22: las bolas $V_i := B_{\mathbf{g}}(p_i, r)$ cubren $M$ y las bolas mayores $U_i := B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r)$ tienen multiplicidad uniformemente acotada. En las coordenadas normales y los marcos síncronos, la comparación uniforme entre las normas covariantes y las normas euclidianas, junto con (13.73), da para toda sección suave $\mathbf{u}$ con $\mathbf{u}, \mathcal{B}_\ell \mathbf{u} \in L^p$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^p_{W^{2,p}(M,\mathbf{E}_\ell)} &\le C\sum_{i\in I}\|\mathbf{u}\|^p_{W^{2,p}(V_i,\mathbf{E}_\ell)} \\ &\le C\sum_{i\in I}\left(\|\mathcal{B}_\ell \mathbf{u}\|^p_{L^p(U_i,\mathbf{E}_\ell)} + \|\mathbf{u}\|^p_{L^p(U_i,\mathbf{E}_\ell)}\right) \\ &\le C\left(\|\mathcal{B}_\ell \mathbf{u}\|^p_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} + \|\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}\right).\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(M,\mathbf{E}_\ell)} \le C\left(\|\mathcal{B}_\ell \mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} + \|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}\right). \tag{13.74}$$

Todas las sumas son de términos no negativos; la última desigualdad usa solamente la cota uniforme de multiplicidad de $(U_i)$. Por ello el argumento es válido aunque no se sepa de antemano que la norma global de segundo orden sea finita: la estimación interior hace finito cada sumando y Tonelli permite sumarlos directamente.

La realización $B_{\ell,p}$ tiene inverso acotado dado por

$$B_{\ell,p}^{-1}\mathbf{f} = \int_0^\infty e^{-tB_{\ell,p}}\mathbf{f}\,dt,$$

y la estimación $\|e^{-tB_{\ell,p}}\| \le e^{-t}$ de la Proposición 13.3.16 implica

$$\|B_{\ell,p}^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}_\ell))} \le 1. \tag{13.75}$$

Sea ahora $\mathbf{f} \in L^p(M,\mathbf{E}_\ell)$. Elegimos $\mathbf{f}_j \in \Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$ con $\mathbf{f}_j \to \mathbf{f}$ en $L^p$ y ponemos $\mathbf{u}_j = B_{\ell,p}^{-1}\mathbf{f}_j$. La consistencia de los semigrupos al variar $p$ muestra que, puesto que $\mathbf{f}_j \in L^2 \cap L^p$,

$$\mathbf{u}_j = B_{\ell,2}^{-1}\mathbf{f}_j.$$

La regularidad elíptica local aplicada a $\mathcal{B}_\ell \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_j$ muestra que $\mathbf{u}_j$ es suave. Aplicando (13.74) a $\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k$ y usando (13.75), obtenemos

$$\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k\|_{W^{2,p}(M,\mathbf{E}_\ell)} \le C\|\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_k\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}.$$

Por completitud, $\mathbf{u}_j$ converge en $W^{2,p}$ a una sección $\mathbf{v}$. Al mismo tiempo, $\mathbf{u}_j \to B_{\ell,p}^{-1}\mathbf{f}$ en $L^p$, luego $\mathbf{v} = B_{\ell,p}^{-1}\mathbf{f}$. Así, $\mathcal{D}(B_{\ell,p}) \subseteq W^{2,p}$ y

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(M,\mathbf{E}_\ell)} \le C\|B_{\ell,p}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}, \qquad \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B_{\ell,p}).$$

Para la inclusión opuesta, sea $\mathbf{u} \in W^{2,p}(M,\mathbf{E}_\ell)$. La densidad con soporte compacto de la Proposición 13.3.14 proporciona $\mathbf{u}_j \in \Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$ con $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $W^{2,p}$. La expresión local (13.65) muestra que $\mathcal{B}_\ell \mathbf{u}_j$ converge en $L^p$. Como $B_{\ell,p}$ es cerrado y coincide con $\mathcal{B}_\ell$ en secciones de soporte compacto, se sigue que $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(B_{\ell,p})$. La continuidad evidente de la expresión diferencial de orden dos da la desigualdad derecha de (13.64). Esto prueba (13.63) y la equivalencia de normas. Como la cadena contiene sólo un número finito de haces y todos los datos geométricos que aparecen poseen cotas uniformes, las constantes pueden tomarse uniformes en $\ell$. □

Para pasar del orden dos al orden uno necesitamos una cota de potencias imaginarias. La demostraremos dentro del libro mediante una función de Bellman y el semigrupo de Poisson. La parte algebraica se separa en el siguiente lema.

**Lema 13.3.20.** (Función de Bellman para dos normas hilbertianas) Sean $2 \le p < \infty$ y $q = p/(p-1)$. Existen constantes $\delta_p, c_p, C_p > 0$ y una función $\mathcal{B}_p \colon H_1 \times H_2 \to [0,\infty)$, definida para cualesquiera espacios de Hilbert reales $H_1, H_2$, con las siguientes propiedades.

(a) $\mathcal{B}_p$ es de clase $C^1$, es $C^2$ fuera de la hipersuperficie $|\xi|^p = |\eta|^q$ y de los ejes, y

$$0 \le \mathcal{B}_p(\xi,\eta) \le C_p\big(|\xi|^p + |\eta|^q\big).$$

(b) Sus derivadas radiales son no negativas.

(c) En todo punto de diferenciabilidad de segundo orden existe $\tau = \tau(\xi,\eta) > 0$ tal que, para $a \in H_1$ y $b \in H_2$,

$$d^2\mathcal{B}_p(\xi,\eta)[(a,b),(a,b)] \ge c_p\big(\tau|a|^2 + \tau^{-1}|b|^2\big). \tag{13.76}$$

En particular,

$$d^2\mathcal{B}_p(\xi,\eta)[(a,b),(a,b)] \geq 2c_p|a||b|. \tag{13.77}$$

(d) Con la misma elección de $\tau$,

$$|d\mathcal{B}_p(\xi,\eta)[(a,b)]|^2 \leq C_p\mathcal{B}_p(\xi,\eta)\big(\tau|a|^2+\tau^{-1}|b|^2\big). \tag{13.78}$$

Las constantes dependen únicamente de $p$, no de las dimensiones de $H_1, H_2$.

*Demostración.* Para $u, v \geq 0$ ponemos

$$\beta_p(u,v) := u^p + v^q + \delta_p \begin{cases} u^2v^{2-q}, & u^p \leq v^q, \\ \dfrac{2}{p}u^p + \left(\dfrac{2}{q}-1\right)v^q, & u^p \geq v^q. \end{cases}$$

En la frontera $u^p = v^q$ las dos expresiones adicionales coinciden. En efecto, allí $v = u^{p-1}$ y $u^2v^{2-q} = u^p$, mientras que $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1 = 1$. También coinciden las primeras derivadas:

$$2uv^{2-q} = 2u^{p-1}, \qquad (2-q)u^2v^{1-q} = (2-q)v^{q-1}.$$

Por lo tanto, $\beta_p$ es $C^1$. Definimos

$$\mathcal{B}_p(\xi,\eta) := \beta_p(|\xi|,|\eta|).$$

La cota del inciso (a) se sigue de $u^2v^{2-q} \leq v^q$ cuando $u^p \leq v^q$ y de la definición en la otra región. Las derivadas radiales son no negativas si $0 < \delta_p \leq 1$.
Verifiquemos la convexidad cuantitativa. Supongamos primero $u^p \leq v^q$ y pongamos

$$\tau := v^{2-q}.$$

La relación $u \leq v^{q-1}$ implica

$$u^{p-2} \leq v^{2-q}, \qquad u^2v^{-q} \leq v^{q-2}, \qquad uv^{1-q} \leq 1.$$

Las segundas derivadas de la corrección $u^2v^{2-q}$ son

$$2v^{2-q}, \qquad 2(2-q)uv^{1-q}, \qquad -(2-q)(q-1)u^2v^{-q}.$$

Por consiguiente,

$$\partial_{uu}\beta_p \geq 2\delta_p\tau,$$

$$\partial_{vv}\beta_p \geq (q-1)\big(q-\delta_p(2-q)\big)\tau^{-1}, \qquad |\partial_{uv}\beta_p| \leq 2\delta_p(2-q).$$

Elegimos $\delta_p > 0$ tan pequeño que $q - \delta_p(2-q) \geq q/2$ y que el término mixto pueda absorberse mediante

$$2|ab| \leq \varepsilon\tau a^2 + \varepsilon^{-1}\tau^{-1}b^2.$$

Así, para ciertos $c_p > 0$,

$$\partial_{uu}\beta_p\, a^2 + 2\partial_{uv}\beta_p\, ab + \partial_{vv}\beta_p\, b^2 \geq c_p(\tau a^2 + \tau^{-1} b^2). \tag{13.79}$$

Además,

$$\frac{\partial_u \beta_p}{u} \geq 2\delta_p \tau, \qquad \frac{\partial_v \beta_p}{v} \geq q\tau^{-1}.$$

Si $u^p \geq v^q$, ponemos $\tau := u^{p-2}$. La corrección es diagonal y la relación $v \leq u^{p-1}$, junto con $q - 2 \leq 0$, da

$$v^{q-2} \geq u^{2-p} = \tau^{-1}.$$

Por ello,

$$\partial_{uu}\beta_p\, a^2 + \partial_{vv}\beta_p\, b^2 \geq c_p(\tau a^2 + \tau^{-1} b^2), \tag{13.80}$$

y las mismas cotas, con otra constante, valen para $(\partial_u \beta_p)/u$ y $(\partial_v \beta_p)/v$.
Para una función radial de dos variables hilbertianas, la Hessiana se descompone en la parte radial y las partes ortogonales. Supongamos $u = |\xi| > 0$ y $v = |\eta| > 0$, y definamos las componentes radiales con signo

$$a_{\mathrm{r}} := \left\langle a, \frac{\xi}{u} \right\rangle_{H_1}, \qquad b_{\mathrm{r}} := \left\langle b, \frac{\eta}{v} \right\rangle_{H_2}.$$

Las descomposiciones ortogonales correspondientes son

$$a = a_{\parallel} + a_{\perp}, \qquad a_{\parallel} = a_{\mathrm{r}} \frac{\xi}{u}, \qquad \langle a_{\perp}, \xi \rangle_{H_1} = 0,$$

$$b = b_{\parallel} + b_{\perp}, \qquad b_{\parallel} = b_{\mathrm{r}} \frac{\eta}{v}, \qquad \langle b_{\perp}, \eta \rangle_{H_2} = 0.$$

Al derivar la norma a lo largo de la recta $\xi + ta$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}|\xi + ta|\Big|_{t=0} = a_{\mathrm{r}},$$
$$\frac{d^2}{dt^2}|\xi + ta|\Big|_{t=0} = \frac{|a|^2 - a_{\mathrm{r}}^2}{u} = \frac{|a_{\perp}|^2}{u}.$$

Las fórmulas para $\eta + tb$ son análogas. La regla de la cadena da entonces, en cada región de diferenciabilidad de segundo orden,

$$d^2\mathcal{B}_p(\xi,\eta)[(a,b),(a,b)] = (\partial_{uu}\beta_p)a_{\mathrm{r}}^2 + 2(\partial_{uv}\beta_p)a_{\mathrm{r}}b_{\mathrm{r}} + (\partial_{vv}\beta_p)b_{\mathrm{r}}^2 + \frac{\partial_u \beta_p}{u}|a_{\perp}|^2 + \frac{\partial_v \beta_p}{v}|b_{\perp}|^2,$$

donde las derivadas de $\beta_p$ se evalúan en $(u, v)$. Aplicamos (13.79) a los números reales $a_{\mathrm{r}}, b_{\mathrm{r}}$ en la primera región, y (13.80) en la segunda. Junto con las cotas de $(\partial_u \beta_p)/u$ y $(\partial_v \beta_p)/v$, y disminuyendo $c_p$ si es necesario, obtenemos

$$d^2\mathcal{B}_p(\xi,\eta)[(a,b),(a,b)] \geq c_p\big(\tau(a_{\mathrm{r}}^2 + |a_{\perp}|^2) + \tau^{-1}(b_{\mathrm{r}}^2 + |b_{\perp}|^2)\big) = c_p\big(\tau|a|^2 + \tau^{-1}|b|^2\big).$$

Esto prueba (13.76). La desigualdad $\tau A^2 + \tau^{-1} B^2 \geq 2AB$ da (13.77).
Resta la cota del gradiente. En la primera región las relaciones ya usadas dan

$$|\partial_u \beta_p| \leq C_p u \tau, \qquad |\partial_v \beta_p| \leq C_p v \tau^{-1},$$

y, por tanto,

$$\frac{|\partial_u \beta_p|^2}{\tau} + |\partial_v \beta_p|^2 \tau \leq C_p (u^p + v^q) \leq C_p \beta_p(u, v).$$

En la segunda región escribimos $v = u^{p-1}\rho$, con $0 \leq \rho \leq 1$. Como $q - 1 = 1/(p-1)$, se tiene

$$v^{2q-2} u^{p-2} = u^p \rho^{2(q-1)} \leq u^p,$$

y las fórmulas explícitas de $\partial_u \beta_p$ y $\partial_v \beta_p$ dan

$$|\partial_u \beta_p|^2 \tau^{-1} + |\partial_v \beta_p|^2 \tau \leq C_p (u^p + v^q).$$

La desigualdad de Cauchy–Schwarz con los pesos $\tau, \tau^{-1}$ prueba (13.78). Los puntos de los ejes se obtienen por límite. Cuando $p = 2$ se tiene $q = 2$ y la misma función se reduce a una forma cuadrática por regiones que coincide globalmente; el argumento anterior sigue siendo válido con $\tau = 1$. □

**Teorema 13.3.21.** (Multiplicadores de Laplace y potencias imaginarias de Bochner–Schrödinger) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa sin frontera y sea $\mathbf{F} \to M$ un haz vectorial real o hermitiano de rango finito, provisto de una métrica fibrada y de una conexión compatible. Sea $\mathbf{W} \in \Gamma(\mathrm{End}(\mathbf{F}))$ suave y autoadjunta y supongamos

$$\langle \mathbf{W}(x) v, v \rangle \geq |v|^2 \quad \text{para todo } x \in M, \quad v \in \mathbf{F}_x. \tag{13.81}$$

Sea $B_2 = L_{\mathbf{F},2} + \mathbf{W}$ la realización autoadjunta en $L^2$ y supongamos que su semigrupo se extiende consistentemente a semigrupos $C_0$ en $L^r(M, \mathbf{F})$, $1 \leq r < \infty$, que satisfacen

$$\|e^{-sB_r}\|_{\mathcal{L}(L^r)} \leq e^{-s}, \qquad s \geq 0. \tag{13.82}$$

Si $\mathbf{F}$ es real, las potencias complejas y los multiplicadores que aparecen a continuación se entienden en la complejificación, y las estimaciones se restringen después a las secciones reales cuando el operador correspondiente preserva ese subespacio. Entonces, para todo $1 < p < \infty$, las potencias espectrales $B_2^{it}$ se extienden consistentemente a un grupo $C_0$ de operadores acotados $B_p^{it}$ en $L^p(M, \mathbf{F})$. Existen constantes $C_p, \omega_p > 0$, independientes de la dimensión de $M$ y del rango de $\mathbf{F}$, tales que

$$\|B_p^{it}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{F}))} \leq C_p e^{\omega_p |t|}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{13.83}$$

Más generalmente, si $C_2 := B_2^{1/2}$ y, para $1 < p < \infty$, $-C_p$ denota el generador del semigrupo de Poisson subordinado en $L^p(M, \mathbf{F})$, y si $\psi \in L^\infty(0, \infty)$, el multiplicador espectral

$$m_\psi(C_2), \qquad m_\psi(\lambda) := \lambda \int_0^\infty \psi(s) e^{-s\lambda}\, ds, \quad \lambda \geq 1, \tag{13.84}$$

se extiende a $L^p$ y

$$\|m_\psi(C_p)\|_{\mathcal{L}(L^p)} \le C_p \|\psi\|_{L^\infty(0,\infty)}. \tag{13.85}$$

*Demostración.* La demostración se hace primero para secciones de soporte compacto y después se pasa a $L^p$ por densidad. Si el haz es complejo, lo consideramos como haz real con producto interno dado por la parte real de la métrica hermitiana; las normas no cambian.
*El semigrupo de Poisson.* Para $t > 0$ y $1 \le r < \infty$ definimos

$$P_t^{(r)}\mathbf{f} := \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-3/2} e^{-\frac{t^2}{4s}} e^{-sB_r}\mathbf{f}\, ds. \tag{13.86}$$

La integral es de Bochner. La identidad escalar de subordinación

$$e^{-t\sqrt{\lambda}} = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-3/2} e^{-\frac{t^2}{4s}} e^{-s\lambda}\, ds, \qquad \lambda > 0,$$

se obtiene mediante el cambio $u = t/(2\sqrt{s})$ en la integral gaussiana. En $L^2$, el teorema espectral muestra que $P_t^{(2)} = e^{-tC_2}$. Además, (13.82) y la misma fórmula con $\lambda = 1$ dan

$$\|P_t^{(r)}\|_{\mathcal{L}(L^r)} \le e^{-t}. \tag{13.87}$$

La consistencia de los semigrupos del calor implica la consistencia de los $P_t^{(r)}$. Para $1 < r < \infty$ denotamos por $-C_r$ el generador de $(P_t^{(r)})_{t\ge 0}$. En $L^2$ se tiene $C_2 = B_2^{1/2}$, y la consistencia muestra que las resolventes y los cálculos de Laplace de los operadores $C_r$ coinciden sobre las intersecciones de los espacios $L^r$.
Sea $\mathbf{f} \in \Gamma_c(\mathbf{F})$. Para $t > 0$, $\mathbf{U}(t) := P_t^{(2)}\mathbf{f}$ pertenece al dominio de todas las potencias de $B_2$, porque $\lambda^m e^{-t\sqrt{\lambda}}$ está acotada en $[1,\infty)$ para cada $m$. La regularidad elíptica local implica que $\mathbf{U}$ es suave en $(0,\infty)\times M$, y el cálculo espectral da

$$\partial_t^2 \mathbf{U} = B_2\mathbf{U} = -\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2\mathbf{U}) + \mathbf{W}\mathbf{U}. \tag{13.88}$$

*Estimación bilineal.* Sean $p, q$ exponentes conjugados. Por simetría podemos suponer $p \ge 2$; si $p < 2$, intercambiamos $p, q$ y las dos secciones. Sean $\mathbf{f} \in \Gamma_c(\mathbf{F})$ y $\mathbf{g} \in \Gamma_c(\mathbf{F})$, y pongamos

$$\mathbf{U}(t) = P_t\mathbf{f}, \qquad \mathbf{V}(t) = P_t\mathbf{g}.$$

Aplicamos el Lema 13.3.20 a las fibras reales de $\mathbf{F}$ y escribimos

$$b_\varepsilon(t,x) := \mathcal{B}_p\big((\mathbf{U}(t,x),\varepsilon),(\mathbf{V}(t,x),\varepsilon)\big) - \mathcal{B}_p((0,\varepsilon),(0,\varepsilon)), \qquad \varepsilon > 0.$$

Aquí añadimos a cada fibra una dirección real paralela; por ello los dos argumentos de $\mathcal{B}_p$ nunca se anulan. La función $\mathcal{B}_p$ es $C^1$ y es $C^2$ a trozos. En el conjunto donde los argumentos tienen norma al menos $\varepsilon$, su gradiente es localmente Lipschitz. Al integrar por partes separadamente en las dos regiones $|\mathbf{U}_\varepsilon|^p < |\mathbf{V}_\varepsilon|^q$ y $|\mathbf{U}_\varepsilon|^p > |\mathbf{V}_\varepsilon|^q$, los términos de interfaz se cancelan porque las primeras derivadas de $\mathcal{B}_p$ coinciden allí. De este modo, la regla de la cadena siguiente es válida casi en todas partes y también en el sentido de distribuciones. Equivalentemente, puede obtenerse aproximando $\mathcal{B}_p$ en compactos alejados de los ejes por convolución y pasando al límite.

Sea

$$\mathscr{L} := \partial_t^2 + \operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \nabla^2$$

el operador escalar en $(0,\infty)\times M$. La fórmula para la Hessiana de una función radial sobre una fibra hilbertiana, junto con (13.88), muestra que los términos de primer orden en $\mathbf{U},\mathbf{V}$ están dados por la Hessiana de $\mathcal{B}_p$ aplicada a las derivadas temporales y covariantes. Los términos de orden cero son

$$\frac{\partial_u \beta_p}{|\mathbf{U}_\varepsilon|}\langle \mathbf{W}\mathbf{U},\mathbf{U}\rangle + \frac{\partial_v \beta_p}{|\mathbf{V}_\varepsilon|}\langle \mathbf{W}\mathbf{V},\mathbf{V}\rangle,$$

y son no negativos por (13.81) y por la monotonía radial de la función de Bellman. El inciso (c) del lema, aplicado a cada derivada temporal y a cada dirección ortonormal espacial, proporciona una función medible $\tau = \tau(t,x) > 0$ tal que

$$\mathscr{L} b_\varepsilon \geq c_p \Big[ \tau \big( |\partial_t \mathbf{U}|^2 + |\nabla \mathbf{U}|^2 \big) + \tau^{-1} \big( |\partial_t \mathbf{V}|^2 + |\nabla \mathbf{V}|^2 \big) \Big]. \tag{13.89}$$

En particular, por $\tau A^2 + \tau^{-1} B^2 \geq 2AB$,

$$\mathscr{L} b_\varepsilon \geq 2c_p \big( |\partial_t \mathbf{U}|^2 + |\nabla \mathbf{U}|^2 \big)^{1/2} \big( |\partial_t \mathbf{V}|^2 + |\nabla \mathbf{V}|^2 \big)^{1/2} \tag{13.90}$$

casi en todas partes.

Tomemos las funciones de corte $\chi_j$ del Lema 12.1.7. Así, $0 \leq \chi_j \leq 1$, $\chi_j \to 1$ localmente y $\|d\chi_j\|_\infty \to 0$. Integramos $t\chi_j^2 \mathscr{L} b_\varepsilon$ en $M \times (a,R)$, con $0 < a < R < \infty$. Fijados $j, a, R$, hacemos primero $\varepsilon \downarrow 0$. En este cilindro temporal finito, y sobre el soporte compacto de $d\chi_j$, las secciones $\mathbf{U},\mathbf{V}$ y sus primeras derivadas son acotadas. Como $\mathcal{B}_p$ es de clase $C^1$, su función y su gradiente son acotados en el compacto de argumentos que se obtiene al hacer variar $0 < \varepsilon \leq 1$. Esto proporciona una dominante independiente de $\varepsilon$ para los términos de frontera y de corte. La convergencia dominada permite, por tanto, pasar al límite en todos los términos. Sólo entonces hacemos $a \downarrow 0$ y $R \to \infty$. Para justificar estos límites temporales observamos que, para datos de soporte compacto, el cálculo espectral en $L^2$ da

$$\|C_2^k P_t \mathbf{f}\|_{L^2(M,\mathbf{F})} \leq \sup_{\lambda \geq 1} \lambda^k e^{-t\lambda} \, \|\mathbf{f}\|_{L^2(M,\mathbf{F})},$$

y lo mismo para $\mathbf{g}$. En particular, los términos multiplicados por $t$ se anulan en $t = \infty$; cerca de cero usamos que las secciones suaves de soporte compacto pertenecen al dominio de todas las potencias de $B_2$. La integración temporal produce el valor en $t = 0$. En la variable espacial, la fórmula de divergencia da

$$\int_M \chi_j^2 \operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \nabla^2 b_\varepsilon \, d\lambda_{\mathbf{g}} = -2 \int_M \chi_j \langle d\chi_j, db_\varepsilon \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La cota de gradiente (13.78), la desigualdad ponderada (13.89) y Young permiten absorber la mitad del término ponderado de energía; queda

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_M t\chi_j^2 \big( |\partial_t \mathbf{U}|^2 + |\nabla \mathbf{U}|^2 \big)^{1/2} \big( |\partial_t \mathbf{V}|^2 + |\nabla \mathbf{V}|^2 \big)^{1/2} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \, dt \\ \leq C_p \int_M \chi_j^2 \big( |\mathbf{f}|^p + |\mathbf{g}|^q \big) \, d\lambda_{\mathbf{g}} \end{aligned}$$

$$+ C_p \|d\chi_j\|_\infty^2 \int_0^\infty t \left( \|\mathbf{U}(t)\|_{L^p(M,\mathbf{F})}^p + \|\mathbf{V}(t)\|_{L^q(M,\mathbf{F})}^q \right) dt. \tag{13.91}$$

Después del límite $\varepsilon \downarrow 0$ efectuado en el cilindro finito, la cota del inciso (a) del lema deja en el término de corte únicamente un múltiplo de $|\mathbf{U}|^p + |\mathbf{V}|^q$. Usamos entonces (13.87):

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{L^p(M,\mathbf{F})}^p \le e^{-pt} \|\mathbf{f}\|_{L^p(M,\mathbf{F})}^p, \qquad \|\mathbf{V}(t)\|_{L^q(M,\mathbf{F})}^q \le e^{-qt} \|\mathbf{g}\|_{L^q(M,\mathbf{F})}^q.$$

La integral temporal del último término de (13.91) es finita y no depende de $j$. Al hacer $j \to \infty$, ese término desaparece y Fatou da

$$\int_0^\infty \int_M t\, |C_2 P_t \mathbf{f}|\, |C_2 P_t \mathbf{g}|\, d\lambda_{\mathbf{g}}\, dt \le C_p \left( \|\mathbf{f}\|_{L^p(M,\mathbf{F})}^p + \|\mathbf{g}\|_{L^q(M,\mathbf{F})}^q \right). \tag{13.92}$$

Hemos usado sólo las derivadas temporales $\partial_t P_t = -C_2 P_t$ de la estimación más fuerte obtenida arriba. Sustituimos $\mathbf{f}$ por $a\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ por $a^{-1}\mathbf{g}$. Elegimos $a > 0$ de modo que $a^p \|\mathbf{f}\|_{L^p(M,\mathbf{F})}^p = a^{-q} \|\mathbf{g}\|_{L^q(M,\mathbf{F})}^q$. El miembro izquierdo no cambia y obtenemos la forma homogénea

$$\int_0^\infty \int_M t\, |C_2 P_t \mathbf{f}|\, |C_2 P_t \mathbf{g}|\, d\lambda_{\mathbf{g}}\, dt \le C_p \|\mathbf{f}\|_{L^p(M,\mathbf{F})} \|\mathbf{g}\|_{L^q(M,\mathbf{F})}. \tag{13.93}$$

*Multiplicadores de Laplace.* Sea $\psi \in L^\infty(0,\infty)$. En $L^2$ definimos $m_\psi(C_2)$ por el cálculo espectral. Puesto que $C_2 \ge I$,

$$\mathbf{g} = \int_0^\infty C_2 P_r \mathbf{g}\, dr$$

en $L^2$. Para $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \Gamma_c(\mathbf{F})$, Fubini, la autoadjunción y la ley del semigrupo dan

$$\begin{aligned} \langle m_\psi(C_2)\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(s) \langle C_2 P_s \mathbf{f}, C_2 P_r \mathbf{g} \rangle\, dr\, ds \\ &= 2 \int_0^\infty \left( \int_0^{2t} \psi(s)\, ds \right) \langle C_2 P_t \mathbf{f}, C_2 P_t \mathbf{g} \rangle\, dt. \end{aligned}$$

La segunda igualdad usa el cambio $t = (s+r)/2$, cuyo jacobiano es dos. Por (13.93),

$$|\langle m_\psi(C_2)\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle| \le 4C_p \|\psi\|_\infty \|\mathbf{f}\|_{L^p(M,\mathbf{F})} \|\mathbf{g}\|_{L^q(M,\mathbf{F})}.$$

La dualidad $L^p$–$L^q$ y la densidad prueban (13.85).

*Potencias imaginarias.* Para $\tau \in \mathbb{R}$ ponemos

$$\psi_\tau(s) := \frac{s^{-2i\tau}}{\Gamma(1 - 2i\tau)}.$$

Como

$$\lambda \int_0^\infty s^{-2i\tau} e^{-s\lambda}\, ds = \Gamma(1 - 2i\tau) \lambda^{2i\tau},$$

el multiplicador de (13.84) es $m_{\psi_\tau}(C_2) = C_2^{2i\tau} = B_2^{i\tau}$. Recordemos la cota elemental de la función gamma

que necesitamos. La identidad beta–gamma y la fórmula de reflexión de Euler dan, para $y \in \mathbb{R}$,

$$|\Gamma(1+iy)|^2 = \Gamma(1+iy)\Gamma(1-iy) = \frac{\pi|y|}{\operatorname{sinh}(\pi|y|)}, \tag{13.94}$$

con valor uno en $y=0$ por continuidad. La fórmula de reflexión utilizada se obtiene de

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\operatorname{sin}(\pi z)}, \qquad 0 < \operatorname{Re} z < 1,$$

donde la primera igualdad es el cambio $t = x/(1-x)$ en la identidad beta–gamma y la segunda se obtiene integrando $w^{z-1}/(1+w)$ sobre el contorno de ojo de cerradura alrededor del eje positivo; los dos lados del corte difieren por el factor $e^{2\pi i z}$ y el único polo interior es $w=-1$. La identidad obtenida inicialmente para $0 < \operatorname{Re} z < 1$ se prolonga meromórficamente a los valores en los que ambos miembros están definidos. La aplicamos a $z = iy$ y usamos después $\Gamma(1+iy) = iy\Gamma(iy)$. De (13.94) se deduce

$$\frac{1}{|\Gamma(1-2i\tau)|} \le C(1+|\tau|)^{-1/2} e^{\pi|\tau|} \le C e^{\pi|\tau|}. \tag{13.95}$$

La cota del multiplicador de Laplace da entonces (13.83), por ejemplo con $\omega_p = \pi$ después de modificar $C_p$. Resta la continuidad fuerte en $\tau$. En $L^2$ es consecuencia inmediata del cálculo espectral. Si $p \neq 2$, elegimos $r \in (1,\infty)$ de modo que $p$ esté estrictamente entre 2 y $r$. Para una sección de soporte compacto, Hölder interpola la norma $L^p$ entre $L^2$ y $L^r$; el factor $L^2$ tiende a cero cuando $\tau \to \tau_0$ y el factor $L^r$ permanece acotado en intervalos compactos de $\tau$ por la estimación ya demostrada. La densidad de $\Gamma_c(\mathbf{F})$ en $L^p$ y la acotación local uniforme de $B_p^{i\tau}$ extienden la continuidad a todo $L^p$. La ley de grupo se verifica en $L^2 \cap L^p$ por cálculo espectral y después en $L^p$ por densidad. □

El paso abstracto que convierte la información de orden dos en una raíz cuadrada se recoge en el siguiente lema.

**Lema 13.3.22.** (Raíz cuadrada por interpolación y potencias imaginarias) Sea $X$ un espacio de Banach complejo reflexivo y sea $-B$ el generador de un $C_0$-semigrupo que satisface $\|e^{-tB}\| \le e^{-t}$ para $t \ge 0$. Supongamos que las potencias negativas $B^{-s}$, $s>0$, están definidas por el cálculo de Laplace de ese semigrupo y que las potencias imaginarias forman un grupo $C_0$ que satisface

$$\|B^{it}\|_{\mathcal{L}(X)} \le M e^{\omega|t|}.$$

Equipemos $\mathcal{D}(B)$ con la norma $\|Bx\|_X$ y $\mathcal{D}(B^{1/2})$ con $\|B^{1/2}x\|_X$. Entonces

$$[X, \mathcal{D}(B)]_{1/2} = \mathcal{D}(B^{1/2}) \tag{13.96}$$

con equivalencia de normas. Si $X$ es real, la misma afirmación vale al complejificar $X$ y $B$ y restringir después al subespacio real.

*Demostración.* La identidad corresponde al caso $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ de la interpolación de dominios. Para probar-

la, fijemos un entero $N \geq 2$. Para $x \in \mathcal{D}(B^N)$ y $\varepsilon > 0$ definimos, en la franja $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$,

$$F_\varepsilon(z) := e^{\varepsilon(z-1/2)^2} B^{1/2-z} x.$$

Escribiendo $B^{1/2-z}x = B^{1/2-z-N}B^N x$, la potencia de parte real negativa se expresa mediante la integral de Laplace; esto prueba la holomorfía en el interior. En las dos fronteras,

$$F_\varepsilon(it) = e^{\varepsilon(it-1/2)^2} B^{-it} B^{1/2} x,$$

$$BF_\varepsilon(1+it) = e^{\varepsilon(1/2+it)^2} B^{-it} B^{1/2} x.$$

La cota de las potencias imaginarias y el factor gaussiano muestran que $F_\varepsilon$ pertenece al espacio de Calderón del par $(X, \mathcal{D}(B))$ y que

$$\|x\|_{[X,\mathcal{D}(B)]_{1/2}} \leq C \|B^{1/2}x\|_X.$$

Si $x \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, ponemos $x_\eta = (I+\eta B)^{-N}x$. El cálculo funcional de Laplace da $x_\eta \in \mathcal{D}(B^N)$ y $B^{1/2}x_\eta \to B^{1/2}x$. La estimación anterior aplicada a diferencias prueba que $x_\eta$ converge a $x$ en el espacio interpolado. Así, $\mathcal{D}(B^{1/2}) \subseteq [X, \mathcal{D}(B)]_{1/2}$.

Para la inclusión inversa, sea $F \in \mathscr{F}(X, \mathcal{D}(B))$ y $x = F(1/2)$. Fijamos $\eta > 0$ y ponemos $R_\eta = (I+\eta B)^{-N}$. La función

$$G_{\varepsilon,\eta}(z) := e^{\varepsilon(z-1/2)^2} B^z R_\eta F(z)$$

es holomorfa con valores en $X$. En la frontera,

$$G_{\varepsilon,\eta}(it) = e^{\varepsilon(it-1/2)^2} B^{it} R_\eta F(it),$$

y

$$G_{\varepsilon,\eta}(1+it) = e^{\varepsilon(1/2+it)^2} B^{it} R_\eta BF(1+it).$$

Las normas de $R_\eta$ permanecen uniformemente acotadas porque el resolvente se obtiene del mismo cálculo de Laplace. El lema de las tres líneas proporciona, con una constante independiente de $\eta$,

$$\|B^{1/2} R_\eta x\|_X \leq C \|F\|_{\mathscr{F}(X,\mathcal{D}(B))}.$$

Al hacer $\eta \downarrow 0$, $R_\eta x \to x$ en $X$. Por reflexividad, extraemos una subsucesión para la cual $B^{1/2}R_\eta x$ converge débilmente. El gráfico del operador cerrado $B^{1/2}$ es un subespacio cerrado de $X \times X$ y, por convexidad, es también débilmente cerrado. Se sigue que $x \in \mathcal{D}(B^{1/2})$ y

$$\|B^{1/2}x\|_X \leq C \|F\|_{\mathscr{F}(X,\mathcal{D}(B))}.$$

Tomar el ínfimo en $F$ prueba la inclusión inversa y la segunda comparación de normas. □

**Corolario 13.3.23.** (Estimación interna de primer orden para la cadena) Bajo las hipótesis de la Proposición 13.3.16, sea $1 < p < \infty$. Para cada $\ell \in \{0, \dots, N\}$,

$$\mathcal{D}(B^{1/2}_{\ell,p}) = W^{1,p}(M, \mathbf{E}_\ell) \tag{13.97}$$

con equivalencia de normas. En particular, existen $\widetilde{a}_{\ell,p}, \widetilde{b}_{\ell,p} > 0$ tales que

$$\widetilde{a}_{\ell,p}\left(\|\mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} + \|\nabla_\ell \mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+1})}\right) \le \|B_{\ell,p}^{1/2}\mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} \le \widetilde{b}_{\ell,p}\left(\|\mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} + \|\nabla_\ell \mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+1})}\right). \tag{13.98}$$

*Demostración.* La elección de $\mu_N$ en la Proposición 13.3.16 implica, punto a punto,

$$\mu_N I + \mathbf{V}_\ell \ge I$$

como endomorfismo autoadjunto de $\mathbf{E}_\ell$. La misma proposición da

$$\|e^{-tB_{\ell,r}}\|_{\mathcal{L}(L^r)} \le e^{-t} \qquad (1 \le r < \infty).$$

El Teorema 13.3.21 se aplica, por tanto, a $B_{\ell,p}$ y proporciona las potencias imaginarias requeridas en el Lema 13.3.22. La Proposición 13.3.19 y la Proposición 13.3.18 dan

$$\mathcal{D}(B_{\ell,p}^{1/2}) = [L^p(M,\mathbf{E}_\ell), \mathcal{D}(B_{\ell,p})]_{1/2} = [L^p(M,\mathbf{E}_\ell), W^{2,p}(M,\mathbf{E}_\ell)]_{1/2} = W^{1,p}(M,\mathbf{E}_\ell).$$

Las comparaciones de normas en los tres resultados, junto con la definición de la norma $W^{1,p}$, producen (13.98). □

**Proposición 13.3.24.** (Estimaciones de potencias para la cadena de Bochner) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada y sean $N \in \mathbb{N}$ y $1 < p < \infty$. Usemos los operadores $B_{\ell,p}$ de la Proposición 13.3.16. Para $k \in \mathbb{N}_0$ y $\ell \in \{0,\dots,N\}$, definimos

$$\mathscr{D}_{\ell,k}^p := B_{\ell,p}^{-\frac{k}{2}} L^p(M,\mathbf{E}_\ell), \qquad \|\mathbf{u}\|_{\mathscr{D}_{\ell,k}^p} := \|B_{\ell,p}^{\frac{k}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}. \tag{13.99}$$

Si además $k + \ell \le N$, entonces

$$\mathscr{D}_{\ell,k}^p = W^{k,p}(M,\mathbf{E}_\ell), \tag{13.100}$$

y existen constantes $c_{\ell,k,p}, C_{\ell,k,p} > 0$ tales que

$$\begin{aligned} c_{\ell,k,p}\sum_{j=0}^{k}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+j})} &\le \|B_{\ell,p}^{\frac{k}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} \\ &\le C_{\ell,k,p}\sum_{j=0}^{k}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+j})}. \end{aligned} \tag{13.101}$$

*Demostración.* La potencia negativa de (13.99) se entiende mediante

$$B_{\ell,p}^{-\frac{s}{2}}\mathbf{f} = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-tB_{\ell,p}}\mathbf{f}\,dt, \qquad s > 0. \tag{13.102}$$

Como $-(B_{\ell,p} - I)$ genera un semigrupo de contracción, el Teorema B.4.19 garantiza que estas potencias son

inyectivas, que sus rangos son espacios de Banach y que

$$\|B_{\ell,p}^{\frac{a}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} \le \|B_{\ell,p}^{\frac{b}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}, \qquad 0 \le a \le b, \tag{13.103}$$

para $\mathbf{u} \in \mathscr{D}_{\ell,b}^p$.

La estimación de primer orden se obtiene combinando la regularidad elíptica con la interpolación de dominios. La Proposición 13.3.19 identifica el dominio de $B_{\ell,p}$ con $W^{2,p}$, el Teorema 13.3.21 proporciona sus potencias imaginarias y la Proposición 13.3.18 identifica el espacio interpolado de orden uno. El Corolario 13.3.23 da, por tanto,

$$\mathscr{D}_{\ell,1}^p = W^{1,p}(M,\mathbf{E}_\ell). \tag{13.104}$$

Además, existen constantes $\widetilde{a}_{\ell,p}, \widetilde{b}_{\ell,p} > 0$ tales que

$$\widetilde{a}_{\ell,p}\left(\|\mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} + \|\nabla_\ell \mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+1})}\right) \le \|B_{\ell,p}^{\frac{1}{2}}\mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} \le \widetilde{b}_{\ell,p}\left(\|\mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} + \|\nabla_\ell \mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+1})}\right). \tag{13.105}$$

Así, el punto de partida de la inducción queda establecido por la regularidad elíptica uniforme, la función de Bellman y la interpolación compleja demostradas arriba.

Desarrollaremos ahora el paso de conmutación necesario para los órdenes superiores. Escribamos

$$S_\ell(t) := e^{-tB_{\ell,p}}, \qquad t \ge 0.$$

Los semigrupos covariantes son consistentes al variar $p$. La serie de Dyson–Phillips de la Proposición B.4.17 muestra que la consistencia se conserva al añadir los potenciales acotados $\mathbf{V}_\ell$ y el desplazamiento $\mu_N I$.

Antes de conmutar operadores no acotados, fijamos un núcleo regularizante común. Sea $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty))$ y definamos

$$\mathcal{R}_{\ell,\varphi}\mathbf{z} := \int_0^\infty \varphi(t) S_\ell(t)\mathbf{z}\, dt. \tag{13.106}$$

La integral es una integral de Bochner. No necesitamos suponer que $S_\ell(t)\mathbf{z}$ sea diferenciable para un dato arbitrario de $L^p$. Extendamos $\varphi$ por cero a $\mathbb{R}$. Para $h > 0$ pequeño,

$$\frac{S_\ell(h) - I}{h}\mathcal{R}_{\ell,\varphi}\mathbf{z} = \int_0^\infty \frac{\varphi(t-h)-\varphi(t)}{h} S_\ell(t)\mathbf{z}\, dt \longrightarrow -\int_0^\infty \varphi'(t) S_\ell(t)\mathbf{z}\, dt.$$

La convergencia es en $L^p$, por convergencia dominada sobre un intervalo compacto. La definición del generador $-B_{\ell,p}$ prueba la fórmula para $m = 1$; al repetirla con $\varphi', \varphi'', \ldots$ obtenemos

$$B_{\ell,p}^m \mathcal{R}_{\ell,\varphi}\mathbf{z} = \int_0^\infty \varphi^{(m)}(t) S_\ell(t)\mathbf{z}\, dt, \qquad m \in \mathbb{N}_0. \tag{13.107}$$

Por lo tanto, $\mathcal{R}_{\ell,\varphi}\mathbf{z} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(B_{\ell,p}^m)$.

Elegimos una familia $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de funciones no negativas de $C_c^\infty((0,\varepsilon))$ con integral uno. La continuidad fuerte del semigrupo implica

$$\mathcal{R}_{\ell,\varphi_\varepsilon}\mathbf{z} \longrightarrow \mathbf{z} \quad \text{en } L^p(M,\mathbf{E}_\ell).$$

Esta convergencia vale en cada espacio $\mathscr{D}_{\ell,\rho}^p$. En efecto, si $\mathbf{z} = B_{\ell,p}^{-\frac{\rho}{2}}\mathbf{f}$, el cálculo funcional de Laplace permite

conmutar $B_{\ell,p}^{-\frac{\rho}{2}}$ con $S_\ell(t)$ y

$$\|\mathcal{R}_{\ell,\varphi_\varepsilon}\mathbf{z}-\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}} = \|\mathcal{R}_{\ell,\varphi_\varepsilon}\mathbf{f}-\mathbf{f}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} \longrightarrow 0.$$

Tomaremos como núcleo común

$$\mathscr{C}_{\ell,p} := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(B_{\ell,p}^m).$$

Los regularizadores anteriores pertenecen a este espacio y prueban que es denso en cada $\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}$. Además, la ley de las potencias muestra que es invariante bajo las potencias positivas y negativas de $B_{\ell,p}$ y bajo $S_\ell(t)$. Esta invariancia permitirá aplicar la misma identidad a $\mathbf{z}$ y a $B^a_{\ell,p}\mathbf{z}$.

Las identidades geométricas se verifican primero sobre regularizaciones de datos compactos. Aproximamos $\mathbf{z}\in L^p(M,\mathbf{E}_\ell)$ por secciones $\mathbf{z}_n\in\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$. Las secciones $\mathcal{R}_{\ell,\varphi}\mathbf{z}_n$ pertenecen simultáneamente a $L^2$ y a $L^p$ y, por (13.107), pertenecen a los dominios de todas las potencias de $B_{\ell,2}$. Como $B_{\ell,2}$ tiene el mismo símbolo principal elíptico que el laplaciano de Bochner, la regularidad elíptica local muestra que esas secciones son suaves. La identidad diferencial (13.52) vale localmente para estas secciones. También justifica las realizaciones que intervienen: si $\mathbf{v}\in\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{D}(B^m_{\ell,2})$, la estimación de primer orden da $\nabla_\ell\mathbf{v},\nabla_\ell B_{\ell,2}\mathbf{v}\in L^2$. Por la identidad diferencial,

$$B_{\ell+1,2}\nabla_\ell\mathbf{v} = \nabla_\ell B_{\ell,2}\mathbf{v} - \mathbf{W}_\ell\mathbf{v}\in L^2 \quad \text{en distribuciones.}$$

El Lema 13.3.17 implica $\nabla_\ell\mathbf{v}\in\mathcal{D}(B_{\ell+1,2})$. La misma argumentación aplicada a $S_\ell(t)\mathbf{v}$ y a $B_{\ell,2}S_\ell(t)\mathbf{v}$ proporciona continuidad en las normas de gráfica necesarias para diferenciar el producto de semigrupos. Las fórmulas (13.107), la estimación de primer orden (13.105) y la continuidad de $\mathbf{W}_\ell$ permiten pasar al límite $n\to\infty$. De este modo, toda identidad que se establezca a continuación sobre $\mathcal{R}_{\ell,\varphi}\mathbf{z}_n$ pasa primero a $\mathcal{R}_{\ell,\varphi}\mathbf{z}$. Finalmente hacemos $\varphi=\varphi_\varepsilon$ y $\varepsilon\to0^+$. La convergencia en todas las normas de gráfica de orden finito extiende las identidades a $\mathscr{C}_{\ell,p}$.

El cálculo funcional de las potencias de Bessel muestra que, para $\rho\geq0$,

$$\|S_\ell(t)\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}} \leq e^{-t}\|\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}}. \tag{13.108}$$

Supongamos que, para cierto $\rho\in\mathbb{N}_0$, la multiplicación por $\mathbf{W}_\ell$ es continua de $\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}$ en $\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}$. Para $t>0$ definimos

$$\mathcal{K}_\ell(t)\mathbf{z} := \int_0^t S_{\ell+1}(t-\tau)\mathbf{W}_\ell S_\ell(\tau)\mathbf{z}\,d\tau. \tag{13.109}$$

La integral converge en $\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}$ y

$$\|\mathcal{K}_\ell(t)\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}} \leq C_\rho t e^{-t}\|\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}}. \tag{13.110}$$

Sea $\mathbf{z}\in\mathscr{C}_{\ell,p}$. Sobre las aproximaciones suaves descritas arriba podemos diferenciar en $L^2$ la función

$$\tau\longmapsto S_{\ell+1}(t-\tau)\nabla_\ell S_\ell(\tau)\mathbf{z}, \qquad 0<\tau<t.$$

La identidad

$$\nabla_\ell B_{\ell,p} - B_{\ell+1,p}\nabla_\ell = \mathbf{W}_\ell,$$

que es (13.52) con el mismo desplazamiento en los dos haces, da

$$\frac{d}{d\tau}\left[S_{\ell+1}(t-\tau)\nabla_\ell S_\ell(\tau)\mathbf{z}\right] = -S_{\ell+1}(t-\tau)\mathbf{W}_\ell S_\ell(\tau)\mathbf{z}.$$

Integramos entre 0 y $t$ y pasamos a $L^p$ por consistencia. Obtenemos

$$S_{\ell+1}(t)\nabla_\ell \mathbf{z} - \nabla_\ell S_\ell(t)\mathbf{z} = \mathcal{K}_\ell(t)\mathbf{z}. \tag{13.111}$$

La estimación de primer orden y (13.110) permiten extender esta identidad por densidad a $\mathscr{D}^p_{\ell,1}$; en órdenes superiores se interpreta en la norma $\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}$ siempre que los dos miembros estén definidos. La expresión del lado derecho, en cambio, está definida y es continua en todo $\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}$.
Consideremos ahora la raíz cuadrada. Para $\mathbf{z} \in \mathscr{C}_{\ell,p}$, la fórmula integral del Lema B.4.20, aplicada primero con límites truncados, y (13.111) dan

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_\varepsilon^R t^{-\frac{3}{2}}\left(\nabla_\ell \mathbf{z} - S_{\ell+1}(t)\nabla_\ell \mathbf{z}\right) dt \\ &\quad = \nabla_\ell\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_\varepsilon^R t^{-\frac{3}{2}}\left(\mathbf{z} - S_\ell(t)\mathbf{z}\right) dt\right] - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_\varepsilon^R t^{-\frac{3}{2}}\mathcal{K}_\ell(t)\mathbf{z}\, dt.\end{aligned}$$

El primer término del miembro derecho converge a $\nabla_\ell B^{\frac{1}{2}}_{\ell,p}\mathbf{z}$: la integral entre corchetes converge en $\mathscr{D}^p_{\ell,1}$, pues $\mathbf{z}$ pertenece a todos los dominios, y se usa (13.105). El segundo término converge en $\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}$, ya que

$$\int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}}(te^{-t})\, dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) < \infty.$$

La cerradura de $B^{\frac{1}{2}}_{\ell+1,p}$ y la última afirmación del Lema B.4.20 muestran que $\nabla_\ell \mathbf{z} \in \mathscr{D}^p_{\ell+1,1}$ y que

$$\Theta_{\ell,1}\mathbf{z} := B^{\frac{1}{2}}_{\ell+1,p}\nabla_\ell \mathbf{z} - \nabla_\ell B^{\frac{1}{2}}_{\ell,p}\mathbf{z} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}}\mathcal{K}_\ell(t)\mathbf{z}\, dt. \tag{13.112}$$

Por (13.110),

$$\|\Theta_{\ell,1}\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}} \le C'_\rho \|\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}}. \tag{13.113}$$

Como $\mathscr{C}_{\ell,p}$ es denso en $\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}$, la integral del segundo miembro define la extensión única de $\Theta_{\ell,1}$ a ese espacio. Para $j \in \mathbb{N}$, escribimos formalmente

$$\Theta_{\ell,j}\mathbf{z} := B^{\frac{j}{2}}_{\ell+1,p}\nabla_\ell \mathbf{z} - \nabla_\ell B^{\frac{j}{2}}_{\ell,p}\mathbf{z}. \tag{13.114}$$

Antes de usar esta expresión debemos comprobar que el primer término está definido. Lo haremos simultáneamente con la estimación del defecto.
Supongamos que, para cierto $R \in \mathbb{N}_0$, la multiplicación por $\mathbf{W}_\ell$ es continua de $\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}$ en $\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}$ para todo $\rho \in \{0,\dots,R\}$. Afirmamos que, si $j \ge 1$ y $j-1 \le R$, se cumplen las propiedades siguientes.

(i) Para cada $\mathbf{z} \in \mathscr{C}_{\ell,p}$, $\nabla_\ell \mathbf{z} \in \mathscr{D}^p_{\ell+1,j}$ y la identidad (13.114) está bien definida.

(ii) Si $\rho \in \mathbb{N}_0$ y $\rho + j - 1 \le R$, entonces $\Theta_{\ell,j}$ se extiende de manera única a un operador continuo

$$\Theta_{\ell,j} \colon \mathscr{D}^p_{\ell,\rho+j-1} \longrightarrow \mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}$$

y existe $C_{\ell,j,\rho,p} > 0$ tal que

$$\|\Theta_{\ell,j}\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}} \le C_{\ell,j,\rho,p}\|\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,\rho+j-1}}. \tag{13.115}$$

Para $j = 1$, ambas afirmaciones son consecuencias de (13.112) y (13.113). Además, la identidad de la raíz se extiende al mapeo

$$\nabla_\ell \colon \mathscr{D}^p_{\ell,2} \longrightarrow \mathscr{D}^p_{\ell+1,1}. \tag{13.116}$$

En efecto, si $\mathbf{z}_\nu \in \mathscr{C}_{\ell,p}$ converge a $\mathbf{z}$ en $\mathscr{D}^p_{\ell,2}$, la estimación de primer orden muestra que $\nabla_\ell \mathbf{z}_\nu \to \nabla_\ell \mathbf{z}$ en $L^p$. Por otra parte,

$$B^{\frac{1}{2}}_{\ell+1,p}\nabla_\ell \mathbf{z}_\nu = \nabla_\ell B^{\frac{1}{2}}_{\ell,p}\mathbf{z}_\nu + \Theta_{\ell,1}\mathbf{z}_\nu$$

es de Cauchy en $L^p$: el primer término se controla aplicando (13.105) a $B^{\frac{1}{2}}_{\ell,p}(\mathbf{z}_\nu - \mathbf{z}_\mu)$ y el segundo mediante (13.113) con $\rho = 0$. La cerradura de $B^{\frac{1}{2}}_{\ell+1,p}$ prueba (13.116) y permite pasar al límite en la identidad.
Procedemos por inducción sobre $j$. Supongamos que las dos afirmaciones están demostradas hasta el orden $j-1$, con $j \ge 2$, y sea $\mathbf{z} \in \mathscr{C}_{\ell,p}$. La hipótesis inductiva da

$$B^{\frac{j-1}{2}}_{\ell+1,p}\nabla_\ell \mathbf{z} = \nabla_\ell B^{\frac{j-1}{2}}_{\ell,p}\mathbf{z} + \Theta_{\ell,j-1}\mathbf{z}. \tag{13.117}$$

El primer término del miembro derecho pertenece a $\mathscr{D}^p_{\ell+1,1}$ por (13.116), aplicado a $B^{\frac{j-1}{2}}_{\ell,p}\mathbf{z}$. El segundo también pertenece a ese espacio por (13.115) con orden $j-1$ y $\rho = 1$; aquí se usa $j - 1 \le R$. Por lo tanto, el miembro izquierdo de (13.117) pertenece al dominio de $B^{\frac{1}{2}}_{\ell+1,p}$. Esto prueba que $\nabla_\ell \mathbf{z} \in \mathscr{D}^p_{\ell+1,j}$.
Aplicamos ahora $B^{\frac{1}{2}}_{\ell+1,p}$ a (13.117) y usamos la identidad de la raíz sobre $B^{\frac{j-1}{2}}_{\ell,p}\mathbf{z}$. Obtenemos la recursión

$$\Theta_{\ell,j}\mathbf{z} = \Theta_{\ell,1}\big(B^{\frac{j-1}{2}}_{\ell,p}\mathbf{z}\big) + B^{\frac{1}{2}}_{\ell+1,p}\Theta_{\ell,j-1}\mathbf{z}. \tag{13.118}$$

Si $\rho + j - 1 \le R$, la primera suma se estima mediante (13.113) en la norma $\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}$, mientras que para la segunda usamos la hipótesis inductiva en la norma $\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho+1}$. Así,

$$\begin{aligned}\|\Theta_{\ell,j}\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}} &\le C_\rho\|B^{\frac{j-1}{2}}_{\ell,p}\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,\rho}} + \|\Theta_{\ell,j-1}\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho+1}}\\ &\le C_{\ell,j,\rho,p}\|\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,\rho+j-1}}.\end{aligned}$$

La densidad de $\mathscr{C}_{\ell,p}$ en el espacio de partida proporciona la extensión única y concluye la inducción. En particular, al tomar $\rho = 0$ obtenemos

$$\|\Theta_{\ell,j}\mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+1})} \le C_{\ell,j,p}\|B^{\frac{j-1}{2}}_{\ell,p}\mathbf{z}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}. \tag{13.119}$$

Deducimos ahora el mapeo de la conexión entre los dominios. Sea $\mathbf{z} \in \mathscr{D}^p_{\ell,j+1}$ y elijamos $\mathbf{z}_\nu \in \mathscr{C}_{\ell,p}$ con $\mathbf{z}_\nu \to \mathbf{z}$

en $\mathscr{D}^p_{\ell,j+1}$. La estimación de primer orden da $\nabla_\ell \mathbf{z}_\nu \to \nabla_\ell \mathbf{z}$ en $L^p$. Por otra parte,

$$B^{\frac{j}{2}}_{\ell+1,p} \nabla_\ell \mathbf{z}_\nu = \nabla_\ell B^{\frac{j}{2}}_{\ell,p} \mathbf{z}_\nu + \Theta_{\ell,j} \mathbf{z}_\nu.$$

El miembro derecho es de Cauchy en $L^p$: para el primer término se aplica la estimación de primer orden a $B^{\frac{j}{2}}_{\ell,p}(\mathbf{z}_\nu - \mathbf{z}_\mu)$, y para el segundo se usa (13.119). La cerradura de $B^{\frac{j}{2}}_{\ell+1,p}$ implica $\nabla_\ell \mathbf{z} \in \mathscr{D}^p_{\ell+1,j}$ y permite pasar al límite en la identidad. Además, la estimación de primer orden y (13.119) dan

$$\begin{aligned} \|\nabla_\ell \mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell+1,j}} &\le C \|B^{\frac{j}{2}}_{\ell,p} \mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,1}} + C\|\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,j-1}} \\ &\le C' \|\mathbf{z}\|_{\mathscr{D}^p_{\ell,j+1}}. \end{aligned}$$

Hemos probado, por lo tanto, el mapeo continuo

$$\nabla_\ell \colon \mathscr{D}^p_{\ell,j+1} \longrightarrow \mathscr{D}^p_{\ell+1,j}. \tag{13.120}$$

Probamos ahora (13.101) por inducción sobre $k$. El caso $k = 0$ es inmediato y el caso $k = 1$ está contenido en (13.104) y (13.105). Fijemos $k \in \{2, \dots, N\}$, supongamos que la afirmación está probada en todos los órdenes menores que $k$ y fijemos

$$0 \le \ell \le N - k.$$

Para $\rho \in \{0, \dots, k-2\}$ y $a \in \{0, \dots, \rho\}$, la regla de Leibniz y (13.53) dan

$$\|\nabla^a (\mathbf{W}_\ell \mathbf{z})\|_{L^p(M, \mathbf{E}_{\ell+a+1})} \le C_a \sum_{b=0}^{a} \|\nabla^b \mathbf{z}\|_{L^p(M, \mathbf{E}_{\ell+b})}. \tag{13.121}$$

Al sumar sobre $a$ y aplicar la hipótesis inductiva en el orden $\rho$, se obtiene un operador continuo

$$\mathbf{W}_\ell \colon \mathscr{D}^p_{\ell,\rho} \longrightarrow \mathscr{D}^p_{\ell+1,\rho}, \qquad 0 \le \rho \le k-2. \tag{13.122}$$

Los índices son admisibles porque $\ell + 1 \le N - (k-2)$. En consecuencia, podemos usar (13.120) y (13.119) con $j = k-1$.
Sea $\mathbf{u} \in \mathscr{D}^p_{\ell,k}$. Por (13.120),

$$\nabla_\ell \mathbf{u} \in \mathscr{D}^p_{\ell+1,k-1}.$$

La estimación inductiva de orden $k-1$, aplicada a esta sección, y la identidad que define $\Theta_{\ell,k-1}$ proporcionan

$$\begin{aligned} \|\nabla^k \mathbf{u}\|_{L^p(M, \mathbf{E}_{\ell+k})} &\le C \|B^{\frac{k-1}{2}}_{\ell+1,p} \nabla_\ell \mathbf{u}\|_{L^p(M, \mathbf{E}_{\ell+1})} \\ &\le C \|\nabla_\ell B^{\frac{k-1}{2}}_{\ell,p} \mathbf{u}\|_{L^p(M, \mathbf{E}_{\ell+1})} + C \|\Theta_{\ell,k-1} \mathbf{u}\|_{L^p(M, \mathbf{E}_{\ell+1})} \\ &\le C \|B^{\frac{k}{2}}_{\ell,p} \mathbf{u}\|_{L^p(M, \mathbf{E}_\ell)} + C \|B^{\frac{k-2}{2}}_{\ell,p} \mathbf{u}\|_{L^p(M, \mathbf{E}_\ell)} \\ &\le C' \|B^{\frac{k}{2}}_{\ell,p} \mathbf{u}\|_{L^p(M, \mathbf{E}_\ell)}. \end{aligned}$$

En la tercera línea usamos (13.105) para la sección $B^{\frac{k-1}{2}}_{\ell,p} \mathbf{u}$ y (13.119); en la última usamos (13.103). Para las

derivadas de orden menor, la hipótesis inductiva y la misma monotonía dan

$$\sum_{j=0}^{k-1}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+j})}\le C\|B_{\ell,p}^{\frac{k-1}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}\le C\|B_{\ell,p}^{\frac{k}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=0}^{k}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+j})}\le C\|B_{\ell,p}^{\frac{k}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}. \tag{13.123}$$

Esta estimación prueba, en particular, la inclusión continua $\mathscr{D}^p_{\ell,k}\subseteq W^{k,p}(M,\mathbf{E}_\ell)$.
Probemos la estimación recíproca sobre secciones suaves de soporte compacto. La Proposición 12.3.4 muestra que $\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)\subseteq\mathcal{D}(L_{\ell,p})$. Como el operador diferencial $L_{\ell,0}+\mathbf{V}_\ell$ preserva $\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$, también $B_{\ell,p}$ la preserva. Para $r=1$ se tiene ya $\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)\subseteq\mathcal{D}(B_{\ell,p})$. Si $\mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$ pertenece a $\mathcal{D}(B^r_{\ell,p})$, entonces $B^r_{\ell,p}\mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)\subseteq\mathcal{D}(B_{\ell,p})$; por la definición del dominio de una composición, $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(B^{r+1}_{\ell,p})$. La inducción da

$$\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)\subseteq\bigcap_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{D}(B^r_{\ell,p}).$$

La monotonía de la escala implica que toda sección de $\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$ pertenece también a los dominios de las potencias fraccionarias que aparecen a continuación. Para $\mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$, aplicamos la estimación de primer orden a $B_{\ell,p}^{\frac{k-1}{2}}\mathbf{u}$ y después sumamos y restamos el defecto $\Theta_{\ell,k-1}\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}\|B_{\ell,p}^{\frac{k}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}&\le C\|B_{\ell,p}^{\frac{k-1}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}+C\|\nabla_\ell B_{\ell,p}^{\frac{k-1}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+1})}\\&\le C\|B_{\ell,p}^{\frac{k-1}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}+C\|B_{\ell+1,p}^{\frac{k-1}{2}}\nabla_\ell\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+1})}\\&\qquad+C\|\Theta_{\ell,k-1}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+1})}\\&\le C'\sum_{j=0}^{k}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+j})}.\end{aligned}$$

En la última desigualdad aplicamos la hipótesis inductiva de orden $k-1$ a $\mathbf{u}$ y a $\nabla_\ell\mathbf{u}$, y la de orden $k-2$ al término que controla $\Theta_{\ell,k-1}\mathbf{u}$. Así,

$$\|B_{\ell,p}^{\frac{k}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)}\le C\sum_{j=0}^{k}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+j})},\qquad\mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell). \tag{13.124}$$

Verifiquemos la densidad necesaria. Sea $\mathcal{T}^{\mathrm{geo}}=(U_i,\varphi_i,h_i)_{i\in I}$ una trivialización geodésica, de modo que $\sum_{i\in I}h_i=1$. Para $F\subseteq I$ finito, pongamos

$$\mathbf{u}_F:=\sum_{i\in F}h_i\mathbf{u}.$$

Cada $\mathbf{u}_F$ tiene soporte compacto. El mismo cálculo de Leibniz y el segundo conteo de traslapes usados en la Proposición 13.3.14 dan

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_F\|^p_{W^{k,p}(M,\mathbf{E}_\ell)}\le C\sum_{i\in I\setminus F}\|h_i\mathbf{u}\|^p_{W^{k,p}(U_i,\mathbf{E}_\ell)}. \tag{13.125}$$

La serie del miembro derecho es convergente por la desigualdad directa de localización, de modo que sus colas tienden a cero. Finalmente, el Teorema de Meyers–Serrin 9.1.48 aproxima cada $\mathbf{u}_F$ por secciones suaves. Si $\chi_F \in C_c^\infty(M)$ vale uno en una vecindad de $\operatorname{supp}(\mathbf{u}_F)$, multiplicar esas aproximaciones por $\chi_F$ produce una sucesión en $\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$ que converge a $\mathbf{u}_F$ en $W^{k,p}$. Por lo tanto, $\Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$ es denso en $W^{k,p}(M,\mathbf{E}_\ell)$.
Sea ahora $\mathbf{u} \in W^{k,p}(M,\mathbf{E}_\ell)$ y elijamos $\mathbf{u}_n \in \Gamma_c(\mathbf{E}_\ell)$ con $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ en $W^{k,p}$. La estimación (13.124) muestra que $(B_{\ell,p}^{\frac{k}{2}}\mathbf{u}_n)_n$ es de Cauchy en $L^p(M,\mathbf{E}_\ell)$. Además, $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E}_\ell)$. Las potencias positivas de la escala de Bessel son operadores cerrados; por consiguiente,

$$\mathbf{u} \in \mathscr{D}_{\ell,k}^p \quad \text{y} \quad B_{\ell,p}^{\frac{k}{2}}\mathbf{u} = \lim_{n\to\infty} B_{\ell,p}^{\frac{k}{2}}\mathbf{u}_n.$$

Al pasar al límite obtenemos

$$\|B_{\ell,p}^{\frac{k}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_\ell)} \le C\sum_{j=0}^{k}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_{\ell+j})}. \tag{13.126}$$

Junto con (13.123), esto prueba la igualdad de espacios y las dos estimaciones en el orden $k$. La inducción queda concluida. □

**Teorema 13.3.25.** (Potenciales de Bessel y derivadas covariantes) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada y sea $(\mathbf{E},\mathbf{h}_\mathbf{E},\nabla^\mathbf{E})$ un haz de geometría acotada. Si $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 < p < \infty$, entonces

$$H_{L_\mathbf{E}}^{m,p}(M,\mathbf{E}) = W^{m,p}(M,\mathbf{E}).$$

Existen constantes $c_{m,p}, C_{m,p} > 0$, independientes de $\mathbf{u}$, tales que

$$c_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{u}\|_{H_{L_\mathbf{E}}^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}. \tag{13.127}$$

*Demostración.* El caso $m = 0$ es inmediato. Supongamos $m \ge 1$ y apliquemos la Proposición 13.3.24 con $N = m$, $\ell = 0$ y $k = m$. Como $\mathbf{V}_0 = 0$, existen $a_{m,p}, b_{m,p} > 0$ tales que

$$a_{m,p}\sum_{j=0}^{m}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})} \le \|(\mu_m I + L_{\mathbf{E},p})^{\frac{m}{2}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \le b_{m,p}\sum_{j=0}^{m}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})}. \tag{13.128}$$

El Lema B.4.22, aplicado al semigrupo covariante, muestra que

$$\operatorname{Ran}\big((\mu_m I + L_{\mathbf{E},p})^{-\frac{m}{2}}\big) = \operatorname{Ran}\big((I + L_{\mathbf{E},p})^{-\frac{m}{2}}\big) = H_{L_\mathbf{E}}^{m,p}(M,\mathbf{E}),$$

y, para $\mathbf{u}$ en este rango común,

$$\|Q_{\mu_m,1}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}))}^{-1}\|\mathbf{u}\|_{\operatorname{Ran}((I+L_{\mathbf{E},p})^{-\frac{m}{2}})} \le \|\mathbf{u}\|_{\operatorname{Ran}((\mu_m I+L_{\mathbf{E},p})^{-\frac{m}{2}})} \le \|Q_{1,\mu_m}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}))}\|\mathbf{u}\|_{\operatorname{Ran}((I+L_{\mathbf{E},p})^{-\frac{m}{2}})},$$

donde los operadores $Q_{a,b}$ son los construidos en la prueba de ese lema. Por otro lado, las normas de suma

finita $\ell^p$ y $\ell^1$ satisfacen

$$\left(\sum_{j=0}^{m}\|\nabla^j\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right)^{\frac{1}{p}}\le\sum_{j=0}^{m}\|\nabla^j\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\le(m+1)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=0}^{m}\|\nabla^j\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{13.129}$$

La expresión entre paréntesis es la norma de $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$. Las comparaciones anteriores prueban la igualdad de espacios y (13.127).
En el caso hermitiano, las estimaciones anteriores se interpretan sobre el haz real subyacente cuando se aplica la función de Bellman. La conexión, los potenciales $\mathbf{V}_\ell$, los operadores $B_{\ell,p}$ y las derivadas covariantes conmutan con la estructura compleja, y la norma del haz real subyacente coincide con la norma hermitiana. El Teorema 13.3.21 prueba además que las extensiones obtenidas son complejo–lineales. Por lo tanto, las comparaciones anteriores conservan las mismas constantes en el caso complejo. □

Para interpolar la escala definida mediante el calor necesitamos controlar las potencias de orden imaginario. La autoadjunción resuelve esta cuestión en $L^2$. Para otros exponentes podemos representar una sección mediante funciones escalares en las esferas unitarias de sus fibras. Esta representación conserva la norma $L^p$, salvo un factor fijo, y convierte el laplaciano covariante en un laplaciano escalar desplazado.

**Lema 13.3.26.** (Potencias imaginarias del laplaciano covariante) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa sin frontera y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial de rango finito provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$, hermitiana en el caso complejo, y de una conexión compatible $\nabla^\mathbf{E}$. Para $1<p<\infty$, sea $L_{\mathbf{E},p}$ el generador positivo del calor covariante y pongamos $B_p:=I+L_{\mathbf{E},p}$. Las potencias espectrales $B_2^{it}$, con $t\in\mathbb{R}$, se extienden consistentemente a operadores acotados en $L^p(M,\mathbf{E})$. Existen $C_{p,\mathbf{E}},\omega_{p,\mathbf{E}}>0$, dependientes sólo de $p$, del rango y del cuerpo de escalares, tales que

$$\|B_p^{it}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}))}\le C_{p,\mathbf{E}}e^{\omega_{p,\mathbf{E}}|t|},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

En el caso real se entienden estas potencias en la complejificación.

*Demostración.* Si el haz es real, lo complejificamos con la métrica hermitiana y la conexión inducidas. La norma original se conserva en las secciones reales y las estimaciones complejas se restringen a ellas. Basta, por tanto, tratar un haz complejo provisto de una métrica fibrada hermitiana. Escribamos $r=\operatorname{rango}_\mathbb{C}\mathbf{E}$ y $d=2r$. Consideremos la variedad

$$\widehat{M}=\mathbb{S}(\mathbf{E}):=\{(x,\mathbf{v})\in\mathbf{E}\mid|\mathbf{v}|_\mathbf{h}=1\},\qquad\pi(x,\mathbf{v})=x.$$

La conexión descompone su espacio tangente en una parte horizontal y una parte vertical. Damos a la parte horizontal la métrica de $M$, a cada fibra la métrica de la esfera unitaria y declaramos ortogonales ambas partes. Denotamos por $\widehat{\mathbf{g}}$ la métrica resultante.
Esta métrica es completa. En efecto, $\pi$ no aumenta longitudes. Una sucesión de Cauchy de $\widehat{M}$ se proyecta sobre una sucesión de Cauchy de $M$, que converge a cierto $x$. Sus términos están, salvo un número finito,

sobre un compacto contenido en una vecindad de $x$ que trivializa el haz. La preimagen de ese compacto es compacta, porque la fibra es una esfera. La sucesión original tiene, por tanto, una subsucesión convergente y, al ser de Cauchy, converge. El mismo argumento se aplica por componentes si el haz de esferas no es conexo.

Sea $d\sigma_x$ la medida de probabilidad invariante en la esfera de $\mathbf{E}_x$. La medida de volumen de $\widehat{\mathbf{g}}$, dividida por el área de $\mathbb{S}^{d-1}$, es $d\lambda_{\mathbf{g}}(x)\,d\sigma_x(\mathbf{v})$; la descomposición ortogonal anterior lo comprueba en cualquier marco ortonormal local. Usamos esta medida normalizada en $L^p(\widehat{M})$. La normalización no cambia las normas de los operadores, pues multiplica por el mismo factor las normas de sus argumentos y de sus imágenes. Definimos

$$(\mathcal{J}\mathbf{u})(x,\mathbf{v}) := \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}}.$$

Usamos el producto hermitiano lineal en la primera variable. La invariancia de $\sigma_x$ bajo las isometrías de la fibra da

$$\|\mathcal{J}\mathbf{u}\|_{L^p(\widehat{M})} = c_{r,p}\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}, \qquad c_{r,p}^p := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v}\rangle|^p \, d\sigma(\mathbf{v}) > 0. \tag{13.130}$$

Por consiguiente, $\mathcal{J}$ tiene imagen cerrada. Para $p = 2$ se tiene $c_{r,2} = r^{-1/2}$.

Comprobemos la relación entre los laplacianos. Si $\mathbf{X}$ es un campo en $M$ y $\mathbf{X}^H$ su levantamiento horizontal, la definición del transporte paralelo y la compatibilidad métrica implican

$$\mathbf{X}^H(\mathcal{J}\mathbf{u}) = \mathcal{J}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}).$$

Las fibras son totalmente geodésicas para $\widehat{\mathbf{g}}$. Para verlo, transportamos dos campos verticales $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ mediante el flujo horizontal de $\mathbf{X}^H$. Ese transporte es una isometría de las esferas, por lo que

$$\mathbf{X}^H\langle \mathbf{V}, \mathbf{W}\rangle = \langle [\mathbf{X}^H, \mathbf{V}], \mathbf{W}\rangle + \langle \mathbf{V}, [\mathbf{X}^H, \mathbf{W}]\rangle.$$

Al sustituir esta identidad en la fórmula de Koszul obtenemos $\langle \widehat{\nabla}_{\mathbf{V}}\mathbf{W}, \mathbf{X}^H\rangle = 0$. Para los campos horizontales, cada término de Koszul que se empareja con $\mathbf{Z}^H$ es el levantamiento del término correspondiente en $M$. Por ello,

$$\langle \widehat{\nabla}_{\mathbf{X}^H}\mathbf{Y}^H, \mathbf{Z}^H\rangle = \mathbf{g}(\nabla^M_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \circ \pi.$$

La componente vertical de la derivada repetida se calcula con la misma fórmula:

$$2\langle \widehat{\nabla}_{\mathbf{X}^H}\mathbf{X}^H, \mathbf{V}\rangle = -\mathbf{V}\big(\mathbf{g}(\mathbf{X},\mathbf{X}) \circ \pi\big) - 2\langle [\mathbf{X}^H, \mathbf{V}], \mathbf{X}^H\rangle = 0.$$

El primer término es cero porque $\mathbf{V}$ es vertical; el segundo lo es porque el corchete de un campo proyectable y uno vertical es vertical. Así, al tomar la traza horizontal de la segunda derivada de $\mathcal{J}\mathbf{u}$, resulta exactamente $\mathcal{J}(\operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \nabla^2\mathbf{u})$.

Para la traza vertical, fijemos $\mathbf{v}$ en una fibra y un vector $\mathbf{w}$ tangente a su esfera. La geodésica esférica que empieza en $\mathbf{v}$ con velocidad $\mathbf{w}$ satisface $\gamma''(0) = -|\mathbf{w}|^2\mathbf{v}$. La función $\langle \mathbf{u}(x), \gamma(\tau)\rangle$ tiene, por tanto, segunda derivada en cero igual a $-|\mathbf{w}|^2\langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}\rangle$. Tomamos una base ortonormal de los $d-1$ vectores tangentes de la fibra y sumamos: el laplaciano vertical de signo positivo es $(d-1)$ veces $\mathcal{J}\mathbf{u}$. Sumando las trazas horizontal y vertical obtenemos, para $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$,

$$L_{\widehat{M}}\mathcal{J}\mathbf{u} = \mathcal{J}\big(L_{\mathbf{E},0}\mathbf{u} + (d-1)\mathbf{u}\big). \tag{13.131}$$

La identidad diferencial determina también las realizaciones cerradas. Pongamos $A := I + L_{\widehat{M}}$ y $D_2 := dI + L_{\mathbf{E},2}$. La completitud y el teorema de autoadjunción esencial del Capítulo 12 permiten aproximar cada $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(D_2)$ por secciones de $\Gamma_c(\mathbf{E})$ en la norma de gráfica. Sus imágenes por $\mathcal{J}$ tienen soporte compacto, porque $\pi$ tiene fibras compactas. La cerradura de $A$ y (13.131) dan

$$\mathcal{J}\mathcal{D}(D_2) \subseteq \mathcal{D}(A), \qquad A\mathcal{J}\mathbf{u} = \mathcal{J}D_2\mathbf{u}.$$

Si $\lambda > 0$ y $\mathbf{f} \in L^2(M,\mathbf{E})$, aplicamos esta igualdad a $\mathbf{u} = (\lambda + D_2)^{-1}\mathbf{f}$. La unicidad de la solución de la ecuación resolvente implica

$$(\lambda + A)^{-1}\mathcal{J}\mathbf{f} = \mathcal{J}(\lambda + D_2)^{-1}\mathbf{f}.$$

Los resolventes son autoadjuntos; la imagen cerrada de $\mathcal{J}$ y su ortogonal son invariantes. El cálculo espectral en ese subespacio da entonces $A^{it}\mathcal{J} = \mathcal{J}D_2^{it}$ para $t \in \mathbb{R}$.

El caso escalar del Teorema 13.3.21, aplicado al operador $A = I + L_{\widehat{M},p}$ sobre la variedad completa $(\widehat{M},\widehat{\mathbf{g}})$, proporciona

$$\|A^{it}\|_{\mathcal{L}(L^p(\widehat{M}))} \le M_p e^{\omega_p|t|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Para $\mathbf{u} \in L^2(M,\mathbf{E}) \cap L^p(M,\mathbf{E})$ usamos el entrelazamiento espectral y (13.130); el factor $c_{r,p}$ aparece a ambos lados y se cancela. Resulta

$$\|D_2^{it}\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \le M_p e^{\omega_p|t|}\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

La densidad de la intersección define la extensión $D_p^{it}$ y asegura su consistencia, donde $D_p = dI + L_{\mathbf{E},p}$. Finalmente, pasamos del desplazamiento $d$ al desplazamiento 1. La representación integral del resolvente y la contracción del calor dan $\|D_p^{-1}\| \le d^{-1}$. Pongamos

$$K_p := (d-1)D_p^{-1}, \qquad G_p := -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_p^j}{j}.$$

Esta serie converge en norma de operadores, pues $\|K_p\| \le (d-1)/d < 1$, y

$$\|G_p\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{((d-1)/d)^j}{j} = \log d.$$

En $L^2$, $G_2 = \log(I - K_2)$ y $B_2 = D_2(I - K_2)$, de modo que $B_2^{it} = D_2^{it}e^{itG_2}$. Las series son consistentes en los espacios $L^p$, y por ello

$$\|B_p^{it}\| \le M_p e^{\omega_p|t|}e^{|t|\|G_p\|} \le M_p e^{(\omega_p + \log d)|t|}.$$

También obtenemos continuidad fuerte en el parámetro. Si $p \neq 2$, elegimos $q \in (1,\infty)$ de modo que $p$ esté estrictamente entre 2 y $q$, y $\theta \in (0,1)$ con $1/p = \theta/2 + (1-\theta)/q$. Para $\mathbf{u} \in \Gamma_c(\mathbf{E})$, Hölder da

$$\|(B^{it} - B^{it_0})\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \le \|(B^{it} - B^{it_0})\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}^{\theta}\|(B^{it} - B^{it_0})\mathbf{u}\|_{L^q(M,\mathbf{E})}^{1-\theta}.$$

El primer factor tiende a cero por el cálculo espectral; el segundo está acotado cuando $t$ permanece en un intervalo compacto, por la estimación ya demostrada con exponente $q$. La densidad de $\Gamma_c(\mathbf{E})$ en $L^p$ y la cota local uniforme de los operadores extienden la convergencia a toda sección de $L^p$. Para $p = 2$ se aplica directamente la continuidad espectral. □

**Teorema 13.3.27.** (Interpolación de los potenciales de Bessel en haces) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa sin frontera y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial de rango finito provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$, hermitiana en el caso complejo, y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $L_{\mathbf{E},p}$ el generador positivo del calor covariante y sea $1<p<\infty$. Para haces reales usamos la complejificación y restringimos los espacios interpolados a las secciones reales. Si $0\le s_0<s_1$, $0<\theta<1$ y $s=(1-\theta)s_0+\theta s_1$, entonces

$$[H^{s_0,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E}),H^{s_1,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})]_\theta = H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E}) \tag{13.132}$$

y existen constantes $c_{s_0,s_1,\theta,p},C_{s_0,s_1,\theta,p}>0$ tales que

$$c_{s_0,s_1,\theta,p}\|\mathbf{u}\|_{H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})}\le \|\mathbf{u}\|_{[H^{s_0,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E}),H^{s_1,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})]_\theta}\le C_{s_0,s_1,\theta,p}\|\mathbf{u}\|_{H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})}.$$

Las constantes también pueden depender del rango del haz, que se mantiene fijo.

*Demostración.* Pongamos

$$B:=I+L_{\mathbf{E},p},\qquad a_j:=\frac{s_j}{2}\quad (j\in\{0,1\}),\qquad a:=(1-\theta)a_0+\theta a_1,\qquad \delta:=a_1-a_0.$$

Para $r\ge 0$, el potencial $B^{-r}$ es inyectivo y su rango es el dominio de $B^r$; además,

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{2r,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})}=\|B^r\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

Por lo tanto, basta interpolar los dominios $\mathcal{D}(B^{a_j})$ provistos de estas normas.
El Lema 13.3.26 prueba que las potencias imaginarias de $B$ están acotadas en $L^p(M,\mathbf{E})$ y que existen $M_{p,\mathbf{E}},\omega_{p,\mathbf{E}}>0$ tales que

$$\|B^{it}\|_{\mathcal{L}(L^p(M,\mathbf{E}))}\le M_{p,\mathbf{E}}e^{\omega_{p,\mathbf{E}}|t|},\qquad t\in\mathbb{R}. \tag{13.133}$$

Esta es la estimación analítica que permite trasladar a la variedad el argumento de interpolación del Capítulo 5. Usamos su franja $\mathcal{T}=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<\operatorname{Re}z<1\}$.
Fijemos un entero $N>a_1$ y consideremos primero $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(B^N)$. Para $\varepsilon>0$ y $z\in\overline{\mathcal{T}}$, pongamos $a(z):=(1-z)a_0+za_1$ y

$$F_\varepsilon(z):=e^{\varepsilon(z-\theta)^2}B^{a-a(z)}\mathbf{u}.$$

La holomorfía se comprueba escribiendo $B^{a-a(z)}\mathbf{u}=B^{a-a(z)-N}B^N\mathbf{u}$: el exponente del primer factor tiene parte real negativa en toda la franja cerrada, y su integral de Laplace es holomorfa en el interior. Para $z=\sigma+it$, con $\sigma\in[0,1]$, se factoriza además en la potencia real negativa y $B^{-it\delta}$. La primera tiene norma a lo más uno y la segunda satisface (13.133). El factor gaussiano hace que la familia sea acotada en la franja y que sus valores de frontera tiendan a cero. Se tiene $F_\varepsilon(\theta)=\mathbf{u}$. Si $j\in\{0,1\}$ y $t\in\mathbb{R}$, entonces

$$B^{a_j}F_\varepsilon(j+it)=e^{\varepsilon(j+it-\theta)^2}B^{-it\delta}B^a\mathbf{u}. \tag{13.134}$$

Por (13.133), el módulo de la norma del miembro derecho queda acotado por

$$M_{p,\mathbf{E}}\exp\bigl(\varepsilon(j-\theta)^2-\varepsilon t^2+\omega_{p,\mathbf{E}}\delta|t|\bigr)\|B^a\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}.$$

La continuidad en la norma de cada extremo se obtiene de la misma factorización y la continuidad fuerte

de las potencias imaginarias. Esta expresión es acotada y tiende a cero cuando $|t| \to \infty$. Por ello $F_\varepsilon$ pertenece al espacio de Calderón del par $(\mathcal{D}(B^{a_0}), \mathcal{D}(B^{a_1}))$ y

$$\|\mathbf{u}\|_{[\mathcal{D}(B^{a_0}),\mathcal{D}(B^{a_1})]_\theta} \leq C\|B^a\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})}. \tag{13.135}$$

Sea ahora $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(B^a)$ y pongamos $\mathbf{u}_\eta = (I+\eta B)^{-N}\mathbf{u}$. Entonces $\mathbf{u}_\eta \in \mathcal{D}(B^N)$ y, como el resolvente conmuta con $B^a$, se tiene $B^a\mathbf{u}_\eta \to B^a\mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$. La estimación (13.135), aplicada a $\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}_{\eta'}$, muestra que $(\mathbf{u}_\eta)$ es de Cauchy en el espacio interpolado. Su límite coincide con $\mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$, porque las inclusiones de ambos espacios extremos en $L^p(M,\mathbf{E})$ son continuas. Esto prueba la inclusión y la estimación para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(B^a)$. Probemos la inclusión inversa. Sea $F \in \mathscr{F}(\mathcal{D}(B^{a_0}), \mathcal{D}(B^{a_1}))$ y escribamos $\mathbf{u} = F(\theta)$. Regularizaremos los valores de $F$ mediante operadores que los lleven al dominio de las potencias que vamos a utilizar. Fijemos un entero $N > a_1$, tomemos $\eta > 0$ y pongamos

$$R_\eta := (I+\eta B)^{-N}.$$

El operador $R_\eta$ conmuta con las potencias de $B$ y lleva $L^p(M,\mathbf{E})$ al dominio de $B^N$. La función

$$G_{\varepsilon,\eta}(z) := e^{\varepsilon(z-\theta)^2} B^{a(z)} R_\eta F(z)$$

es, por lo tanto, holomorfa con valores en $L^p(M,\mathbf{E})$. En la frontera se tiene

$$G_{\varepsilon,\eta}(j+it) = e^{\varepsilon(j+it-\theta)^2} B^{it\delta} R_\eta B^{a_j} F(j+it).$$

La contractividad uniforme de $R_\eta$, la cota (13.133) y el factor gaussiano dan una cota de frontera independiente de $\eta$. El Lema de las tres líneas, aplicado al par $(L^p(M,\mathbf{E}), L^p(M,\mathbf{E}))$, proporciona

$$\|B^a R_\eta \mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq C\|F\|_{\mathscr{F}}. \tag{13.136}$$

Cuando $\eta \to 0^+$, $R_\eta\mathbf{u} \to \mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E})$. Como $1 < p < \infty$, de (13.136) podemos extraer una subsucesión tal que $B^a R_\eta \mathbf{u}$ converja débilmente en $L^p(M,\mathbf{E})$. El gráfico del operador cerrado $B^a$ es un subespacio cerrado y, por lo tanto, débilmente cerrado. Se sigue que $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(B^a)$ y

$$\|B^a\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq C\|F\|_{\mathscr{F}}.$$

Tomar el ínfimo sobre las funciones $F$ con $F(\theta) = \mathbf{u}$ prueba la inclusión inversa a (13.135). La constante de esa estimación y la de (13.135) son, respectivamente, $c^{-1}_{s_0,s_1,\theta,p}$ y $C_{s_0,s_1,\theta,p}$.
El Lema B.4.22 permite sustituir cualquier desplazamiento positivo por el desplazamiento 1 elegido en la definición de $B$. □

**Teorema 13.3.28.** (Localización uniforme y potenciales de Bessel) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada, sea $s \in \mathbb{R}$ y sea $1 < p < \infty$. Si $L = \Delta_B = -\Delta$ es la realización positiva del laplaciano escalar, entonces, como espacios de distribuciones,

$$H^{s,p}(M) = F^s_{p,2}(M) = H^{s,p}_L(M).$$

Más precisamente, existen constantes $c_{s,p}, C_{s,p} > 0$ tales que

$$c_{s,p}\|u\|_{H^{s,p}(M)} \le \|u\|_{H_L^{s,p}(M)} \le C_{s,p}\|u\|_{H^{s,p}(M)}, \tag{13.137}$$

y existen $d_{s,p}, D_{s,p} > 0$ tales que

$$d_{s,p}\|u\|_{F^s_{p,2}(M)} \le \|u\|_{H^{s,p}(M)} \le D_{s,p}\|u\|_{F^s_{p,2}(M)}. \tag{13.138}$$

Las constantes no dependen de $u$.

El esquema de interpolación de esta identificación es el de [146, Sección 7.4.5].

*Demostración.* Comenzamos por la identificación entre las dos escalas localizadas. El Teorema 6.3.10 da, para toda $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$d_{s,p}\|v\|_{F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)} \le \|v\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le D_{s,p}\|v\|_{F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Las constantes dependen sólo de $n, s, p$ y, por lo tanto, son las mismas en todas las cartas. Aplicamos las desigualdades a $\widetilde{(h_i u)\circ\varphi_i^{-1}}$, elevamos a la potencia $p$, sumamos en $i$ y tomamos la raíz $p$-ésima. Esto prueba (13.138); la independencia de la trivialización fue demostrada antes.

Probemos ahora (13.137). Supongamos primero $s > 0$ y elijamos un entero $m > s$. En orden cero, la Proposición 13.3.14 da

$$H^{0,p}(M) = L^p(M) = H_L^{0,p}(M).$$

En orden $m$, la misma proposición y el Teorema 13.3.25, aplicado al haz trivial de rango uno, proporcionan

$$H^{m,p}(M) = W^{m,p}(M) = H_L^{m,p}(M) \tag{13.139}$$

y las comparaciones en (13.45), (13.46) y (13.127) proporcionan constantes positivas en ambos sentidos, independientes de $u$. Ponemos $\theta = \frac{s}{m}$. La Proposición 13.3.11 da

$$[H^{0,p}(M), H^{m,p}(M)]_\theta = H^{s,p}(M),$$

mientras que el Teorema 13.3.27 da

$$[H_L^{0,p}(M), H_L^{m,p}(M)]_\theta = H_L^{s,p}(M).$$

La identidad sobre $C_c^\infty(M)$ es continua entre los dos pares en los extremos por (13.139). El Teorema 5.7.5, aplicado a la identidad y a su inversa, prueba la igualdad y las dos estimaciones para $s > 0$. Para $s = 0$ la afirmación ya se obtuvo.

Sea finalmente $s < 0$ y escribamos $t = -s > 0$. Aplicando el caso positivo con el exponente conjugado $p'$ y tomando duales, la Proposición 13.3.11 y el inciso de dualidad del Teorema 12.4.9 dan

$$H^{-t,p}(M) = \big(H^{t,p'}(M)\big)' = \big(H_L^{t,p'}(M)\big)' = H_L^{-t,p}(M).$$

En el caso escalar real, las dos identificaciones usan exactamente el emparejamiento distribucional inducido por $d\lambda_{\mathbf{g}}$. En el caso escalar complejo, la dualidad del Teorema 12.4.9 se escribió mediante el producto her-

mitiano; al componer el elemento representante con la conjugación se obtiene el emparejamiento bilineal distribucional de la Proposición 13.3.11. El semigrupo escalar y sus potenciales conmutan con la conjugación, de modo que esta modificación no cambia el espacio ni su norma. Por ello la igualdad tiene lugar en $\mathcal{D}'(M)$, no sólo como un isomorfismo abstracto de espacios de Banach. Las normas de los isomorfismos y de sus duales producen las constantes de (13.137).

Las comparaciones locales y el paso a órdenes negativos se justifican por las proposiciones anteriores. □

**Corolario 13.3.29.** (Coincidencia de las construcciones en órdenes enteros) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de geometría acotada, $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 < p < \infty$. Entonces

$$W^{m,p}(M) = H^{m,p}(M) = F^{m}_{p,2}(M) = H^{m,p}_{L}(M)$$

y existen constantes $c_H, C_H, c_F, C_F, c_L, C_L > 0$, independientes de $u$, tales que

$$c_H \|u\|_{W^{m,p}(M)} \le \|u\|_{H^{m,p}(M)} \le C_H \|u\|_{W^{m,p}(M)},$$

$$c_F \|u\|_{W^{m,p}(M)} \le \|u\|_{F^{m}_{p,2}(M)} \le C_F \|u\|_{W^{m,p}(M)}, \qquad c_L \|u\|_{W^{m,p}(M)} \le \|u\|_{H^{m,p}_{L}(M)} \le C_L \|u\|_{W^{m,p}(M)}.$$

Más generalmente, si $\mathbf{E} \to M$ es un haz de geometría acotada, sea $\mathbf{u}$ una sección de $\mathbf{E}$. Denotemos por $N_{m,p}(\mathbf{u})$ la norma localizada de componentes definida en (13.45), y por $c_{m,p}, C_{m,p}, c^{L}_{m,p}, C^{L}_{m,p} > 0$ las constantes de (13.45) y (13.127). Entonces

$$c_{m,p} \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le N_{m,p}(\mathbf{u}) \le C_{m,p} \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})},$$
$$c^{L}_{m,p} \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{u}\|_{H^{m,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})} \le C^{L}_{m,p} \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Las constantes no dependen de la sección.

*Demostración.* En el caso escalar se combinan el Teorema 13.3.28, la Proposición 13.3.14 y la identificación euclidiana $H^{m,p}(\mathbb{R}^n) = F^{m}_{p,2}(\mathbb{R}^n)$. La afirmación vectorial es la combinación directa de (13.45) y (13.127). □

**Observación 13.3.30.** (Uniformidad y compacidad) Las comparaciones de normas anteriores permiten sumar estimaciones locales con constantes uniformes. Cuando cambia el exponente de integrabilidad, los encajes globales utilizan también la inclusión de las sumas exteriores $\ell^p \subseteq \ell^q$ para $p \le q$; la comparación de índices diferenciales no sustituye esa condición en una variedad de volumen infinito. Los rangos precisos se formulan en el Teorema 14.6.2.

Tampoco se deduce compacidad global de una ganancia estricta de índice. Ya en $\mathbb{R}^n$, las traslaciones de una función suave no nula de soporte compacto conservan sus normas de Sobolev y pueden tener soportes ajenos dos a dos; sus distancias en $L^q$ permanecen iguales a $2^{1/q}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > 0$ para $q < \infty$. La Proposición 14.6.8 obtiene compacidad después de multiplicar por una función de corte de soporte compacto y para familias con soporte en un compacto común. Una conclusión global sobre una variedad no compacta requiere además controlar la pérdida de masa hacia el infinito, como explica la Observación 14.6.10.

# 14

# Teoremas de traza en geometría acotada

Una función suave puede restringirse a una subvariedad sin dificultad. Para una función de Sobolev, en cambio, sus valores sobre un conjunto de medida nula no están determinados por la clase de equivalencia. La traza resuelve este problema cuando existe suficiente regularidad transversal: se define por continuidad, identifica el espacio que recibe la restricción y permite preguntar si todo dato de ese espacio admite una extensión.

El umbral se obtiene en el modelo euclidiano. Para trasladarlo a una variedad no compacta debemos controlar las coordenadas adaptadas, los marcos y las funciones de corte, y justificar las sumas que reconstruyen la traza y su inversa por la derecha. Las cartas de Fermi conservan visible la subvariedad; en presencia de frontera, el collar permite además separar las derivadas tangenciales de los jets normales.

Comenzaremos con esas construcciones geométricas y sus estimaciones uniformes. Después trataremos las trazas de funciones y de secciones, la comparación con las normas covariantes y los encajes de Sobolev. La exposición distingue los espacios de restricción al semiespacio de las extensiones por cero, y mantiene el orden de las sumas que define cada escala funcional; véanse [72, 130, 6].

**La frontera como dato analítico**

Restringir una función suave a una subvariedad parece una operación elemental; para una clase de Sobolev, en cambio, sólo es posible cuando existe suficiente regularidad transversal. El teorema de traza identifica con precisión qué información sobrevive en la frontera y qué espacio la recibe. En variedades no compactas, el problema exige además que los collares, las cartas de Fermi y las extensiones se construyan con constantes uniformes. Esta combinación de geometría adaptada y regularidad fraccionaria es una de las formas contemporáneas del análisis global [72, 127].

## 14.1 El modelo euclidiano y sus propiedades de compatibilidad

Sean $n > k \geq 0$ y $c := n - k$. Identificamos $\mathbb{R}^k$ con $\{0\}^c \times \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^k$, y para una función suave $u$ escribimos

$$\operatorname{tr}_c u(x') := u(0, x'), \qquad x' \in \mathbb{R}^k.$$

Cuando $k = 0$, $\mathbb{R}^0$ es un punto con medida de conteo; sus espacios $H^{t,p}$, $F^t_{p,q}$ y $B^t_{p,q}$ se identifican con el cuerpo escalar, con su norma absoluta. Esta convención incluye la frontera de una variedad de dimensión uno. El resultado euclidiano que se demostró en el Teorema 6.7.2 se utilizará en la forma siguiente.

**Teorema 14.1.1.** (Traza euclidiana de codimensión arbitraria) Sean $1 < p < \infty$, $s > \frac{c}{p}$ y $c = n - k$. La restricción de funciones de Schwartz se extiende de manera única a un operador lineal, continuo y sobreyectivo

$$\operatorname{tr}_c \colon H^{s,p}(\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^k) \longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^k).$$

Existe un operador lineal continuo

$$\operatorname{ex}_c \colon B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^k) \longrightarrow H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que $\operatorname{tr}_c \operatorname{ex}_c = \mathrm{id}$. Los operadores pueden elegirse de modo que sean continuos también en las escalas

$$\operatorname{tr}_c \colon F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^k), \qquad \operatorname{tr}_c \colon B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^k),$$

para $1 \le q \le \infty$, con operadores de extensión por la derecha correspondientes.

*Demostración.* Para el último paso cuando $k = 0$ necesitamos la evaluación en un punto de $\mathbb{R}$. Si $A^s_{p,q}$ denota $F^s_{p,q}$ o $B^s_{p,q}$, el Teorema 4.12.4 en dimensión uno da

$$\sum_{j\in\mathbb{N}_0} \|\Delta_j u\|_\infty \le C \sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j/p} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C \left( \sum_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{-j(s-1/p)} \right) \|u\|_{A^s_{p,q}}, \qquad s > 1/p.$$

En ambas escalas cada $2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ está acotado por la norma del espacio. La serie converge uniformemente y define un representante continuo cuya evaluación en cero es una traza continua. Una función fija $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 1$ da la corretracción $a \mapsto a\varphi$, común a todos los órdenes. Esto prueba también el caso de Bessel mediante $H^{s,p} = F^s_{p,2}$.

Escribimos un punto de $\mathbb{R}^n$ como $(z_1, \dots, z_c, x')$, con $x' \in \mathbb{R}^k$, y denotamos por $\tau_r$ la restricción $z_r = 0$ después de haber eliminado las variables $z_1, \dots, z_{r-1}$. El Teorema 6.7.2 y su corretracción proporcionan, para $r \in \{1, \dots, c\}$,

$$\tau_r \colon F^{s-\frac{r-1}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-r+1}) \longrightarrow B^{s-\frac{r}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-r}) = F^{s-\frac{r}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-r}).$$

La igualdad del último miembro es $B^\sigma_{p,p}(\mathbb{R}^d) = F^\sigma_{p,p}(\mathbb{R}^d)$. La condición $s > \frac{c}{p}$ implica

$$s - \frac{r-1}{p} > \frac{1}{p}, \qquad r \in \{1, \dots, c\},$$

de modo que cada operador está definido. Como $H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$, la primera restricción se aplica con segundo índice 2, y su imagen ya tiene segundo índice $p$; las $c - 1$ restricciones restantes son las anteriores. La composición $\tau_c \cdots \tau_1$ es $\operatorname{tr}_c$ y satisface

$$\|\operatorname{tr}_c u\|_{B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^k)} \le C \|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Si se parte de $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, la primera restricción tiene imagen $B^{s-\frac{1}{p}}_{p,p} = F^{s-\frac{1}{p}}_{p,p}$, por lo que el cálculo precedente

vuelve a aplicarse. Si se parte de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, cada restricción conserva el índice $q$ y disminuye el orden en $\frac{1}{p}$. Esto da las otras dos estimaciones.

Sean $e_r$ las corretracciones de codimensión uno, cada una insertando la variable $z_r$. En la construcción del Teorema 6.7.2 se fija una sola familia de perfiles en la variable normal; por ello, los mismos operadores $e_r$ actúan simultáneamente en todas las escalas que aparecen en el enunciado. Elegimos esos operadores y definimos

$$\mathrm{ex}_c := e_1 e_2 \cdots e_c.$$

La composición es lineal y continua en cada una de las tres escalas. Además, al cancelar los factores desde el exterior hacia el interior,

$$\mathrm{tr}_c \,\mathrm{ex}_c = \tau_c \cdots \tau_1 e_1 \cdots e_c = I.$$

Por lo tanto, $\mathrm{tr}_c$ es sobreyectivo y $\mathrm{ex}_c$ es una inversa continua por la derecha. □

Para que las restricciones calculadas en cartas distintas representen el mismo dato, la traza debe conmutar con la multiplicación por cortes y con los cambios de coordenadas que preservan la subvariedad.

**Lema 14.1.2.** (Compatibilidades de la traza euclidiana) Sean $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ y $s > \frac{c}{p}$. Consideremos cualquiera de los tres operadores continuos

$$\mathrm{tr}_c \colon H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^k),$$
$$\mathrm{tr}_c \colon F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^k),$$
$$\mathrm{tr}_c \colon B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^k).$$

En cada caso se cumplen las propiedades siguientes.

(a) Sea $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que la multiplicación por $a$ es continua en el espacio de partida y que la multiplicación por $a\restriction_{\mathbb{R}^k}$ es continua en el espacio de llegada. En los casos con índice fino $q = \infty$, suponemos además que estas dos multiplicaciones continúan siendo continuas al reemplazar $s$ por $s - \varepsilon$ y el orden del espacio de llegada por $s - \varepsilon - \frac{c}{p}$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño con $s - \varepsilon > \frac{c}{p}$. Entonces

$$\mathrm{tr}_c(au) = (a\restriction_{\mathbb{R}^k})\,\mathrm{tr}_c\, u.$$

(b) Sea $\Phi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo que preserva $\mathbb{R}^k$. Supongamos que la composición con $\Phi$ y con $\Phi\restriction_{\mathbb{R}^k}$ es continua en los espacios de partida y de llegada, respectivamente. En los casos con índice fino $q = \infty$, suponemos además la misma continuidad después de reemplazar $s$ por $s - \varepsilon$ y el orden del espacio de llegada por $s - \varepsilon - \frac{c}{p}$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño con $s - \varepsilon > \frac{c}{p}$. Entonces

$$\mathrm{tr}_c(u \circ \Phi) = (\mathrm{tr}_c\, u) \circ (\Phi\restriction_{\mathbb{R}^k}).$$

(c) Las mismas identidades valen componente a componente para funciones con valores en un espacio vectorial de dimensión finita.

*Demostración.* Para $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, las identidades de (a) y (b) son igualdades puntuales. Consideremos primero $H^{s,p}$ o alguno de los espacios $F^s_{p,q}$ y $B^s_{p,q}$ con $q < \infty$. En estos casos el Corolario 6.3.9 da la densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en el espacio de partida. La continuidad de la traza, de la multiplicación y de la composición permite pasar al límite y prueba las identidades.

Para $F^s_{p,\infty}$ y $B^s_{p,\infty}$ fijamos $\varepsilon \in (0, s - c/p)$ y escribimos $A$ para la escala considerada. El Corolario 6.3.9 proporciona $u_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{en } A^{s-\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Por ejemplo, se aproxima primero en el espacio de índice fino $p$ y orden $s - \varepsilon/2$, y se utiliza después su encaje en el espacio escrito. La pérdida de orden permite esta aproximación aunque no haya densidad de Schwartz en la norma original.

Las trazas de un mismo elemento tomadas en dos órdenes admisibles coinciden. En efecto, en codimensión uno se definen mediante la misma serie de restricciones de bloques del Teorema 6.7.2; su límite distribucional es independiente del orden usado para estimarlo. La composición de esas trazas conserva la compatibilidad en codimensión $c$. Las estimaciones sitúan el límite en el espacio de llegada de orden $s - c/p$, aunque las aproximaciones sólo converjan en el orden menor.

Aplicamos ahora a $u_j$ las identidades puntuales del lema. Las continuidades adicionales de (a) y (b), todas ellas en el índice fino $\infty$ y el orden $s - \varepsilon$, permiten pasar al límite en los dos miembros. La continuidad de la traza a ese orden identifica sus límites en distribuciones sobre $\mathbb{R}^k$. Por la compatibilidad recién demostrada, esos límites son las trazas de orden $s$. Ambos miembros pertenecen al espacio de llegada de orden $s - c/p$, y por ello la igualdad vale también allí.

Para (c), fijamos una base del espacio de valores y aplicamos las identidades escalares a cada una de las componentes. Como sólo hay un número finito de componentes, todas las operaciones y convergencias anteriores se conservan. □

## 14.2 Pares de geometría acotada y estimaciones uniformes de Fermi

En las cartas de Fermi de esta sección escribiremos primero las $c$ variables normales y después las $k$ variables tangenciales. Así, $N$ queda representada por $\{0\}^c \times \mathbb{R}^k$, exactamente como en el modelo euclidiano de la sección anterior.

**Definición 14.2.1.** (Par de geometría acotada) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera de dimensión $n$ y sea $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera, cerrada como subconjunto de $M$, y de dimensión $k$, con $0 \le k < n$, dotada de la métrica inducida. Ponemos $c := n - k$. Decimos que $(M, N)$ es un *par de geometría acotada* si se cumplen las condiciones siguientes.

(a) $(M, \mathbf{g})$ es de geometría acotada en el sentido de la Definición 13.1.5.

(b) $\operatorname{inj}(N) > 0$.

(c) Existe $r_\perp > 0$ tal que

$$\exp^\perp : \left\{ (x, v) \in T^\perp N \,\middle|\, |v|_{\mathbf{g}} < r_\perp \right\} \longrightarrow M$$

es un difeomorfismo sobre su imagen.

(d) Para cada $\ell \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_{x \in N} \left| (\nabla^{\mathbf{II}})^{\ell} \mathbf{II}(x) \right|_{\mathbf{g}} < \infty,$$

donde las derivadas covariantes y la norma puntual son las de la Definición 2.11.5.

Esta es la condición de geometría acotada para el par $(M, N)$ de [72, Definición 18].

**Observación 14.2.2.** La tercera condición es global: impide que dos tubos normales basados en puntos distintos de $N$ se encuentren a una distancia arbitrariamente pequeña. Para la continuidad de la traza basta una versión local uniformemente finita; la construcción de una inversa global por la derecha que emplearemos utiliza una vecindad tubular uniforme. Esta distinción corresponde a [72, Observación 33].

**Lema 14.2.3.** (Fórmula de Gauss y geometría inducida) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $N \subseteq M$ una subvariedad encajada sin frontera y cerrada como subconjunto de $M$. Si $(M, N)$ es un par de geometría acotada, entonces $(N, \mathbf{g}\restriction_N)$ es una variedad de geometría acotada. Más precisamente, para cada $\ell \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $C'_\ell$, determinada por las cotas de $(\nabla^M)^j \mathbf{R}^M$ y $(\nabla^{\mathbf{II}})^j \mathbf{II}$ con $j \le \ell$, tal que

$$\left| (\nabla^N)^{\ell} \mathbf{R}^N \right|_{\mathbf{g}\restriction_N} \le C'_\ell.$$

*Demostración.* Para campos $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ tangentes a $N$, la descomposición ortogonal de la derivada ambiente es

$$\nabla^M_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \nabla^N_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} + \mathbf{II}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Si $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}$ son tangentes, se sustituye esta identidad en la definición de $\mathbf{R}^M(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}$, se toman las componentes tangenciales y se empareja con $\mathbf{W}$. Los términos con dos derivadas tangenciales forman $\mathbf{R}^N$; los términos normales se transforman mediante

$$\mathbf{g}(\nabla^M_{\mathbf{X}} \eta, \mathbf{W}) = -\mathbf{g}(\eta, \mathbf{II}(\mathbf{X}, \mathbf{W})), \qquad \eta \in \Gamma(T^{\perp} N),$$

que se obtiene derivando $\mathbf{g}(\eta, \mathbf{W}) = 0$. Resulta la ecuación de Gauss

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{R}^N(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}, \mathbf{W}) = \mathbf{g}(\mathbf{R}^M(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}, \mathbf{W}) \\ + \mathbf{g}(\mathbf{II}(\mathbf{X}, \mathbf{W}), \mathbf{II}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) - \mathbf{g}(\mathbf{II}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}), \mathbf{II}(\mathbf{Y}, \mathbf{W})). \end{aligned} \tag{14.1}$$

Aplicamos $(\nabla^N)^{\ell}$ a (14.1), usando la compatibilidad con las contracciones de la Proposición 2.4.13 y la regla de Leibniz del operador $*$ de la Proposición 9.1.40. Para precisar los términos que aparecen, definimos

$$\mathcal{I}_\ell := \left\{ (a, r, b_1, \dots, b_r) \;\middle|\; a, r \in \mathbb{N}_0,\ (b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{N}_0^r,\ a + \sum_{j=1}^{r} (b_j + 1) \le \ell \right\}.$$

La suma vacía vale cero cuando $r = 0$. Afirmamos que $(\nabla^N)^{\ell}(\mathbf{R}^M \restriction_{TN})$ es una suma finita de contracciones, con coeficientes universales, de términos

$$\left( (\nabla^M)^a \mathbf{R}^M \right) \restriction_N * (\nabla^{\mathbf{II}})^{b_1} \mathbf{II} * \cdots * (\nabla^{\mathbf{II}})^{b_r} \mathbf{II}, \qquad (a, r, b_1, \dots, b_r) \in \mathcal{I}_\ell. \tag{14.2}$$

El caso $\ell = 0$ tiene un solo factor: $a = r = 0$. Supongamos obtenida la expresión en orden $\ell$. Al derivar un sumando, Leibniz hace actuar la conexión sobre exactamente uno de sus factores. Si actúa sobre la curvatura ambiente, el término principal reemplaza $a$ por $a+1$. Al comparar la conexión ambiente con las conexiones tangencial y normal, las fórmulas de Gauss y de Weingarten producen además un factor $\mathbf{II}$: se reemplaza $r$ por $r+1$ y se añade el exponente $b_{r+1} = 0$. Si la derivada actúa sobre el factor número $j \in \{1,\dots,r\}$, reemplaza $b_j$ por $b_j+1$. En los tres casos el peso $a+\sum_{j=1}^{r}(b_j+1)$ aumenta en uno. Las contracciones métricas no producen términos adicionales, porque las conexiones preservan las métricas. Así, todos los índices nuevos pertenecen a $\mathcal{I}_{\ell+1}$ y el número de términos sigue dependiendo sólo de $n, \dim N, \ell+1$. Esto prueba la expresión para cada $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Los derivados del término cuadrático de Gauss son

$$(\nabla^{\mathbf{II}})^{a}\mathbf{II} * (\nabla^{\mathbf{II}})^{b}\mathbf{II}, \qquad a+b=\ell.$$

El símbolo $*$ denota una contracción universal con la métrica y el número de sumandos depende sólo de $n,k,\ell$. Las hipótesis de la Definición 14.2.1 acotan cada factor y producen $C'_\ell$. Como $\operatorname{inj}(N) > 0$ ya forma parte de la definición, $N$ es de geometría acotada por la Definición 13.1.5. □

**Lema 14.2.4.** (Estimaciones uniformes para familias de ecuaciones diferenciales) Sean $P \subseteq \mathbb{R}^q$ y $V \subseteq \mathbb{R}^d$ abiertos, $P_0 \Subset P$, y sea $\Lambda$ un conjunto de índices. Considérense

$$\dot{y} = F_\lambda(t,a,y), \qquad y(0) = b_\lambda(a), \qquad a \in P_0.$$

Supongamos que $F_\lambda$ es continua en $t$, suave en $(a,y)$ y que todas sus derivadas respecto de $(a,y)$ son conjuntamente continuas. Supongamos que $b_\lambda$ es suave y que existe un compacto $K \Subset V$ con la propiedad siguiente. Para todos los multiíndices $\alpha \in \mathbb{N}_0^q$ y $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ existen constantes, independientes de $\lambda$, tales que

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\ \sup_{(t,a,y)\in[0,1]\times P_0\times K} \left\|\partial_a^\alpha \partial_y^\beta F_\lambda(t,a,y)\right\| \le C_{\alpha,\beta},$$

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{a\in P_0}\left\|\partial_a^\alpha b_\lambda(a)\right\| \le C'_\alpha.$$

Aquí las derivadas son derivadas parciales ordinarias en espacios finito-dimensionales y se toman componente a componente. Si las soluciones $y_\lambda(t,a)$ existen para $0 \le t \le 1$ y permanecen en $K$, entonces, para cada $m \in \mathbb{N}_0$, existe $C''_m > 0$ tal que

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{a\in P_0}\sup_{t\in[0,1]}\max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^q\\ |\alpha|\le m}}\left\|\partial_a^\alpha y_\lambda(t,a)\right\| \le C''_m.$$

*Demostración.* Fijemos $\lambda$ y un parámetro $a$ en una vecindad de $P_0$ en la que exista la solución. La ecuación integral es

$$y_\lambda(t,a) = b_\lambda(a) + \int_0^t F_\lambda(\tau,a,y_\lambda(\tau,a))\,d\tau.$$

En una vecindad compacta de la trayectoria, $\partial_y F_\lambda$ está acotada. Restar las ecuaciones de dos parámetros y aplicar Grönwall prueba primero la continuidad de $a \mapsto y_\lambda(\cdot,a)$ en $C([0,1])$. Para una dirección coordenada,

pongamos $Z_h(t) := (y_\lambda(t, a + he_\nu) - y_\lambda(t,a))/h$. El teorema fundamental del cálculo en las variables $(a, y)$ da

$$Z_h(t) = \frac{b_\lambda(a + he_\nu) - b_\lambda(a)}{h} + \int_0^t \big(A_h(\tau)Z_h(\tau) + f_h(\tau)\big)\, d\tau,$$

donde $A_h$ y $f_h$ son los promedios de $\partial_y F_\lambda$ y $\partial_{a_\nu} F_\lambda$ sobre el segmento que une los dos argumentos. Por continuidad conjunta convergen uniformemente a $\partial_y F_\lambda(\tau, a, y_\lambda)$ y $\partial_{a_\nu} F_\lambda(\tau, a, y_\lambda)$. Una nueva aplicación de Grönwall a la diferencia entre esta ecuación y su ecuación límite prueba la convergencia uniforme de $Z_h$. Así existe $Z_\nu = \partial_{a_\nu} y_\lambda$ y satisface la ecuación variacional

$$\dot{Z}_\nu = (\partial_y F_\lambda)(t, a, y_\lambda)Z_\nu + \partial_{a_\nu} F_\lambda(t, a, y_\lambda), \qquad Z_\nu(0, a) = \partial_{a_\nu} b_\lambda(a).$$

Las hipótesis y el Lema de Grönwall 1.8.19 acotan $Z_\nu$ de manera uniforme, simultáneamente para $\nu \in \{1, \dots, q\}$.

El mismo argumento con cocientes incrementales, aplicado a las ecuaciones variacionales ya obtenidas, prueba inductivamente la existencia y la continuidad de todas las derivadas paramétricas. Para sus cotas uniformes, supongamos que las de orden menor que $m \geq 2$ ya están acotadas. Fijemos un multiíndice $\gamma \in \mathbb{N}_0^q$ con $|\gamma| = m$. Aplicamos $\partial_a^\gamma$ a la identidad

$$\partial_t y_\lambda(t, a) = F_\lambda(t, a, y_\lambda(t, a)).$$

La fórmula multivariable de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19, aplicada componente a componente a la función de las variables $(a, y)$ y al mapeo $a \mapsto (a, y_\lambda(t, a))$, separa exactamente el término en el que una derivada respecto de $y$ recae sobre $\partial_a^\gamma y_\lambda$. Se obtiene

$$\partial_t(\partial_a^\gamma y_\lambda) = (\partial_y F_\lambda)(t, a, y_\lambda)\partial_a^\gamma y_\lambda + Q_{\lambda,\gamma}(t, a),$$

$$\partial_a^\gamma y_\lambda(0, a) = \partial_a^\gamma b_\lambda(a).$$

Cada sumando de $Q_{\lambda,\gamma}$ es un producto de una derivada

$$\partial_a^\alpha \partial_y^\beta F_\lambda(t, a, y_\lambda(t, a))$$

y de derivadas $\partial_a^{\gamma_j} y_\lambda$ con $|\gamma_j| < m$. El número de sumandos depende sólo de $m, q, d$. Las hipótesis y la inducción proporcionan, por lo tanto, una constante $K_m$ tal que

$$\|Q_{\lambda,\gamma}(t, a)\| \leq K_m$$

para todos los parámetros considerados. Una nueva aplicación del Lema de Grönwall 1.8.19 acota $\partial_a^\gamma y_\lambda$ uniformemente en $[0, 1]$. Como sólo hay un número finito de multiíndices de orden a lo más $m$, la inducción prueba la estimación del enunciado. □

**Observación 14.2.5.** El Lema 1.8.20 trata un solo campo autónomo y da una estimación más precisa a lo largo de cada trayectoria. El lema anterior admite dependencia temporal, parámetros externos y datos iniciales variables. En particular, el caso de dependencia respecto del dato inicial se recupera tomando $F_\lambda$ independiente de $a$ y $b_\lambda(a) = a$.

**Proposición 14.2.6.** (Atlas y partición de Fermi uniformes) Sea $(M,N)$ un par de geometría acotada en el sentido de la Definición 14.2.1; en particular, $M$ y $N$ son variedades suaves sin frontera, de dimensiones $n$ y $k$, respectivamente. Existen $r_{\mathrm{F}} > 0$, una familia numerable de puntos $(p_i)_{i\in I_N} \subseteq N$, cartas de Fermi

$$\kappa_i \colon B^c_{\mathrm{euc}}(0,2r_{\mathrm{F}}) \times B^k_{\mathrm{euc}}(0,2r_{\mathrm{F}}) \longrightarrow U_i \subseteq M, \qquad i \in I_N,$$

cartas geodésicas $(\kappa_j)_{j\in I_0}$ cuyas imágenes cubren el complemento de un tubo menor y satisfacen $U_j \cap N = \varnothing$, y funciones $h_\alpha \in C^\infty_c(U_\alpha)$, $\alpha \in I := I_N \sqcup I_0$, con las propiedades siguientes.

(a) La cubierta $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ es uniformemente localmente finita en el sentido de la Definición 13.1.13.

(b) $\displaystyle\sum_{\alpha\in I} h_\alpha^2 = 1$ en $M$, y para todo multiíndice $\beta$ existe $C_\beta$ tal que

$$\sup_{\alpha\in I} \left\| D^\beta (h_\alpha \circ \kappa_\alpha) \right\|_{L^\infty(\operatorname{dom}\kappa_\alpha)} \le C_\beta.$$

(c) Si $i \in I_N$, entonces

$$\kappa_i(z,u) = \exp^\perp\left( \exp^N_{p_i}(\lambda_i u), \sum_{a=1}^{c} z^a \boldsymbol{\nu}_{i,a}(\exp^N_{p_i}(\lambda_i u)) \right), \tag{14.3}$$

donde $\lambda_i \colon \mathbb{R}^k \longrightarrow T_{p_i}N$ es una isometría y $(\boldsymbol{\nu}_{i,a})_{a=1}^c$ es un marco ortonormal del haz normal obtenido por transporte paralelo para la conexión normal a lo largo de las geodésicas radiales de $N$. Además,

$$\kappa_i^{-1}(N \cap U_i) = \{0\} \times B^k_{\mathrm{euc}}(0,2r_{\mathrm{F}}).$$

(d) En todas las cartas, incluidas las de Fermi, existen $0 < c_0 \le C_0 < \infty$ tales que

$$c_0\|\zeta\|^2 \le \sum_{a,b=1}^{n} g_{\alpha,ab}(x)\zeta^a\zeta^b \le C_0\|\zeta\|^2. \tag{14.4}$$

Para cada multiíndice $\beta$, las funciones $D^\beta g_{\alpha,ab}$ y $D^\beta \mathbf{g}_\alpha^{ab}$ están acotadas por una constante independiente de $\alpha$.

(e) Los cambios entre estas cartas y el atlas geodésico del Teorema 13.1.22, junto con sus inversas, tienen derivadas de todo orden uniformemente acotadas en los dominios donde se usan. Por ello

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{F}} := (U_\alpha, \kappa_\alpha^{-1}, h_\alpha)_{\alpha\in I}$$

es un sistema cuadrático de localización admisible y $(U_\alpha, \kappa_\alpha^{-1}, h_\alpha^2)_{\alpha\in I}$ es la trivialización admisible asociada.

*Demostración.* Comenzamos por obtener estimaciones válidas para cualquier centro de $N$. Por el Lema 14.2.3, $N$ es de geometría acotada. Sean $r_{0,N}$ y $r_{0,M}$ radios para los cuales se cumple la condición (2) del Teorema 13.1.8 en $N$ y $M$, respectivamente. El Lema 13.1.21 se aplica hasta esos radios. Elegimos

$$0 < r_{\mathrm{F}} < \min\left\{ \frac{1}{8}\operatorname{inj}(N), \frac{r_\perp}{8}, \frac{1}{8}\operatorname{inj}(M), \frac{r_{0,N}}{5}, \frac{r_{0,M}}{5} \right\}.$$

Por ahora el índice $i$ designa un centro arbitrario $p_i \in N$, no una red ya elegida. Las estimaciones siguientes son independientes de ese centro. Una vez fijadas todas las reducciones del radio, elegiremos la red maximal y comprobaremos la multiplicidad de la cubierta.

Para construir los marcos normales, fijamos una base ortonormal de $T^{\perp}_{p_i}N$ y la transportamos paralelamente, para la conexión normal, a lo largo de las geodésicas radiales de $N$ que parten de $p_i$. Precisamos primero todas las conexiones que intervendrán. Denotamos por $\nabla^M$ y $\nabla^N$ las conexiones de Levi–Civita de $M$ y $N$, por

$$\nabla^{\perp}_{\mathbf{X}}\eta = (\nabla^M_{\mathbf{X}}\eta)^{\perp}$$

la conexión normal, por $\nabla^{\mathbf{II}}$ la conexión producto inducida en $T^*N\otimes T^*N\otimes T^{\perp}N$, y por $\nabla^F$ la conexión inducida por $\nabla^M$ en el pullback de $TM$ por cada mapeo variacional $F$ que aparezca abajo. Nuestras convenciones dan las fórmulas de Gauss y Weingarten

$$\nabla^M_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla^N_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \qquad \nabla^M_{\mathbf{X}}\eta = -\mathbf{A}_\eta\mathbf{X} + \nabla^{\perp}_{\mathbf{X}}\eta, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{A}_\eta\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{g}(\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\eta). \tag{14.5}$$

Tomar la componente normal de la definición de $\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\eta$ y usar (14.5) da la ecuación de Ricci

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}^{\perp}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\eta,\zeta) = \mathbf{g}(\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\eta,\zeta) + \mathbf{g}([\mathbf{A}_\eta,\mathbf{A}_\zeta]\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{14.6}$$

En efecto, los términos normales de $\nabla^M_{\mathbf{X}}(-\mathbf{A}_\eta\mathbf{Y})$ y $\nabla^M_{\mathbf{Y}}(-\mathbf{A}_\eta\mathbf{X})$ son $-\mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{A}_\eta\mathbf{Y})$ y $-\mathbf{II}(\mathbf{Y},\mathbf{A}_\eta\mathbf{X})$; al emparejarlos con $\zeta$ se obtiene el conmutador de (14.6). Las derivadas de esta identidad se controlan mediante la siguiente recurrencia. En el orden cero tomamos exactamente sus dos sumandos del miembro derecho. Para pasar del orden $q$ al $q+1$, aplicamos la conexión producto a cada contracción y usamos la regla exacta

$$\nabla_{\mathbf{X}}\operatorname{contr}(\mathbf{T}_1\otimes\cdots\otimes\mathbf{T}_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell}\operatorname{contr}(\mathbf{T}_1\otimes\cdots\otimes\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_j\otimes\cdots\otimes\mathbf{T}_\ell).$$

Si la derivada alcanza la restricción de $(\nabla^M)^a\mathbf{R}^M$, las fórmulas de Gauss y Weingarten producen $(\nabla^M)^{a+1}\mathbf{R}^M$ y contracciones de $(\nabla^M)^a\mathbf{R}^M$ con $\mathbf{II}$. Si alcanza un operador de forma, la identidad

$$\mathbf{g}\big((\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A})_\eta\mathbf{Y},\mathbf{Z}\big) = \mathbf{g}\big((\nabla^{\mathbf{II}}_{\mathbf{X}}\mathbf{II})(\mathbf{Y},\mathbf{Z}),\eta\big)$$

–entendida con las conexiones producto en todos los argumentos– lo reemplaza por una derivada de $\mathbf{II}$. Esta regla determina una familia finita en cada orden y prueba por inducción que $(\nabla^{\perp})^q\mathbf{R}^{\perp}$ es una suma universal de contracciones de $(\nabla^M)^a\mathbf{R}^M$ y $(\nabla^{\mathbf{II}})^b\mathbf{II}$, con $a,b\le q$, además de copias no derivadas de $\mathbf{II}$ introducidas por Gauss–Weingarten.

Si $\omega^{\perp}_\mu$ y $F^{\perp}_{\nu\mu}$ son, respectivamente, las matrices de la conexión normal y de su curvatura en una carta geodésica radial de $N$, el calibre radial satisface $\sum_{\mu=1}^{k} y^\mu\omega^{\perp}_\mu(y) = 0$ y la identidad exacta

$$\omega^{\perp}_\mu(y) = \int_0^1 s\sum_{\nu=1}^{k} y^\nu F^{\perp}_{\nu\mu}(sy)\,ds. \tag{14.7}$$

Se obtiene contrayendo la ecuación de estructura con el campo radial y derivando $s\omega^{\perp}_\mu(sy)$. Para un multi-

índice $\alpha$, Leibniz y la linealidad de $y^\nu$ dan la fórmula completa

$$\partial^\alpha \omega^\perp_\mu(y) = \int_0^1 s^{|\alpha|+1} \sum_{\nu=1}^{k} y^\nu (\partial^\alpha F^\perp_{\nu\mu})(sy)\, ds + \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,k\}\\ \alpha_j>0}} \alpha_j \int_0^1 s^{|\alpha|} (\partial^{\alpha-e_j} F^\perp_{j\mu})(sy)\, ds.$$

El control se cierra por una inducción simultánea. En orden cero, la cota tensorial de $\mathbf{R}^\perp$ acota sus componentes $F^\perp_{\nu\mu}$ en el marco ortonormal y la fórmula radial acota $\omega^\perp$. Supongamos controladas las derivadas de $\omega^\perp$ de orden menor que $q$. La identidad de componentes

$$(\nabla^\perp_\lambda F^\perp)_{\nu\mu} = \partial_\lambda F^\perp_{\nu\mu} + [\omega^\perp_\lambda, F^\perp_{\nu\mu}] - \sum_{\kappa=1}^{k} \left(\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} F^\perp_{\kappa\mu} + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} F^\perp_{\nu\kappa}\right)$$

y la expresión de las derivadas superiores del Lema 9.1.28 expresan cada derivada ordinaria de $F^\perp$ de orden $q$ mediante $(\nabla^\perp)^a F^\perp$, $a \le q$, derivadas de $\omega^\perp$ de orden menor que $q$ y derivadas ya controladas de los símbolos de Christoffel de $N$. La fórmula integral anterior acota entonces las derivadas de $\omega^\perp$ de orden $q$ y cierra la inducción.

Las cotas del marco se interpretan mediante su conexión, no mediante componentes en una trivialización arbitraria. En efecto,

$$\nabla^\perp_{\partial_\mu} \boldsymbol{\nu}_{i,a} = \sum_{b=1}^{c} (\omega^\perp_\mu)^b{}_a \boldsymbol{\nu}_{i,b}.$$

Como el marco es ortonormal, la fórmula acota sus primeras derivadas covariantes; al derivarla, Leibniz y las cotas de $\partial^\alpha \omega^\perp$ acotan las de cualquier orden. Gauss–Weingarten convierte estos controles normales en controles para la conexión ambiente, añadiendo únicamente factores de $\mathbf{II}$ y sus derivadas. En las cartas ambiente uniformes, la expresión local de la conexión convierte finalmente esos controles en cotas de componentes. Éstos son los datos iniciales que se utilizarán en la ecuación de Jacobi.

Consideremos ahora la exponencial normal como el mapeo

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{V}_\perp := \{(x,\xi) \in T^\perp N \mid |\xi|_{\mathbf{g}} < r_\perp\} \longrightarrow M, \qquad \mathcal{F}(x,\xi) = \exp^M_x(\xi).$$

Por la hipótesis tubular, su restricción a $\mathcal{V}_\perp$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Pongamos

$$x_i(u) := \exp^N_{p_i}(\lambda_i u), \qquad \boldsymbol{\xi}_i(z,u) := \sum_{a=1}^{c} z^a \boldsymbol{\nu}_{i,a}(x_i(u)),$$

y, para $0 \le t \le 1$,

$$F_i(z,u,t) := \mathcal{F}(x_i(u), t\boldsymbol{\xi}_i(z,u)). \tag{14.8}$$

Entonces $\kappa_i(z,u) = F_i(z,u,1)$.

Escribimos

$$D := \nabla^{F_i}_{\partial_t}, \qquad \nabla_{\mathbf{n}_a} := \nabla^{F_i}_{\partial_{z^a}}, \qquad \nabla_{\mathbf{t}_\mu} := \nabla^{F_i}_{\partial_{u^\mu}},$$

y usamos el alfabeto ordenado

$$\mathscr{A} = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_c, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k\}.$$

Sean

$$\mathbf{T} := dF_i(\partial_t), \qquad \mathbf{J}_{\mathfrak{a}} := dF_i(\partial_{\mathfrak{a}}), \qquad \mathfrak{a} \in \mathscr{A}.$$

Como los campos coordenados del dominio conmutan y $\nabla^M$ no tiene torsión,

$$D\mathbf{T} = 0, \qquad \nabla_{\mathfrak{a}}\mathbf{T} = D\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \qquad \nabla_{\mathfrak{a}} D\mathbf{Z} - D\nabla_{\mathfrak{a}}\mathbf{Z} = \mathbf{R}^M(\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \mathbf{T})\mathbf{Z}. \tag{14.9}$$

Cada $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$ satisface la ecuación de Jacobi

$$D^2\mathbf{J}_{\mathfrak{a}} + \mathbf{R}^M(\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \mathbf{T})\mathbf{T} = 0.$$

Fijemos literalmente palabras ordenadas. Para una palabra no vacía $I = (\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m)$ definimos

$$\mathbf{Y}_I := \nabla_{\mathfrak{a}_1} \cdots \nabla_{\mathfrak{a}_{m-1}} \mathbf{J}_{\mathfrak{a}_m}. \tag{14.10}$$

No se permutan las letras de $I$. Introduzcamos el operador

$$\mathcal{L}\mathbf{Z} := D^2\mathbf{Z} + \mathbf{R}^M(\mathbf{Z}, \mathbf{T})\mathbf{T}.$$

De (14.9), de $D\mathbf{T} = 0$ y de la regla de Leibniz covariante se obtiene

$$\mathcal{L}(\nabla_{\mathfrak{a}}\mathbf{Z}) = \nabla_{\mathfrak{a}}(\mathcal{L}\mathbf{Z}) + \mathscr{C}_{\mathfrak{a}}(\mathbf{Z}), \tag{14.11}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_{\mathfrak{a}}(\mathbf{Z}) = {} & -2\mathbf{R}^M(\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \mathbf{T})D\mathbf{Z} - (\nabla^M_{\mathbf{T}}\mathbf{R}^M)(\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \mathbf{T})\mathbf{Z} - \mathbf{R}^M(D\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \mathbf{T})\mathbf{Z} \\ & - (\nabla^M_{\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}}\mathbf{R}^M)(\mathbf{Z}, \mathbf{T})\mathbf{T} - \mathbf{R}^M(\mathbf{Z}, D\mathbf{J}_{\mathfrak{a}})\mathbf{T} - \mathbf{R}^M(\mathbf{Z}, \mathbf{T})D\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}. \end{aligned} \tag{14.12}$$

En particular, las fuentes $\mathbf{Q}_I$ quedan definidas por la recurrencia finita y compatible con los espacios tensoriales

$$\mathbf{Q}_{(\mathfrak{a})} := 0, \qquad \mathbf{Q}_{(\mathfrak{a},I)} := \nabla_{\mathfrak{a}}\mathbf{Q}_I + \mathscr{C}_{\mathfrak{a}}(\mathbf{Y}_I), \qquad \mathcal{L}\mathbf{Y}_I = \mathbf{Q}_I. \tag{14.13}$$

La recurrencia es cerrada e indexa todos los términos. Consideremos expresiones formales obtenidas contrayendo, mediante $\mathbf{g}$, factores $(\nabla^M)^q\mathbf{R}^M$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{Y}_J$ y $D\mathbf{Y}_J$, con un único índice vectorial libre. Definimos la derivación formal $\mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}^{F_i}$ por Leibniz sobre productos y contracciones y mediante

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}^{F_i}\mathbf{T} = D\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \qquad \mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}^{F_i}\mathbf{Y}_J = \mathbf{Y}_{(\mathfrak{a},J)}, \qquad \mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}^{F_i}(D\mathbf{Y}_J) = D\mathbf{Y}_{(\mathfrak{a},J)} + \mathbf{R}^M(\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \mathbf{T})\mathbf{Y}_J,$$

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}^{F_i}\big((\nabla^M)^q\mathbf{R}^M\big) = \nabla^M_{\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}}\big((\nabla^M)^q\mathbf{R}^M\big) = (\nabla^M)^{q+1}\mathbf{R}^M(\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \cdot).$$

En la última fórmula $\cdot$ representa los argumentos anteriores, en su orden original, y el argumento nuevo ocupa el primer lugar; los argumentos restantes se derivan separadamente por Leibniz. La compatibilidad métrica evita sumandos adicionales al derivar contracciones. Sea $\mathfrak{C}_{\mathfrak{a},I}^{F_i}$ el multiconjunto de los seis sumandos,

con sus coeficientes, de $\mathscr{C}_{\mathfrak{a}}(\mathbf{Y}_I)$ en (14.12). Definimos multiconjuntos finitos por

$$\mathfrak{A}^{F_i}_{(\mathfrak{a})} := \varnothing, \qquad \mathfrak{A}^{F_i}_{(\mathfrak{a},I)} := \mathfrak{d}^{F_i}_{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{A}^{F_i}_{I} \sqcup \mathfrak{C}^{F_i}_{\mathfrak{a},I}.$$

Aquí la derivación de un multiconjunto incluye todos los sumandos producidos por Leibniz y conserva coeficientes y multiplicidades. La inducción en (14.13) da la identidad exacta

$$\mathbf{Q}_I = \sum_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{A}^{F_i}_I} \mathfrak{b}. \tag{14.14}$$

Asignamos peso cero a $\mathbf{T}$ y peso $|J|$ a cada aparición de $\mathbf{Y}_J$ o $D\mathbf{Y}_J$. Para $|I| = m \geq 2$, cada sumando de (14.14) cumple

$$\sum_{\text{apariciones de } \mathbf{Y}_J \text{ o } D\mathbf{Y}_J} |J| = m. \tag{14.15}$$

Además, contiene uno o más factores $(\nabla^M)^q\mathbf{R}^M$, con $0 \leq q \leq m-1$; cada campo lleva a lo más una derivada $D$, y todo campo de la fuente tiene longitud a lo más $m-1$. En efecto, los seis sumandos de $\mathscr{C}_{\mathfrak{a}}(\mathbf{Y}_I)$ tienen peso $1+|I|$, y cada regla de $\mathfrak{d}^{F_i}_{\mathfrak{a}}$ aumenta el peso en uno, nunca produce $D^2\mathbf{Y}_J$ y aumenta en a lo más uno el orden de una derivada de curvatura. En particular, la ecuación de longitud $m$ no contiene ningún campo de longitud $m$ fuera del miembro desconocido $\mathbf{Y}_I$.

También los datos iniciales quedan determinados por una recurrencia exacta. Sea

$$\mathbf{X}_\mu := dx_i(\partial_{u^\mu}), \qquad \mathbf{H}_I := \mathbf{Y}_I|_{t=0}, \qquad \mathbf{K}_I := D\mathbf{Y}_I|_{t=0}.$$

Para las palabras de longitud uno,

$$\mathbf{H}_{(\mathbf{n}_a)} = 0, \qquad \mathbf{K}_{(\mathbf{n}_a)} = \boldsymbol{\nu}_{i,a}(x_i(u)), \tag{14.16}$$

$$\mathbf{H}_{(\mathbf{t}_\mu)} = \mathbf{X}_\mu, \qquad \mathbf{K}_{(\mathbf{t}_\mu)} = \nabla^M_{\mathbf{X}_\mu}\boldsymbol{\xi}_i = -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\xi}_i}\mathbf{X}_\mu + \nabla^\perp_{\mathbf{X}_\mu}\boldsymbol{\xi}_i. \tag{14.17}$$

La última igualdad fija el signo y exhibe separadamente la segunda forma fundamental y la conexión normal. En nuestras coordenadas,

$$\mathbf{K}_{(\mathbf{t}_\mu)} = -\sum_{a=1}^{c} z^a \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}_{i,a}}\mathbf{X}_\mu + \sum_{a=1}^{c} z^a \nabla^\perp_{\mathbf{X}_\mu}\boldsymbol{\nu}_{i,a}.$$

El segundo sumando puede ser no nulo: el calibre radial sólo lo anula en la dirección radial de la carta de $N$.

Denotemos por $\nabla^0_{\mathfrak{a}}$ la conexión inducida en $t=0$: para $\mathfrak{a} = \mathbf{t}_\mu$ es la derivada $\nabla^M_{\mathbf{X}_\mu}$, mientras que para $\mathfrak{a} = \mathbf{n}_a$ es la derivada ordinaria respecto de $z^a$ en el espacio fijo $T_{x_i(u)}M$. Para toda palabra $I$ se tiene

$$\mathbf{H}_{(\mathfrak{a},I)} = \nabla^0_{\mathfrak{a}}\mathbf{H}_I, \qquad \mathbf{K}_{(\mathfrak{a},I)} = \nabla^0_{\mathfrak{a}}\mathbf{K}_I - \mathbf{R}^M(\mathbf{H}_{(\mathfrak{a})}, \boldsymbol{\xi}_i)\mathbf{H}_I. \tag{14.18}$$

La segunda identidad es exactamente $D\nabla_{\mathfrak{a}} = \nabla_{\mathfrak{a}}D - \mathbf{R}^M(\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \mathbf{T})$ evaluada en $t=0$.

Las fórmulas (14.16)–(14.18), expandidas recursivamente mediante (14.5), expresan todos los $\mathbf{H}_I, \mathbf{K}_I$ como

sumas finitas universales de contracciones de

$$(\nabla^M)^q \mathbf{R}^M, \qquad (\nabla^{\mathbf{II}})^q \mathbf{II}, \qquad (\nabla^\perp)^q \boldsymbol{\nu}_{i,a}, \qquad (\nabla^N)^q \mathbf{X}_\mu,$$

junto con potencias de $z$. Así, la curvatura ambiente aparece en las fuentes $\mathbf{Q}_I$, mientras que $\mathbf{II}$ y la conexión normal aparecen exactamente en los datos iniciales. Las cotas de geometría acotada de $M$ y $N$, las hipótesis sobre $\mathbf{II}$, y (14.7) acotan uniformemente todos esos datos.

Probamos ahora las cotas por inducción en la longitud de la palabra. Como $\mathbf{T}$ es paralelo y $|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}} = |\xi_i|_{\mathbf{g}} \le 2r_{\mathrm{F}}$, en un marco paralelo a lo largo de $t \mapsto F_i(z,u,t)$ la ecuación $\mathcal{L}\mathbf{Y}_I = \mathbf{Q}_I$ es un sistema lineal de primer orden para $(\mathbf{Y}_I, D\mathbf{Y}_I)$, con matriz uniformemente acotada. Para $m = 1$ la fuente es cero y los datos (14.16)–(14.17) están uniformemente acotados. Si las palabras de longitud menor que $m$ están controladas, (14.13) acota $\mathbf{Q}_I$ para $|I| = m$, y (14.18) acota $\mathbf{H}_I, \mathbf{K}_I$. El Lema de Grönwall 1.8.19 da, con una constante independiente de $i, z, u$,

$$\sup_{t\in[0,1]} \left( |\mathbf{Y}_I(t)|_{\mathbf{g}} + |D\mathbf{Y}_I(t)|_{\mathbf{g}} \right) \le C_m \left( |\mathbf{H}_I|_{\mathbf{g}} + |\mathbf{K}_I|_{\mathbf{g}} + \int_0^1 |\mathbf{Q}_I(s)|_{\mathbf{g}}\, ds \right).$$

Más precisamente, $C_m$ depende sólo de la dimensión, de $r_{\mathrm{F}}$, de las cotas de $(\nabla^M)^q \mathbf{R}^M$ para $q \le m-1$, de las cotas de $(\nabla^{\mathbf{II}})^q \mathbf{II}$ y de la conexión normal que aparecen en los datos de orden $m$, y de las constantes ya construidas para palabras de longitud menor que $m$; no depende del índice de carta ni de $(z,u)$. Esto completa explícitamente la inducción para toda palabra tangencial y normal.

Pasamos de derivadas covariantes a derivadas ordinarias sin identificar unas con otras. Sea $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ un marco ortonormal en $t = 0$, formado por un marco tangencial controlado de $N$ y por $\boldsymbol{\nu}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{\nu}_{i,c}$, y prolongado mediante $D\mathbf{P}_r = 0$. Para una palabra ordenada $I = (\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m)$ pondremos

$$\partial_I := \partial_{\mathfrak{a}_1} \cdots \partial_{\mathfrak{a}_m}, \qquad \nabla_I := \nabla_{\mathfrak{a}_1} \cdots \nabla_{\mathfrak{a}_m}, \qquad \partial_\varnothing = \nabla_\varnothing = \mathrm{id}.$$

La primera letra es el operador exterior; esta convención para palabras no altera el orden de los factores tensoriales de $\nabla^m$. Pongamos además

$$\mathbf{P}_{r,I} := \nabla_{\mathfrak{a}_1} \cdots \nabla_{\mathfrak{a}_m} \mathbf{P}_r.$$

Estas palabras satisfacen la recurrencia triangular

$$D\mathbf{P}_{r,\varnothing} = 0, \qquad D\mathbf{P}_{r,(\mathfrak{a},I)} = \nabla_{\mathfrak{a}}(D\mathbf{P}_{r,I}) - \mathbf{R}^M(\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}, \mathbf{T})\mathbf{P}_{r,I}.$$

Sus datos en $t = 0$ están controlados por los marcos de $TN$ y $T^\perp N$; la inducción anterior y el Lema de Grönwall 1.8.19 acotan todos los $\mathbf{P}_{r,I}$. Finalmente, si $I_S$ denota la subpalabra ordenada de $I$ cuyos lugares pertenecen a $S$, entonces la regla de Leibniz iterada da la identidad exacta

$$\partial_I \langle \mathbf{Z}, \mathbf{P}_r \rangle = \sum_{S \subseteq \{1,\dots,|I|\}} \left\langle \nabla_{I_S} \mathbf{Z}, \mathbf{P}_{r, I_{S^c}} \right\rangle. \tag{14.19}$$

El término con $S = \{1, \dots, |I|\}$ contiene la derivada covariante de orden máximo y los demás contienen órdenes menores. Esto prueba triangularmente las cotas de todas las derivadas ordinarias de los campos variacionales y, usando las coordenadas geodésicas de $M$ ya controladas por el Teorema 13.1.8, de todas las derivadas ordinarias de $F_i$ y de $\kappa_i = F_i(\cdot, 1)$.

Sobre $z = 0$,

$$d\kappa_i(\partial_{z^a}) = \boldsymbol{\nu}_{i,a}, \qquad d\kappa_i(\partial_{u^\mu}) = \mathbf{X}_\mu.$$

Los dos subespacios son ortogonales; el bloque normal es ortonormal y el bloque tangencial es el diferencial de una carta geodésica controlada de $N$. Por lo tanto existe $\sigma_0 > 0$, independiente de $i, u$, tal que el menor valor singular de $D\kappa_i(0,u)$ es al menos $\sigma_0$. La cota uniforme de $D^2\kappa_i$ da

$$\|D\kappa_i(z,u) - D\kappa_i(0,u)\| \le C|z|.$$

Reduciendo una sola vez $r_{\mathrm{F}}$, imponemos $2Cr_{\mathrm{F}} \le \frac{\sigma_0}{2}$; entonces

$$\frac{\sigma_0}{2}|v| \le |D\kappa_i(z,u)v| \le C|v|$$

en todos los dominios.

Las cotas de las inversas se obtienen mediante una inducción explícita. Si $\rho$ es una representación coordenada de $\kappa_i$ y $\lambda = \rho^{-1}$, el orden uno ya está controlado por

$$D\lambda(y) = D\rho(\lambda(y))^{-1}.$$

Supongamos que las derivadas de $\lambda$ de órdenes menores que $m$ están uniformemente acotadas y fijemos un multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| = m \ge 2$. Aplicamos, componente a componente, la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 a la identidad $\rho \circ \lambda = \mathrm{id}$. Para cada componente $a$ obtenemos

$$0 = D^\alpha(\rho^a \circ \lambda)(y) = \sum_{b=1}^{n} (\partial_b \rho^a)(\lambda(y)) D^\alpha \lambda^b(y) + R^a_\alpha(y),$$

donde $R^a_\alpha$ es una suma finita de productos de la forma

$$c\,(D^\beta \rho^a)(\lambda(y)) \prod_{\ell=1}^{|\beta|} D^{\gamma_\ell}\lambda^{j_\ell}(y), \qquad 2 \le |\beta| \le m, \quad \sum_{\ell=1}^{|\beta|} \gamma_\ell = \alpha, \quad |\gamma_\ell| > 0.$$

Como $|\beta| \ge 2$, cada $|\gamma_\ell| \le m-1$; por la hipótesis inductiva, todos los factores que contienen derivadas de $\lambda$ están uniformemente acotados. Las cotas ya obtenidas para las derivadas de $\rho$ acotan entonces $R_\alpha = (R^a_\alpha)_{a=1}^n$. En forma matricial, la igualdad anterior es

$$D\rho(\lambda(y)) D^\alpha \lambda(y) = -R_\alpha(y),$$

y, por lo tanto,

$$D^\alpha \lambda(y) = -D\rho(\lambda(y))^{-1} R_\alpha(y).$$

La cota uniforme de $D\rho^{-1}$ proporciona la cota de orden $m$ y completa la inducción.

En un traslape de dos cartas de Fermi, la unicidad de la representación por la exponencial normal da una fórmula más precisa que una mera composición. Si

$$\tau_{ji} := x_j^{-1} \circ x_i, \qquad \boldsymbol{\nu}_{i,a}(x_i(u)) = \sum_{b=1}^{c} O_{ji}(u)^b{}_a \, \boldsymbol{\nu}_{j,b}(x_j(\tau_{ji}(u))),$$

entonces $O_{ji}(u) \in O(c)$ y

$$\kappa_j^{-1} \circ \kappa_i(z,u) = \big(O_{ji}(u)z, \tau_{ji}(u)\big). \tag{14.20}$$

En particular, el cambio preserva la cero-sección y las fibras normales, y es lineal en la variable normal. Además,

$$O_{ji}(u)^b{}_a = \mathbf{g}\big(\boldsymbol{\nu}_{j,b}, \boldsymbol{\nu}_{i,a}\big)_{x_i(u)},$$

de modo que (14.19) y las cotas de ambos marcos controlan todas las derivadas de $O_{ji}$; su inversa es su traspuesta. Las transiciones entre cartas de Fermi y cartas geodésicas de $M$, y sus inversas, quedan controladas por la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 y la inducción precedente.

Los coeficientes métricos de Fermi son

$$g_{AB} = \mathbf{g}(\mathbf{J}_A, \mathbf{J}_B)\big|_{t=1}.$$

La regla de Leibniz y (14.19) acotan todas sus derivadas. La cota bilateral para $D\kappa_i$ prueba (14.4). Diferenciando $G^{-1}G = I$ se obtiene, para $\alpha \neq 0$,

$$(\partial^\alpha G^{-1})G = -\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta \leq \alpha,\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta G^{-1})(\partial^{\alpha-\beta} G),$$

que cierra por inducción las cotas de la métrica inversa. Asimismo,

$$0 < c \leq |\det D\kappa_i| \leq C, \qquad 0 < c \leq \sqrt{\det(\mathbf{g})} \leq C,$$

y todas las derivadas de ambos jacobianos están acotadas: el determinante es polinómico en las entradas y la raíz cuadrada se deriva sobre un intervalo compacto contenido en $(0,\infty)$.

Fijemos ya $r := r_{\mathrm{F}}$, después de todas las reducciones anteriores; lo tomamos además tan pequeño que $20r < r_{0,M}$ y $10r < r_{0,N}$. Elegimos una familia maximal de centros $p_i \in N$ cuyas bolas intrínsecas $B_N(p_i, r/2)$ sean disjuntas. Las bolas $B_N(p_i, r)$ cubren $N$: de lo contrario podría añadirse otra bola disjunta. La familia es numerable porque $N$ es segundo numerable. Su multiplicidad, incluso para las bolas de radio $4r$, se acota comparando los volúmenes de las bolas disjuntas con el de una bola de radio $5r$.

Denotemos por $U_r(N)$ la imagen de los vectores normales de longitud menor que $r$. Elegimos también una red maximal $\rho$-separada en $M \setminus U_r(N)$, donde $0 < \rho < r/8$. Sus bolas de radio $\rho$ cubren ese complemento y utilizamos como cartas las bolas de radio $2\rho$. Estas últimas no cortan $N$. En efecto, como $N$ es cerrada y $M$ es completa, todo punto a distancia menor que $r$ de $N$ posee un segmento minimizante a $N$, ortogonal a $N$, y pertenece a $U_r(N)$. Las cartas de Fermi cubren $U_{2r}(N)$; en consecuencia, las dos familias cubren $M$ y dejan una franja de traslape.

Para comparar las dos familias, contaremos los traslapes mediante volúmenes de conjuntos tubulares sobre $N$ en la variedad ambiente. Usamos los conjuntos disjuntos

$$D_i := \exp^{\perp}\big(\{(x,v) \mid x \in B_N(p_i, r/2),\ |v| < r/2\}\big).$$

La inyectividad del tubo los hace disjuntos. Las cotas del jacobiano de Fermi y del volumen en $N$ dan, con una constante uniforme,

$$\lambda_{\mathbf{g}}(D_i) \geq c\, r^c\, \lambda_{\mathbf{g}|_N}(B_N(p_i, r/2)) \geq c' r^n.$$

Si una carta de Fermi corta una bola ambiente $B_M(x,2\rho)$, su centro está a distancia menor que $4r+2\rho$ de $x$ y $D_i \subset B_M(x,6r)$. El volumen de esta última bola no excede $Cr^n$. Por disjunción, el número de tales cartas de Fermi es a lo más $C/c'$. En sentido inverso, las bolas disjuntas de radio $\rho/2$ centradas en los centros interiores cuyas cartas cortan una carta de Fermi están en una bola ambiente de radio $7r$; cada una tiene volumen al menos $c\rho^n$. Esto acota su número por $C(r/\rho)^n$, una constante fija. El mismo razonamiento compara la familia de Fermi con cualquier red geodésica uniforme de la escala fijada. Entre cartas de Fermi, el pie normal de un punto del traslape pertenece a las dos bolas de $N$, por lo que sus centros distan menos de $4r$ en $N$. Entre cartas interiores se aplica el empaquetamiento geodésico. Quedan probadas la finitud local uniforme y las dos cotas cruzadas.

Finalmente, elegimos funciones modelo

$$\eta_\perp \in C_c^\infty(B^c(0,2r_{\mathrm{F}})), \qquad \eta_N \in C_c^\infty(B^k(0,2r_{\mathrm{F}})),$$

iguales a uno en las bolas de radio $r_{\mathrm{F}}$, y usamos $\eta_\perp(z)\eta_N(u)$ en las cartas de Fermi; en las cartas alejadas usamos un corte geodésico fijo. Sean $\widetilde{\eta}_\alpha$ sus transportes a $M$. La propiedad de cubierta y la multiplicidad uniforme dan

$$1 \le S := \sum_{\alpha\in I} \widetilde{\eta}_\alpha^2 \le C.$$

En una carta sólo interviene un número uniformemente acotado de sumandos. Las cotas de las transiciones y la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 controlan todas las derivadas de $S$ y de $S^{-\frac{1}{2}}$. Por lo tanto,

$$h_\alpha := \widetilde{\eta}_\alpha S^{-\frac{1}{2}}$$

satisface $\sum_{\alpha\in I} h_\alpha^2 = 1$ y todas las estimaciones de (b). Para construir sin pérdida de uniformidad los cortes auxiliares, elegimos una vez funciones

$$\widehat{\eta}_\perp \in C_c^\infty(B^c(0,2r_{\mathrm{F}})), \qquad \widehat{\eta}_N \in C_c^\infty(B^k(0,2r_{\mathrm{F}})),$$

con valores en $[0,1]$, iguales a uno en vecindades de $\operatorname{supp}\eta_\perp$ y $\operatorname{supp}\eta_N$, respectivamente. En una carta de Fermi transportamos el producto $\widehat{\eta}_\perp(z)\widehat{\eta}_N(u)$; en las cartas alejadas usamos, del mismo modo, un único perfil geodésico que vale uno en una vecindad del soporte del perfil empleado para $\widetilde{\eta}_\alpha$. Las funciones resultantes $\chi_\alpha$ pertenecen a $C_c^\infty(U_\alpha)$, satisfacen $0 \le \chi_\alpha \le 1$ y valen uno en una vecindad de $\operatorname{supp} h_\alpha$, pues $\operatorname{supp} h_\alpha \subseteq \operatorname{supp}\widetilde{\eta}_\alpha$. Como sólo se han usado esos perfiles fijos, sus derivadas coordenadas tienen cotas independientes de $\alpha$; son exactamente las estimaciones de (B3).

Disponemos así de cartas adaptadas, marcos y cortes con constantes uniformes. En la sección siguiente podremos aplicar la traza euclidiana y sumar sus estimaciones sobre esta cubierta. □

## 14.3 Traza sobre una subvariedad interior

Sea $(U_\alpha, \kappa_\alpha^{-1}, h_\alpha)_{\alpha\in I}$ el sistema cuadrático de localización de la Proposición 14.2.6. Para $i \in I_N$ escribimos

$$\kappa_i^N(u) := \kappa_i(0,u), \qquad U_i^N := U_i \cap N, \qquad h_i^N := h_i \restriction_N .$$

Las cartas $\kappa_i^N$ son cartas geodésicas de $N$, las cartas con índice en $I_0$ no intersectan $N$, y

$$\sum_{i\in I_N} (h_i^N)^2 = 1 \qquad \text{en } N. \tag{14.21}$$

Por los Teoremas 13.3.5 y 13.3.8, junto con el Lema 13.3.10, para cada $s,t\in\mathbb{R}$ y $1<p<\infty$ existen constantes $c_M, C_M, c_N, C_N > 0$ tales que, para todo $u\in H^{s,p}(M)$ y todo $v\in B^t_{p,p}(N)$,

$$c_M\|u\|_{H^{s,p}(M)} \le \left(\sum_{\alpha\in I} \|(h_\alpha u)\circ\kappa_\alpha\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \le C_M\|u\|_{H^{s,p}(M)}$$

y

$$c_N\|v\|_{B^t_{p,p}(N)} \le \left(\sum_{i\in I_N} \|(h_i^N v)\circ\kappa_i^N\|^p_{B^t_{p,p}(\mathbb{R}^k)}\right)^{\frac{1}{p}} \le C_N\|v\|_{B^t_{p,p}(N)}.$$

Las cuatro constantes dependen de $s,t,p$ y de los datos uniformes del par $(M,N)$, pero no de $u$, de $v$ ni de los índices de las cartas.

**Teorema 14.3.1.** (Traza de Bessel sobre una subvariedad) Sea $(M,N)$ un par de geometría acotada en el sentido de la Definición 14.2.1; en particular, $M$ y $N$ son variedades suaves sin frontera, de dimensiones $n$ y $k$, respectivamente. Sea $c = n-k$, sean $1<p<\infty$ y $s>\frac{c}{p}$. Existe un único operador lineal continuo

$$\operatorname{Tr}_N : H^{s,p}(M) \longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(N)$$

que coincide con la restricción puntual en $C_c^\infty(M)$. Es sobreyectivo y admite un operador lineal continuo

$$\operatorname{Ex}_{M,N} : B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(N) \longrightarrow H^{s,p}(M)$$

tal que

$$\operatorname{Tr}_N \operatorname{Ex}_{M,N} = \mathrm{id}_{B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(N)}.$$

*Demostración.* Ponemos $t := s-\frac{c}{p}$. Para $u\in H^{s,p}(M)$ definimos las localizaciones

$$u_i := \big(h_i u\big)\circ\kappa_i, \qquad i\in I_N,$$

entendidas como distribuciones en $\mathbb{R}^n$ mediante extensión por cero fuera del dominio coordenado. Esto es legítimo porque $\operatorname{supp}(h_i)\Subset U_i$. Por la admisibilidad y el principio de localización,

$$\sum_{i\in I_N} \|u_i\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|^p_{H^{s,p}(M)}. \tag{14.22}$$

Definimos

$$\operatorname{Tr}_N u := \sum_{i\in I_N} h_i^N \left[\big(\operatorname{tr}_c u_i\big)\circ(\kappa_i^N)^{-1}\right]. \tag{14.23}$$

La suma es localmente finita. Además, cada $\operatorname{tr}_c u_i$ pertenece a $B^t_{p,p}(\mathbb{R}^k)$ por el Teorema 14.1.1.

Probemos la estimación global. Para $j \in I_N$, sea

$$A(j) := \left\{ i \in I_N \,\middle|\, U_i^N \cap U_j^N \neq \varnothing \right\}.$$

La cardinalidad de $A(j)$ está acotada por la multiplicidad $L$. Al localizar (14.23) con $h_j^N$ y llevarla por $\kappa_j^N$ a $\mathbb{R}^k$, obtenemos

$$\left(h_j^N \operatorname{Tr}_N u\right) \circ \kappa_j^N = \sum_{i \in A(j)} a_{ij} \left[ \left(\operatorname{tr}_c u_i\right) \circ \Phi_{ij} \right], \tag{14.24}$$

donde

$$a_{ij} := (h_j^N h_i^N) \circ \kappa_j^N, \qquad \Phi_{ij} := (\kappa_i^N)^{-1} \circ \kappa_j^N$$

en el traslape, después de insertar cortes iguales a uno en los soportes involucrados. La Proposición 14.2.6 acota uniformemente todas las derivadas de $a_{ij}$, $\Phi_{ij}$ y $\Phi_{ij}^{-1}$. La versión localizada del Lema 6.4.3, aplicada en $B^t_{p,p}$, y el Teorema 14.1.1 dan

$$\left\| \left(h_j^N \operatorname{Tr}_N u\right) \circ \kappa_j^N \right\|^p_{B^t_{p,p}(\mathbb{R}^k)} \leq C L^{p-1} \sum_{i \in A(j)} \|u_i\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{14.25}$$

Sumamos en $j$. Cada $i$ aparece en a lo más $L$ conjuntos $A(j)$; por (14.22),

$$\|\operatorname{Tr}_N u\|^p_{B^t_{p,p}(N)} \leq C \sum_{i \in I_N} \|u_i\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C' \|u\|^p_{H^{s,p}(M)}. \tag{14.26}$$

Así, $\operatorname{Tr}_N$ está bien definido y es continuo. Si $u \in C_c^\infty(M)$, el Lema 14.1.2 y (14.21) muestran que

$$\operatorname{Tr}_N u = \sum_{i \in I_N} (h_i^N)^2 u \restriction_N = u \restriction_N .$$

La densidad de $C_c^\infty(M)$ en $H^{s,p}(M)$, obtenida mediante la trivialización y la Proposición 6.1.3, prueba la unicidad.

Construimos ahora una inversa por la derecha. Elegimos una función fija

$$\psi \in C_c^\infty\left( B^c_{\mathrm{euc}}(0, 2r_F) \times B^k_{\mathrm{euc}}(0, 2r_F) \right)$$

igual a uno en una vecindad común de todos los soportes $(h_i \circ \kappa_i)$, lo cual es posible porque esos soportes se obtuvieron de una misma función de corte reescalada. Para $f \in B^t_{p,p}(N)$, ponemos

$$f_i := (h_i^N f) \circ \kappa_i^N$$

y definimos

$$\operatorname{Ex}_{M,N} f := \sum_{i \in I_N} h_i \left[ \left(\psi \operatorname{ex}_c f_i\right) \circ \kappa_i^{-1} \right], \tag{14.27}$$

prolongando cada sumando por cero fuera de $U_i$. El soporte de $\psi$ hace suave esa prolongación en el nivel de funciones de prueba y, por dualidad, bien definida en el nivel distribucional.

La demostración de la continuidad repite (14.24)–(14.26), ahora con los espacios intercambiados. La continuidad uniforme de los multiplicadores y cambios de coordenadas, la multiplicidad $L$ y la continuidad de

$\mathrm{ex}_c$ producen

$$\begin{aligned}\|\operatorname{Ex}_{M,N} f\|^p_{H^{s,p}(M)} &\le C \sum_{i\in I_N} \|\psi\, \mathrm{ex}_c\, f_i\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C' \sum_{i\in I_N} \|f_i\|^p_{B^t_{p,p}(\mathbb{R}^k)} \le C''\|f\|^p_{B^t_{p,p}(N)}.\end{aligned} \tag{14.28}$$

Finalmente, $\psi(0,u) = 1$ en los soportes relevantes y $\mathrm{tr}_c\,\mathrm{ex}_c = \mathrm{id}$. Aplicando (14.23) a (14.27) y usando otra vez (14.21), obtenemos

$$\operatorname{Tr}_N \operatorname{Ex}_{M,N} f = \sum_{i\in I_N} (h_i^N)^2 f = f.$$

Esto prueba simultáneamente la sobreyectividad y la existencia de la inversa por la derecha. □

**Teorema 14.3.2.** (Trazas en las escalas de Besov y Triebel–Lizorkin) Sea $(M,N)$ un par de geometría acotada en el sentido de la Definición 14.2.1; en particular, $M$ y $N$ son variedades suaves sin frontera, de dimensiones $n$ y $k$, respectivamente. Sean $c = n-k$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ y $s > \frac{c}{p}$. Entonces existen retracciones

$$\operatorname{Tr}_N : F^s_{p,q}(M) \longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(N), \qquad \operatorname{Tr}_N : B^s_{p,q}(M) \longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,q}(N),$$

ambas con operadores lineales continuos de extensión por la derecha.

*Demostración.* Pongamos $t = s - \frac{c}{p}$. Conservamos los cortes y las cartas de Fermi de la prueba del Teorema 14.3.1. Para $u \in F^s_{p,q}(M)$ definimos directamente, en el sentido de distribuciones, las componentes

$$u_i = (h_i u)\circ \kappa_i, \qquad i \in I_N.$$

La fórmula (14.23) define la traza. Si $A(j)$ es el conjunto de índices cuyas cartas cortan la carta $j$ de $N$, las identidades de cambio de carta del Lema 14.1.2, los multiplicadores uniformes y la estimación euclidiana dan

$$\left\|(h_j^N \operatorname{Tr}_N u)\circ \kappa_j^N\right\|_{B^t_{p,p}(\mathbb{R}^k)} \le C \sum_{i\in A(j)} \|u_i\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

El cardinal de $A(j)$ es a lo más la multiplicidad uniforme $L$. Al elevar a la potencia $p$, sumar en $j$ y observar que cada $i$ aparece en a lo más $L$ conjuntos $A(j)$, resulta

$$\|\operatorname{Tr}_N u\|^p_{B^t_{p,p}(N)} \le C \sum_{i\in I_N} \|u_i\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le C'\|u\|^p_{F^s_{p,q}(M)}.$$

El principio fuerte de localización, Teorema 6.4.4, justifica la última desigualdad y también la convergencia de la reconstrucción.

Para $f \in B^t_{p,p}(N)$, ponemos $f_i = (h_i^N f)\circ \kappa_i^N$ y usamos (14.27). La estimación de síntesis, la multiplicidad uniforme y la corretracción euclidiana producen

$$\begin{aligned}\|\operatorname{Ex}_{M,N} f\|^p_{F^s_{p,q}(M)} &\le C \sum_{i\in I_N} \|\psi\, \mathrm{ex}_c\, f_i\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C' \sum_{i\in I_N} \|f_i\|^p_{B^t_{p,p}(\mathbb{R}^k)} \le C''\|f\|^p_{B^t_{p,p}(N)}.\end{aligned}$$

Así se obtienen la retracción y la corretracción en la escala Triebel–Lizorkin.
Para Besov elegimos $s_0 < s < s_1$, todavía con $s_0 > \frac{c}{p}$, y $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. Los operadores anteriores, construidos con las mismas cartas, cortes y corretracciones euclidianas, son continuos en los dos extremos. El Teorema 5.3.1 y las identidades

$$(F^{s_0}_{p,p}(M), F^{s_1}_{p,p}(M))_{\theta,q} = B^{s}_{p,q}(M),$$

$$(B^{s_0-\frac{c}{p}}_{p,p}(N), B^{s_1-\frac{c}{p}}_{p,p}(N))_{\theta,q} = B^{s-\frac{c}{p}}_{p,q}(N)$$

dan la continuidad tanto de $\mathrm{Tr}_N$ como de $\mathrm{Ex}_{M,N}$ en la escala Besov.
Finalmente, en todas las escalas la compatibilidad de la traza con los multiplicadores y $\mathrm{tr}_c\,\mathrm{ex}_c = I$ permiten calcular directamente

$$\mathrm{Tr}_N \mathrm{Ex}_{M,N} f = \sum_{i\in I_N} (h^N_i)^2 f = f.$$

La igualdad en distribuciones justifica también el caso $q = \infty$, para el que no se ha supuesto la densidad en la norma del espacio. □

Para órdenes no enteros $s = m + \sigma$, con $0 < \sigma < 1$, utilizaremos la norma obtenida localizando las normas euclidianas de Slobodeckij y sumando sus potencias $p$. La Proposición 14.5.4 demuestra la independencia de estas localizaciones y su equivalencia con la norma intrínseca de diferencias mediante transporte paralelo.

**Corolario 14.3.3.** (Escalas $W^{s,p}$ y de orden entero) Sea $(M,N)$ un par de geometría acotada formado por variedades suaves sin frontera, sea $c = \dim M - \dim N$ y sea $1 < p < \infty$. Si $s > \frac{c}{p}$ y $s \notin \mathbb{N}$, entonces

$$\mathrm{Tr}_N \colon W^{s,p}(M) \longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(N)$$

es una retracción. Si $m \in \mathbb{N}$ y $m > \frac{c}{p}$, entonces

$$\mathrm{Tr}_N \colon W^{m,p}(M) \longrightarrow B^{m-\frac{c}{p}}_{p,p}(N)$$

es una retracción.

*Demostración.* Para $s \notin \mathbb{N}$, usamos la comparación global $W^{s,p}(M) = B^s_{p,p}(M)$ de la Proposición 14.5.4 y aplicamos la retracción Besov del teorema anterior con $q = p$. Para $m \in \mathbb{N}$, la Proposición 13.3.14 da $W^{m,p}(M) = H^{m,p}(M)$; aplicamos entonces el Teorema 14.3.1. □

## 14.4 Variedades con frontera de geometría acotada

En una variedad con frontera no se dispone de bolas geodésicas centradas en la frontera. Los modelos locales correctos son semiespacios, obtenidos mediante un collar geodésico uniforme.

**Definición 14.4.1.** (Collar uniforme y collar geodésico uniforme) Sea $M$ una variedad suave con frontera no vacía. Un *collar uniforme* de radio $r_\partial > 0$ es un difeomorfismo

$$\mathcal{C} \colon \partial M \times [0, r_\partial) \longrightarrow U_\partial,$$

donde $U_\partial$ es una vecindad abierta de $\partial M$ en $M$ y $\mathcal{C}(x,0)=x$. Si $(M,\mathbf{g})$ es riemanniana, $\boldsymbol{\nu}$ es la normal unitaria interior y

$$\mathcal{C}(x,t)=\exp_x(t\boldsymbol{\nu}_x),$$

diremos que el collar es *geodésico uniforme*.

**Definición 14.4.2.** (Geometría acotada con frontera) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave de dimensión $n$ con frontera no vacía y sea $\boldsymbol{\nu}$ la normal unitaria interior. Decimos que $M$ es de *geometría acotada con frontera no vacía* si se cumplen las condiciones siguientes.

(a) Existe $r_\partial>0$ tal que

$$\mathcal{C}\colon \partial M\times[0,r_\partial)\longrightarrow M,\qquad \mathcal{C}(x,t):=\exp_x(t\boldsymbol{\nu}_x), \tag{14.29}$$

es un collar geodésico uniforme.

(b) $\operatorname{inj}(\partial M)>0$ para la métrica inducida.

(c) Para cada $0<r<r_\partial$ existe $i(r)>0$ tal que, para todo

$$x\in M\setminus\mathcal{C}(\partial M\times[0,r)),$$

el mapeo $\exp_x$ está definido y es un difeomorfismo de $B_{\mathbf{g}_x}(0,i(r))\subseteq T_xM$ sobre su imagen.

(d) Para cada $m\in\mathbb{N}_0$,

$$\sup_{x\in M}\left|(\nabla^M)^m\mathbf{R}^M(x)\right|_{\mathbf{g}}<\infty.$$

(e) Si $\mathbf{II}$ es la segunda forma fundamental de $\partial M$, entonces, para cada $m\in\mathbb{N}_0$,

$$\sup_{x\in\partial M}\left|(\nabla^{\mathbf{II}})^m\mathbf{II}(x)\right|_{\mathbf{g}}<\infty.$$

Ésta es la formulación intrínseca de [128, Definición 2.2]; las derivadas del último inciso son las de la Definición 2.11.5.

**Proposición 14.4.3.** (Geometría inducida en la frontera) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana de geometría acotada con frontera no vacía. Entonces $(\partial M,\mathbf{g}\restriction_{\partial M})$ es una variedad sin frontera de geometría acotada.

*Demostración.* El segundo inciso de la definición da $\operatorname{inj}(\partial M)>0$. La ecuación de Gauss (14.1), aplicada a $N=\partial M$, expresa $\mathbf{R}^{\partial M}$ como la restricción tangencial de $\mathbf{R}^M$ más contracciones cuadráticas de $\mathbf{II}$. Al derivarla $\ell$ veces, el cálculo (14.2) expresa $(\nabla^{\partial M})^\ell\mathbf{R}^{\partial M}$ como una suma finita de contracciones de $(\nabla^M)^a\mathbf{R}^M$ y $(\nabla^{\mathbf{II}})^b\mathbf{II}$, con $a,b\le\ell$. Los incisos cuarto y quinto acotan uniformemente todos esos términos. La Definición 13.1.5 concluye la prueba. □

**Observación 14.4.4.** Schick demuestra además que la formulación anterior equivale a las cotas uniformes de la métrica y de su inversa en coordenadas normales de frontera [128, Teorema 2.5]. Amann toma como hipótesis la geometría acotada ya inducida en $\partial M$ y prueba que su formulación es equivalente a la de Schick; véase [6, Definición 2.1 y Teorema 2.2]. En las demostraciones siguientes usaremos directamente

los cinco incisos de la definición y la proposición anterior.

**Proposición 14.4.5.** (Atlas geodésico–Fermi uniforme y collar) Sea $M$ una variedad con frontera no vacía de geometría acotada. Existen radios fijos $r_B, r_I > 0$, una cubierta uniformemente localmente finita y cartas de dos tipos:

$$\kappa_i^{\partial}\colon B^{n-1}_{\mathrm{euc}}(0,2r_B)\times[0,2r_B)\longrightarrow U_i^{\partial},\qquad i\in I_{\partial},\tag{14.30}$$

y cartas geodésicas interiores $\kappa_j^0\colon B^n_{\mathrm{euc}}(0,2r_I)\longrightarrow U_j^0$, $j\in I_0$, tales que

$$\kappa_i^{\partial}(u,t)=\mathcal{C}\big(\exp_{p_i}^{\partial M}(\lambda_i u),t\big).$$

En estas cartas se satisfacen las estimaciones uniformes (14.4) para la métrica, su inversa y todas sus derivadas. Existe además una familia $h_\alpha\in C_c^\infty(U_\alpha)$ tal que

$$\sum_{\alpha\in I} h_\alpha^2 = 1,$$

y sus representaciones locales tienen derivadas uniformemente acotadas. La familia $(U_\alpha,\kappa_\alpha^{-1},h_\alpha)$ es un sistema cuadrático de localización admisible y $(U_\alpha,\kappa_\alpha^{-1},h_\alpha^2)$ es la trivialización admisible asociada. Además, para cierto $0<r_0<r_B$,

$$\partial_t^{\ell}(h_i\circ\kappa_i^{\partial})(u,t)=0,\qquad i\in I_{\partial},\quad \ell\ge 1,\quad 0\le t<r_0.\tag{14.31}$$

*Demostración.* Por la Proposición 14.4.3, $\partial M$ es de geometría acotada. Consideramos primero cartas geodésicas de la frontera centradas en un punto arbitrario, con un radio común menor que el radio uniforme del Teorema 13.1.8. La fórmula del collar produce una carta de Fermi para todo centro. Obtendremos sus estimaciones antes de elegir la red de centros; por tanto, las reducciones del radio no alterarán ninguna propiedad de cubierta ya fijada.

En coordenadas geodésicas de $\partial M$, pongamos

$$x_i(u):=\exp_{p_i}^{\partial M}(\lambda_i u)$$

y consideremos la familia escalada

$$\widehat{F}_i(r,u,s):=\exp^{M}_{x_i(u)}(sr\,\boldsymbol{\nu}_{x_i(u)}),\qquad 0\le s\le 1.$$

Entonces $\kappa_i^{\partial}(u,r)=\widehat{F}_i(r,u,1)$. Aplicamos a esta familia la inducción por palabras ordenadas (14.10)–(14.18), con una letra normal $\mathbf{n}=\partial_r$ y las letras tangenciales $\mathbf{t}_\mu=\partial_{u^\mu}$. Las conexiones son $\nabla^M$, la conexión de Levi–Civita de $\partial M$, la conexión normal de $\partial M\subset M$, y la conexión pullback por $\widehat{F}_i$.

Para comprobar explícitamente el signo, si

$$\mathbf{J}_X(t):=d\mathcal{C}_{(x,t)}(X,0),\qquad \gamma_x(t)=\mathcal{C}(x,t),$$

entonces

$$\frac{D^2\mathbf{J}_X}{dt^2}+\mathbf{R}^M(\mathbf{J}_X,\dot\gamma_x)\dot\gamma_x=0,\qquad \mathbf{J}_X(0)=X,\qquad \frac{D\mathbf{J}_X}{dt}(0)=\nabla^M_X\boldsymbol{\nu}=-\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}X.$$

En efecto,

$$\nabla^M_X \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} X + \nabla^\perp_X \boldsymbol{\nu}, \qquad \mathbf{g}(\nabla^M_X \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2} X \mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = 0,$$

y el haz normal tiene rango uno, de modo que $\nabla^\perp_X \boldsymbol{\nu} = 0$.
Para la familia escalada, si $\mathbf{X}_\mu = dx_i(\partial_{u^\mu})$, los datos de longitud uno son exactamente

$$\mathbf{H}_{(\mathfrak{n})} = 0, \qquad \mathbf{K}_{(\mathfrak{n})} = \boldsymbol{\nu},$$

y

$$\mathbf{H}_{(\mathfrak{t}_\mu)} = \mathbf{X}_\mu, \qquad \mathbf{K}_{(\mathfrak{t}_\mu)} = -r \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{X}_\mu.$$

Los datos de toda palabra más larga son

$$\mathbf{H}_{(\mathfrak{a},I)} = \nabla^0_{\mathfrak{a}} \mathbf{H}_I, \qquad \mathbf{K}_{(\mathfrak{a},I)} = \nabla^0_{\mathfrak{a}} \mathbf{K}_I - \mathbf{R}^M(\mathbf{H}_{(\mathfrak{a})}, r\boldsymbol{\nu}) \mathbf{H}_I.$$

Por lo tanto, las derivadas de $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$, o equivalentemente las derivadas covariantes de $\mathbf{II}$, aparecen en los datos iniciales con el signo fijado arriba. Las fuentes interiores son exactamente

$$\mathbf{Q}_{(\mathfrak{a})} = 0, \qquad \mathbf{Q}_{(\mathfrak{a},I)} = \nabla_{\mathfrak{a}} \mathbf{Q}_I + \mathscr{C}_{\mathfrak{a}}(\mathbf{Y}_I),$$

con $\mathscr{C}_{\mathfrak{a}}$ dado por (14.12), que recoge los términos de conmutación. En consecuencia, en el orden $m$ la inducción sólo utiliza $(\nabla^M)^q \mathbf{R}^M$, $q \le m-1$, las derivadas de $\mathbf{II}$ presentes en los datos, y campos de palabra de longitud menor que $m$.
La inducción de la Proposición 14.2.6, basada en Grönwall, acota todas las palabras covariantes de $\widehat{F}_i$. En este punto conservamos esa formulación covariante: no necesitamos coordenadas ambiente normales centradas en un punto de $\partial M$. Las derivadas ordinarias de los coeficientes métricos se obtienen aplicando Leibniz a los productos internos de los campos variacionales, como hacemos a continuación.
En todo el collar,

$$g_{tt} = 1, \qquad g_{\mu t} = 0.$$

La primera identidad sigue de que $t \mapsto \mathcal{C}(x,t)$ es geodésica unitaria. Para la segunda, si $\mathbf{J}_\mu = d\kappa_i^{\partial}(\partial_{u^\mu})$, entonces

$$\frac{d}{dt} \mathbf{g}(\mathbf{J}_\mu, \partial_t) = \mathbf{g}(\nabla_{\partial_t} \mathbf{J}_\mu, \partial_t) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{J}_\mu} \partial_t, \partial_t) = \frac{1}{2} \mathbf{J}_\mu \mathbf{g}(\partial_t, \partial_t) = 0,$$

y la ortogonalidad vale en $t = 0$. Además, $g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\mathbf{J}_\mu, \mathbf{J}_\nu)$, por lo que la inducción anterior controla todas las derivadas de la métrica.
En $t = 0$, el diferencial es la suma ortogonal del diferencial de la carta geodésica de $\partial M$ y de la normal unitaria. Para medirlo en fibras distintas, transportamos paralelamente cada campo de Jacobi hasta su fibra inicial. La ecuación integral y las cotas ya obtenidas dan

$$\left| P_{t \to 0} \mathbf{J}_X(t) - X \right| \le C t |X|,$$

con $C$ independiente del centro. Elegimos $r_B > 0$ de modo que $8C r_B < 1/2$, $8r_B$ esté dentro del collar original y todas las cartas tangenciales mayores estén dentro del radio uniforme de $\partial M$. En consecuencia, la métrica de Fermi es uniformemente comparable con $\mathbf{g}|_{\partial M} + dt^2$ en el collar de ancho $8r_B$. La fórmula $g_{\mu\nu} = \langle \mathbf{J}_\mu, \mathbf{J}_\nu \rangle$ y Leibniz dan cotas para todas sus derivadas. Diferenciar $G^{-1} G = I$ da las correspondientes a la inversa. En

particular, existen constantes uniformes $c, C > 0$ tales que

$$c\, d\lambda_{\mathbf{g}|_{\partial M}}\, dt \le d\lambda_{\mathbf{g}} \le C\, d\lambda_{\mathbf{g}|_{\partial M}}\, dt.$$

Los jacobianos y sus derivadas también quedan acotados, porque el determinante es polinómico en las entradas y la raíz cuadrada se evalúa en un intervalo compacto de $(0, \infty)$.

La variable normal se preserva exactamente en los cambios de cartas de frontera. Si $\tau_{ji} = x_j^{-1} \circ x_i$, la unicidad de las coordenadas del collar da

$$(\kappa_j^{\partial})^{-1} \circ \kappa_i^{\partial}(u, t) = (\tau_{ji}(u), t). \tag{14.32}$$

Así, los cambios entre cartas de frontera y sus inversas tienen estimaciones uniformes y preservan exactamente $t$.

En la elección de $r_B$ exigimos además que todos sus múltiplos fijos usados a continuación estén dentro del radio uniforme de la frontera. Elegimos entonces una red maximal $r_B$-separada en $\partial M$. Sus bolas de radio $r_B/2$ son disjuntas, las de radio $r_B$ cubren $\partial M$ y las cartas de Fermi cubren $\mathcal{C}(\partial M \times [0, 2r_B))$.

Para la parte interior ponemos

$$K := M \setminus \mathcal{C}(\partial M \times [0, r_B/2)).$$

El tercer inciso de la Definición 14.4.2 proporciona el radio $i(r_B/4)$. Elegimos

$$0 < r_I < \min\{r_B/16,\ i(r_B/4)/20\},$$

y, si hace falta, lo reducimos para aplicar las estimaciones normales obtenidas a partir de la curvatura en el Capítulo 13. Tomamos una red maximal $r_I$-separada en $K$. Las cartas interiores son las exponenciales de radio $2r_I$ centradas en esa red. Aunque $K$ tiene una frontera artificial, las exponenciales que usamos son las de $M$ y están definidas en bolas tangentes completas por la hipótesis anterior. El lema de Gauss y el argumento de primer tiempo de salida identifican sus imágenes con las bolas métricas de ese radio. Las bolas de radio $r_I$ cubren $K$ y las cartas mayores no tocan $\partial M$.

Justifiquemos también la separación del collar menor. En el collar controlado, $|dt|_{\mathbf{g}} = 1$. Una curva que cruza desde $t \ge r_B/2$ hasta $t < r_B/4$ tiene longitud al menos $r_B/4$. Una curva procedente de fuera del collar debe atravesar antes ese mismo intervalo de valores de $t$. No puede abandonar el collar hacia el infinito en longitud finita: la comparación con $\mathbf{g}|_{\partial M} + dt^2$ y la completitud de $\partial M$ lo impiden. Como $2r_I < r_B/8$, todas las cartas interiores quedan fuera de $\mathcal{C}(\partial M \times [0, r_B/4))$. La unión de las dos familias cubre $M$; la franja $r_B/2 \le t < r_B$ pertenece a las regiones cubiertas por ambas.

La multiplicidad entre cartas de frontera se estima en $\partial M$, porque un punto del traslape tiene el mismo pie normal. Entre cartas interiores se comparan bolas disjuntas de radio $r_I/2$ con una bola de radio $5r_I$, dentro del radio $i(r_B/4)$. Para los traslapes mixtos, una carta interior que corta una carta de frontera queda en el collar controlado y su proyección sobre $\partial M$ está en una bola de radio $Cr_B$. La proyección es uniformemente Lipschitz por la comparación métrica del collar. Por ello, todas las bolas interiores disjuntas que intervienen están en un semitubo de volumen a lo más $C' r_B^n$, y cada una tiene volumen al menos $c' r_I^n$. Su número está acotado por $(C'/c')(r_B/r_I)^n$. En sentido inverso, los centros de frontera de las cartas que cortan una carta interior están en una bola de $\partial M$ de radio $C'' r_B$; el empaquetamiento en $\partial M$ acota su número. Las dos redes son numerables por segunda numerabilidad. Esto prueba la finitud local uniforme y las cotas cruzadas de traslapes.

En un traslape mixto, la identidad de transformación de la conexión da, para el cambio $\Phi$ entre las dos

cartas,

$$\partial_a\partial_b\Phi^k = \Gamma^c_{ab}\partial_c\Phi^k - \widetilde{\Gamma}^k_{ij}(\Phi)\partial_a\Phi^i\,\partial_b\Phi^j.$$

La comparación métrica acota $D\Phi$ y su inversa. La fórmula anterior, derivada sucesivamente, acota todas las derivadas superiores, pues las métricas y sus inversas tienen jets uniformes en ambos sistemas. El orden cero queda controlado por sus dominios de radios fijos. Así se obtienen también las estimaciones de las transiciones mixtas, sin prolongar una carta de frontera a una bola normal centrada fuera de $M$.

Fijamos $0 < r_0 < r_B/4$. Para la partición escogemos cortes $\eta_i^{\partial}(u)$ en $\partial M$ y una función $\chi(t)$ igual a uno para $0 \le t < r_0$. En las cartas de frontera usamos $\eta_i^{\partial}(u)\chi(t)$; los cortes interiores se anulan en el collar más pequeño. Al normalizar por

$$S^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\alpha\in I}\widetilde{\eta}_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

obtenemos $h_\alpha = \widetilde{\eta}_\alpha S^{-\frac{1}{2}}$. En $0 \le t < r_0$, todos los sumandos de $S$ contienen el mismo factor $\chi(t)^2 = 1$, y no intervienen cortes interiores; por lo tanto $h_i \circ \kappa_i^{\partial}$ es independiente de $t$ en esa región. Esto prueba (14.31). Las demás cotas se demuestran mediante la normalización cuadrática empleada en la Proposición 14.2.6. Para (B3) se eligen, antes de transportar los cortes, funciones modelo ligeramente más anchas, iguales a uno en vecindades de los soportes de $\eta_i^{\partial}(u)\chi(t)$ y de los cortes interiores, respectivamente. Sus transportes proporcionan funciones $\chi_\alpha \in C_c^\infty(U_\alpha)$ iguales a uno cerca de $\operatorname{supp}(h_\alpha)$; al provenir de una familia finita de perfiles fijos, todas sus derivadas coordenadas están acotadas por constantes independientes de $\alpha$. □

**Proposición 14.4.6.** (El caso compacto con frontera) Toda variedad riemanniana compacta con frontera suave no vacía satisface la Definición 14.4.2.

*Demostración.* La frontera es una variedad riemanniana compacta sin frontera; el Teorema 13.1.11 da en particular $\operatorname{inj}(\partial M) > 0$. Aplicamos el Teorema 2.12.3 a $\partial M$ en el doble suave de $M$, provisto de una extensión suave de $\mathbf{g}$. La compacidad de $\partial M$ proporciona $r_\partial > 0$ tal que la exponencial normal es inyectiva en los vectores normales de longitud menor que $r_\partial$. Su restricción a la normal interior es, por lo tanto, el collar geodésico uniforme requerido.

Fijemos $0 < r < r_\partial$ y pongamos $K := M \setminus \mathcal{C}(\partial M \times [0, r))$. Este conjunto es compacto y está contenido en el interior de $M$. Cada $x \in K$ posee una bola normal $B_{\mathbf{g}_x}(0, r_x)$; por la dependencia suave de la exponencial, la misma conclusión, con radio $\frac{r_x}{2}$, vale para los centros de una vecindad de $x$. Una subcubierta finita de $K$ y el mínimo de esos radios producen un número $i(r) > 0$ independiente del centro, como exige el tercer inciso de la definición.

Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, las funciones continuas $x \mapsto |\nabla^j \mathbf{R}^M(x)|_{\mathbf{g}}$ y $y \mapsto |\nabla^j \mathbf{II}(y)|_{\mathbf{g}}$ alcanzan un máximo en $M$ y $\partial M$, respectivamente. Quedan verificados los cinco incisos. □

**Corolario 14.4.7.** (Regularidad uniforme en presencia de frontera) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad de geometría acotada con frontera no vacía. El atlas de Fermi e interior de la Proposición 14.4.5, después de un reescalamiento fijo de sus dominios, define una estructura riemanniana uniformemente regular en el sentido de las Definiciones 13.2.1 y 13.2.3. Sus constantes dependen sólo de la dimensión, del ancho del collar, de los radios de inyectividad interior y de la frontera, y de las cotas de $\nabla^j \mathbf{R}^M$ y $\nabla^j \mathbf{II}$ hasta el orden requerido. La Proposición 13.2.6, aplicada a este atlas normalizado, produce un sistema cuadrático de localización admisible con las cotas uniformes establecidas en esa proposición.

*Demostración.* Usamos los radios $r_B, r_I$ de la proposición. Elegimos $b_B, b_I > 0$ tales que $b_B\sqrt{n} < r_B$ y $b_I\sqrt{n} < r_I$. En la frontera y en el interior, respectivamente, definimos

$$\bar\kappa_i^{-1}(x) := \kappa_i^{\partial}\big(b_B(x_2,\dots,x_n), 2r_B x_1\big), \qquad x \in Q_+^n,$$

$$\bar\kappa_j^{-1}(x) := \kappa_j^{0}(b_I x), \qquad x \in Q^n.$$

Se trata de dos transformaciones lineales fijas, con inversas acotadas; por tanto conservan todas las cotas uniformes, aunque las constantes puedan depender de $b_B, b_I, r_B$.

La restricción a cubos se acompaña de una nueva elección de centros. En $\partial M$ elegimos una red de paso $\delta_B$ tan pequeño que las imágenes de los cubos tangenciales de mitad de lado cubran $\partial M$. Esto se obtiene por el argumento de primer tiempo de salida: la cota inferior de la métrica da una longitud mínima uniforme para salir del cubo menor. Las medias cajas de frontera cubren así $0 \le t < r_B$. En $K = M \setminus \mathcal{C}(\partial M \times [0, r_B/2))$ elegimos una red de paso $\delta_I$ menor que la longitud mínima necesaria para salir de un cubo interior de mitad de lado. Sus medias cajas cubren $K$. Los radios interiores siguen siendo menores que $r_I$, por lo que las cartas no tocan $t = 0$. Estas dos familias cubren $M$ después de encogerse por el mismo factor $1/2$. Los argumentos de volumen de la proposición, aplicados a las nuevas escalas fijas, conservan la multiplicidad uniforme.

La prueba de la proposición citada da, para cada $j \in \mathbb{N}_0$, una constante $C_{\mathrm{tr}}(j) > 0$, independiente de las cartas, que acota en $BUC^j$ todos los cambios de coordenadas. Da asimismo constantes $c_g, C_g > 0$ tales que

$$c_g|\xi|^2 \le g_\kappa(x)(\xi,\xi) \le C_g|\xi|^2$$

para toda carta, todo punto de su dominio normalizado y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Para cada $j$ también proporciona constantes $G_j, G_j' > 0$, independientes de la carta, que satisfacen

$$Q_\alpha := \bar\kappa_\alpha(U_\alpha) = \begin{cases} Q_+^n, & \alpha \in I_\partial, \\ Q^n, & \alpha \in I_0, \end{cases} \qquad I := I_\partial \sqcup I_0,$$

y

$$\|(g_{\bar\kappa_\alpha})_{ab}\|_{BUC^j(Q_\alpha)} \le G_j, \qquad \|(g_{\bar\kappa_\alpha}^{-1})^{ab}\|_{BUC^j(Q_\alpha)} \le G_j', \qquad \alpha \in I.$$

La continuidad uniforme de las derivadas de orden $j$ se obtiene aplicando el teorema del valor medio a las cotas de orden $j+1$ en las cartas ligeramente mayores usadas en aquella prueba. Aplicamos ahora la Proposición 13.2.6 al atlas normalizado. Se obtienen cortes $\pi_\alpha \in C_c^\infty(U_\alpha, [0,1])$ y un corte coordenado fijo $\widehat\chi$ tales que

$$\sum_{\alpha\in I} \pi_\alpha^2 = 1, \qquad \widehat\chi = 1 \quad \text{en } \operatorname{supp}(\pi_\alpha \circ \bar\kappa_\alpha^{-1}).$$

Para cada $j \in \mathbb{N}_0$ existe $D_j > 0$, independiente de $\alpha$, con

$$\|\pi_\alpha \circ \bar\kappa_\alpha^{-1}\|_{BUC^j(Q_\alpha)} \le D_j, \qquad \alpha \in I.$$

La constante $D_j$ depende sólo de $j$, de la multiplicidad $N$, del factor de encogimiento $\rho = \tfrac12$ y de $C_{\mathrm{tr}}(0),\dots,C_{\mathrm{tr}}(j)$. Estos cortes se construyen después de reseleccionar los centros y restringir a cubos, por lo que pueden diferir de los cortes $h_\beta$ del sistema cuadrático de localización de la Proposición 14.4.5. □

**Teorema 14.4.8.** (Comparación completa con frontera) Una variedad riemanniana con frontera suave no vacía es uniformemente regular si y sólo si posee geometría acotada con frontera en el sentido de la Definición 14.4.2.

La implicación desde la geometría acotada hacia la regularidad uniforme es el Corolario 14.4.7, cuya prueba usa el atlas de Fermi ya construido. En sentido inverso, los resultados de [6, Teoremas 2.2 y 3.5, §§2–3] enuncian que un atlas riemanniano uniformemente regular recupera un collar geodésico uniforme, los radios de inyectividad interior y de la frontera y las cotas de curvatura, y que esta formulación equivale a la de Schick mediante las cotas de la segunda forma fundamental. La equivalencia intrínseca con la formulación de la segunda forma fundamental se encuentra también en [128, §2, Definición 2.2 y Teorema 2.5].

**Definición 14.4.9.** (Espacios localizados en una variedad con frontera) Sea $M$ una variedad riemanniana de geometría acotada con frontera no vacía en el sentido de la Definición 14.4.2, sea $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ y fijemos el sistema cuadrático de localización de la Proposición 14.4.5.

(a) Para $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < \infty$, definimos

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+) := \left\{ U \restriction_{\mathbb{R}^n_+} \middle| \, U \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \right\},$$

con la norma cociente

$$\|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)} := \inf_{\substack{U \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \\ U\restriction_{\mathbb{R}^n_+} = u}} \|U\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{14.33}$$

Aquí y en lo que sigue la restricción distribucional se toma al abierto $\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$; conservamos la notación $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ porque después se considerarán valores de traza en $t = 0$. El mapeo de restricción es una suprayección continua y la norma anterior es, por definición, la norma del cociente por su núcleo. En particular, no depende de una extensión elegida, y $H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)$ es un espacio de Banach.

En todas las escalas de restricción de este capítulo, una distribución sobre $M$ significa una distribución sobre $\operatorname{Int} M$. No se añaden distribuciones independientes sostenidas en $\partial M$: los valores de frontera se obtendrán mediante los operadores de traza. El espacio $H^{s,p}(M)$ está formado por esas distribuciones $u$ para las que es finita la norma

$$\|u\|_{H^{s,p}(M)} := \left( \sum_{i \in I_\partial} \|(h_i u) \circ \kappa_i^\partial\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j \in I_0} \|(h_j u) \circ \kappa_j^0\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14.34}$$

(b) Si $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$ y $1 \le q \le \infty$, definimos

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+) := \left\{ U \restriction_{\mathbb{R}^n_+} \middle| \, U \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

y

$$\|u\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)} := \inf_{\substack{U \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \\ U\restriction_{\mathbb{R}^n_+} = u}} \|U\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}. \tag{14.35}$$

De nuevo, ésta es la norma cociente del operador de restricción y no depende de una extensión parti-

cular. El espacio $F^s_{p,q}(M)$ consta de las distribuciones para las que

$$\left(\sum_{i\in I_\partial}\|(h_i u)\circ\kappa_i^\partial\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)}+\sum_{j\in I_0}\|(h_j u)\circ\kappa_j^0\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

es finita; esta expresión es su norma.

(c) Para $s\in\mathbb{R}$, $1\le p<\infty$ y $1\le q\le\infty$, definimos también el espacio euclidiano de restricción

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+):=\left\{U\restriction_{\mathbb{R}^n_+}\,\middle|\,U\in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\}$$

con la norma cociente

$$\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)}:=\inf_{\substack{U\in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\\ U\restriction_{\mathbb{R}^n_+}=u}}\|U\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}. \tag{14.36}$$

Fijemos provisionalmente $s_0<s<s_1$ y $\theta=\frac{s-s_0}{s_1-s_0}$. Definimos

$$B^s_{p,q}(M;s_0,s_1):=\big(F^{s_0}_{p,p}(M),F^{s_1}_{p,p}(M)\big)_{\theta,q}. \tag{14.37}$$

La independencia de $s_0,s_1$, que no se presupone en esta definición, se demuestra en el Corolario 14.4.15 mediante un par común de análisis y síntesis. Después de ese corolario se omitirán los extremos y se escribirá simplemente $B^s_{p,q}(M)$.

Las composiciones con las parametrizaciones se entienden en el sentido de la Proposición 10.2.34; en las cartas de frontera se usa la norma de restricción recién definida. En $\partial M$ se emplean las definiciones sin frontera del capítulo anterior.

**Lema 14.4.10.** (Operadores localizados entre los modelos de frontera) Sea $s\in\mathbb{R}$ y elijamos $k\in\mathbb{N}$ con $k>|s|+n+1$. Consideramos $H^{s,p}$ para $1<p<\infty$, $F^s_{p,q}$ para $1\le p<\infty$, $1\le q\le\infty$, y $B^s_{p,q}$ para $1\le p<\infty$, $1\le q\le\infty$.

(a) La fórmula cónica de Rychkov define un mismo operador lineal

$$\mathbf{E}_+\colon\mathcal{A}(\mathbb{R}^n_+)\longrightarrow\mathcal{A}(\mathbb{R}^n),\qquad\mathcal{A}\in\{H^{s,p},F^s_{p,q},B^s_{p,q}\},$$

tal que $(\mathbf{E}_+u)\restriction_{\mathbb{R}^n_+}=u$. Existen constantes $C^H_+(s,p)$, $C^F_+(s,p,q)$ y $C^B_+(s,p,q)$, dependientes además sólo de $n$ y de los núcleos fijos, que acotan las tres normas de $\mathbf{E}_+$.

(b) Sean $U',V'\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ abiertos, $\vartheta\colon U'\longrightarrow V'$ un difeomorfismo de clase $C^{k+1}$, $\lambda>0$ y $\Psi(x',t):=(\vartheta(x'),\lambda t)$. Supongamos que existen $\lambda_-,\lambda_+>0$ tales que

$$\lambda_-\le\lambda\le\lambda_+,\qquad c_J\le|\det D\vartheta(x')|\le C_J\quad(x'\in U'),$$
$$\|D^\ell\vartheta\|_{L^\infty(U')}+\|D^\ell\vartheta^{-1}\|_{L^\infty(V')}\le A,\qquad\ell\in\{1,\dots,k+1\}.$$

y que $\eta\in C^{k+1}_c(U'\times[0,\infty))$ satisface $\|\eta\|_{BC^{k+1}(U'\times[0,\infty))}\le A_\eta$. Sea $K_\eta$ la proyección tangencial de $\operatorname{supp}\eta$.

Fijemos además $R, \delta > 0$ tales que

$$\operatorname{supp}\eta \subseteq \overline{B}^{n-1}_{\mathrm{euc}}(0,R)\times[0,R],$$
$$\operatorname{dist}(K_\eta, \mathbb{R}^{n-1}\setminus U') \geq \delta,$$
$$\operatorname{dist}(\vartheta(K_\eta), \mathbb{R}^{n-1}\setminus V') \geq \delta.$$

Estas distancias conciernen a los bordes artificiales de las cartas; el soporte puede tocar $t = 0$. La fórmula inicial

$$T^{+\leftarrow+}_{\eta,\Psi}u := \begin{cases} \eta\,(u\circ\Psi), & \text{en } U'\times[0,\infty),\\ 0, & \text{en el resto de } \mathbb{R}^n_+, \end{cases}$$

define operadores continuos

$$T^{+\leftarrow+}_{\eta,\Psi}\colon \mathcal{A}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n_+)$$

en las tres escalas. Sus normas están acotadas por constantes $M_H, M_F(q), M_B(q)$ que dependen de $n, s, p, k, c_J, C_J, A, A_\eta, \lambda_-, \lambda_+, R, \delta$ y, en las dos últimas escalas, también de $q$.

(c) Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+\}$, $U \subseteq \mathbb{Y}$ y $V \subseteq \mathbb{X}$ abiertos relativos, $\Phi\colon U \longrightarrow V$ un difeomorfismo y $\zeta \in C^{k+1}_c(U)$. Si aparece un semiespacio y el soporte pertinente toca $t = 0$, suponemos $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}^n_+$ y que $(\zeta, \Phi)$ tiene la forma del inciso (b). En los demás casos suponemos que los soportes pertinentes están a distancia al menos $d > 0$ de cada frontera que aparezca: $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\zeta, \partial\mathbb{R}^n_+) \geq d$ si $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^n_+$ y $\operatorname{dist}(\Phi(\operatorname{supp}\zeta), \partial\mathbb{R}^n_+) \geq d$ si $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n_+$. Entonces

$$T^{\mathbb{Y}\leftarrow\mathbb{X}}_{\zeta,\Phi}\colon \mathcal{A}(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{Y})$$

es continuo. Para sus cotas uniformes incluimos el diámetro de los soportes y su separación positiva de los bordes relativos de $U$ y $V$, junto con las cotas de los cambios de coordenadas exigidas en la versión localizada del Lema 6.4.3. Si $\widetilde{T}$ denota el operador localizado de espacio completo asociado a los mismos datos, $r_+$ la restricción y $\mathbf{E}_+$ el operador del inciso (a), los cuatro tipos son

| $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ | $T^{\mathbb{Y}\leftarrow\mathbb{X}}_{\zeta,\Phi}$ |
|---|---|
| $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ | $\widetilde{T}$ |
| $(\mathbb{R}^n_+,\mathbb{R}^n)$ | $\widetilde{T}\mathbf{E}_+$ |
| $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n_+)$ | $r_+\widetilde{T}$ |
| $(\mathbb{R}^n_+,\mathbb{R}^n_+)$ | $r_+\widetilde{T}\mathbf{E}_+$. |

En cada caso la fórmula significa, sobre funciones suaves, $T^{\mathbb{Y}\leftarrow\mathbb{X}}_{\zeta,\Phi}u = \zeta(u\circ\Phi)$ en $U$ y cero fuera de $U$. Las constantes anteriores dependen además de $d$ y de las cotas de $\Phi$, $\Phi^{-1}$, sus jacobianos y sus derivadas hasta orden $k+1$, pero no de $u$.

Todas estas afirmaciones incluyen $s < 0$. En los índices finos extremos la fórmula distribucional fija el operador.

*Demostración.* Especializamos a $\omega = 0$ la construcción del Lema 6.5.1. Con sus núcleos cónicos ponemos

$$\mathbf{E}_+u := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \psi_j * \big(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n_+}(\varphi_j * u)\big).$$

La identidad (6.11) prueba $r_+\mathbf{E}_+ = I$. Las estimaciones (6.14) y (6.13) dan $C_+^F(s,p,q)$; para $q=2$ y $H^{s,p}=F^s_{p,2}$ dan $C_+^H(s,p)$. Para Besov se toma la norma $\ell^q$ fuera de $L^p$ en las mismas estimaciones, lo que da $C_+^B(s,p,q)$. Se fijan una vez los núcleos de Rychkov, con todos los momentos de cancelación requeridos en los niveles positivos. Para estimar un orden concreto $s$ sólo se utiliza un número finito $N > |s|+1$ de esos momentos; no se cambian los núcleos al variar $s$. Así se obtiene un mismo operador en todos los órdenes, incluidos $s<0$.
Registramos la densidad que sí se usará. Sea $Q_{\mathcal{A}}$ el mapeo cociente de restricción de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n_+)$. Si $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ y $u = Q_{\mathcal{A}}U$, elegimos $U_j \in \mathcal{S}$ con $U_j \longrightarrow U$; como $\|Q_{\mathcal{A}}\| \le 1$, se tiene $Q_{\mathcal{A}}U_j \longrightarrow u$. Por lo tanto, las restricciones de Schwartz son densas en $H^{s,p}$, en $F^s_{p,q}$ cuando $q<\infty$ y en $B^s_{p,q}$ cuando $p,q<\infty$. No se obtiene ni se necesita esta conclusión en los otros índices.
Para (b), sean $a_1,\dots,a_{k+2}$ los únicos coeficientes que satisfacen

$$\sum_{\nu=1}^{k+2} a_\nu(-\nu)^j = 1, \qquad 0 \le j \le k+1,$$

y definamos

$$\widetilde{\eta}(x',t) := \begin{cases} \eta(x',t), & t \ge 0,\\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k+2} a_\nu \eta(x',-\nu t), & t<0. \end{cases}$$

Las identidades de Vandermonde empalman las derivadas hasta orden $k+1$. Además, $\widetilde{\eta} \in C_c^{k+1}(U'\times\mathbb{R})$ y, con

$$C_k := 1 + \sum_{\nu=1}^{k+2} |a_\nu| \max\{1, \nu^{k+1}\},$$

se tiene $\|\widetilde{\eta}\|_{BC^{k+1}(U'\times\mathbb{R})} \le C_k A_\eta$. El difeomorfismo $\widetilde{\Psi}(x',t) := (\vartheta(x'), \lambda t)$ preserva los semiespacios. Además,

$$D\widetilde{\Psi} = \begin{pmatrix} D\vartheta & 0\\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad D\widetilde{\Psi}^{-1} = \begin{pmatrix} D\vartheta^{-1} & 0\\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \qquad |\det D\widetilde{\Psi}| = \lambda |\det D\vartheta|.$$

En consecuencia, las derivadas de $\widetilde{\Psi}$ y $\widetilde{\Psi}^{-1}$ hasta orden $k+1$, así como sus jacobianos superior e inferior, quedan acotados por constantes que dependen únicamente de $c_J, C_J, A, \lambda_-, \lambda_+$. El soporte de $\widetilde{\eta}$ permanece en un compacto de diámetro controlado por $R$ y separado del borde de $U'\times\mathbb{R}$ por $\delta$. El margen correspondiente en la imagen también es uniforme. La versión localizada del Lema 6.4.3, con esas distancias y cotas, y el inciso (a) dan

$$\begin{aligned} \|r_+ T_{\widetilde{\eta},\widetilde{\Psi}} \mathbf{E}_+ u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)} &\le C^H_{\mathrm{loc}} C^H_+(s,p) \|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)},\\ \|r_+ T_{\widetilde{\eta},\widetilde{\Psi}} \mathbf{E}_+ u\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)} &\le C^F_{\mathrm{loc}}(q) C^F_+(s,p,q) \|u\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)},\\ \|r_+ T_{\widetilde{\eta},\widetilde{\Psi}} \mathbf{E}_+ u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)} &\le C^B_{\mathrm{loc}}(q) C^B_+(s,p,q) \|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)}. \end{aligned}$$

La restricción $r_+$ tiene norma a lo sumo uno por la definición cociente. Así podemos tomar

$$M_H := C^H_{\mathrm{loc}} C^H_+(s,p), \quad M_F(q) := C^F_{\mathrm{loc}}(q) C^F_+(s,p,q), \quad M_B(q) := C^B_{\mathrm{loc}}(q) C^B_+(s,p,q).$$

La tercera cota procede directamente de la estimación casi diagonal Besov del Lema 6.4.3; no se intercam-

bian la suma exterior $\ell^p$ y la integración del método $K$. Estas fórmulas exhiben todas las dependencias enunciadas. En los rangos donde las restricciones de Schwartz son densas, prueban además la unicidad de la extensión; en los extremos, la composición $r_+ \widetilde{T} \mathbf{E}_+$ es su definición distribucional.

Para (c), si los soportes están separados de $t = 0$, los abiertos efectivos son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y el operador localizado $\widetilde{T}$ del lema de espacio completo se aplica sin cruzar una frontera. Precomponer con $\mathbf{E}_+$ cuando $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n_+$ y poscomponer con $r_+$ cuando $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^n_+$ da exactamente las cuatro factorizaciones de la tabla. Si el soporte toca $t = 0$, la construcción del inciso (b) proporciona $\widetilde{T}$. En $H$ y $F$ las normas resultan del producto de la constante localizada por $C_+^H$ o $C_+^F$ cuando aparece $\mathbf{E}_+$. En $B$ se obtiene del mismo modo la constante localizada $C^B_{\mathrm{loc}}(q)$, multiplicada por $C_+^B(s,p,q)$ exactamente en los dos tipos cuyo dominio es $\mathbb{R}^n_+$; la restricción $r_+$ tiene norma a lo sumo uno. El argumento casi diagonal del lema de espacio completo incluye $s < 0$, de modo que esto prueba también las afirmaciones para órdenes negativos mediante las mismas estimaciones locales. □

**Proposición 14.4.11.** (Independencia del atlas de frontera) Sea $M$ una variedad riemanniana de geometría acotada con frontera no vacía y sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos atlas que satisfacen la Proposición 14.4.5. Para cada uno de los espacios de la Definición 14.4.9 existen constantes $c_{12}^{\mathcal{A}}, C_{12}^{\mathcal{A}} > 0$, una pareja para cada escala funcional $\mathcal{A}$, dependientes de sus índices y de los datos uniformes de ambos atlas, pero no de $u$, tales que

$$c_{12}^{\mathcal{A}} \|u\|_{\mathcal{A},\mathcal{T}_1} \le \|u\|_{\mathcal{A},\mathcal{T}_2} \le C_{12}^{\mathcal{A}} \|u\|_{\mathcal{A},\mathcal{T}_1}.$$

Para $B^s_{p,q}$ se fijan provisionalmente los mismos extremos de interpolación en ambos atlas; la independencia de esos extremos se demuestra en el Corolario 14.4.15.

El argumento de retracción–corretracción corresponde a [6, Teoremas 4.2 y 4.4].

*Demostración.* Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ los dos sistemas. Se inserta la identidad $\sum_{\beta \in I_2} h_{2,\beta}^2 = 1$ en cada localización $h_{1,\alpha} u$. Las dos cotas cruzadas de traslapes dejan a lo más $L$ sumandos por índice, donde $L$ depende sólo de los datos uniformes de los dos atlas.

Entre dos cartas de frontera, el uso del mismo parámetro normal del collar hace que el cambio de Fermi sea

$$(x', t) \longmapsto \big(\vartheta_{\alpha\beta}(x'), t\big).$$

Las cotas de la Proposición 14.4.5 proporcionan números $c_J, C_J, A, A_\eta > 0$, independientes de $\alpha, \beta$, que verifican las hipótesis del Lema 14.4.10(b). Por lo tanto, cada sumando frontera–frontera tiene norma a lo sumo $M_H$, $M_F(q)$ o $M_B(q)$ por la norma de la localización de partida, según la escala; estas afirmaciones incluyen $s < 0$. Para dos cartas interiores se usa el Lema 6.4.3 en $\mathbb{R}^n$. En un traslape mixto, el soporte de los cortes interiores está separado de $t = 0$ por una distancia uniforme; el inciso (c) del lema anterior reduce de nuevo la estimación al caso de espacio completo. Denotemos por $M_{\mathcal{A}}$ la mayor de las constantes correspondientes a la escala $\mathcal{A}$. Depende de $n, s, p$, también de $q$ en $F$ y $B$, y de los datos uniformes de $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, pero no de los índices.

La desigualdad $\left( \sum_{\ell=1}^{L} a_\ell \right)^p \le L^{p-1} \sum_{\ell=1}^{L} a_\ell^p$ y un segundo conteo de traslapes dan

$$\|u\|_{H^{s,p}_{\mathcal{T}_1}(M)} \le L M_H \|u\|_{H^{s,p}_{\mathcal{T}_2}(M)}.$$

Al intercambiar los atlas se obtiene $\|u\|_{H^{s,p}_{\mathcal{T}_2}(M)} \le L'M'_H \|u\|_{H^{s,p}_{\mathcal{T}_1}(M)}$; tomando $c^H_{12} := (LM_H)^{-1}$ y $C^H_{12} := L'M'_H$ se obtiene la afirmación en $H$. En $F$ el mismo conteo proporciona explícitamente

$$c^F_{12}(q) := (LM_F(q))^{-1}, \qquad C^F_{12}(q) := L'M'_F(q).$$

Para $B$ fijamos los extremos provisionales $a < s < b$ y $\theta = \frac{s-a}{b-a}$. Si

$$c_t \|u\|_{F^t_{p,p,\mathcal{T}_1}(M)} \le \|u\|_{F^t_{p,p,\mathcal{T}_2}(M)} \le C_t \|u\|_{F^t_{p,p,\mathcal{T}_1}(M)}, \qquad t \in \{a, b\},$$

son las desigualdades recién probadas con $c_t := (L_t M_F(t,p))^{-1}$ y $C_t := L'_t M'_F(t,p)$, el Teorema 5.3.1 da

$$c_a^{1-\theta} c_b^{\theta} \|u\|_{B^s_{p,q}(M;a,b),\mathcal{T}_1} \le \|u\|_{B^s_{p,q}(M;a,b),\mathcal{T}_2} \le C_a^{1-\theta} C_b^{\theta} \|u\|_{B^s_{p,q}(M;a,b),\mathcal{T}_1}.$$

Por lo tanto, para estos extremos pueden tomarse $c^B_{12} := c_a^{1-\theta} c_b^{\theta}$ y $C^B_{12} := C_a^{1-\theta} C_b^{\theta}$. La independencia posterior de $a, b$ permite omitirlos. □

**Corolario 14.4.12.** (Puente funcional de Amann en presencia de frontera) Sea $M$ una variedad riemanniana de geometría acotada con frontera no vacía y sea $\mathfrak{K} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ el atlas normalizado construido en el Corolario 14.4.7, y sea $(\pi_\alpha)_\alpha$ el nuevo sistema cuadrático obtenido al aplicar la Proposición 13.2.6 a $\mathfrak{K}$. Pongamos

$$X_\alpha := \begin{cases} \mathbb{R}^n, & U_\alpha \cap \partial M = \varnothing, \\ \mathbb{R}^n_+, & U_\alpha \cap \partial M \neq \varnothing, \end{cases}$$

y, en un índice de frontera, poscomponemos la carta con la isometría lineal

$$\tau(x_1, \dots, x_n) := (x_2, \dots, x_n, x_1),$$

que identifica el modelo $Q^n_+$ de normal inicial con el semiespacio $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ usado en la Definición 14.4.9. Conservamos el símbolo $\varphi_\alpha$ para la carta así poscompuesta y escribimos $\Omega_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq X_\alpha$. Para $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < \infty$, definamos

$$\mathbb{H}^{s,p}_{\partial}(\mathfrak{K}) := \left\{ v = (v_\alpha)_{\alpha \in I} \,\middle|\, \sum_{\alpha \in I} \|v_\alpha\|^p_{H^{s,p}(X_\alpha)} < +\infty \right\}$$

con la norma dada por la raíz $p$-ésima de la suma anterior. Para $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$ y $1 \le q \le \infty$, ponemos asimismo

$$\mathbb{F}^{s}_{p,q,\partial}(\mathfrak{K}) := \left\{ v = (v_\alpha)_{\alpha \in I} \,\middle|\, \sum_{\alpha \in I} \|v_\alpha\|^p_{F^s_{p,q}(X_\alpha)} < +\infty \right\}.$$

Ambos espacios llevan la norma dada por la raíz $p$-ésima de la suma correspondiente. Sea $\chi \in C^\infty_c(Q^n, [0,1])$ el corte fijo elegido en la Proposición 13.2.6. Definimos

$$\widehat{\chi}_\alpha := \begin{cases} \chi \restriction_{\Omega_\alpha}, & X_\alpha = \mathbb{R}^n, \\ (\chi \circ \tau^{-1}) \restriction_{\Omega_\alpha}, & X_\alpha = \mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

Entonces $\widehat{\chi}_\alpha$ vale uno en una vecindad de $\operatorname{supp}(\pi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})$ y, para cada $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_{\alpha\in I} \|\widehat{\chi}_\alpha\|_{BUC^j(\Omega_\alpha)} \le \|\chi\|_{BUC^j(Q^n)} < +\infty,$$

porque $\tau$ es una isometría lineal. Sea $\widetilde{\chi}_\alpha$ la prolongación por cero de $\widehat{\chi}_\alpha$ desde $\Omega_\alpha$ hasta $X_\alpha$. Puesto que su soporte queda separado de las caras no geométricas de $\Omega_\alpha$, esta prolongación pertenece a $C_c^\infty(X_\alpha)$, también cuando $X_\alpha = \mathbb{R}^n_+$ y el soporte corta $t = 0$. Para una componente $v_\alpha$ de cualquiera de los dos espacios de sucesiones, definimos $\mathcal{E}_\alpha(\widetilde{\chi}_\alpha v_\alpha)$ como la distribución que en $U_\alpha$ tiene representación coordenada $(\widetilde{\chi}_\alpha v_\alpha)\restriction_{\Omega_\alpha}$ y que se prolonga por cero fuera de $U_\alpha$. Asimismo, la tilde en $\widetilde{(\pi_\alpha u)\circ\varphi_\alpha^{-1}}$ denota la prolongación por cero desde $\Omega_\alpha$ hasta $X_\alpha$. Es legítima porque $\operatorname{supp}(\pi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}) \Subset \Omega_\alpha$. Los operadores, cuyas fórmulas no dependen de $s, p, q$,

$$\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}} u := \left(\widetilde{(\pi_\alpha u)\circ\varphi_\alpha^{-1}}\right)_{\alpha\in I}, \qquad \mathcal{R}_{\partial,\mathfrak{K}} v := \sum_{\alpha\in I} \pi_\alpha\, \mathcal{E}_\alpha(\widetilde{\chi}_\alpha v_\alpha)$$

son continuos tanto en la escala $H$ como en la escala $F$, y

$$\mathcal{R}_{\partial,\mathfrak{K}}\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}} = \mathrm{id}$$

en cada uno de esos espacios. Existen constantes $c^\partial_{s,p}, C^\partial_{s,p}, D^\partial_{s,p} > 0$ tales que

$$c^\partial_{s,p}\|u\|_{H^{s,p}(M)} \le \|\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}} u\|_{\mathbb{H}^{s,p}_\partial(\mathfrak{K})} \le C^\partial_{s,p}\|u\|_{H^{s,p}(M)}, \tag{14.38}$$

$$\|\mathcal{R}_{\partial,\mathfrak{K}} v\|_{H^{s,p}(M)} \le D^\partial_{s,p}\|v\|_{\mathbb{H}^{s,p}_\partial(\mathfrak{K})}. \tag{14.39}$$

Además, existen $c^F_{s,p,q}, C^F_{s,p,q}, D^F_{s,p,q} > 0$ tales que

$$c^F_{s,p,q}\|u\|_{F^s_{p,q}(M)} \le \|\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}} u\|_{\mathbb{F}^s_{p,q,\partial}(\mathfrak{K})} \le C^F_{s,p,q}\|u\|_{F^s_{p,q}(M)}, \tag{14.40}$$

$$\|\mathcal{R}_{\partial,\mathfrak{K}} v\|_{F^s_{p,q}(M)} \le D^F_{s,p,q}\|v\|_{\mathbb{F}^s_{p,q,\partial}(\mathfrak{K})}. \tag{14.41}$$

Fijado un entero $k > |s| + n + 1$, las constantes dependen sólo de $n, s, p, k$, de las dos cotas de traslapes, de $q$ en la escala $F$ y de las cotas uniformes de los cambios de coordenadas y de los cortes hasta el orden $k+1$; no dependen de $\alpha$, $u$ ni $v$.

*Demostración.* Denotemos por $\mathcal{T}_F = (V_\beta, \kappa_\beta, h_\beta)_{\beta\in J}$ el sistema cuadrático de localización fijado en la Definición 14.4.9. La construcción de $\mathfrak{K}$ se realiza en las mismas familias de cartas de Fermi e interior, mediante las dos transformaciones lineales fijas de la prueba del Corolario 14.4.7. Denotemos por $b_N := 2r_B$ el factor de reescalamiento normal. Cada soporte de $\pi_\alpha$ o $h_\beta$ queda en una caja encogida común. El argumento de empaquetamiento de la Proposición 14.4.5, aplicado en ambos sentidos, proporciona

$$L := \max\left\{\sup_{\alpha\in I} \#\left\{\beta\in J \,\middle|\, \operatorname{supp}\pi_\alpha \cap \operatorname{supp} h_\beta \neq \varnothing\right\}, \sup_{\beta\in J} \#\left\{\alpha\in I \,\middle|\, \operatorname{supp} h_\beta \cap \operatorname{supp}\pi_\alpha \neq \varnothing\right\}\right\} < +\infty.$$

Fijemos $k > |s| + n + 1$. Las cotas $BUC^{k+1}$ de las transiciones y de los cortes, las cotas superior e inferior de los jacobianos y el Lema 14.4.10 proporcionan números $M_{\to,\mathcal{A}}, M_{\leftarrow,\mathcal{A}} > 0$, para $\mathcal{A} = H^{s,p}$ o $F^s_{p,q}$, que acotan, respectivamente, cada operador localizado que pasa de $\mathcal{T}_F$ al sistema de localización de Amann y

cada operador en sentido inverso. En dos cartas de frontera el cambio conserva el parámetro normal dentro de cada sistema. Al comparar $\mathcal{T}_F$ con las cartas reescaladas de la prueba del Corolario 14.4.7, aparece el factor normal fijo $b_N$; por lo tanto, el cambio tiene la forma $(x',t)\mapsto(\vartheta(x'),\lambda t)$, con $\lambda\in\{1,b_N,b_N^{-1}\}$. Se usa el inciso (b) con $\lambda_-:=\min\{1,b_N,b_N^{-1}\}$ y $\lambda_+:=\max\{1,b_N,b_N^{-1}\}$. En un traslape mixto el soporte está a distancia uniforme de $t=0$ y se usa el inciso (c); entre cartas interiores se usa el Lema 6.4.3. En particular, las dos cotas siguen siendo válidas para $s<0$. Los números dependen sólo de $n,s,p,k$, también de $q$ en la escala $F$, de las cotas de jacobianos, de las cotas $BUC^{k+1}$ de transiciones y cortes y de la separación uniforme de los traslapes mixtos.

Insertamos $\sum_{\beta\in J}h_\beta^2=1$ en cada localización $\pi_\alpha u$. Si $A_\alpha$ denota su norma en $H^{s,p}(X_\alpha)$ y $B_\beta$ el sumando correspondiente de (14.34), entonces

$$A_\alpha\le M_{\to,H}\sum_{\{\beta\in J\,|\,\operatorname{supp}\pi_\alpha\cap\operatorname{supp}h_\beta\neq\varnothing\}}B_\beta.$$

La desigualdad $(\sum_{j=1}^{L}a_j)^p\le L^{p-1}\sum_{j=1}^{L}a_j^p$ y los dos conteos de traslapes dan

$$\|\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}}u\|_{\mathbb{H}^{s,p}_{\partial}(\mathfrak{K})}\le LM_{\to,H}\|u\|_{H^{s,p}(M)}.$$

En sentido inverso insertamos $\sum_{\alpha\in I}\pi_\alpha^2=1$ en cada $h_\beta u$ y obtenemos

$$\|u\|_{H^{s,p}(M)}\le LM_{\leftarrow,H}\|\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}}u\|_{\mathbb{H}^{s,p}_{\partial}(\mathfrak{K})}.$$

Por consiguiente, en (14.38) pueden tomarse

$$c^{\partial}_{s,p}:=(LM_{\leftarrow,H})^{-1},\qquad C^{\partial}_{s,p}:=LM_{\to,H}.$$

El mismo cálculo con las normas $F^s_{p,q}$ da (14.40) con

$$c^{F}_{s,p,q}:=(LM_{\leftarrow,F})^{-1},\qquad C^{F}_{s,p,q}:=LM_{\to,F}.$$

Para la síntesis, al localizar $\mathcal{R}_{\partial,\mathfrak{K}}v$ mediante $h_\beta$ aparecen a lo más $L$ índices $\alpha$. Los mismos tres casos de transiciones proporcionan constantes uniformes $M_{\sin,H}>0$ y $M_{\sin,F}(q)>0$ tales que cada sumando tiene norma a lo sumo $M_{\sin,H}\|v_\alpha\|_{H^{s,p}(X_\alpha)}$ en $H$, y la cota análoga con $M_{\sin,F}(q)$ en $F$. Al elevar a la potencia $p$, sumar primero en $\beta$ y contar los traslapes en sentido inverso,

$$\|\mathcal{R}_{\partial,\mathfrak{K}}v\|^p_{H^{s,p}(M)}\le L^pM^p_{\sin,H}\sum_{\alpha\in I}\|v_\alpha\|^p_{H^{s,p}(X_\alpha)}.$$

Así puede tomarse $D^{\partial}_{s,p}:=LM_{\sin,H}$ y, en (14.41), $D^{F}_{s,p,q}:=LM_{\sin,F}(q)$. La suma está bien definida por local finitud.

La identidad de retractación es distribucional y no depende de densidad. En efecto, si $u\in\mathcal{D}'(M)$, entonces $\widetilde{\chi}_\alpha=1$ en una vecindad del soporte coordenado de $\pi_\alpha$ implica, por la definición de multiplicación y prolongación de distribuciones,

$$\mathcal{E}_\alpha\Big(\widetilde{\chi}_\alpha\,\widetilde{(\pi_\alpha u)\circ\varphi_\alpha^{-1}}\Big)=\pi_\alpha u.$$

La familia es localmente finita y $\sum_{\alpha\in I}\pi_\alpha^2 = 1$; por lo tanto, en $\mathcal{D}'(M)$,

$$\mathcal{R}_{\partial,\mathfrak{K}}\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}}u = \sum_{\alpha\in I}\pi_\alpha^2 u = u.$$

Finalmente, esta retractación da la densidad global exactamente en los rangos densos. Si $u$ pertenece a $H^{s,p}(M)$, o a $F^s_{p,q}(M)$ con $q<\infty$, se trunca primero $\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}}u$ a un número finito de índices y después se aproxima cada componente por la restricción de una función de Schwartz, como se probó mediante el cociente en el Lema 14.4.10. La síntesis de cada familia finita pertenece a $C_c^\infty(M)$ y converge a $u$ por (14.39) o (14.41). El caso $q=\infty$ queda fuera del rango de densidad. □

**Observación 14.4.13.** (Los dos sistemas de localización) El Corolario 14.4.7 construye el atlas normalizado y sus propios cortes $\pi_\alpha$; no los identifica con los cortes $h_\beta$ de $\mathcal{T}_F$. El Corolario 14.4.12, mediante las constantes $L$, $M_{\rightarrow,\mathcal{A}}$ y $M_{\leftarrow,\mathcal{A}}$, demuestra después que ambos sistemas producen las mismas escalas $H$ y $F$ con normas comparables por desigualdades explícitas. Así, la regularidad uniforme sirve como puente funcional y no sustituye la localización de Fermi ya utilizada en las pruebas de traza y encaje.

**Proposición 14.4.14.** (Exactitud por interpolación de la escala localizada) Sea $M$ una variedad riemanniana de geometría acotada con frontera no vacía. Sean $1\le p<\infty$, $a<b$, $0<\rho<1$ y $r=(1-\rho)a+\rho b$. Existen constantes $\lambda_{a,b,r},\Lambda_{a,b,r}>0$ tales que

$$\lambda_{a,b,r}\|u\|_{F^r_{p,p}(M)} \le \|u\|_{(F^a_{p,p}(M),F^b_{p,p}(M))_{\rho,p}} \le \Lambda_{a,b,r}\|u\|_{F^r_{p,p}(M)}. \tag{14.42}$$

El par $\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}}$, $\mathcal{R}_{\partial,\mathfrak{K}}$ del corolario anterior es el mismo para todos los valores de $a,b,r$.

*Demostración.* Escribamos $Y_t := \mathbb{F}^t_{p,p,\partial}(\mathfrak{K})$. Usamos la identidad $F^t_{p,p}(\mathbb{R}^n)=B^t_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ y el análisis y la síntesis de Besov del Lema 6.3.8. Esta síntesis está acotada para todo $1\le p<\infty$, incluido $p=1$, y sus fórmulas no dependen de $t$. Los dos operadores realizan $F^t_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ como retracto de

$$b^t_p := \left\{ w=(w_j)_{j\ge0}\in\big(L^p(\mathbb{R}^n)\big)^{\mathbb{N}_0} \,\middle|\, \sum_{j\in\mathbb{N}_0}2^{jtp}\|w_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}<+\infty \right\}.$$

Más precisamente, existen operadores $\mathfrak{a},\mathfrak{r}$, independientes de $t$, tales que, para cada $t\in\mathbb{R}$,

$$\mathfrak{a}\colon F^t_{p,p}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow b^t_p, \qquad \mathfrak{r}\colon b^t_p\longrightarrow F^t_{p,p}(\mathbb{R}^n), \qquad \mathfrak{r}\mathfrak{a}=I_{F^t_{p,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Existen además $A_t,B_t>0$, dependientes sólo de $n,p,t$ y de la resolución fija, tales que

$$\|\mathfrak{a}u\|_{b^t_p}\le A_t\|u\|_{F^t_{p,p}(\mathbb{R}^n)}, \qquad \|\mathfrak{r}w\|_{F^t_{p,p}(\mathbb{R}^n)}\le B_t\|w\|_{b^t_p}.$$

En particular, $B_t^{-1}\|u\|_{F^t_{p,p}(\mathbb{R}^n)}\le\|\mathfrak{a}u\|_{b^t_p}\le A_t\|u\|_{F^t_{p,p}(\mathbb{R}^n)}$; no se emplea una igualdad isométrica entre las normas de Triebel–Lizorkin y Besov. En una coordenada $j$,

$$K\big(\tau,w_j;2^{ja}L^p(\mathbb{R}^n),2^{jb}L^p(\mathbb{R}^n)\big)=\min\{2^{ja},\tau 2^{jb}\}\|w_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Si $k(\tau,w)$ es la norma $\ell^p$ de estos funcionales coordenados, las definiciones dan

$$k(\tau,w)\le K(\tau,w;b_p^a,b_p^b)\le 2k(\tau,w).$$

Además,

$$\int_0^\infty \left[\tau^{-\rho}\min\{2^{ja},\tau 2^{jb}\}\right]^p\frac{d\tau}{\tau}=c_{\rho,p}^p 2^{jrp},\qquad c_{\rho,p}^p:=\frac{1}{p\rho}+\frac{1}{p(1-\rho)}.$$

La igualdad se obtiene integrando por separado antes y después de $\tau=2^{j(a-b)}$. Tonelli se aplica porque el índice de interpolación es precisamente $p$. Al interpolar el mismo par diádico de análisis y síntesis obtenemos $m_{\mathbb{R}},M_{\mathbb{R}}>0$ tales que

$$m_{\mathbb{R}}\|w\|_{F^r_{p,p}(\mathbb{R}^n)}\le\|w\|_{(F^a_{p,p}(\mathbb{R}^n),F^b_{p,p}(\mathbb{R}^n))_{\rho,p}}\le M_{\mathbb{R}}\|w\|_{F^r_{p,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

En el semiespacio, $r_+$ tiene norma a lo sumo uno y el mismo $\mathbf{E}_+$ satisface $r_+\mathbf{E}_+=I$ en los órdenes $a,b$. Si $e_a,e_b$ son sus normas, la interpolación de $\mathbf{E}_+$ da la desigualdad inferior siguiente. Para la superior, se elige $U\in F^r_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ con $r_+U=w$, se aplica a $U$ la desigualdad de espacio completo y después se toma el ínfimo sobre todas esas extensiones. Así, la definición cociente da

$$m_{\mathbb{R}}e_a^{-(1-\rho)}e_b^{-\rho}\|w\|_{F^r_{p,p}(\mathbb{R}^n_+)}\le\|w\|_{(F^a_{p,p}(\mathbb{R}^n_+),F^b_{p,p}(\mathbb{R}^n_+))_{\rho,p}}\le M_{\mathbb{R}}\|w\|_{F^r_{p,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Tomando la suma exterior $\ell^p$ y usando de nuevo Tonelli se obtienen $m_Y,M_Y>0$ con

$$m_Y\|v\|_{Y_r}\le\|v\|_{(Y_a,Y_b)_{\rho,p}}\le M_Y\|v\|_{Y_r}. \tag{14.43}$$

Puede tomarse $m_Y$ como el mínimo de las constantes inferiores de los dos modelos y $M_Y$ como el doble del máximo de sus constantes superiores.

Abreviemos $C_t:=C^F_{t,p,p}$ y $D_t:=D^F_{t,p,p}$. La interpolación de los operadores comunes, su identidad de retracción y (14.43) dan (14.42) con

$$\lambda_{a,b,r}:=\frac{m_Y}{D_rC_a^{1-\rho}C_b^{\rho}},\qquad \Lambda_{a,b,r}:=M_YC_rD_a^{1-\rho}D_b^{\rho}.$$

Estas constantes dependen sólo de los índices y de los datos uniformes del atlas, no de $u$. □

**Corolario 14.4.15.** (Independencia de los extremos de Besov) Sea $M$ una variedad riemanniana de geometría acotada con frontera no vacía. Sean $1\le p<\infty$, $1\le q\le\infty$ y $P=(s_0,s_1,\theta)$, $Q=(t_0,t_1,\eta)$ dos ternas tales que $s_0<s<s_1$, $t_0<s<t_1$, $\theta,\eta\in(0,1)$ y

$$s=(1-\theta)s_0+\theta s_1=(1-\eta)t_0+\eta t_1.$$

Existen constantes $c_{P,Q},C_{P,Q}>0$ tales que

$$c_{P,Q}\|u\|_{B^s_{p,q}(M;s_0,s_1)}\le\|u\|_{B^s_{p,q}(M;t_0,t_1)}\le C_{P,Q}\|u\|_{B^s_{p,q}(M;s_0,s_1)}.$$

Por lo tanto, el espacio y su topología no dependen de los extremos auxiliares. En adelante se denota este espacio simplemente por $B^s_{p,q}(M)$.

*Demostración.* Elegimos $a < \min\{s_0, t_0\}$ y $b > \max\{s_1, t_1\}$. Para $x \in \{s_0, s_1, t_0, t_1\}$, ponemos $\rho_x = \frac{x-a}{b-a}$ y

$$Z_x := (F^a_{p,p}(M), F^b_{p,p}(M))_{\rho_x, p}.$$

La proposición proporciona $\lambda_x, \Lambda_x > 0$ con

$$\lambda_x \|u\|_{F^x_{p,p}(M)} \le \|u\|_{Z_x} \le \Lambda_x \|u\|_{F^x_{p,p}(M)}.$$

Sea $W_s := (F^a_{p,p}(M), F^b_{p,p}(M))_{\frac{s-a}{b-a}, q}$. El Teorema 5.5.2 proporciona $r_P, R_P, r_Q, R_Q > 0$ tales que

$$r_P \|u\|_{W_s} \le \|u\|_{(Z_{s_0}, Z_{s_1})_{\theta,q}} \le R_P \|u\|_{W_s},$$

y las mismas desigualdades con $Q$ en lugar de $P$. Interpolar las cuatro desigualdades anteriores da

$$\alpha_P \|u\|_{W_s} \le \|u\|_{B^s_{p,q}(M; s_0, s_1)} \le \beta_P \|u\|_{W_s},$$

donde

$$\alpha_P := \frac{r_P}{\Lambda_{s_0}^{1-\theta} \Lambda_{s_1}^{\theta}}, \qquad \beta_P := \frac{R_P}{\lambda_{s_0}^{1-\theta} \lambda_{s_1}^{\theta}}.$$

Definimos $\alpha_Q, \beta_Q$ con la misma fórmula y $Q$ en lugar de $P$. Entonces pueden tomarse

$$c_{P,Q} := \frac{\alpha_Q}{\beta_P}, \qquad C_{P,Q} := \frac{\beta_Q}{\alpha_P}.$$

La suma exterior $\ell^p$ se conmutó con la interpolación únicamente en el paso intermedio cuyo índice es $p$; el índice arbitrario $q$ aparece después por reiteración. □

Antes de tomar trazas en el semiespacio debemos comprobar que el dato no depende del representante elegido en el espacio completo.

**Lema 14.4.16.** (La traza depende sólo de la restricción al semiespacio) Sean $1 < p < \infty$, $j \in \mathbb{N}_0$ y $s > j + 1/p$. Si $U \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ se anula en $t > 0$, entonces $\operatorname{tr}_1(\partial_t^\ell U) = 0$ para $0 \le \ell \le j$. Para $j = 0$, la misma afirmación vale en $F^s_{p,q}$ y $B^s_{p,q}$, $1 \le q \le \infty$, siempre que $s > 1/p$.

*Demostración.* Para $h > 0$, pongamos $U_h(x', t) = U(x', t + h)$. Esta distribución se anula en $t > -h$. Una función suave $\eta_h(t)$ con soporte en $(-h/2, h/2)$ e igual a uno cerca de cero satisface $\eta_h \partial_t^\ell U_h = 0$. La compatibilidad con multiplicadores del Lema 14.1.2 da $\operatorname{tr}_1(\partial_t^\ell U_h) = 0$. Las traslaciones convergen fuertemente a la identidad en $H^{s,p}$; la continuidad de la derivación y de la traza permite hacer $h \to 0^+$. El mismo argumento se aplica a $F^s_{p,q}$ y $B^s_{p,q}$ cuando el índice fino es finito. Para $q = \infty$ elegimos $0 < \varepsilon < s - 1/p$ y trabajamos en el espacio de orden $s - \varepsilon$ e índice fino 1. La compatibilidad de las trazas en órdenes distintos identifica el límite distribucional con la traza en orden $s$. □

**Teorema 14.4.17.** (Traza y jets en el semiespacio) Sean $1 < p < \infty$, $j \in \mathbb{N}_0$ y $s > j + \frac{1}{p}$. El operador

$$\gamma_j U := \big(U \restriction_{t=0}, \partial_t U \restriction_{t=0}, \dots, \partial_t^j U \restriction_{t=0}\big)$$

se extiende a una retracción

$$\boldsymbol{\gamma}_j \colon H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow \prod_{\ell=0}^{j} B^{s-\ell-\frac{1}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{14.44}$$

Existe una corretracción lineal continua $\boldsymbol{e}_j$ para la que $\boldsymbol{\gamma}_j \boldsymbol{e}_j = I$. Para $j = 0$ y $1 \le q \le \infty$ se pueden sustituir $H^{s,p}$ por $F^s_{p,q}$ y $B^s_{p,q}$, con espacios de llegada $B^{s-\frac{1}{p}}_{p,p}$ y $B^{s-\frac{1}{p}}_{p,q}$, respectivamente.

*Demostración.* Sea $u \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)$ y elijamos una extensión $U \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Definimos $\gamma_\ell u := \operatorname{tr}_1(\partial_t^\ell U)$. Dos extensiones difieren en una distribución nula en $t > 0$; el Lema 14.4.16 muestra que la definición es independiente de $U$. La continuidad de la derivación, la traza euclidiana y el ínfimo sobre las extensiones dan, para $\ell \le j$,

$$\|\gamma_\ell u\|_{B^{s-\ell-\frac{1}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C_\ell \inf_{\substack{U \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \\ r_+ U = u}} \|U\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = C_\ell \|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Sumar el número finito de estimaciones prueba la continuidad de $\boldsymbol{\gamma}_j$.

Para prescribir simultáneamente los $j+1$ datos de frontera, construimos un perfil normal para cada derivada y estimamos la suma de las extensiones. Sea $(\Delta'_k)_{k\ge 0}$ una resolución diádica en las variables tangenciales. Elegimos $\vartheta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ con transformada de Fourier compactamente soportada y $\vartheta(0) \neq 0$. La matriz finita

$$\left( \frac{d^m}{dt^m}\big(t^r \vartheta(t)\big)\Big|_{t=0} \right)_{0 \le m, r \le j}$$

es triangular, con diagonal $r!\,\vartheta(0)$, y por lo tanto es invertible. Existen, en consecuencia, combinaciones lineales $\varphi_0, \dots, \varphi_j$ de las funciones $\vartheta, t\vartheta, \dots, t^j\vartheta$ tales que

$$\varphi_\ell^{(m)}(0) = \delta_{\ell m}, \qquad 0 \le \ell, m \le j. \tag{14.45}$$

Todas las $\varphi_\ell$ son de Schwartz y sus transformadas tienen soporte compacto. Para un dato $g$ definimos en el espacio completo

$$(\mathbf{E}_\ell g)(x', t) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\ell} \varphi_\ell(2^k t) \Delta'_k g(x'). \tag{14.46}$$

Registramos la estimación discreta que controla la superposición en la variable normal. Para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, toda sucesión no negativa $(a_k)_{k\ge 0}$ y $1 < p < \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{\frac{2k}{p}} |\varphi(2^k t)|^2 a_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} dt \le C_{\varphi,p} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k^p. \tag{14.47}$$

En efecto, descomponemos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en los anillos $A_m := \{t \in \mathbb{R} \mid 2^{-m-1} < |t| \le 2^{-m}\}$, $m \in \mathbb{Z}$, y prolongamos $a_k$ por cero para $k < 0$. Si $t \in A_m$, la acotación de $\varphi$ para $k \le m$ y su decrecimiento de orden $N > \frac{1}{p}$ para $k > m$ dan

$$2^{\frac{k}{p}} |\varphi(2^k t)| \le C_N 2^{\frac{m}{p}} b_{k-m}, \qquad b_r := \begin{cases} 2^{\frac{r}{p}}, & r \le 0, \\ 2^{-(N-\frac{1}{p})r}, & r > 0. \end{cases}$$

La sucesión $b$ pertenece a $\ell^1(\mathbb{Z})$. Como la norma $\ell^2$ no supera la norma $\ell^1$, la integral sobre $A_m$, cuya

medida es comparable con $2^{-m}$, está acotada por $C(\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{k-m}a_k)^p$. Al sumar en $m$, la desigualdad de Young para sucesiones de la Proposición B.8.4 prueba (14.47).

Para $k \geq 1$, la transformada de Fourier del $k$-ésimo sumando de (14.46) está contenida en un anillo de radio comparable con $2^k$: la frecuencia tangencial ya está en ese anillo y la frecuencia normal está en una bola de radio $C2^k$. La interacción finita de los bloques y el Lema 6.3.6 dan la estimación de síntesis

$$\|\mathbf{E}_\ell g\|_{F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| \left( \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{2k(s-\ell)} |\varphi_\ell(2^k t)\Delta'_k g(x')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})}.$$

Aplicamos (14.47), para cada $x'$, con $a_k(x') = 2^{k(s-\ell-\frac{1}{p})}|\Delta'_k g(x')|$, e integramos en $x'$. Obtenemos

$$\|\mathbf{E}_\ell g\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{kp(s-\ell-\frac{1}{p})} \|\Delta'_k g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} = C\|g\|^p_{B^{s-\ell-\frac{1}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{14.48}$$

En particular, la serie de (14.46) converge en $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Definimos

$$\boldsymbol{e}_j(g_0,\dots,g_j) := \left( \sum_{\ell=0}^{j} \mathbf{E}_\ell g_\ell \right) \restriction_{\mathbb{R}^n_+}.$$

La norma cociente del espacio de restricción y (14.48) muestran que este operador es continuo. Para datos de Schwartz podemos derivar término a término en (14.46); por (14.45),

$$\partial_t^m \mathbf{E}_\ell g|_{t=0} = \delta_{m\ell} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \Delta'_k g = \delta_{m\ell} g, \qquad 0 \leq m \leq j.$$

La densidad de $\mathcal{S}$ en cada $B^{s-\ell-\frac{1}{p}}_{p,p}$, junto con la continuidad ya probada de los operadores de traza, pasa esta identidad a todos los datos. Por consiguiente, $\boldsymbol{\gamma}_j \boldsymbol{e}_j = I$, y

$$\|\boldsymbol{e}_j(g_0,\dots,g_j)\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \sum_{\ell=0}^{j} \|g_\ell\|_{B^{s-\ell-\frac{1}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Para $j = 0$, las afirmaciones $F$ y $B$ son las del Teorema 14.1.1 con $c = 1$, restringidas al semiespacio. □

**Teorema 14.4.18.** (Traza y derivadas normales en la frontera) Sea $M$ una variedad de dimensión $n$ con frontera no vacía de geometría acotada, sean $1 < p < \infty$, $j \in \mathbb{N}_0$ y $s > j + \frac{1}{p}$. Para $u \in C^\infty_c(M)$ definimos

$$\partial^\ell_{\boldsymbol{\nu}} u(x) := \frac{d^\ell}{dt^\ell} u(\mathcal{C}(x,t))\Big|_{t=0}, \qquad 0 \leq \ell \leq j.$$

Entonces

$$\mathbf{Tr}_{\partial M,j} u := \left( u \restriction_{\partial M}, \partial_{\boldsymbol{\nu}} u, \dots, \partial^j_{\boldsymbol{\nu}} u \right)$$

se extiende a una retracción

$$\mathbf{Tr}_{\partial M,j}\colon H^{s,p}(M)\longrightarrow \prod_{\ell=0}^{j} B_{p,p}^{s-\ell-\frac{1}{p}}(\partial M). \tag{14.49}$$

En particular,

$$\mathrm{Tr}_{\partial M}\colon H^{s,p}(M)\longrightarrow B_{p,p}^{s-\frac{1}{p}}(\partial M)$$

es sobreyectivo y posee una extensión lineal continua por la derecha.

*Demostración.* Sea $(U_i^{\partial},\kappa_i^{\partial},h_i)_{i\in I_\partial}$ la parte de frontera del sistema de la Proposición 14.4.5, y escribamos

$$\kappa_i^{\partial,0}(u):=\kappa_i^{\partial}(u,0),\qquad h_i^{\partial}:=h_i\restriction_{\partial M}.$$

Por (14.31), en una vecindad de $t=0$,

$$\partial_t^{\ell}\big((h_i u)\circ\kappa_i^{\partial}\big)\restriction_{t=0}=(h_i^{\partial}\circ\kappa_i^{\partial,0})\big((\partial_{\boldsymbol{\nu}}^{\ell}u)\circ\kappa_i^{\partial,0}\big). \tag{14.50}$$

No aparecen términos inferiores de Leibniz; éste es el motivo de la condición (14.31).
Aplicamos $\boldsymbol{\gamma}_j$ del Teorema 14.4.17 a cada $(h_i u)\circ\kappa_i^{\partial}$. Si $A(\beta)$ es el conjunto de cartas que cortan la carta $\beta$ de la frontera, la compatibilidad con multiplicadores y cambios tangenciales proporciona, para $\ell\in\{0,\dots,j\}$,

$$\big\|(h_\beta^{\partial}\,\partial_{\boldsymbol{\nu}}^{\ell}u)\circ\kappa_\beta^{\partial,0}\big\|_{B_{p,p}^{s-\ell-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}\le C\sum_{i\in A(\beta)}\big\|(h_i u)\circ\kappa_i^{\partial}\big\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

El cardinal de $A(\beta)$ es uniformemente acotado. Elevando a la potencia $p$, sumando en $\beta$ y usando que cada carta aparece en un número uniforme de conjuntos $A(\beta)$, obtenemos

$$\sum_{\ell=0}^{j}\|\partial_{\boldsymbol{\nu}}^{\ell}u\|_{B_{p,p}^{s-\ell-\frac{1}{p}}(\partial M)}\le C\|u\|_{H^{s,p}(M)}. \tag{14.51}$$

Esto define la extensión continua de $\mathbf{Tr}_{\partial M,j}$.
Para la corretracción, sean $g=(g_0,\dots,g_j)$ datos de frontera y pongamos

$$g_{\ell,i}:=(h_i^{\partial}g_\ell)\circ\kappa_i^{\partial,0}.$$

Elegimos $\chi_T\in C_c^\infty(B^{n-1}(0,2r_B))$ igual a uno sobre los soportes tangenciales y $\chi_N\in C_c^\infty([0,2r_B))$ igual a uno en $[0,r_0]$. Ponemos $\psi(u,t)=\chi_T(u)\chi_N(t)$. Así, $\psi\boldsymbol{e}_j(g_{0,i},\dots,g_{j,i})$ tiene soporte en la carta y su jet en $t=0$ es el dato local. Transportamos, prolongamos por cero y reconstruimos:

$$\mathbf{Ex}_{\partial M,j}g:=\sum_{i\in I_\partial}h_i\,\big[\psi\,\boldsymbol{e}_j(g_{0,i},\dots,g_{j,i})\big]\circ(\kappa_i^{\partial})^{-1}. \tag{14.52}$$

Al localizar $\mathbf{Ex}_{\partial M,j}g$ en una carta $\beta$, sólo aparecen los índices de $A(\beta)$. Las cotas uniformes de los multiplicadores, de los cambios de carta y de $\boldsymbol{e}_j$ acotan esa localización por la suma de las normas de $g_{\ell,i}$, con $i\in A(\beta)$

y $\ell \in \{0,\dots,j\}$. Elevamos a la potencia $p$ y contamos nuevamente los traslapes; así se obtiene

$$\|\mathbf{Ex}_{\partial M,j} g\|_{H^{s,p}(M)} \le C \sum_{\ell=0}^{j} \|g_\ell\|_{B_{p,p}^{s-\ell-\frac{1}{p}}(\partial M)}.$$

Las funciones $h_i$ son constantes en la dirección normal cerca de la frontera, $\psi = 1$ allí y $\boldsymbol{\gamma}_j \boldsymbol{e}_j = I$. Por lo tanto, al tomar el jet de (14.52) se obtiene $\sum_{i\in I_\partial} (h_i^\partial)^2 g_\ell = g_\ell$ en cada componente. Así,

$$\mathbf{Tr}_{\partial M,j} \mathbf{Ex}_{\partial M,j} = I.$$

□

**Teorema 14.4.19.** (Trazas $F$, $B$ y $W$ en la frontera) Sea $M$ una variedad riemanniana de dimensión $n$, de geometría acotada y con frontera no vacía. Sean $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ y $s > \frac{1}{p}$. Entonces

$$\mathrm{Tr}_{\partial M} \colon F^s_{p,q}(M) \longrightarrow B^{s-\frac{1}{p}}_{p,p}(\partial M), \qquad \mathrm{Tr}_{\partial M} \colon B^s_{p,q}(M) \longrightarrow B^{s-\frac{1}{p}}_{p,q}(\partial M)$$

son retracciones. Si $s \notin \mathbb{N}$, también

$$\mathrm{Tr}_{\partial M} \colon W^{s,p}(M) \longrightarrow B^{s-\frac{1}{p}}_{p,p}(\partial M)$$

es una retracción; para $m \in \mathbb{N}$, $m > \frac{1}{p}$, lo mismo vale con $W^{m,p}(M)$ y $B^{m-\frac{1}{p}}_{p,p}(\partial M)$.

*Demostración.* Tomamos $j = 0$ en las fórmulas (14.49) y (14.52). Si $u_i = (h_i u) \circ \kappa_i^\partial$, la traza euclidiana del semiespacio, los cambios de coordenadas tangenciales y el número uniforme de traslapes dan

$$\|\mathrm{Tr}_{\partial M}\, u\|^p_{B^{s-\frac{1}{p}}_{p,p}(\partial M)} \le C \sum_{i\in I_\partial} \|u_i\|^p_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)} \le C' \|u\|^p_{F^s_{p,q}(M)}.$$

Para $g \in B^{s-\frac{1}{p}}_{p,p}(\partial M)$, la misma cuenta aplicada a la fórmula de reconstrucción, ahora con la corretracción euclidiana, da

$$\|\mathrm{Ex}_{\partial M,0}\, g\|_{F^s_{p,q}(M)} \le C \|g\|_{B^{s-\frac{1}{p}}_{p,p}(\partial M)}.$$

Como los cortes son constantes en la dirección normal donde se calcula la traza, la identidad $\sum_{i\in I_\partial} (h_i^\partial)^2 = 1$ implica $\mathrm{Tr}_{\partial M} \mathrm{Ex}_{\partial M,0} = I$.

Para la escala Besov elegimos $s_0 < s < s_1$, con $s_0 > \frac{1}{p}$, y aplicamos el Teorema 5.3.1 a los mismos operadores en los extremos. Las identidades de interpolación

$$(F^{s_0}_{p,p}(M), F^{s_1}_{p,p}(M))_{\theta,q} = B^s_{p,q}(M)$$

y

$$(B^{s_0-\frac{1}{p}}_{p,p}(\partial M), B^{s_1-\frac{1}{p}}_{p,p}(\partial M))_{\theta,q} = B^{s-\frac{1}{p}}_{p,q}(\partial M)$$

proporcionan la segunda retracción.

Si $s \notin \mathbb{N}$, en las cartas de frontera se usan las normas $W^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)$ de restricción, nunca una extensión por cero a través de $t = 0$. La Proposición 14.5.4 demuestra que $W^{s,p}(M) = B^s_{p,p}(M)$. Esta identificación reduce la afirmación a la retracción Besov con $q = p$; el espacio de llegada permanece $B^{s-\frac{1}{p}}_{p,p}(\partial M)$. Para $m \in \mathbb{N}$, la equivalencia con frontera de la Proposición 14.5.3, aplicada al haz trivial, reduce la afirmación al Teorema 14.4.18 con $j = 0$. □

## 14.5 Versión para haces vectoriales de geometría acotada

La traza de una sección toma valores en el haz restringido. Para construirla mediante sus componentes elegimos marcos adaptados a las cartas y al transporte paralelo. Las cotas de sus matrices de transición aseguran que las estimaciones escalares tienen constantes uniformes; la compatibilidad con los cambios de marco permite reunir las trazas locales en una sección del haz restringido.

Usaremos la noción de haz de geometría acotada de la Definición 13.3.13. Si $M$ tiene frontera, la misma expresión se entiende hasta $\partial M$: se exige la cota (13.44) en todo $M$, usando la conexión producto inducida en $\Lambda^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(\mathbf{E})$. Las cartas de Fermi uniformes permiten formular estas cotas con derivadas ordinarias hasta la frontera.

**Proposición 14.5.1.** (Marcos síncronos uniformes) Sea $M$ una variedad riemanniana de geometría acotada con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada.

(a) Si $M$ no tiene frontera, en sus cartas geodésicas uniformes existen marcos ortonormales síncronos $\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_{i,1}, \dots, \mathbf{e}_{i,r})$ tales que las matrices de transición, sus inversas y todas sus derivadas están acotadas por constantes independientes de los índices.

(b) Si $(M, N)$ es un par de geometría acotada formado por variedades sin frontera, los marcos pueden construirse en las cartas de Fermi de la Proposición 14.2.6: primero se transporta una base de $\mathbf{E}_{p_i}$ a lo largo de las geodésicas radiales de $N$ y después a lo largo de las geodésicas normales de $N$ en $M$. Sus restricciones a $N$ son marcos síncronos uniformes de $\mathbf{E}\restriction_N$.

(c) Si $M$ tiene frontera no vacía, en una carta de frontera $\kappa^{\partial}_i(u,t)$, el marco puede elegirse paralelo en las curvas $t \mapsto \kappa^{\partial}_i(u,t)$. Si $\nabla^{\mathbf{E}} = d + \mathbf{A}_i$ en ese marco, entonces

$$\mathbf{A}_i(\partial_t) = 0. \tag{14.53}$$

En los tres casos, las componentes de $\mathbf{A}_i$ y todas sus derivadas ordinarias son uniformemente acotadas.

*Demostración.* El inciso (a), incluidas las cotas de las matrices de transición y de los coeficientes de la conexión, es la Proposición 8.2.26. La fórmula radial que produce esas cotas fue establecida, en el capítulo de conexiones, en la Proposición 8.2.25.
Para (b), aplicamos primero la Proposición 8.2.26 al haz restringido $\mathbf{E}\restriction_N$. Su curvatura es

$$\mathbf{R}^{\mathbf{E}\restriction_N}(X,Y) = \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(X,Y), \qquad X, Y \in TN,$$

y las derivadas para la conexión producto de $N$ son sumas finitas de restricciones de derivadas de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ y de contracciones con $\mathbf{II}$. El Lema 14.2.3 y las hipótesis del par proporcionan, por lo tanto, las cotas requeridas.

Desde el marco obtenido sobre $N$, prolongamos cada vector por transporte paralelo a lo largo de

$$s \longmapsto \exp^{\perp}_{x_i(u)}\Big(s \sum_{a=1}^{n-k} z^a \boldsymbol{\nu}_{i,a}(x_i(u))\Big).$$

Escribamos los marcos como columnas y usemos la convención

$$\nabla^{\mathbf{E}} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \boldsymbol{\Omega}_i, \qquad \mathscr{F}_i = d\boldsymbol{\Omega}_i + \boldsymbol{\Omega}_i \wedge \boldsymbol{\Omega}_i.$$

El transporte impone el calibre radial normal

$$\sum_{a=1}^{n-k} z^a \Omega_{i,a}(z,u) = 0.$$

Contrayendo la ecuación de curvatura con el campo radial se obtienen las identidades exactas

$$\Omega_{i,b}(z,u) = \int_0^1 s \sum_{a=1}^{n-k} z^a \mathscr{F}_{i,ab}(sz,u)\, ds, \tag{14.54}$$

$$\Omega_{i,\mu}(z,u) = \Omega_{i,\mu}(0,u) + \int_0^1 \sum_{a=1}^{n-k} z^a \mathscr{F}_{i,a\mu}(sz,u)\, ds. \tag{14.55}$$

Aquí $k = \dim N$, los índices normales $a, b$ pertenecen a $\{1,\dots,n-k\}$ y $\mu \in \{1,\dots,k\}$ es tangencial. La primera identidad se obtiene al integrar

$$\sum_{a=1}^{n-k} z^a \mathscr{F}_{i,ab} = \sum_{a=1}^{n-k} z^a \partial_a \Omega_{i,b} + \Omega_{i,b}$$

sobre el radio; la segunda se obtiene de

$$\sum_{a=1}^{n-k} z^a \mathscr{F}_{i,a\mu} = \sum_{a=1}^{n-k} z^a \partial_a \Omega_{i,\mu}.$$

Los conmutadores que contienen $\displaystyle\sum_{a=1}^{n-k} z^a \Omega_{i,a}$ se anulan por el calibre radial.

Probamos simultáneamente las cotas de la conexión y de las componentes de curvatura. Denotemos por $A_m$ y $F_m$ cotas comunes para las normas infinito de las derivadas parciales de orden a lo más $m$ de, respectivamente, $\Omega_{i,A}$ y $\mathscr{F}_{i,AB}$, donde $i \in I$ y $A, B \in \{1,\dots,n\}$. En orden cero, $F_0$ se controla por $\|\mathbf{R}^{\mathbf{E}}\|_\infty$, la comparación uniforme de las bases coordenadas y la ortonormalidad del marco. Las dos fórmulas integrales dan entonces $A_0$, usando las cotas del marco sobre $N$.

Supongamos obtenidos $A_{m-1}$ y $F_{m-1}$, con $m \in \mathbb{N}$. Aplicamos el Lema 9.1.28 al tensor $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ con valores en $\operatorname{End}(\mathbf{E})$. Al despejar su término principal, cada derivada parcial de orden $m$ es la componente correspondiente de $\nabla^m \mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ más una suma finita de derivadas parciales de la curvatura de orden menor que $m$. Los coeficientes de esa suma sólo usan derivadas de $\Omega_i$ y de los símbolos de Christoffel de orden a lo más $m-1$. Las primeras están controladas por $A_{m-1}$ y las segundas por la Proposición 14.2.6. Esto proporciona $F_m$ a partir de $A_{m-1}, F_{m-1}$ y $\|\nabla^m \mathbf{R}^{\mathbf{E}}\|_\infty$.

Ahora derivamos las fórmulas integrales. Para $\alpha = (\alpha_z, \alpha_u) \in \mathbb{N}_0^n$ y $|\alpha| = m$, Leibniz aplicado al integrando

sin el factor exterior $s$ da

$$D^{\alpha}\left(z^{a}\mathscr{F}_{i,aB}(sz,u)\right) = z^{a}s^{|\alpha_z|}(D^{\alpha}\mathscr{F}_{i,aB})(sz,u) + \alpha_a s^{|\alpha_z|-1}(D^{\alpha-e_a}\mathscr{F}_{i,aB})(sz,u).$$

El segundo término se omite si $\alpha_a = 0$; por ello nunca se integra una potencia negativa de $s$. Si $r_{\perp}$ es el radio normal común y $A_m^N$ una cota de las derivadas del marco inicial sobre $N$, resulta

$$A_m \le A_m^N + C_{n,m}\left(r_{\perp}F_m + mF_{m-1}\right) + A_{m-1}.$$

Hemos obtenido $F_m$ antes de usarlo para calcular $A_m$. La recurrencia parte de $A_0, F_0$ y proporciona las cotas en cada orden, sin requerir una cota de orden $m$ de la conexión en el paso que la demuestra.
En una carta de frontera, la misma construcción a lo largo de $t \mapsto \kappa_i^{\partial}(u,t)$ da

$$\boldsymbol{\Omega}_i(\partial_t) = 0.$$

La ecuación de curvatura se reduce exactamente a

$$\partial_t \Omega_{i,\mu} = \mathscr{F}_{i,t\mu}, \qquad \Omega_{i,\mu}(u,t) = \Omega_{i,\mu}(u,0) + \int_0^t \mathscr{F}_{i,t\mu}(u,\tau)\,d\tau.$$

Para las derivadas puramente tangenciales de orden $m$ se deriva esta integral $m$ veces en $u$; la cota de $\mathscr{F}$ en orden $m$ se obtiene primero por el lema del Capítulo 9, exactamente como arriba. Si interviene al menos una derivada normal, se usa $\partial_t \Omega_{i,\mu} = \mathscr{F}_{i,t\mu}$: una derivada total de orden $m$ de la conexión queda expresada mediante una derivada de orden $m-1$ de la curvatura. El caso inicial es la integral de orden cero y el valor del marco en $t = 0$. Estos dos casos abarcan todos los multiíndices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y completan la recurrencia en las cartas de frontera.
Falta controlar las matrices de transición. En un traslape, escribamos, después de expresar ambos marcos en las mismas coordenadas,

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j G_{ji}.$$

Como los marcos son ortonormales, $G_{ji} \in O(r)$ en el caso real y $G_{ji} \in U(r)$ en el complejo; por lo tanto, $G_{ji}^{-1} = G_{ji}^{\mathsf{T}}$ en el primer caso y $G_{ji}^{-1} = G_{ji}^{*}$ en el segundo. Si $\widetilde{\Omega}_j$ es el pullback de $\Omega_j$ por el cambio de carta, la compatibilidad de las conexiones da la ecuación exacta

$$dG_{ji} = G_{ji}\boldsymbol{\Omega}_i - \widetilde{\Omega}_j G_{ji}. \tag{14.56}$$

La norma de operador de $G_{ji}$ es uno. Para pasar del orden $m$ al orden $m+1$, sean $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = m$, y $A \in \{1,\dots,n\}$. La regla de Leibniz da

$$D^{\alpha}\partial_A G_{ji} = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta \le \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \left[(D^{\beta}G_{ji})(D^{\alpha-\beta}\Omega_{i,A}) - (D^{\beta}\widetilde{\Omega}_{j,A})(D^{\alpha-\beta}G_{ji})\right].$$

Cada derivada de $G_{ji}$ del miembro derecho tiene orden a lo más $m$. Las derivadas de las formas de conexión están acotadas por el paso anterior y las del pullback por Faà di Bruno y las cotas del cambio de carta. Si $G_m$ es una cota común hasta orden $m$ y $D_m$ controla esas formas, se puede tomar $G_{m+1} = G_m + 2^{m+1}D_m G_m$ tras incluir en $D_m$ las constantes de las normas matriciales. Partiendo de $G_0 = 1$, esto acota todas las derivadas.

La identidad $G_{ji}^{-1} = G_{ji}^{*}$, o la traspuesta en el caso real, proporciona las mismas cotas para la inversa. Para $z = 0$ se recupera el marco síncrono construido sobre $N$, lo que prueba también la afirmación sobre las restricciones. Esto concluye la prueba. □

**Definición 14.5.2.** (Espacios funcionales de secciones) Sea $M$ una variedad riemanniana de geometría acotada con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Fijemos un sistema cuadrático de localización admisible

$$\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i \in I}$$

y, en cada $U_i$, uno de los marcos síncronos $\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_{i,1}, \dots, \mathbf{e}_{i,r})$ construidos en la Proposición 14.5.1. Sea $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E})$; cuando hay frontera se entiende $\mathcal{D}'(\operatorname{Int} M, \mathbf{E}|_{\operatorname{Int} M})$, como en la definición escalar. En la carta $i$, denotemos por $u_i^a$ las componentes distribucionales de $\mathbf{u}$ respecto del marco $\mathbf{e}_i$, definidas por la Proposición 10.2.34. Así, la componente de $h_i \mathbf{u}$ es $h_i u_i^a$. Ponemos $\mathbb{X}_i = \mathbb{R}^n$ en una carta interior y $\mathbb{X}_i = \mathbb{R}^n_+$ en una carta de frontera.

Para $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < \infty$, definimos

$$H^{s,p}(M, \mathbf{E}) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E}) \,\middle|\, \|\mathbf{u}\|_{H^{s,p}(M,\mathbf{E})} < \infty \right\},$$

donde

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{s,p}(M,\mathbf{E})} := \left( \sum_{i \in I} \sum_{a=1}^{r} \left\| (h_i u_i^a) \circ \varphi_i^{-1} \right\|_{H^{s,p}(\mathbb{X}_i)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14.57}$$

Para $1 \le p < \infty$ y $1 \le q \le \infty$, definimos de modo análogo $F^s_{p,q}(M, \mathbf{E})$ mediante la norma

$$\left( \sum_{i \in I} \sum_{a=1}^{r} \left\| (h_i u_i^a) \circ \varphi_i^{-1} \right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{X}_i)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Finalmente, si $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, con $s_0 < s < s_1$, definimos

$$B^s_{p,q}(M, \mathbf{E}) := \left( F^{s_0}_{p,p}(M, \mathbf{E}), F^{s_1}_{p,p}(M, \mathbf{E}) \right)_{\theta, q}.$$

En el semiespacio se usan siempre las normas cociente de restricción de la Definición 14.4.9. Las definiciones sobre $N$ y $\partial M$ emplean los marcos restringidos y las construcciones sin frontera.

En las cartas de frontera, las extensiones por cero se toman únicamente a través de las caras artificiales. La cara que representa $\partial M$ pertenece al modelo $\mathbb{R}^n_+$ y se trata mediante el operador de extensión del Capítulo 6. Los cortes coordenados fijos dejan un margen común respecto de aquellas caras artificiales; por tanto, sus constantes de multiplicación y de extensión son las mismas en toda la familia. En una carta interior se aplica el Lema 13.1.15.

**Proposición 14.5.3.** (Carácter intrínseco y equivalencia en orden entero) Sea $M$ una variedad riemanniana de geometría acotada con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Sean $\mathcal{Q}$ y $\widetilde{\mathcal{Q}}$ dos sistemas cuadráticos de localización admisibles, provistos de los marcos síncronos de la Proposición 14.5.1. Para cada una de las escalas $A \in \{H, F, B\}$, escribamos $\|\mathbf{u}\|_{A_{\mathcal{Q}}}$ para la norma localizada construida con $\mathcal{Q}$. Para cada

conjunto admisible de índices existen $c_A, C_A > 0$, independientes de $\mathbf{u}$, tales que

$$c_A\|\mathbf{u}\|_{A_{\mathcal{Q}}} \le \|\mathbf{u}\|_{A_{\widetilde{\mathcal{Q}}}} \le C_A\|\mathbf{u}\|_{A_{\mathcal{Q}}}.$$

Las constantes dependen de los índices funcionales, de la multiplicidad y de las cotas uniformes de cambios, cortes y marcos, pero no de las cartas. Para $m \in \mathbb{N}_0$ y $1 < p < \infty$ se tiene $H^{m,p}(M,\mathbf{E}) = W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ y existen $c_{m,p}, C_{m,p} > 0$, independientes de $\mathbf{u}$, tales que

$$c_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{u}\|_{H^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Más precisamente, si $N_{m,p}(\mathbf{u})$ denota la norma localizada de (14.57), existen $c'_{m,p}, C'_{m,p} > 0$ tales que

$$c'_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le N_{m,p}(\mathbf{u}) \le C'_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})},$$

donde la norma covariante es

$$\left(\sum_{\ell=0}^{m} \|(\nabla^{\mathbf{E}})^{\ell}\mathbf{u}\|^{p}_{L^p(M,T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E})}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14.58}$$

La comparación entre derivadas covariantes y parciales vale, más generalmente, para $1 \le p < \infty$. Si $\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}} u_i^a \mathbf{e}_{i,a}$ en $U_i$, ponemos

$$N^{W}_{m,p}(\mathbf{u}) := \left(\sum_{i\in I}\sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}} \|(h_i u_i^a)\circ\varphi_i^{-1}\|^{p}_{W^{m,p}(\mathbb{X}_i)}\right)^{1/p}. \tag{14.59}$$

Existen $c^W_{m,p}, C^W_{m,p} > 0$ tales que

$$c^W_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le N^W_{m,p}(\mathbf{u}) \le C^W_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Las secciones suaves con soporte compacto en $M$, que puede tocar la frontera, son densas en estos espacios para todo $1 \le p < \infty$. La identificación con $H^{m,p}$ se mantiene en el rango $1 < p < \infty$.

*Demostración.* En un traslape, los vectores de componentes se relacionan por $u_i = G_{ij}u_j$. La Proposición 14.5.1 acota todas las derivadas de $G_{ij}$, y el Lema 6.4.3 controla simultáneamente la multiplicación matricial y el cambio de coordenadas. La multiplicidad uniforme y la desigualdad de suma finita empleada en la Proposición 14.4.11 producen las constantes $c_A, C_A$ de las desigualdades del enunciado. El argumento vale en $F$, y la interpolación real lo transporta a $B$.

Para la comparación entera usamos el Lema 9.1.28 en cada carta regular. Si $q \in \mathbb{N}$, $a \in \{1,\dots,r_{\mathbf{E}}\}$ e $(i_1,\dots,i_q) \in \{1,\dots,n\}^q$, su fórmula es

$$((\nabla^{\mathbf{E}})^q\mathbf{u})^a_{i_1\cdots i_q} = \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_q}u^a + \sum_{b=1}^{r_{\mathbf{E}}}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\ |\beta|\le q-1}} (B_\beta)^a_{b,i_1\cdots i_q}\,\partial^\beta u^b.$$

Los coeficientes de ese lema usan derivadas de las conexiones hasta orden $q-1$; sus normas infinito son uniformes por la proposición de marcos. Sea $P_q$ la suma de las normas $L^p$ de las derivadas parciales de todas las componentes hasta orden $q$, y sea $V_q$ la suma de las normas $L^p$ de las derivadas covariantes hasta

ese orden, en la carta considerada. La comparación uniforme de las métricas y de la densidad da $P_0 \le K_0 V_0$. Si $P_{q-1} \le K_{q-1} V_{q-1}$, la fórmula anterior, con el término principal despejado, da

$$P_q \le P_{q-1} + C_q V_q + C_q P_{q-1} \le \big(C_q + (1+C_q)K_{q-1}\big) V_q.$$

Así se puede elegir $K_q = C_q + (1+C_q)K_{q-1}$, independiente de la carta. La desigualdad en sentido opuesto se obtiene de la misma fórmula sin despejar: $V_q \le C_q' P_q$. Los coeficientes de ambas comparaciones son los del lema del Capítulo 9, cuyas cotas son uniformes en las trivializaciones consideradas.

Aplicamos las comparaciones a $h_i \mathbf{u}$. La regla de Leibniz para la conexión producto controla sus derivadas por

$$|\nabla^q (h_i \mathbf{u})| \le C_q \sum_{b=0}^{q} |\nabla^{q-b} h_i| |\nabla^b \mathbf{u}|, \qquad q \in \{0, \dots, m\}.$$

Las normas infinito de las derivadas de los cortes y la multiplicidad uniforme permiten elevar a la potencia $p$, sumar sobre $i \in I$ e integrar. Para la desigualdad inversa usamos $\mathbf{u} = \sum_{i \in I} h_i (h_i \mathbf{u})$ y la misma regla de Leibniz; en cada punto interviene un número uniformemente acotado de sumandos. La equivalencia entre la suma de un número finito de normas y su suma $\ell^p$ sólo añade factores que dependen de $m, n, r_{\mathbf{E}}, p$. Todos estos pasos valen para $1 \le p < \infty$: sólo se han usado desigualdades triangulares, Leibniz y sumas de multiplicidad acotada. Prueban las dos cotas de $N^{W}_{m,p}$, incluido $p = 1$. Para $1 < p < \infty$, el Teorema 6.3.10 identifica las normas enteras euclidianas con las normas de Bessel; en el semiespacio se aplica después de la extensión y restricción del Capítulo 6. Esto proporciona las dos constantes globales afirmadas. Estas fórmulas triangulares valen también para derivadas débiles, por el Lema 9.1.44. Por ello las comparaciones se aplican directamente a cada sección dada, sin presuponer una aproximación que ya satisfaga condiciones de traza.

Precisemos la densidad que se utilizará después. La serie $\mathbf{u} = \sum_{i \in I} h_i (h_i \mathbf{u})$ converge en $W^{m,p}$: las normas de sus colas se controlan por las colas de la suma $\ell^p$ localizada. En cada una de las finitas cartas de una suma parcial, prolongamos las componentes al espacio completo (con $\mathcal{E}_m$ del Teorema 3.6.4 en una carta de frontera), regularizamos y multiplicamos por un corte auxiliar fijo. La restricción al semiespacio proporciona aproximaciones suaves hasta $t = 0$. Al reconstruir obtenemos secciones de $\Gamma_c(M, \mathbf{E})$ que convergen en $W^{m,p}$. No se exige que su soporte evite la frontera. Esta aproximación vale para todo $1 \le p < \infty$ por la continuidad de las traslaciones y de la regularización en $L^p$, aplicada a las finitas derivadas. Para $1 < p < \infty$, la misma construcción funciona en $H^{m,p}$ y prueba, junto con las comparaciones anteriores, la igualdad de ambos espacios como subespacios de distribuciones en $\operatorname{Int} M$. □

La comparación entera identifica las derivadas que intervienen en la norma. Para un orden no entero queda por comparar valores situados en fibras distintas. El error entre transporte paralelo y diferencia de componentes es de primer orden en la distancia, y por eso resulta integrable en la seminorma fraccionaria.

**Proposición 14.5.4.** (Localización uniforme de Slobodeckij) Sean $M$ y $\mathbf{E} \to M$ de geometría acotada, con o sin frontera, $1 < p < \infty$ y $s = m + \sigma$, donde $m \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \sigma < 1$. En un sistema cuadrático uniforme con marcos síncronos ponemos

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{s,p}_{\mathcal{Q}}(M,\mathbf{E})} := \left( \sum_{i \in I} \sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}} \big\| (h_i u_i^a) \circ \varphi_i^{-1} \big\|^p_{W^{s,p}(\mathbb{X}_i)} \right)^{1/p}.$$

En cartas interiores se prolonga por cero fuera de la carta; en cartas de frontera sólo se prolonga por cero a través de las caras artificiales y se toma la norma de restricción al semiespacio. Estas normas definen, independientemente del sistema elegido, un espacio $W^{s,p}(M,\mathbf{E})$ y

$$W^{s,p}(M,\mathbf{E}) = B^{s}_{p,p}(M,\mathbf{E}) \quad \text{con normas equivalentes.}$$

Si $M$ no tiene frontera, este espacio coincide con el definido mediante $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ y la seminorma

$$[\nabla^m_w \mathbf{u}]^p_{\sigma,p;r} := \int_M \int_{0<d_{\mathbf{g}}(x,y)<r} \frac{|\nabla^m_w \mathbf{u}(x) - P^{\mathbf{E}_m}_{y\to x}\nabla^m_w \mathbf{u}(y)|^p}{d_{\mathbf{g}}(x,y)^{n+\sigma p}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x), \tag{14.60}$$

donde $\mathbf{E}_m = T^{(0,m)}(TM)\otimes\mathbf{E}$, el transporte se toma sobre la única geodésica corta y $r>0$ es un radio uniforme suficientemente pequeño. Cambiar $r$ por otro radio positivo menor que el radio uniforme produce una norma equivalente.

*Demostración.* En cada modelo euclidiano, la identificación $W^{s,p} = B^s_{p,p} = F^s_{p,p}$ tiene constantes que dependen sólo de $n,s,p$. En el semiespacio vale también para las normas de restricción, por la extensión euclidiana y las comparaciones del Capítulo 6. La Proposición 14.4.14, y su versión sin frontera del capítulo anterior, muestran que el espacio localizado $F^s_{p,p}$ coincide con $B^s_{p,p}$. Para secciones se usa el mismo análisis y síntesis sobre todas las componentes: el rango es finito, las transiciones matriciales son multiplicadores uniformes y las sumas sobre cartas, componentes y bloques tienen aquí el mismo exponente $p$. Tonelli y las estimaciones de aquellas pruebas se aplican sin cambiar su orden. Se obtiene la equivalencia con $B^s_{p,p}$ y, por la Proposición 14.5.3, la independencia del sistema. Esta parte del argumento incluye la frontera.

Supongamos ahora $\partial M = \varnothing$. Fijemos cartas normales mayores que las utilizadas por los cortes, y elijamos $r$ menor que su margen uniforme. Si uno de los puntos está en el soporte de $h_i$ y su distancia al otro es menor que $r$, la geodésica corta queda dentro de la carta mayor. En el marco síncrono, la matriz $G_i(x,y)$ del transporte satisface

$$\|G_i(x,y) - I\| + \|G_i(x,y)^{-1} - I\| \le C\, d_{\mathbf{g}}(x,y).$$

En efecto, integramos la ecuación del transporte; sus coeficientes son las matrices acotadas de la conexión evaluadas sobre la velocidad de la curva. La longitud coordenada no excede una constante por la longitud riemanniana. Grönwall da la desigualdad con $C$ independiente de $i$. La misma prueba se aplica a cada haz tensorial $\mathbf{E}_m$.

Fijemos uno de esos haces $\mathbf{E}_m$ y una sección $\mathbf{v}$ de él; escribamos $v_i$ para su vector de componentes. En ambas direcciones obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(x) - P_{y\to x}\mathbf{v}(y)| &\le C\big(|v_i(x) - v_i(y)| + d_{\mathbf{g}}(x,y)|v_i(y)|\big),\\ |v_i(x) - v_i(y)| &\le C\big(|\mathbf{v}(x) - P_{y\to x}\mathbf{v}(y)| + d_{\mathbf{g}}(x,y)|\mathbf{v}(y)|\big). \end{aligned}$$

Las distancias y medidas son uniformemente comparables con las coordenadas. La contribución de los términos de error está acotada por $C\|\mathbf{v}\|^p_{L^p(M,\mathbf{E}_m)}$, porque

$$\sup_{y\in M} \int_{d_{\mathbf{g}}(x,y)<r} d_{\mathbf{g}}(x,y)^{-n+p(1-\sigma)}\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x) \le C \int_0^r t^{p(1-\sigma)-1}\, dt < \infty.$$

Ésta es la comparación local entre la seminorma intrínseca y la seminorma de las componentes, ahora con una constante uniforme.
Para localizar, usamos la identidad

$$h_i(x)\mathbf{v}(x) - h_i(y)P_{y\to x}\mathbf{v}(y) = h_i(x)\big(\mathbf{v}(x) - P_{y\to x}\mathbf{v}(y)\big) + (h_i(x) - h_i(y))P_{y\to x}\mathbf{v}(y).$$

Se tiene $|h_i(x) - h_i(y)| \le C d_{\mathbf{g}}(x,y)$ y en cada par intervienen a lo más $2L$ soportes. Elevamos a la potencia $p$, sumamos y aplicamos la integral anterior. En sentido inverso reconstruimos $\mathbf{v} = \sum_{i\in I} h_i(h_i\mathbf{v})$ y usamos la misma estimación de suma finita. Las partes de la prolongación por cero situadas fuera de la carta están separadas del soporte por una distancia $\delta > 0$ uniforme; su contribución se acota por $C\delta^{-\sigma p}\|\mathbf{v}\|^p_{L^p(M,\mathbf{E}_m)}$. Por tanto, las normas locales y la norma $\|\mathbf{v}\|_{L^p(M,\mathbf{E}_m)} + [\mathbf{v}]_{\sigma,p;r}$ son equivalentes.
Para $s = m+\sigma$, usamos la expresión triangular de las derivadas covariantes del Lema 9.1.28, tanto en sentido directo como al despejar las derivadas parciales de orden $m$. Cada término inferior contiene una derivada de orden a lo más $m-1$ y un coeficiente uniformemente suave. Se controla en $W^{\sigma,p}$ mediante $W^{1,p} \hookrightarrow W^{\sigma,p}$ y la estimación de multiplicadores del Lema 9.4.15. Así, esos términos se absorben en $\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}$. La comparación de orden $\sigma$ aplicada a $\nabla^m_w\mathbf{u}$ y Leibniz para los cortes prueban la equivalencia con $\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} + [\nabla^m_w\mathbf{u}]_{\sigma,p;r}$. Las fórmulas locales son válidas para derivadas débiles; no se ha presupuesto densidad en la norma fraccionaria.
Finalmente, si $0 < r_1 < r_2$ son dos radios admisibles, la diferencia de las integrales se toma sobre $r_1 \le d_{\mathbf{g}}(x,y) < r_2$. La isometría del transporte y la cota uniforme del volumen de $B_{\mathbf{g}}(y,r_2)$ la acotan por $C_{r_1,r_2}\|\nabla^m_w\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,\mathbf{E}_m)}$. Esto prueba la independencia del radio sin utilizar que $M$ tenga volumen total finito. □

**Proposición 14.5.5.** (Interpolación y dualidad compleja de Sobolev para haces) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad sin frontera de geometría acotada y sea $(\mathbf{E},\mathbf{h}_{\mathbf{E}},\nabla^{\mathbf{E}}) \to M$ un haz hermitiano complejo de geometría acotada; adoptamos la convención de que $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ es lineal en la primera variable. Si $s_0 < s_1$, $0 < \theta < 1$, $s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ y $1 < p < \infty$, entonces

$$[H^{s_0,p}(M,\mathbf{E}), H^{s_1,p}(M,\mathbf{E})]_\theta = H^{s_\theta,p}(M,\mathbf{E}) \tag{14.61}$$

con equivalencia de normas. Las identificaciones se obtienen mediante la identidad en las secciones de prueba y son independientes del sistema cuadrático de localización admisible y de los marcos síncronos empleados para definir las normas.
Si $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ y $p' = \frac{p}{p-1}$, el emparejamiento complejo–bilineal

$$\mathbf{E}_x \times \overline{\mathbf{E}}_x \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (e,\overline{f}) \longmapsto \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(e,f),$$

seguido de integración se prolonga de manera única a un emparejamiento bilineal continuo

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{s,p;\mathbf{E}} \colon H^{s,p}(M,\mathbf{E}) \times H^{-s,p'}(M,\overline{\mathbf{E}}) \longrightarrow \mathbb{C}. \tag{14.62}$$

El mapeo

$$\mathfrak{J}_{s,p,\mathbf{E}} \colon H^{-s,p'}(M,\overline{\mathbf{E}}) \longrightarrow (H^{s,p}(M,\mathbf{E}))', \qquad \mathfrak{J}_{s,p,\mathbf{E}}(\mathbf{v})(\mathbf{u}) := \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{s,p;\mathbf{E}}, \tag{14.63}$$

es un isomorfismo complejo–lineal topológico. Asimismo, la conjugación puntual induce un isomorfismo

complejo–lineal isométrico

$$\mathcal{C}_{s,p,\mathbf{E}}\colon \overline{H^{s,p}(M,\mathbf{E})} \longrightarrow H^{s,p}(M,\overline{\mathbf{E}}), \qquad \mathcal{C}_{s,p,\mathbf{E}}(\overline{\mathbf{u}}) := \overline{\mathbf{u}}. \tag{14.64}$$

Por lo tanto, de manera equivalente,

$$\overline{H^{-s,p'}(M,\mathbf{E})} \cong (H^{s,p}(M,\mathbf{E}))'.$$

En el caso real se omiten todas las barras.
Estas identificaciones son compatibles con (14.61): al interpolar los órdenes $s_0, s_1$, los espacios de la segunda entrada interpolan entre los órdenes $-s_0, -s_1$ y producen el orden $-s_\theta$ (intercambiando los extremos si es necesario); el emparejamiento resultante es la única extensión del mismo emparejamiento integral sobre $\Gamma_c(\mathbf{E})\times\Gamma_c(\overline{\mathbf{E}})$. La conjugación puntual conmuta asimismo con estas identificaciones.

*Demostración.* Fijemos un sistema cuadrático de localización admisible $\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i\in I}$, con $\sum_{i\in I} h_i^2 = 1$, y los marcos síncronos unitarios $\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_{i,1},\dots,\mathbf{e}_{i,r})$. Elegimos cortes $\chi_i \in C_c^\infty(U_i)$ iguales a uno en una vecindad de $\operatorname{supp} h_i$ y usamos en $\overline{\mathbf{E}}$ el marco conjugado $\overline{\mathbf{e}}_i$. Si

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u_i^a \mathbf{e}_{i,a}, \qquad \mathbf{v} = \sum_{a=1}^{r} v_i^a \overline{\mathbf{e}}_{i,a},$$

y $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{w}}$ es suave, entonces $v_i^a = \overline{w_i^a}$ y $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{w}) = \sum_{a=1}^{r} u_i^a v_i^a$. Pongamos

$$a_i(x) := \sqrt{\det\big((\varphi_i^{-1})^*\mathbf{g}\big)(x)}.$$

Las funciones $a_i$, $a_i^{-1}$ y los cortes que intervienen tienen cotas uniformes de multiplicador de todo orden. Denotemos por $\langle z,\varphi\rangle_{\mathbb{R}^n}$ la dualidad *bilineal* euclidiana entre $H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$ y $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Para $\mathbf{u}\in H^{s,p}(M,\mathbf{E})$ y $\mathbf{v}\in H^{-s,p'}(M,\overline{\mathbf{E}})$ definimos

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{s,p;\mathbf{E}} := \sum_{i\in I}\sum_{a=1}^{r} \Big\langle (h_i v_i^a)\circ\varphi_i^{-1}, a_i\,(h_i u_i^a)\circ\varphi_i^{-1}\Big\rangle_{\mathbb{R}^n}. \tag{14.65}$$

Como los operadores de multiplicación por $a_i$ están uniformemente acotados en $H^{s,p}$, la dualidad euclidiana y Hölder para sucesiones dan

$$|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{s,p;\mathbf{E}}| \le C\|\mathbf{u}\|_{H^{s,p}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{v}\|_{H^{-s,p'}(M,\overline{\mathbf{E}})}.$$

La serie de (14.65) es, por lo tanto, absolutamente convergente. Si $\mathbf{u},\mathbf{w}\in\Gamma_c(\mathbf{E})$ y $\mathbf{v}=\overline{\mathbf{w}}$, el cambio de variables y $\sum_{i\in I} h_i^2 = 1$ dan

$$\langle \mathbf{u},\overline{\mathbf{w}}\rangle_{s,p;\mathbf{E}} = \sum_{i\in I}\int_M h_i^2\,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{w})\,d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},\mathbf{w})\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Las secciones suaves de soporte compacto son densas en ambos espacios: esto se obtiene aproximando por sucesiones con soporte finito y componentes de Schwartz en la retracción–corretracción que se usa abajo. Así, la extensión es única.

La conjugación cambia las componentes $u_i^a$ en $\overline{u_i^a}$ y conmuta con los cortes y cambios de coordenadas reales. Como la conjugación es una isometría de cada espacio euclidiano $H^{s,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$, la regla (14.64) es un isomorfismo lineal isométrico; su linealidad usa $\lambda\overline{\mathbf{u}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{u}}$ en el dominio conjugado.

Construimos ahora una retracción que probará la interpolación y, después, la sobreyectividad de (14.63) sin presuponer la propia dualidad global. Para cada $r_0 \in \mathbb{R}$, escribamos

$$\mathbb{H}_{\mathbf{E}}^{r_0,p} := \ell^p\big(I; H^{r_0,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)\big)$$

y definamos, mediante las mismas fórmulas para todo $r_0$,

$$\mathsf{A}_{\mathbf{E}}\mathbf{u} := \big((h_i\mathbf{u}_i)\circ\varphi_i^{-1}\big)_{i\in I},$$

$$\mathsf{B}_{\mathbf{E}}(Z_i) := \sum_{i\in I} h_i \sum_{a=1}^{r} \Big[\big((\chi_i\circ\varphi_i^{-1})Z_i\big)\circ\varphi_i\Big]^a \mathbf{e}_{i,a},$$

donde cada sumando se prolonga por cero. Los teoremas uniformes de multiplicadores y cambios de coordenadas y la multiplicidad finita prueban que

$$\mathsf{A}_{\mathbf{E}}\colon H^{r_0,p}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbf{E}}^{r_0,p}, \qquad \mathsf{B}_{\mathbf{E}}\colon \mathbb{H}_{\mathbf{E}}^{r_0,p} \longrightarrow H^{r_0,p}(M,\mathbf{E})$$

son continuos; además, $\mathsf{B}_{\mathbf{E}}\mathsf{A}_{\mathbf{E}}\mathbf{u} = \sum_{i\in I} h_i^2\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Aplicamos estas cotas con $r_0 = s_0, s_1$. El Teorema 6.3.11, aplicado a las $r$ componentes, y la Proposición 5.7.12 identifican

$$[\mathbb{H}_{\mathbf{E}}^{s_0,p}, \mathbb{H}_{\mathbf{E}}^{s_1,p}]_\theta = \mathbb{H}_{\mathbf{E}}^{s_\theta,p}$$

con equivalencia de normas. El Teorema de interpolación compleja de operadores 5.7.5, aplicado a $\mathsf{A}_{\mathbf{E}}$ y $\mathsf{B}_{\mathbf{E}}$, conserva la identidad $\mathsf{B}_{\mathbf{E}}\mathsf{A}_{\mathbf{E}} = I$ y prueba (14.61). Como las fórmulas de ambos operadores no dependen de $r_0$, la identificación es la identidad sobre las secciones de prueba. La independencia del sistema cuadrático de localización se sigue también de la Proposición 14.5.3.

Sea $\Lambda \in (H^{s,p}(M,\mathbf{E}))'$. La dualidad bilineal euclidiana y $(\ell^p(X_i))' = \ell^{p'}(X_i')$ proporcionan

$$W = (W_i)_{i\in I} \in \ell^{p'}\Big(I; H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)\Big)$$

tal que

$$(\Lambda\circ\mathsf{B}_{\mathbf{E}})(Z) = \sum_{i\in I}\langle W_i, Z_i\rangle_{\mathbb{R}^n}, \qquad \|W\|_{\ell^{p'}(I;H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r))} \le \|\Lambda\|_{(H^{s,p}(M,\mathbf{E}))'}\|\mathsf{B}_{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_{\mathbf{E}}^{s,p}, H^{s,p}(M,\mathbf{E}))}. \tag{14.66}$$

Definimos una distribución $\mathbf{v}$ con valores en $\overline{\mathbf{E}}$ mediante

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle := \sum_{i\in I}\Big\langle W_i, (h_i\mathbf{u}_i)\circ\varphi_i^{-1}\Big\rangle_{\mathbb{R}^n}, \qquad \mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E}). \tag{14.67}$$

La suma es finita para cada $\mathbf{u}$.

Verificamos directamente, y no por la dualidad que estamos demostrando, que $\mathbf{v} \in H^{-s,p'}(M,\overline{\mathbf{E}})$. Para cada

$j$, sea $\mathsf{L}_{ij}$ el operador local que envía las componentes en el marco $\mathbf{e}_j$ de una sección $\mathbf{u}$ a

$$\mathsf{L}_{ij}(\mathbf{u}_j) := \big(h_i h_j \mathbf{u}_i\big) \circ \varphi_i^{-1}, \qquad U_i \cap U_j \neq \varnothing,$$

insertando $\chi_j$ antes de prolongar por cero. Es una composición de un cambio de coordenadas uniforme, una matriz de transición uniforme y un multiplicador uniforme. Por lo tanto,

$$\mathsf{L}_{ij} \colon H^{s,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r) \longrightarrow H^{s,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$$

tiene norma acotada independientemente de $i, j$. Su transpuesto bilineal $\mathsf{L}_{ij}^{\mathsf{T}}$ tiene la misma cota entre los espacios de orden $-s$ y exponente $p'$. Si $v_j$ denota el vector de componentes de $\mathbf{v}$ en el marco $\overline{\mathbf{e}}_j$, la definición (14.67) da, en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$,

$$a_j\,(h_j v_j) \circ \varphi_j^{-1} = \sum_{\substack{i \in I \\ U_i \cap U_j \neq \varnothing}} \mathsf{L}_{ij}^{\mathsf{T}} W_i. \tag{14.68}$$

En efecto, ambos miembros tienen la misma acción sobre toda función de prueba: esta igualdad es exactamente (14.67) aplicada a $h_j \mathbf{u}$ y escrita en la carta $j$. La multiplicidad uniforme, la cota de los transpuestos y la multiplicación por $a_j^{-1}$ dan

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{-s,p'}(M,\overline{\mathbf{E}})}^{p'} \leq C \sum_{j \in I} \left( \sum_{\substack{i \in I \\ U_i \cap U_j \neq \varnothing}} \|W_i\|_{H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)} \right)^{p'} \leq C' \sum_{i \in I} \|W_i\|_{H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)}^{p'}.$$

Así, $\mathbf{v}$ pertenece al espacio afirmado y su norma está acotada por un múltiplo de $\|\Lambda\|_{(H^{s,p}(M,\mathbf{E}))'}$.
Finalmente, para $\mathbf{u} \in H^{s,p}(M, \mathbf{E})$,

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \Lambda(\mathsf{B}_{\mathbf{E}} \mathsf{A}_{\mathbf{E}} \mathbf{u}) = \sum_{i \in I} \langle W_i, (h_i \mathbf{u}_i) \circ \varphi_i^{-1} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{s,p;\mathbf{E}}.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{J}_{s,p,\mathbf{E}}$ es sobreyectivo y la construcción anterior prueba la continuidad de su inversa. Si $\mathfrak{J}_{s,p,\mathbf{E}}(\mathbf{v}) = 0$, entonces $\mathbf{v}$ se anula sobre $\Gamma_c(\mathbf{E})$; como $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ identifica linealmente $\mathbf{E}$ con $(\overline{\mathbf{E}})^*$, esto significa que $\mathbf{v}$ es la distribución nula. Así, el mapeo también es inyectivo. Su continuidad ya fue probada a partir de (14.65).
Finalmente, las fórmulas locales que definen el emparejamiento, la conjugación, $\mathsf{A}_{\mathbf{E}}$ y $\mathsf{B}_{\mathbf{E}}$ son las mismas para todo orden. La densidad de $\Gamma_c(\mathbf{E})$ y $\Gamma_c(\overline{\mathbf{E}})$ y la unicidad de la extensión continua identifican el emparejamiento en el orden interpolado con (14.62). Esto prueba la compatibilidad con interpolación y conjugación afirmada en el enunciado. El representante se ha construido mediante la dualidad local y los operadores de análisis y síntesis. □

**Teorema 14.5.6.** (Identificación de los potenciales del calor con los espacios locales) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad sin frontera de geometría acotada y sea $(\mathbf{E}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}, \nabla^{\mathbf{E}}) \to M$ un haz de geometría acotada y rango finito. Para $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < \infty$, la identidad en las secciones de prueba induce las identificaciones

$$H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E}) = H^{s,p}(M, \mathbf{E}) = F^{s}_{p,2}(M, \mathbf{E}). \tag{14.69}$$

En particular, para cualquier sistema cuadrático admisible $\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i\in I}$ con marcos síncronos, existen $c, C > 0$ tales que

$$c\|\mathbf{u}\|_{H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})} \le \left( \sum_{i\in I} \sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}} \left\| \widetilde{(h_i u_i^a) \circ \varphi_i^{-1}} \right\|^p_{F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/p} \le C\|\mathbf{u}\|_{H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M,\mathbf{E})}. \tag{14.70}$$

Las constantes dependen de $n, r_{\mathbf{E}}, s, p$, de las cotas uniformes del sistema de localización y de un número finito de las cotas de geometría acotada de $M$ y $\mathbf{E}$. No dependen del índice de la carta, del número de cartas ni de la sección $\mathbf{u}$. Para $s < 0$, la primera igualdad proporciona también una realización canónica, e inyectiva, de la completación definida mediante el calor como espacio de distribuciones con valores en $\mathbf{E}$.

*Demostración.* La identificación euclidiana $H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ del Teorema 6.3.10 tiene constantes que dependen sólo de $n, s, p$. La aplicamos a cada componente y sumamos sus potencias $p$ sobre $i \in I$ y $a \in \{1, \dots, r_{\mathbf{E}}\}$. Esto prueba la segunda igualdad de (14.69) y sus dos comparaciones de normas, para todo orden real.

Consideremos primero $s \ge 0$. Para $s = 0$ las tres normas son equivalentes a la norma de $L^p(M, \mathbf{E})$, por la comparación uniforme de las medidas y de las normas de las fibras. Si $s = m$ es un entero positivo, el Teorema 13.3.25 y la Proposición 14.5.3 dan

$$H^{m,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E}) = W^{m,p}(M, \mathbf{E}) = H^{m,p}(M, \mathbf{E}).$$

Ambas igualdades conservan la sección como distribución; sus normas se comparan en los dos sentidos.

Para un orden positivo no entero elegimos $m \in \mathbb{N}$ con $m > s$ y ponemos $\theta = s/m \in (0, 1)$. En los extremos $0, m$ tenemos el mismo par compatible de espacios, con normas equivalentes. La interpolación compleja de la identidad y de su inversa, según el Teorema 5.7.5, conserva esa equivalencia. Por una parte, el Teorema 13.3.27 da

$$[L^p(M, \mathbf{E}), H^{m,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E})]_\theta = H^{s,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E}).$$

Por otra, la Proposición 14.5.5 identifica el mismo espacio interpolado con $H^{s,p}(M, \mathbf{E})$. La identidad de los espacios de partida se transforma así en la primera igualdad buscada. La cota de potencias imaginarias que hace posible este paso es la del Lema 13.3.26, aplicada al laplaciano de la conexión de $\mathbf{E}$.

Queda el orden negativo. Escribamos $s = -a$, con $a > 0$, y $p' = p/(p-1)$. El haz conjugado $\overline{\mathbf{E}}$ tiene las mismas cotas geométricas que $\mathbf{E}$. La parte positiva ya demostrada identifica

$$H^{a,p'}_{L_{\overline{\mathbf{E}}}}(M, \overline{\mathbf{E}}) = H^{a,p'}(M, \overline{\mathbf{E}})$$

con normas equivalentes. Tomamos los duales complejos lineales de ambos miembros y usamos, respectivamente, el Teorema 12.4.9 y la Proposición 14.5.5. Obtenemos un isomorfismo entre $H^{-a,p}_{L_{\mathbf{E}}}(M, \mathbf{E})$ y $H^{-a,p}(M, \mathbf{E})$. En una sección de prueba ese isomorfismo es la identidad: las dos dualidades coinciden con el mismo emparejamiento bilineal integral, usando la métrica para emparejar $\mathbf{E}$ con $\overline{\mathbf{E}}$. La densidad de las secciones de prueba en el espacio positivo localizado determina de manera única la distribución correspondiente. También prueba la inyectividad de esta realización. En el caso real se omiten las conjugaciones.

Precisemos la uniformidad. La equivalencia entera utiliza las cotas de la métrica, de su inversa, de los coeficientes de conexión y de los cortes en las cartas mayores, junto con la multiplicidad de los traslapes. La estimación interna de potencias de la cadena de Bochner añade las cotas de los potenciales $\mathbf{V}_\ell$ y $\mathbf{W}_\ell$ de la cadena finita correspondiente al entero $m$. Esas cotas se expresan mediante las normas infinito de un número finito de derivadas de las curvaturas. La interpolación añade las constantes de las dos normas

extremas y las de las potencias imaginarias; estas últimas sólo dependen de $p$ y del rango. Para $s<0$ se usan los mismos datos con $a=-s$ y $p'$. Ninguno de estos pasos introduce una suma de constantes sobre todas las cartas: el conteo de traslapes se hace siempre con la misma cota uniforme. Esto da las constantes de (14.70). □

**Observación 14.5.7.** (Elección del operador cuando hay frontera) La hipótesis $\partial M=\varnothing$ en el teorema anterior es necesaria para identificar el operador sin imponer condiciones adicionales. En una variedad con frontera, el espacio localizado $H^{s,p}(M,\mathbf{E})$ se define mediante restricción en las cartas de frontera. Las potencias de una realización de Dirichlet o de Neumann incorporan las condiciones de esa realización. Por ejemplo, en el semiespacio y para el laplaciano escalar de Dirichlet en $L^2$,

$$\mathcal{D}(I+L_D)=H^{2,2}(\mathbb{R}^n_+)\cap H^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+),$$

mientras que la norma localizada de orden dos admite funciones de $H^{2,2}(\mathbb{R}^n_+)$ con traza no nula. Por eso, antes de comparar una escala del calor con los espacios de este capítulo en presencia de frontera, se debe fijar la realización y describir sus condiciones de traza.

**Teorema 14.5.8.** (Traza de secciones sobre una subvariedad) Sea $(M,N)$ un par de geometría acotada formado por variedades suaves sin frontera, donde $M$ tiene dimensión $n$ y $N$ dimensión $k$, $c=n-k$, y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial de geometría acotada. Si $1<p<\infty$ y $s>\frac{c}{p}$, la restricción de secciones suaves se extiende a una retracción

$$\mathbf{Tr}^{\mathbf{E}}_N\colon H^{s,p}(M,\mathbf{E})\longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(N,\mathbf{E}\restriction_N). \tag{14.71}$$

Además, para $1\le q\le\infty$, existen retracciones

$$\mathbf{Tr}^{\mathbf{E}}_N\colon F^{s}_{p,q}(M,\mathbf{E})\longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,p}(N,\mathbf{E}\restriction_N),\qquad \mathbf{Tr}^{\mathbf{E}}_N\colon B^{s}_{p,q}(M,\mathbf{E})\longrightarrow B^{s-\frac{c}{p}}_{p,q}(N,\mathbf{E}\restriction_N). \tag{14.72}$$

Cada operador tiene una extensión lineal continua por la derecha.

*Demostración.* En el marco de Fermi $\mathbf{e}_i$, escribimos $h_i\mathbf{u}=\sum_{a=1}^{r}u_i^a\mathbf{e}_{i,a}$ y aplicamos $\mathrm{tr}_c$ a cada componente. Por el inciso (c) del Lema 14.1.2, la estimación local es la suma finita de las estimaciones escalares del Teorema 14.1.1. En un traslape, (a) y (b) del mismo lema dan

$$\mathrm{tr}_c(G_{ij}u_j\circ\Phi_{ji})=(G_{ij}\restriction_{z=0})(\mathrm{tr}_c\,u_j)\circ(\Phi_{ji}\restriction_{z=0}). \tag{14.73}$$

Ésta es la ley de cambio de componentes de una sección de $\mathbf{E}\restriction_N$; por lo tanto las trazas locales definen un operador intrínseco. El conteo de traslapes de (14.26) prueba su continuidad.

Para construir la inversa por la derecha, escribimos localmente $h_i^N\mathbf{f}=\sum_{a=1}^{r}f_i^a\mathbf{e}_{i,a}\restriction_N$, aplicamos $\mathrm{ex}_c$ componente a componente y reconstruimos mediante

$$\mathbf{Ex}^{\mathbf{E}}_{M,N}\mathbf{f}=\sum_{i\in I_N}\sum_{a=1}^{r}h_i\left[\psi\,\mathrm{ex}_c\,f_i^a\right]\circ\kappa_i^{-1}\,\mathbf{e}_{i,a}. \tag{14.74}$$

Las cotas uniformes de las matrices de transición prueban la continuidad del mismo modo que (14.28). Al restringir, $\operatorname{tr}_c \operatorname{ex}_c = I$ y $\sum_{i\in I_N}(h_i^N)^2 = 1$, de modo que $\mathbf{Tr}_N^{\mathbf{E}}\mathbf{Ex}_{M,N}^{\mathbf{E}} = I$. En $F_{p,q}^s$ se usan las mismas fórmulas con las cotas euclidianas correspondientes y se suma en $\ell^p$ sobre las cartas. Para $q=\infty$ la fórmula local define el operador sobre todo el espacio y las compatibilidades se interpretan en distribuciones.

Para $B_{p,q}^s$ elegimos $s_0 < s < s_1$, con $s_0 > c/p$, y aplicamos los operadores comunes a los dos espacios $F_{p,p}^{s_i}(M,\mathbf{E})$. Interpolamos estos operadores, no las normas de cada carta por separado:

$$(F_{p,p}^{s_0}(M,\mathbf{E}), F_{p,p}^{s_1}(M,\mathbf{E}))_{\theta,q} = B_{p,q}^{s}(M,\mathbf{E}),$$
$$(B_{p,p}^{s_0-c/p}(N,\mathbf{E}|_N), B_{p,p}^{s_1-c/p}(N,\mathbf{E}|_N))_{\theta,q} = B_{p,q}^{s-c/p}(N,\mathbf{E}|_N).$$

La segunda igualdad se obtiene por reiteración de la escala $F_{p,p}$. Se conservan la continuidad y la identidad de retracción. En particular, no se identifica $B_{p,q}^s(M,\mathbf{E})$ con una suma $\ell^p$ de normas Besov locales cuando $q \neq p$. □

**Teorema 14.5.9.** (Traza de secciones en una variedad con frontera) Sea $M$ una variedad con frontera no vacía de geometría acotada y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial de geometría acotada. Si $j\in\mathbb{N}_0$, $1<p<\infty$ y $s > j+\frac{1}{p}$, denotemos por $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}$ el campo del collar determinado por $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_{\mathcal{C}(x,t)} = \partial_t\mathcal{C}(x,t)$. Entonces

$$\mathbf{Tr}_{\partial M,j}^{\mathbf{E}}\mathbf{u} := \big(\mathbf{u}\restriction_{\partial M}, \nabla_{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}}^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\restriction_{\partial M}, \dots, (\nabla_{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}}^{\mathbf{E}})^j\mathbf{u}\restriction_{\partial M}\big) \tag{14.75}$$

se extiende a una retracción

$$\mathbf{Tr}_{\partial M,j}^{\mathbf{E}}\colon H^{s,p}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \prod_{\ell=0}^{j} B_{p,p}^{s-\ell-\frac{1}{p}}(\partial M, \mathbf{E}\restriction_{\partial M}). \tag{14.76}$$

Para $j=0$ y $1\le q\le\infty$ se obtienen también las retracciones

$$\mathbf{Tr}_{\partial M,0}^{\mathbf{E}}\colon F_{p,q}^s(M,\mathbf{E}) \longrightarrow B_{p,p}^{s-\frac{1}{p}}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M}), \qquad \mathbf{Tr}_{\partial M,0}^{\mathbf{E}}\colon B_{p,q}^s(M,\mathbf{E}) \longrightarrow B_{p,q}^{s-\frac{1}{p}}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M}). \tag{14.77}$$

Todos estos operadores poseen inversas lineales continuas por la derecha.

*Demostración.* Elegimos los marcos del inciso (c) de la Proposición 14.5.1. Por (14.53), si $\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u_i^a \mathbf{e}_{i,a}$, entonces

$$(\nabla_{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}}^{\mathbf{E}})^\ell \mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} (\partial_t^\ell u_i^a)\mathbf{e}_{i,a} \quad \text{en la carta de frontera.} \tag{14.78}$$

En un traslape de dos marcos de este tipo, la ecuación de cambio de conexión da $\partial_t G_{ij} = 0$, porque las dos matrices normales de conexión son nulas. Las componentes de los jets se transforman, por consiguiente, mediante $G_{ij}|_{t=0}$ sin términos de orden inferior. Además, los cortes $h_i$ son constantes en $t$ cerca de la frontera por (14.31); por lo tanto no aparecen términos de Leibniz al localizar los jets. Aplicar componente a componente la retracción $\boldsymbol{\gamma}_j$ del Teorema 14.4.17, sumar los traslapes y usar las cotas de las matrices

$G_{ij}\restriction_{\partial M}$ produce

$$\sum_{\ell=0}^{j} \|(\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}})^{\ell}\mathbf{u}\restriction_{\partial M}\|_{B^{s-\ell-\frac{1}{p}}_{p,p}(\partial M,\mathbf{E}\restriction_{\partial M})} \le C\|\mathbf{u}\|_{H^{s,p}(M,\mathbf{E})}.$$

La corretracción se obtiene aplicando $\boldsymbol{e}_j$ a los vectores de componentes de los datos, multiplicando por el corte fijo $\psi$ y sumando con los factores $h_i$ mediante la fórmula (14.52). El corte $\psi$ vale uno en la zona donde se calculan los jets y hace que cada sumando pueda prolongarse por cero fuera de su carta. Las identidades (14.78), $\boldsymbol{\gamma}_j\boldsymbol{e}_j = I$ y $\sum_{i\in I_\partial}(h_i^\partial)^2 = 1$ demuestran que el jet de la extensión es el dato prescrito. Las estimaciones de continuidad son las escalares sumadas sobre un número finito de componentes y una cubierta de multiplicidad uniforme. Para $j=0$, la estimación en $F^s_{p,q}$ se obtiene directamente de la traza euclidiana y del mismo conteo en $\ell^p$. La fórmula sigue siendo válida para $q=\infty$ por la interpretación distribucional de la traza. Para Besov fijamos $s_0 < s < s_1$ con $s_0 > 1/p$ e interpolamos los mismos operadores entre los espacios globales $F^{s_i}_{p,p}(M,\mathbf{E})$ y $B^{s_i-1/p}_{p,p}(\partial M,\mathbf{E}|_{\partial M})$. La definición de Besov y la reiteración, exactamente como en el teorema anterior, dan (14.77) sin intercambiar una suma $\ell^p$ de cartas con el índice fino $q$. La independencia de los marcos se sigue de la Proposición 14.5.3 y de (14.73). □

**Observación 14.5.10.** (Trazas covariantes y jets normales) La traza covariante completa $\mathbf{Tr}_\ell\mathbf{u} = ((\nabla^{\mathbf{E}})^\ell\mathbf{u})\restriction_{\partial M}$ toma valores en $\big(T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E}\big)\restriction_{\partial M}$. Escribamos $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}$ para el campo normal unitario prolongado por las geodésicas del collar. Como $\nabla^M_{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}}\widetilde{\boldsymbol{\nu}} = 0$, la regla de derivación de tensores del Capítulo 9 da, para $\ell\in\mathbb{N}_0$,

$$(\nabla^{\ell+1}\mathbf{u})(\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^{\otimes(\ell+1)}) = \nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}}\big((\nabla^\ell\mathbf{u})(\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^{\otimes\ell})\big) - \sum_{a=1}^{\ell}(\nabla^\ell\mathbf{u})(\widetilde{\boldsymbol{\nu}},\dots,\underbrace{\nabla^M_{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}}\widetilde{\boldsymbol{\nu}}}_{\text{posición } a},\dots,\widetilde{\boldsymbol{\nu}}).$$

La suma es cero. El caso $\ell=0$ es la definición de $\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}}\mathbf{u}$; si la contracción de orden $\ell$ coincide con la derivada normal iterada, la igualdad anterior prueba lo mismo en orden $\ell+1$. Por tanto,

$$(\nabla^\ell\mathbf{u})(\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^{\otimes\ell}) = (\nabla^{\mathbf{E}}_{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}})^\ell\mathbf{u}, \qquad \ell\in\mathbb{N}_0.$$

El jet normal es, pues, la contracción de la traza completa con $\boldsymbol{\nu}^{\otimes\ell}$.

Precisamos la afirmación recíproca. Si $\mathbf{S}$ es un campo tensorial covariante con valores en $\mathbf{E}$, las conexiones inducidas satisfacen

$$\begin{aligned}\big[(\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]})\mathbf{S}\big](\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{V}_r)&\\ = \mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\big(\mathbf{S}(\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{V}_r)\big)&\\ - \sum_{a=1}^{r}\mathbf{S}(\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{R}^M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{V}_a,\dots,\mathbf{V}_r).&\end{aligned} \tag{14.79}$$

Esta identidad resulta directamente de las definiciones de las conexiones inducidas y de $\mathbf{R}^M, \mathbf{R}^{\mathbf{E}}$. Además, para $\mathbf{X}$ tangente a la frontera, las fórmulas de Gauss y Weingarten de la Proposición 2.11.3 dan

$$\nabla^M_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla^{\partial M}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \mathbf{II}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \qquad \nabla^M_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{X}.$$

Supongamos ahora que los jets normales de órdenes $\ell\in\{0,\dots,m-1\}$ se anulan. En orden cero esto dice que $\mathbf{u}\restriction_{\partial M} = 0$. Sea $\ell\in\{1,\dots,m-1\}$ y supongamos nulas todas las trazas covariantes de órdenes menores que $\ell$. La

componente de $\nabla^{\ell}\mathbf{u}$ con todos sus argumentos normales es cero por la identidad anterior. En cualquier otra componente elegimos un argumento tangencial $\mathbf{X}$ y lo llevamos a la primera posición mediante un número finito de transposiciones adyacentes.

Para cada transposición se aplica (14.79) al tensor de orden inferior correspondiente. Las derivadas exteriores se distribuyen sobre sus productos mediante la Proposición 9.1.40. Los términos que se añaden son contracciones de la forma

$$\nabla^{a}\mathbf{R}^{M} * \nabla^{\ell-2-a}\mathbf{u} \quad \text{o} \quad \nabla^{a}\mathbf{R}^{\mathbf{E}} * \nabla^{\ell-2-a}\mathbf{u}, \qquad a \in \{0,\dots,\ell-2\}.$$

Para $\ell = 1$ no hay transposiciones ni términos de curvatura. Para $\ell \geq 2$, todos los factores que contienen a $\mathbf{u}$ tienen orden menor que $\ell$ y su traza es cero por la hipótesis inductiva. La componente que queda tiene la derivada tangencial en primer lugar. Al evaluar la derivada de ese tensor, obtenemos la derivada tangencial de una traza de orden $\ell-1$ y los términos que derivan sus argumentos. La primera es cero; los otros, descritos por Gauss y Weingarten, son componentes de la misma traza de orden $\ell-1$, también nulas. Se anulan así todas las componentes en orden $\ell$ y se completa la inducción hasta $m-1$. La implicación opuesta se obtiene contrayendo cada traza completa con $\boldsymbol{\nu}^{\otimes\ell}$.

Para pasar a $\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E})$, con $1 \leq p < \infty$, observemos primero que el Teorema 3.7.1, aplicado a las componentes de $\nabla^{\ell}\mathbf{u}$ en los modelos de frontera, y la comparación (14.59) dan, poniendo $\mathbf{E}_{\ell} := T^{(0,\ell)}(TM) \otimes \mathbf{E}$,

$$\|\mathbf{Tr}_{\ell}\mathbf{u}\|_{L^{p}(\partial M,\mathbf{E}_{\ell}|_{\partial M})} \leq C_{m,p}\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}, \qquad 0 \leq \ell < m. \tag{14.80}$$

En efecto, cada tensor $\nabla^{\ell}\mathbf{u}$ pertenece a $W^{1,p}$, las cartas y cortes tienen cotas uniformes y la suma de las potencias $p$ de las estimaciones locales se controla por la multiplicidad de la cubierta. La constante depende de $m,p$, de la dimensión y el rango, y de las cotas uniformes de la geometría, los marcos y los cortes hasta los órdenes utilizados; no depende de la sección. Este argumento incluye $p=1$ y, en dimensión uno, la medida de conteo en la frontera. Al contraer con $\boldsymbol{\nu}^{\otimes\ell}$ se obtienen jets normales continuos con valores en $L^{p}(\partial M,\mathbf{E}|_{\partial M})$. Para $p>1$ coinciden con los jets de Besov ya construidos, porque coinciden sobre secciones suaves y ambos operadores son continuos.

Se aproximan ahora las localizaciones de $\mathbf{u}$ por secciones suaves hasta la frontera. No es necesario que las aproximaciones tengan jets nulos. Las identidades de conmutación y de derivación tangencial se escriben antes de imponer esa condición; cada miembro es una combinación finita de derivadas tangenciales de trazas y de multiplicaciones por coeficientes uniformemente suaves. Las trazas son continuas en los espacios $L^{p}$ de (14.80) y las derivadas tangenciales son continuas en distribuciones. Por ello las identidades pasan al límite, y la inducción anterior se aplica después a los jets de $\mathbf{u}$. Así, la anulación de los jets normales de órdenes menores que $m$ equivale a la anulación de todas las trazas covariantes de esos órdenes.

Esta equivalencia describe las condiciones de frontera. Para identificar $W_{0}^{m,p}$ falta comprobar que tampoco aparece una obstrucción de aproximación en el infinito. La sumabilidad de las localizaciones y los cortes uniformes permiten reducir también esta cuestión al semiespacio.

**Teorema 14.5.11.** (Caracterización de $W_{0}^{m,p}$ en geometría acotada) Sea $M$ una variedad de geometría acotada con frontera no vacía y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial de geometría acotada, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$; en el caso complejo la métrica es hermitiana. Si $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$,

entonces

$$W_0^{m,p}(M,\mathbf{E}) = \ker \mathbf{Tr}^{\mathbf{E}}_{\partial M, m-1} = \{\mathbf{u} \in W^{m,p}(M,\mathbf{E}) \mid \mathbf{Tr}_\ell \mathbf{u} = 0,\ 0 \le \ell < m\}.$$

Aquí $W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})$ es la cerradura, en la norma $W^{m,p}$, de las secciones suaves cuyo soporte es un compacto contenido en $\operatorname{Int} M$. Para $p = 1$, las trazas y los jets se interpretan mediante los operadores con valores en $L^1$ de la observación anterior; no se requiere una identificación con la escala de Bessel.

*Demostración.* Las secciones suaves con soporte compacto en el interior tienen todas sus trazas nulas. La continuidad del operador de jets obtenida en (14.80) prueba la inclusión de $W_0^{m,p}$ en el núcleo. La última igualdad del enunciado es la observación anterior. Basta, por tanto, demostrar que una sección $\mathbf{u}$ con todos sus jets normales de órdenes menores que $m$ nulos pertenece a $W_0^{m,p}$.

Tomemos la partición cuadrática $(h_i)$ y los marcos paralelos normales empleados en el teorema de traza. Escribamos $h_i\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}} v_i^a \mathbf{e}_{i,a}$ y prolonguemos cada $v_i^a \circ \varphi_i^{-1}$ por cero a través de las caras artificiales de la carta. En una carta de frontera se obtiene una función de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ con soporte acotado. Como el corte es constante en la variable normal cerca de la frontera y el marco es paralelo en esa dirección, sus trazas satisfacen

$$\gamma_0 \partial_t^\ell (v_i^a \circ \varphi_i^{-1}) = 0, \qquad 0 \le \ell < m.$$

La traza conmuta con las derivadas tangenciales: la identidad se prueba para funciones suaves y pasa al límite en distribuciones por la continuidad de las trazas. En consecuencia, también $\gamma_0 D^\beta (v_i^a \circ \varphi_i^{-1}) = 0$ para todo $|\beta| \le m-1$.

El criterio del semiespacio del Teorema 3.7.1 implica que cada componente pertenece a $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Podemos aproximarla en $W^{m,p}$ por funciones de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Multiplicamos esas aproximaciones por un corte fijo igual a uno sobre el soporte de la componente y sostenido dentro de las caras artificiales de la carta. Esta multiplicación conserva la convergencia y hace posible reconstruir las funciones en $M$. Cada aproximación reconstruida tiene soporte compacto en el interior. En las cartas interiores se procede de igual manera mediante regularización euclidiana. La equivalencia local de normas y la finitud del rango muestran así que $h_i\mathbf{u} \in W_0^{m,p}(M,\mathbf{E})$ para cada $i$.

Para reunir las aproximaciones, agotemos el conjunto numerable de índices por conjuntos finitos $I_J$ y definamos

$$\mathbf{u}_J := \sum_{i \in I_J} h_i (h_i \mathbf{u}).$$

Cada sumando pertenece a $W_0^{m,p}$, porque la multiplicación por $h_i$ es continua y conserva el soporte interior de las aproximaciones. Por la estimación de síntesis y la equivalencia entera de normas,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_J\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})} \le C \left( \sum_{i \in I \setminus I_J} \sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}} \|v_i^a \circ \varphi_i^{-1}\|^p_{W^{m,p}(\mathbb{X}_i)} \right)^{1/p} \longrightarrow 0.$$

El miembro derecho es la cola de una serie convergente. Como $W_0^{m,p}$ es cerrado, se sigue que $\mathbf{u} \in W_0^{m,p}$. Esta prueba no utiliza la compacidad de $M$. $\square$

## 14.6 Encajes de Sobolev en geometría acotada

Sin frontera, el Corolario 13.3.12 permite formular la transferencia local mediante un atlas uniformemente regular, con constantes $c_{s,p}, C_{s,p}, D_{s,p}$. Con frontera, el Corolario 14.4.12 da el par análisis–síntesis sobre los modelos mixtos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n_+$, con constantes $c^{\partial}_{s,p}, C^{\partial}_{s,p}, D^{\partial}_{s,p}$. Los argumentos de esta sección conservan el sistema cuadrático de localización admisible fijado al definir los espacios globales —con cartas geodésicas si no hay frontera y con cartas geodésicas y de Fermi si la frontera es no vacía—, porque incorpora simultáneamente los marcos de los haces y el control de la cara de borde. El lenguaje de Amann proporciona así un puente funcional, sin reemplazar las estimaciones covariantes ya establecidas.

En una variedad compacta, las estimaciones locales de Sobolev se reúnen mediante una cubierta finita. En una variedad no compacta la finitud debe sustituirse por tres controles uniformes: las cartas tienen un modelo y un radio comunes, las constantes de los operadores locales no dependen de la carta y la cubierta tiene multiplicidad acotada. La suma exterior que define los espacios globales conserva además el exponente espacial. Por esta razón, al aumentar el exponente de integrabilidad de $p_0$ a $p_1$ aparece la inclusión $\ell^{p_0} \hookrightarrow \ell^{p_1}$ y se requiere $p_0 \le p_1$. Esta restricción no aparece sobre una variedad compacta, cuya medida es finita.

**Lema 14.6.1.** (Transferencia uniforme de un encaje local) Sea $M$ una variedad riemanniana de geometría acotada con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Sean $1 < p_0 \le p_1 < \infty$ y, para $\nu \in \{0,1\}$, sea $A_\nu(\mathbb{R}^n)$ uno de los espacios

$$H^{s_\nu,p_\nu}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{o} \qquad F^{s_\nu}_{p_\nu,q_\nu}(\mathbb{R}^n),$$

con $1 \le q_\nu \le \infty$ en el segundo caso. Supongamos que la inclusión identidad satisface

$$\|v\|_{A_1(\mathbb{R}^n)} \le C_{\mathrm{euc}} \|v\|_{A_0(\mathbb{R}^n)}. \tag{14.81}$$

Entonces se tiene el encaje continuo correspondiente

$$A_0(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow A_1(M,\mathbf{E}).$$

La constante global depende de $C_{\mathrm{euc}}$, del rango de $\mathbf{E}$ y de las constantes $c_A, C_A$ de la Proposición 14.5.3, pero no de la sección.

*Demostración.* Comenzamos por el modelo de frontera. Los espacios sobre $\mathbb{R}^n_+$ llevan la norma cociente de restricción. Si $v \in A_0(\mathbb{R}^n_+)$ y $V \in A_0(\mathbb{R}^n)$ es una extensión de $v$, entonces

$$\|v\|_{A_1(\mathbb{R}^n_+)} \le \|V\|_{A_1(\mathbb{R}^n)} \le C_{\mathrm{euc}} \|V\|_{A_0(\mathbb{R}^n)}.$$

Tomar el ínfimo sobre todas las extensiones prueba

$$\|v\|_{A_1(\mathbb{R}^n_+)} \le C_{\mathrm{euc}} \|v\|_{A_0(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{14.82}$$

La constante es la misma que en el espacio completo.

Fijemos ahora un sistema cuadrático de localización admisible $\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i \in I}$ y los marcos síncronos

usados en la Definición 14.5.2. Si $\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u_i^a \mathbf{e}_{i,a}$ en $U_i$, pongamos

$$a_{i,a} := \|(h_i u_i^a) \circ \varphi_i^{-1}\|_{A_0(\mathbb{X}_i)}, \qquad b_{i,a} := \|(h_i u_i^a) \circ \varphi_i^{-1}\|_{A_1(\mathbb{X}_i)}.$$

La estimación (14.81), o bien (14.82), da $b_{i,a} \le C_{\mathrm{euc}} a_{i,a}$ con la misma constante para todos los índices. Como $p_0 \le p_1$, la inclusión elemental $\ell^{p_0}(I \times \{1,\dots,r\}) \hookrightarrow \ell^{p_1}(I \times \{1,\dots,r\})$ proporciona

$$\|\mathbf{u}\|_{A_1(M,\mathbf{E})} = \left( \sum_{i \in I} \sum_{a=1}^{r} b_{i,a}^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \le C_{\mathrm{euc}} \left( \sum_{i \in I} \sum_{a=1}^{r} a_{i,a}^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \le C_{\mathrm{euc}} \left( \sum_{i \in I} \sum_{a=1}^{r} a_{i,a}^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} = C_{\mathrm{euc}} \|\mathbf{u}\|_{A_0(M,\mathbf{E})}.$$

Esta cuenta se ha efectuado en un sistema fijo. Su carácter intrínseco procede de la Proposición 14.5.3. Recordemos dónde intervienen allí las hipótesis geométricas. En un traslape se inserta la partición cuadrática, cada componente se multiplica por un corte auxiliar igual a uno en el soporte que se transporta y se compone con el cambio de coordenadas. Las cotas uniformes de las derivadas de los cortes, de las matrices de transición y de los cambios de coordenadas controlan los multiplicadores y las composiciones; las cotas de los jacobianos comparan las medidas. Finalmente, la multiplicidad uniforme limita tanto el número de sumandos que llegan a una carta como el número de veces que una localización aparece en la suma global. Por ello $c_A$ y $C_A$ tampoco dependen de $i$. □

**Teorema 14.6.2.** (Encajes entre las escalas de orden real) Sea $M$ una variedad riemanniana de dimensión $n$, de geometría acotada y con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Sean $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ y $1 < p_0 \le p_1 < \infty$.

(a) Si

$$s_0 - \frac{n}{p_0} > s_1 - \frac{n}{p_1}, \tag{14.83}$$

entonces, para cualesquiera $1 \le q_0, q_1 \le \infty$,

$$F^{s_0}_{p_0,q_0}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow F^{s_1}_{p_1,q_1}(M,\mathbf{E})$$

y

$$B^{s_0}_{p_0,q_0}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,q_1}(M,\mathbf{E}).$$

(b) Si

$$s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1} \tag{14.84}$$

y $1 \le q_0 \le q_1 \le \infty$, entonces se tienen los mismos encajes en las escalas $F$ y $B$.

(c) Si

$$s_0 - \frac{n}{p_0} \ge s_1 - \frac{n}{p_1},$$

entonces

$$H^{s_0,p_0}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow H^{s_1,p_1}(M,\mathbf{E}).$$

Todos los encajes son válidos tanto sin frontera como con frontera.

*Demostración.* Supongamos primero (14.84). El inciso (a) del Teorema 6.6.1, aplicado con índice fino $q_0$, da

$$F^{s_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{s_1}_{p_1,q_0}(\mathbb{R}^n).$$

El inciso (c) del mismo teorema y $q_0 \le q_1$ dan después

$$F^{s_1}_{p_1,q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n).$$

El Lema 14.6.1 transporta la composición a $M$.
Si vale (14.83), definimos

$$\sigma_1 := s_0 - \frac{n}{p_0} + \frac{n}{p_1}.$$

Entonces $\sigma_1 > s_1$. La parte ya probada, con el mismo índice fino $q_0$, y el inciso (b) del Teorema 6.6.1 producen

$$F^{s_0}_{p_0,q_0}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow F^{\sigma_1}_{p_1,q_0}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow F^{s_1}_{p_1,q_1}(M,\mathbf{E}).$$

Esto prueba las afirmaciones para la escala de Triebel–Lizorkin. Tomar $q_0 = q_1 = 2$ y usar la identificación euclidiana $H^{s,p} = F^s_{p,2}$ del Teorema 6.3.10, sumada en las cartas como en la prueba del lema, demuestra el inciso (c).
Pasemos a Besov. En el caso de igualdad de los índices elegimos $\delta > 0$. La parte $F$ ya demostrada, aplicada en los dos extremos, da los operadores continuos

$$F^{s_0-\delta}_{p_0,p_0}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow F^{s_1-\delta}_{p_1,p_1}(M,\mathbf{E}), \qquad F^{s_0+\delta}_{p_0,p_0}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow F^{s_1+\delta}_{p_1,p_1}(M,\mathbf{E}),$$

pues $p_0 \le p_1$ es también la desigualdad entre los índices finos de estos pares. Interpolamos la identidad mediante el Teorema 5.3.1. La definición de la escala Besov da

$$B^{s_0}_{p_0,q_0}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,q_0}(M,\mathbf{E}).$$

La monotonía del segundo índice para el método real, Corolario 5.2.6, permite sustituir $q_0$ por $q_1 \ge q_0$ en el espacio de llegada. Si los índices diferenciales satisfacen la desigualdad estricta, factorizamos otra vez a través de $B^{\sigma_1}_{p_1,q_0}(M,\mathbf{E})$. Fijemos $a < s_1 < \sigma_1 < b$ y escribamos, usando el Teorema 5.5.2 para la independencia de los extremos auxiliares en la definición de la escala,

$$B^{\sigma_1}_{p_1,q_0}(M,\mathbf{E}) = (X_0,X_1)_{\theta_\sigma,q_0}, \qquad B^{s_1}_{p_1,q_1}(M,\mathbf{E}) = (X_0,X_1)_{\theta_s,q_1},$$

donde $X_0 = F^a_{p_1,p_1}(M,\mathbf{E})$, $X_1 = F^b_{p_1,p_1}(M,\mathbf{E})$ y $0 < \theta_s < \theta_\sigma < 1$. La parte $F$ ya probada da $X_1 \hookrightarrow X_0$. El Lema 5.2.5, separando los índices diádicos positivos de los negativos, muestra que

$$(X_0,X_1)_{\theta_\sigma,q_0} \hookrightarrow (X_0,X_1)_{\theta_s,q_1}$$

para cualesquiera $q_0, q_1$: en la cola correspondiente a $t \le 1$ aparece el factor geométrico $t^{\theta_\sigma-\theta_s}$, mientras que en $t \ge 1$ se usa la cota de la norma de $X_0$ por la norma de interpolación, demostrada junto con la completitud del método $K$. Esto concluye la prueba. □

**Corolario 14.6.3.** (Encajes de Sobolev de orden entero) Sea $M$ una variedad riemanniana de dimensión $n$, de geometría acotada y con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Sean $m_0, m_1 \in \mathbb{N}_0$ y $1 < p_0 \le p_1 < \infty$. Si

$$m_0 - \frac{n}{p_0} \ge m_1 - \frac{n}{p_1},$$

entonces

$$W^{m_0,p_0}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow W^{m_1,p_1}(M,\mathbf{E}). \tag{14.85}$$

En particular, sean $j \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ y $1 < p < \infty$.

(a) Si $mp < n$ y $p_m^* := \frac{np}{n-mp}$, entonces

$$W^{j+m,p}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow W^{j,q}(M,\mathbf{E}) \qquad \text{para } p \le q \le p_m^*.$$

(b) Si $mp = n$, el mismo encaje vale para todo $p \le q < \infty$.

(c) Si $mp > n$, el mismo encaje vale para todo $p \le q < \infty$.

*Demostración.* La Proposición 14.5.3 identifica $H^{m_\nu,p_\nu}(M,\mathbf{E})$ con $W^{m_\nu,p_\nu}(M,\mathbf{E})$ y proporciona constantes $c_{m_\nu,p_\nu}, C_{m_\nu,p_\nu} > 0$ tales que, para todo $\mathbf{u} \in W^{m_\nu,p_\nu}(M,\mathbf{E})$ y $\nu \in \{0,1\}$,

$$c_{m_\nu,p_\nu}\|\mathbf{u}\|_{W^{m_\nu,p_\nu}(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{u}\|_{H^{m_\nu,p_\nu}(M,\mathbf{E})} \le C_{m_\nu,p_\nu}\|\mathbf{u}\|_{W^{m_\nu,p_\nu}(M,\mathbf{E})}.$$

Por lo tanto, (14.85) es el inciso (c) del Teorema 14.6.2. Las tres afirmaciones restantes resultan al escribir

$$j + m - \frac{n}{p} \ge j - \frac{n}{q}.$$

En el caso subcrítico esta desigualdad equivale a $q \le p_m^*$; en los casos crítico y supercrítico vale para todo exponente finito $q \ge p$. □

**Corolario 14.6.4.** (Casos subcrítico y crítico) Sea $M$ una variedad riemanniana de dimensión $n$, de geometría acotada y con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Sean $s > 0$ y $1 < p < \infty$.

(a) Si $sp < n$ y $p_s^* := \frac{np}{n-sp}$, entonces

$$H^{s,p}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow L^q(M,\mathbf{E}) \qquad \text{para } p \le q \le p_s^*.$$

(b) Si $sp = n$, entonces

$$H^{s,p}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow L^q(M,\mathbf{E}) \qquad \text{para todo } p \le q < \infty.$$

*Demostración.* Aplicamos el inciso (c) del Teorema 14.6.2 con $s_1 = 0$ y $p_1 = q$. La Proposición 14.5.3, en orden cero, identifica $H^{0,q}(M,\mathbf{E})$ con $L^q(M,\mathbf{E})$. Si $sp < n$, la condición sobre los índices es equivalente a $q \le p_s^*$; si $sp = n$, es estricta para todo $q < \infty$. □

Para tratar el caso supercrítico necesitamos una formulación uniforme de las secciones de Hölder. En ausencia de frontera ya se dispone de la norma intrínseca de la Definición 9.2.6. Cerca de la frontera usaremos la formula-

ción localizada de la Definición 9.4.32, sustituyendo la suma finita por un supremo uniforme.

**Definición 14.6.5.** (Secciones de Hölder uniformes hasta la frontera) Sea $M$ una variedad riemanniana con o sin frontera, de geometría acotada, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha \leq 1$. Fijemos un sistema cuadrático de localización admisible $\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i\in I}$ y los marcos síncronos $\mathbf{e}_i$. Denotemos por $\mathbf{\Omega}_i := \varphi_i(U_i)$ el dominio coordenado acotado; en una carta de frontera está contenido en $\mathbb{R}^n_+$. Si

$$h_i\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u_i^a \mathbf{e}_{i,a},$$

ponemos

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{E})} := \sup_{i\in I} \sum_{a=1}^{r} \|u_i^a \circ \varphi_i^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\mathbf{\Omega}_i})}. \tag{14.86}$$

Aquí se usa la norma de extensión de $C^{k,\alpha}(\overline{\mathbf{\Omega}_i})$ de la Definición 3.5.1. Definimos $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ como el espacio de las secciones de clase $C^k$ hasta la frontera para las cuales (14.86) es finita.

**Proposición 14.6.6.** (Independencia y caracterización de la norma de Hölder uniforme) Sea $M$ una variedad riemanniana de geometría acotada con o sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Si $\mathcal{Q}$ y $\widetilde{\mathcal{Q}}$ son dos sistemas cuadráticos de localización admisibles, provistos de marcos síncronos, existen $c_{\mathcal{Q},\widetilde{\mathcal{Q}}}, C_{\mathcal{Q},\widetilde{\mathcal{Q}}} > 0$, independientes de $\mathbf{u}$, tales que

$$c_{\mathcal{Q},\widetilde{\mathcal{Q}}} \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\widetilde{\mathcal{Q}}}(\mathbf{E})} \leq C_{\mathcal{Q},\widetilde{\mathcal{Q}}} \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{E})}.$$

Las constantes dependen de $k, \alpha$, de la multiplicidad y de las cotas uniformes de cambios, cortes y marcos, pero no de los índices de las cartas. Si $M$ no tiene frontera, existen $c_{\mathrm{int}}, C_{\mathrm{int}} > 0$ tales que

$$c_{\mathrm{int}} \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{E})} \leq C_{\mathrm{int}} \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})},$$

donde la primera norma es la intrínseca de (9.48). Si $M$ es compacta con frontera y $\mathcal{A}$ son los datos finitos de la Definición 9.4.32, existen $c_\partial, C_\partial > 0$ tales que

$$c_\partial \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{A}}(\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{E})} \leq C_\partial \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{A}}(\mathbf{E})}.$$

*Demostración.* Sean $\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i)_{i\in I}$ y $\widetilde{\mathcal{Q}} = (\widetilde{U}_j, \widetilde{\varphi}_j, \widetilde{h}_j)_{j\in J}$ dos sistemas cuadráticos de localización admisibles, provistos de los marcos síncronos $\mathbf{e}_i$ y $\widetilde{\mathbf{e}}_j$. Insertamos $\sum_{i\in I} h_i^2 = 1$ en cada localización del segundo sistema:

$$\widetilde{h}_j\mathbf{u} = \sum_{\substack{i\in I \\ U_i \cap \widetilde{U}_j \neq \varnothing}} \widetilde{h}_j h_i (h_i \mathbf{u}). \tag{14.87}$$

Hay a lo más $L$ sumandos, con $L$ independiente de $j$. En un traslape, la componente en el marco $\widetilde{\mathbf{e}}_j$ de cada sumando se obtiene de una componente de $h_i\mathbf{u}$ mediante tres operaciones: composición con el cambio de coordenadas, multiplicación por una entrada de la matriz de transición de los marcos y multiplicación por los dos cortes. Insertamos además las funciones de corte auxiliares, iguales a uno en los soportes que aparecen, para que todas las expresiones tengan soporte compacto en el dominio exacto del cambio de

coordenadas.

La Proposición 14.4.5 y la Proposición 14.5.1 acotan, uniformemente en $i, j$, las derivadas de los cambios de coordenadas, de sus inversos, de los cortes y de las matrices de transición. La fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19 y la regla de Leibniz dan entonces, para cada componente local $f$, si $D_{ij}$ es el dominio coordenado exacto del término considerado y $D_i := \Phi_{ij}(D_{ij})$,

$$\|b_{ij}(f \circ \Phi_{ij})\|_{C^{k,\alpha}(\overline{D_{ij}})} \le C_{k,\alpha}\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{D_i})}, \tag{14.88}$$

donde $b_{ij}$ contiene los multiplicadores anteriores y $\Phi_{ij}$ es el cambio de coordenadas. Para la seminorma de orden $k$ se usa

$$[fg]_{C^{0,\alpha}(\overline{D_{ij}})} \le \|f\|_{C^0(\overline{D_{ij}})}[g]_{C^{0,\alpha}(\overline{D_{ij}})} + \|g\|_{C^0(\overline{D_{ij}})}[f]_{C^{0,\alpha}(\overline{D_{ij}})}$$

y la cota Lipschitz uniforme de $\Phi_{ij}$ en el soporte del corte. En cartas de frontera, los cambios y los multiplicadores se prolongan a vecindades euclidianas de los compactos correspondientes; por ello (14.88) desciende a las normas de extensión al tomar el ínfimo sobre las extensiones.

Aplicamos (14.88) a (14.87), sumamos sobre las $r$ componentes y usamos que hay a lo más $L$ términos. Resulta

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\widetilde{\mathcal{Q}}}(\mathbf{E})} \le LC_{k,\alpha}\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{E})}.$$

Intercambiar los dos sistemas prueba la independencia.

Supongamos ahora que $M$ no tiene frontera. La prueba de la Proposición 9.2.11, aplicada en las cartas geodésicas y los marcos síncronos, tiene constantes uniformes: sólo dependen de las constantes $c_g, C_g$ de las desigualdades métricas uniformes, de las cotas de los coeficientes de conexión y de las derivadas de los cortes, todas ellas independientes de la carta. Esto da

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{E})} \le C\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})}.$$

Para la desigualdad opuesta usamos $\mathbf{u} = \sum_{i\in I} h_i(h_i\mathbf{u})$. Cada sección $h_i(h_i\mathbf{u})$ se prolonga por cero fuera de $U_i$ y su norma intrínseca de Hölder está acotada por el miembro derecho de (14.86), con una constante uniforme. En un punto intervienen a lo más $L$ sumandos. Al comparar dos puntos intervienen a lo más los índices que no se anulan en uno de ellos, es decir, a lo más $2L$ sumandos. La desigualdad triangular para el transporte paralelo controla entonces la seminorma de Hölder, mientras que la regla de Leibniz controla las normas uniformes de las derivadas. Por lo tanto,

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \le C'\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{E})}.$$

Si $M$ es compacta con frontera y el conjunto de índices tiene $N$ elementos, la norma máximo y la suma de las normas locales satisfacen

$$\max_{i\in\{1,\dots,N\}} a_i \le \sum_{i=1}^{N} a_i \le N \max_{i\in\{1,\dots,N\}} a_i, \qquad a_i \ge 0.$$

La independencia ya probada permite escoger los mismos datos en ambas definiciones. □

**Teorema 14.6.7.** (Encajes de Sobolev–Morrey en geometría acotada) Sea $M$ una variedad riemanniana de dimensión $n$, de geometría acotada y con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Sean $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \alpha < 1$.

(a) Si $s > 0$ y
$$k + \alpha < s - \frac{n}{p},$$
entonces
$$H^{s,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E}).$$

(b) Si $m \in \mathbb{N}$ y
$$k + \alpha \leq m - \frac{n}{p}, \tag{14.89}$$
entonces
$$W^{m,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E}).$$

(c) Si $0 < s < 1$, $sp > n$ y $\alpha = s - \frac{n}{p}$, entonces
$$B^{s}_{p,p}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow \Gamma^{0,\alpha}(\mathbf{E}).$$

En cada caso, los elementos del espacio de partida poseen un representante único en el espacio de llegada. Si $M$ tiene frontera, la restricción del representante del inciso (b) coincide con la traza de la sección.

*Demostración.* Fijemos el sistema cuadrático de localización y los marcos síncronos de la proposición anterior. Para una sección $\mathbf{u}$ del espacio de partida escribimos
$$h_i \mathbf{u} = \sum_{a=1}^{r} u_i^a \mathbf{e}_{i,a}, \qquad f_i^a := u_i^a \circ \varphi_i^{-1}.$$
Así, $f_i^a$ es la $a$-ésima componente de la sección ya localizada $h_i\mathbf{u}$; no se introduce un segundo factor $h_i$. En una carta interior, el Teorema 6.6.3 da, bajo la hipótesis estricta del inciso (a),
$$\|f_i^a\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\mathbf{\Omega}_i})} \leq C \|f_i^a\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{14.90}$$
La constante sólo depende de $n, s, p, k, \alpha$. En una carta de frontera, elegimos una extensión $F_i^a \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ de $f_i^a \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n_+)$. El mismo teorema controla la norma de Hölder de $F_i^a$; al restringir a $\overline{\mathbf{\Omega}_i}$ y tomar el ínfimo sobre las extensiones obtenemos (14.90) con la norma cociente en el miembro derecho. Por la Proposición 14.6.6,
$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} &\leq C \sup_{\substack{i \in I \\ a \in \{1,\dots,r_{\mathbf{E}}\}}} \|f_i^a\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\mathbf{\Omega}_i})} \\ &\leq C' \left( \sum_{i \in I} \sum_{a=1}^{r} \|f_i^a\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{X}_i)} \right)^{\frac{1}{p}} = C' \|\mathbf{u}\|_{H^{s,p}(M,\mathbf{E})}. \end{aligned}$$
Esto prueba (a).

Para (b) usamos el exponente límite del Teorema 3.5.7. En una carta interior, $f_i^a$ tiene soporte en un compacto de un modelo fijo y su extensión por cero pertenece a $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. En una carta de frontera se requieren dos prolongaciones distintas. Primero se prolonga $f_i^a$ por cero desde la región coordenada hasta $\mathbb{R}^n_+$; esto cruza únicamente la parte lateral, porque el soporte de $h_i$ está separado de ella, y el Lema 3.6.8 conserva la norma de Sobolev. Después se aplica el operador $\mathcal{E}_m\colon W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ del Teorema 3.6.4. Finalmente se multiplica por una función de corte fija que vale uno en el compacto donde puede ser no nula la función original. El resultado pertenece a $W_0^{m,p}(B_{\mathrm{euc}}(0,R))$, coincide con $f_i^a$ en la región coordenada y satisface

$$\|T_i f_i^a\|_{W^{m,p}(B_{\mathrm{euc}}(0,R))} \le C\|f_i^a\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{14.91}$$

El radio $R$, el corte y la constante pueden elegirse independientes de $i$: la Proposición 14.4.5 usa dominios de radio común, los soportes de los cortes se encuentran en una región coordenada menor común y el operador $\mathcal{E}_m$ es siempre el mismo. El teorema euclidiano y (14.91) dan

$$\|f_i^a\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\mathbf{\Omega}_i})} \le C'\|f_i^a\|_{W^{m,p}(\mathbb{X}_i)}$$

en ambos tipos de cartas. Tomamos el supremo, lo acotamos por la suma $\ell^p$ y usamos las desigualdades con constantes $c_{m,p}, C_{m,p}$ de la Proposición 14.5.3. Resulta

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})} \le C\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Para (c), la identificación euclidiana $B^s_{p,p} = W^{s,p}$ del Teorema 6.3.14 y el Lema 6.6.2 dan en cada carta

$$\|f_i^a\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathbf{\Omega}_i})} \le C\|f_i^a\|_{B^s_{p,p}(\mathbb{X}_i)}.$$

En el semiespacio se procede con las normas cociente, como en (a). La definición de $B^s_{p,p}(M,\mathbf{E})$ por interpolación real, el argumento de retracción y corretracción de la Proposición 14.5.3 y la identificación euclidiana $B^s_{p,p} = F^s_{p,p}$ implican

$$B^s_{p,p}(M,\mathbf{E}) = F^s_{p,p}(M,\mathbf{E})$$

y proporcionan constantes $c_{BF}, C_{BF} > 0$ tales que

$$c_{BF}\|\mathbf{u}\|_{F^s_{p,p}(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{u}\|_{B^s_{p,p}(M,\mathbf{E})} \le C_{BF}\|\mathbf{u}\|_{F^s_{p,p}(M,\mathbf{E})}.$$

Por la definición localizada de la norma $F$, si

$$N_{\mathrm{loc}}(\mathbf{u}) := \left(\sum_{i\in I}\sum_{a=1}^{r}\|f_i^a\|^p_{F^s_{p,p}(\mathbb{X}_i)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

las mismas constantes satisfacen

$$c_{BF}N_{\mathrm{loc}}(\mathbf{u}) \le \|\mathbf{u}\|_{B^s_{p,p}(M,\mathbf{E})} \le C_{BF}N_{\mathrm{loc}}(\mathbf{u}).$$

La estimación mediante el supremo concluye (c).

Para cada $i$, los representantes de $f_i^1,\dots,f_i^r$ reconstruyen una sección $\mathbf{s}_i$ en $U_i$ que coincide casi en todas partes con $h_i\mathbf{u}$. Como el soporte de $h_i$ está contenido en una región coordenada menor, la sección $h_i\mathbf{s}_i$ se

prolonga por cero fuera de $U_i$. La suma

$$\widetilde{\mathbf{u}} := \sum_{i\in I} h_i \mathbf{s}_i$$

es localmente finita, define una sección de clase $C^k$ hasta la frontera y coincide, como distribución, con $\sum_{i\in I} h_i^2 \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Las estimaciones uniformes anteriores y la multiplicidad acotada de la cubierta muestran que $\widetilde{\mathbf{u}} \in \Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$ con la cota ya obtenida. Si dos representantes continuos coinciden casi en todas partes, el abierto donde difieren debe ser vacío, pues toda bola o media bola relativa no vacía tiene medida riemanniana positiva. Esto prueba la unicidad. En presencia de frontera, la compatibilidad con la traza se obtiene aproximando en $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ por secciones suaves: la estimación recién probada da convergencia en $\Gamma^{k,\alpha}(\mathbf{E})$, mientras que el Teorema 14.5.9 da convergencia de las restricciones en el espacio de Besov de la frontera. Los dos límites distribucionales coinciden. □

**Proposición 14.6.8.** (Compacidad después de localizar) Sea $M$ una variedad riemanniana de dimensión $n$, de geometría acotada y con o sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz de geometría acotada. Sean $m_0, m_1 \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p_0, p_1 < \infty$ y supongamos que

$$m_0 > m_1, \qquad m_0 - \frac{n}{p_0} > m_1 - \frac{n}{p_1}.$$

Para cada $\chi \in C_c^\infty(M)$, el operador

$$\mathbf{u} \longmapsto \chi \mathbf{u}$$

es compacto de $W^{m_0,p_0}(M,\mathbf{E})$ en $W^{m_1,p_1}(M,\mathbf{E})$.

*Demostración.* El soporte de $\chi$ corta sólo un número finito de miembros de una cubierta uniformemente localmente finita. Si $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ está acotada en $W^{m_0,p_0}(M,\mathbf{E})$, las desigualdades con constantes $c^W_{m_0,p_0}, C^W_{m_0,p_0}$ de la Proposición 14.5.3 muestran que, en cada una de esas cartas y para cada componente, las localizaciones de $\chi\mathbf{u}_j$ están acotadas en un espacio euclidiano $W^{m_0,p_0}$ con soporte en un compacto fijo. En una carta interior, el Teorema 3.4.2, aplicado a una bola que contiene ese soporte, proporciona una subsucesión convergente en $W^{m_1,p_1}$. Las funciones localizadas pertenecen a $W_0^{m_0,p_0}$ de la bola, pues su soporte está separado de su frontera. Al multiplicar por un corte igual a uno en el soporte común y prolongar por cero, la convergencia vale en todo $\mathbb{R}^n$. En una carta de frontera se prolonga por cero únicamente a través de las caras artificiales hasta el semiespacio. El soporte queda en un compacto del semiespacio cerrado, que puede tocar $t = 0$; el Teorema 3.6.6 da allí la subsucesión convergente. Ambos teoremas se aplican precisamente por las dos hipótesis $m_0 > m_1$ y la desigualdad estricta entre los índices, y admiten todos los exponentes finitos del enunciado.

En el rango $1 < p_0 \le p_1 < \infty$ se obtiene además la siguiente factorización mediante los espacios de Bessel. La desigualdad estricta entre los índices diferenciales permite definir

$$\sigma_1 := m_0 - \frac{n}{p_0} + \frac{n}{p_1} > m_1.$$

El Teorema 6.6.1 da el encaje continuo $H^{m_0,p_0} \hookrightarrow H^{\sigma_1,p_1}$, mientras que el Teorema 6.6.4, aplicado en un abierto acotado que contiene el soporte fijo, da el encaje compacto $H^{\sigma_1,p_1} \hookrightarrow H^{m_1,p_1}$. Las identificaciones de órdenes enteros proporcionan así una subsucesión convergente en $W^{m_1,p_1}$ en una carta interior. Como todas las funciones están sostenidas en un compacto fijo, multiplicar por un corte que vale uno en ese compacto

y prolongar por cero convierte esta convergencia local en convergencia en el espacio euclidiano completo. En una carta de frontera aplicamos primero la prolongación lateral por cero y después el operador del semiespacio, como en (14.91); el mismo argumento de factorización se aplica a las extensiones sostenidas en un compacto fijo.

Hay sólo un número finito de cartas y componentes pertinentes. Mediante extracciones sucesivas obtenemos una única subsucesión convergente en todas ellas. La estimación de síntesis, que usa los multiplicadores, los cambios de coordenadas y la multiplicidad uniforme, reconstruye la convergencia en $W^{m_1,p_1}(M,\mathbf{E})$. Por lo tanto, el operador es compacto. □

**Proposición 14.6.9.** (Desigualdad de interpolación con parámetro pequeño) Sea $M$ una variedad riemanniana de dimensión $n$, de geometría acotada y con o sin frontera, y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz de geometría acotada. Sean $t,s,s_0\in\mathbb{N}_0$ y $p_0,p,q\in(1,\infty)$ tales que

$$t<s<s_0,\qquad \max\{p_0,q\}\le p,$$

y

$$t-\frac{n}{q}\le s-\frac{n}{p}<s_0-\frac{n}{p_0}. \tag{14.92}$$

Para todo $\varepsilon>0$ existe $C_\varepsilon>0$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{s,p}(M,\mathbf{E})}\le\varepsilon\|\mathbf{u}\|_{W^{s_0,p_0}(M,\mathbf{E})}+C_\varepsilon\|\mathbf{u}\|_{W^{t,q}(M,\mathbf{E})} \tag{14.93}$$

para todo $\mathbf{u}\in W^{s_0,p_0}(M,\mathbf{E})\cap W^{t,q}(M,\mathbf{E})$.

*Demostración.* Primero obtenemos una desigualdad en el modelo local fijo. Denotemos por $K$ el compacto común que contiene los soportes de las funciones de localización. La desigualdad estricta de la derecha en (14.92) permite poner

$$\sigma:=s_0-\frac{n}{p_0}+\frac{n}{p}>s.$$

El Teorema 6.6.1 da

$$H^{s_0,p_0}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow H^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n).$$

Elegimos un dominio Lipschitz acotado $\Omega$ y un corte $\eta\in C_c^\infty(\Omega)$ que vale uno en una vecindad de $K$. El Teorema 6.6.4 muestra que la restricción de una familia acotada en $H^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)$ posee una subsucesión convergente en $H^{s,p}(\Omega)$. Como cada función considerada está sostenida en $K$, coincide en todo el espacio con la prolongación por cero de $\eta v\restriction_\Omega$. La continuidad de la multiplicación por $\eta$ y de esta prolongación, cuyo soporte permanece separado de $\partial\Omega$, prueba que

$$\{v\in W^{s_0,p_0}(\mathbb{R}^n)\mid \operatorname{supp} v\subseteq K\}\hookrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$$

es compacta. Aquí las identificaciones $H^{s_0,p_0}=W^{s_0,p_0}$ y $H^{s,p}=W^{s,p}$ corresponden a órdenes enteros. Por otra parte, como $t<s$ y $q\le p$, primero se pierde regularidad con el exponente $p$ fijo y después se aplica Hölder en el dominio acotado que contiene a $K$; así se obtiene el encaje continuo del subespacio de las funciones de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ sostenidas en $K$ en $W^{t,q}(\mathbb{R}^n)$.

Afirmamos que, para cada $\delta > 0$, existe $C_\delta > 0$ tal que

$$\|v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le \delta \|v\|_{W^{s_0,p_0}(\mathbb{R}^n)} + C_\delta \|v\|_{W^{t,q}(\mathbb{R}^n)} \tag{14.94}$$

para toda $v \in W^{s_0,p_0}(\mathbb{R}^n)$ sostenida en $K$. Si esto fuera falso para algún $\delta$, existiría una sucesión $(v_j) \subset W^{s_0,p_0}(\mathbb{R}^n)$, sostenida en $K$, que, después de normalizar, satisfaría

$$\|v_j\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = 1, \qquad \|v_j\|_{W^{s_0,p_0}(\mathbb{R}^n)} \le \delta^{-1}, \qquad \|v_j\|_{W^{t,q}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

Por la compacidad, una subsucesión convergería en $W^{s,p}$ a un límite de norma uno. Por la continuidad de $W^{s,p}_K \hookrightarrow W^{t,q}$, el mismo límite sería cero en $W^{t,q}$ y, por lo tanto, la distribución nula. Esta contradicción prueba (14.94).

En una carta de frontera, la inclusión compacta usada en la contradicción se obtiene prolongando primero por cero desde la media bola al semiespacio, únicamente a través de la parte lateral, aplicando después $\mathcal{E}_{s_0}$ y multiplicando por un corte fijo. La inclusión continua del espacio de orden $s$ en el de orden $t$ se prueba directamente en el semiespacio mediante Hölder, pues todas las funciones están sostenidas en $K$. Por lo tanto, la misma contradicción da (14.94) con las normas del semiespacio. Como los dominios, el compacto $K$, los cortes y el operador de extensión son comunes a toda la familia, $C_\delta$ es independiente de la carta. Aplicamos la desigualdad a cada componente localizada y tomamos la norma $\ell^p$. La desigualdad triangular en $\ell^p$ da

$$\|(b_{i,a})\|_{\ell^p} \le \delta \|(a_{i,a})\|_{\ell^p} + C_\delta \|(c_{i,a})\|_{\ell^p},$$

donde $a, b, c$ son las normas locales de órdenes y exponentes $(s_0, p_0)$, $(s, p)$ y $(t, q)$, respectivamente. Las hipótesis $p_0 \le p$ y $q \le p$ implican

$$\|(a_{i,a})\|_{\ell^p} \le \|(a_{i,a})\|_{\ell^{p_0}}, \qquad \|(c_{i,a})\|_{\ell^p} \le \|(c_{i,a})\|_{\ell^q}.$$

La Proposición 14.5.3 compara estas tres sumas con las normas covariantes globales. Elegimos $\delta$ de modo que el primer coeficiente, después de incorporar las constantes $c_A, C_A$ de la Proposición 14.5.3, sea $\varepsilon$. Esto da (14.93). □

**Observación 14.6.10.** (Compacidad local y pérdida de compacidad global) La Proposición 14.6.8 no implica que el encaje global sea compacto. Ya en $M = \mathbb{R}^n$, si $0 \neq v \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ y $v_j(x) := v(x - je_1)$, la sucesión $(v_j)$ está acotada en todos los espacios de Sobolev de orden fijo. Eligiendo una subsucesión con soportes disjuntos, para $j \neq \ell$ se tiene

$$\|v_j - v_\ell\|^p_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = 2\|v\|^p_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por lo tanto no existe una subsucesión convergente. La geometría acotada impide que las constantes locales degeneren, pero no impide que una sucesión escape hacia el infinito. La desigualdad (14.93) es compatible con este fenómeno: es una estimación global con parámetro pequeño, no una afirmación de compacidad global.

**Observación 14.6.11.** (Completitud y encajes ponderados) La completitud por sí sola no proporciona un radio coordenado uniforme ni los encajes no ponderados anteriores. Fijemos $0 < \varepsilon < 1$. Una bola $B_{\mathbf{g}}(x, R)$ se

llama $(1,\varepsilon)$-admisible si posee una carta $\varphi\colon B_{\mathbf{g}}(x,R)\longrightarrow \Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ cuyos coeficientes métricos $g_{ij}(z)$ satisfacen

$$(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}(\xi^i)^2\le\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(z)\xi^i\xi^j\le(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}(\xi^i)^2\qquad(z\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n)$$

y

$$R\max_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\|\beta|=1}}\max_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\|\partial^\beta g_{ij}\|_{L^\infty(\varphi(B_{\mathbf{g}}(x,R)))}\le\varepsilon.$$

En la primera condición, $\xi$ representa las componentes de un vector tangente en la carta; por ello equivale a

$$\sqrt{1-\varepsilon}\,\|d\varphi_p(v)\|\le|v|_{\mathbf{g}}\le\sqrt{1+\varepsilon}\,\|d\varphi_p(v)\|\qquad(p\in B_{\mathbf{g}}(x,R),\ v\in T_pM).$$

La segunda condición controla adicionalmente las primeras derivadas coordenadas de la métrica. Si $R'(x)$ es el supremo de esos radios, se pone $R_\varepsilon(x):=\min\left\{1,\dfrac{R'(x)}{2}\right\}$. Las constantes locales pueden conservarse dentro de la integral mediante pesos formados con potencias de $R_\varepsilon$. Con la convención

$$\|\mathbf{u}\|_{L^a(M,\mathbf{E};w)}:=\left(\int_M|\mathbf{u}|_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}^a\,w\,d\lambda_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{1}{a}},$$

para $1<r<n$ y $r^*=\frac{nr}{n-r}$ se obtiene una estimación de la forma

$$\|\mathbf{u}\|_{L^{r^*}(M,\mathbf{E};R_\varepsilon^{2r^*})}\le C\|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}(M,\mathbf{E})}$$

en una variedad completa, bajo el control local de la conexión necesario para secciones; véase [7, Teorema 7.5]. Cuando $R_\varepsilon$ está separado uniformemente de cero, existe $\rho>0$ tal que $\rho\le R_\varepsilon(x)\le 1$ para todo $x\in M$ y, por lo tanto,

$$\rho^{2r^*}\le R_\varepsilon(x)^{2r^*}\le 1.$$

Estas desigualdades recuperan el mecanismo no ponderado de esta sección.

Parte IV

# Teoría del índice

# Preámbulo de la Parte IV

Una de las preguntas más profundas de la teoría elíptica es cuánto puede saberse de un operador sin conocer todos sus coeficientes. Para un operador elíptico sobre una variedad cerrada, los términos de orden inferior influyen en las soluciones concretas, pero no alteran cierta información global fundamental. Entre esa información se encuentra el índice, definido como la diferencia entre la dimensión del núcleo y la dimensión del conúcleo.

El primer paso será ampliar el cálculo diferencial al cálculo pseudodiferencial. Sus símbolos permiten construir parametrices y describir con precisión la regularidad y las singularidades de las soluciones. La teoría de Fredholm convierte una parametrix módulo operadores compactos en un entero estable. Ese entero todavía tiene un origen analítico, pero el símbolo principal admite una interpretación independiente del operador completo: determina una clase de $K$–teoría sobre el cotangente.

La segunda mitad de la parte desarrolla las herramientas topológicas necesarias para leer esa clase. La periodicidad de Bott, el isomorfismo de Thom y los morfismos asociados a encajes permiten transportar el problema hasta el espacio euclidiano. El teorema de Atiyah–Singer afirma finalmente que el índice obtenido por este procedimiento coincide con el índice analítico. La pregunta que une todos estos capítulos es sencilla de formular, aunque su respuesta requiera varios lenguajes: ¿cómo puede una ecuación diferencial conservar, en su término principal, información topológica de toda la variedad?

### Del análisis elíptico al índice

Fredholm descubrió que ciertas ecuaciones integrales en espacios de funciones conservaban una estructura esencialmente finito–dimensional. Con el desarrollo de la teoría elíptica y del cálculo pseudodiferencial, una idea semejante apareció para operadores diferenciales. En la década de 1960, Atiyah y Singer demostraron que el índice analítico podía calcularse mediante datos topológicos del símbolo principal. El resultado reunió ideas procedentes de Hodge, Hirzebruch, Thom, Bott, Grothendieck y la teoría de operadores. Desde entonces, el índice se ha convertido en uno de los puentes más fértiles entre análisis, geometría y topología.

# 15

# Operadores pseudodiferenciales

El punto de partida del cálculo pseudodiferencial es una dificultad que ya aparece al intentar invertir un operador elíptico de coeficientes constantes. Si

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha D^\alpha,$$

la transformada de Fourier convierte la ecuación $P(D)u = f$ en $p(\xi)\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. Cuando $p(\xi)$ es invertible, la solución formal se obtiene multiplicando por $p(\xi)^{-1}$; sin embargo, este inverso casi nunca es un polinomio y, por lo tanto, no corresponde a un operador diferencial. Con coeficientes variables aparece una dificultad adicional: el símbolo depende a la vez del punto $x$ y de la frecuencia $\xi$, y la composición ya no se reduce al producto ordinario de funciones.

Los operadores pseudodiferenciales amplían la clase de los operadores diferenciales precisamente lo necesario para resolver este problema. Sus símbolos permiten controlar por separado la variación en la base y el comportamiento en altas frecuencias. La composición se describe mediante un desarrollo asintótico, el adjunto permanece dentro de la misma clase y la elipticidad conduce a una inversa módulo operadores de núcleo suave. Esta última propiedad es la que transforma la inversión simbólica en regularidad elíptica y, sobre una variedad cerrada, en una afirmación de Fredholm.

Los ingredientes analíticos ya fueron preparados en capítulos anteriores. La transformada de Fourier y las distribuciones temperadas del Capítulo 4 proporcionan el modelo local; los potenciales de Bessel del Capítulo 6 muestran que los multiplicadores naturales no tienen por qué ser polinómicos; el símbolo principal y la elipticidad del Capítulo 11 identifican la parte que debe invertirse. Por ejemplo,

$$J^s = (I - \Delta)^{\frac{s}{2}}, \qquad \widehat{J^s u}(\xi) = \langle \xi \rangle^s \widehat{u}(\xi),$$

es un operador de orden $s$, mientras que $J^{-2} = (I - \Delta)^{-1}$ mejora dos derivadas aunque no sea diferencial. El cálculo que construiremos explica este fenómeno dentro de una teoría estable y lo transporta después a variedades y haces vectoriales.

Comenzaremos en $\mathbb{R}^n$ con las clases de símbolos, las integrales oscilatorias y la cuantización de Kohn–Nirenberg. El estudio de los núcleos permitirá distinguir localidad, pseudolocalidad y soporte propio, y dará las fórmulas de composición y adjunto. A continuación globalizaremos el cálculo, identificaremos los núcleos como

distribuciones conormales a la diagonal y compararemos la cuantización local con una cuantización riemanniana basada en el mapeo exponencial. Las parametrices conducirán entonces a la regularidad microlocal y al frente de onda.

La última parte del capítulo separa dos situaciones globales. En variedades de geometría acotada construiremos un cálculo uniforme de propagación finita, capaz de conservar las estimaciones de Sobolev en una cubierta infinita. En una variedad cerrada, los residuos regularizantes son compactos y la parametrix produce operadores de Fredholm. Finalmente, el cálculo con parámetro permitirá construir las potencias complejas de Seeley, compararlas con el cálculo espectral y relacionar el núcleo del calor con la fórmula de McKean–Singer.

La teoría simbólica y microlocal se apoyará principalmente en Hörmander [84], Taylor [140] y Shubin [135]. Para la cuantización geométrica seguiremos la idea de Bokobza–Haggiag [23]; la construcción de potencias complejas se debe a Seeley [132], y la transición hacia el índice analítico utilizará la exposición de Bleecker y Booß–Bavnbek [21]. La demostración del teorema de Atiyah–Singer quedará para los capítulos posteriores.

### Hörmander, Seeley y la madurez del cálculo simbólico

El cálculo pseudodiferencial surgió al ampliar los multiplicadores de Fourier hasta una clase estable bajo composición y capaz de construir inversas aproximadas para operadores elípticos. Hörmander organizó el análisis microlocal alrededor de símbolos, núcleos y frentes de onda; Seeley mostró cómo el mismo lenguaje permite construir potencias complejas de operadores elípticos. La fuerza de la teoría reside en que reúne tres escalas a la vez: el comportamiento local en la variable base, la homogeneidad en la frecuencia y la regularidad global de las soluciones.

## 15.1 Del inverso de Fourier a las clases de símbolos

### 15.1.1 Convenciones y primer modelo

Con la normalización unitaria de la transformada de Fourier fijada en la Definición 4.11.1,

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\,dx, \qquad u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{u}(\xi)\,d\xi.$$

Además, $D_j$ denota la derivada parcial $\partial_j$, no el operador $-i\partial_j$. Por la Proposición 4.11.3, $\mathcal{F}(D^\alpha u)(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)$. Estas convenciones fijan todos los factores que aparecerán en la cuantización.

Consideremos primero $P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha D^\alpha$. Si $u, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $P(D)u = f$, entonces

$$p(\xi)\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi), \qquad p(\xi) := \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha (i\xi)^\alpha.$$

Cuando $p(\xi) \neq 0$, la inversión formal utiliza $p(\xi)^{-1}$. El polinomio $p$ procede de un operador diferencial, pero su inverso no es polinómico. Si ahora los coeficientes dependen de $x$, la función $p(x,\xi)^{-1}$ depende simultáneamente de posición y frecuencia. La clase simbólica debe controlar derivadas en ambas variables y, al mismo tiempo, permitir que cada derivada respecto de $\xi$ disminuya el orden.

Escribiremos $\langle \xi \rangle = (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Todos los haces y espacios vectoriales se complexificarán durante el cálculo de Fourier cuando sean reales; al final se restringirán los operadores que preserven la estructura real.

### 15.1.2 Símbolos de tipo $(1,0)$

La heurística anterior señala las dos estimaciones que debe satisfacer un símbolo. Las derivadas en $x$ miden la variación de los coeficientes, mientras que cada derivada en $\xi$ debe disminuir el orden. La clase de tipo $(1,0)$ formaliza simultáneamente ambos controles.

**Definición 15.1.1.** (Clase de símbolos) Sean $n, r, s \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{R}$. La clase global uniforme

$$S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$$

está formada por los mapeos suaves $a\colon \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$ tales que, para cualesquiera multiíndices $\alpha, \beta$, existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ con

$$\|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)\| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}$$

para todo $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Si $r = s = 1$, escribimos simplemente $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n)$.
Para un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, la clase local

$$S^m_{1,0}(U \times \mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$$

está formada por los mapeos suaves con los mismos valores para los cuales, dado cualquier compacto $K \Subset U$ y cualesquiera multiíndices $\alpha, \beta$, existe $C_{K,\alpha,\beta} > 0$ tal que

$$\|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)\| \leq C_{K,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}, \qquad (x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n.$$

Abreviaremos esta clase por $S^m_{1,0}(U; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$ y omitiremos el espacio de valores sólo en el caso escalar. Cuando el orden y todos los espacios estén fijados dentro de un bloque, podrá abreviarse el subíndice $(1,0)$.

Para $n, r, s \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{R}$, la topología natural de $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$ es la topología de Fréchet definida por las seminormas

$$q_{N,m}(a) := \max_{|\alpha|+|\beta| \leq N} \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \langle \xi \rangle^{-m+|\beta|} \|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)\|, \qquad N \in \mathbb{N}_0.$$

En un abierto $U$ se usa una exhaustión $(K_j)$ por compactos y las seminormas obtenidas al restringir $x$ a $K_j$. Para $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto definimos la clase de **símbolos regularizantes** por

$$\begin{aligned} &S^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)) \\ &\quad := \bigcap_{\mu \in \mathbb{R}} S^\mu_{1,0}(U \times \mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)). \end{aligned} \tag{15.1}$$

Equivalentemente, $a$ pertenece a esta intersección si, para todo compacto $K \Subset U$, todos los multiíndices $\alpha, \beta$ y todo $N \in \mathbb{N}_0$, existe $C_{K,\alpha,\beta,N} > 0$ tal que

$$\|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)\| \leq C_{K,\alpha,\beta,N} \langle \xi \rangle^{-N}, \qquad (x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n. \tag{15.2}$$

Para la clase global uniforme se exige la misma estimación para todo $x \in \mathbb{R}^n$, con una constante independiente de $x$, y escribimos

$$S^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)) := \bigcap_{\mu \in \mathbb{R}} S^\mu_{1,0}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)). \tag{15.3}$$

En cualquiera de los espacios globales o locales acabados de definir, las inclusiones del orden $m_1$ en el orden $m_2$ son continuas cuando $m_1 \le m_2$, la derivación $D_x^\alpha D_\xi^\beta$ lleva el orden $m$ en $m-|\beta|$ y el producto matricial suma los órdenes cuando los espacios de valores permiten efectuar la composición.

La razón para privilegiar $(\rho,\delta)=(1,0)$ puede verse ya en estas tres propiedades: derivar en frecuencia reduce el orden, derivar en posición no lo aumenta y los desarrollos de Taylor que aparecerán en la composición producen órdenes estrictamente decrecientes. Las clases generales $S^m_{\rho,\delta}(U\times\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$ sustituyen $m-|\beta|$ por $m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|$; no serán necesarias aquí.

**Definición 15.1.2.** (Símbolo elíptico euclidiano) Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, $r\in\mathbb{N}$ y $m\in\mathbb{R}$. Un símbolo matricial $a\in S^m_{1,0}(U;\mathrm{End}(\mathbb{C}^r))$ es **elíptico** si para todo compacto $K\Subset U$ existen $R_K,C_K>0$ tales que $a(x,\xi)$ es invertible y

$$\|a(x,\xi)^{-1}\|\le C_K\langle\xi\rangle^{-m}$$

cuando $x\in K$ y $\|\xi\|\ge R_K$. Es **uniformemente elíptico** si $R_K$ y $C_K$ pueden elegirse independientes de $K$.

### 15.1.3 Símbolos clásicos y expansiones asintóticas

La clase $S^m_{1,0}$ controla el tamaño del símbolo, pero no distingue las contribuciones sucesivas de sus diferentes grados. Para construir una parametrix necesitaremos separar primero el término principal y corregirlo orden por orden. Los símbolos clásicos proporcionan precisamente esta expansión homogénea en altas frecuencias.

**Definición 15.1.3.** (Símbolo clásico) Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, $r,s\in\mathbb{N}$ y $m\in\mathbb{R}$. Un símbolo $a\in S^m_{1,0}(U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$ es **clásico** o **polihomogéneo** si existen mapeos suaves

$$a_{m-j}\colon U\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\longrightarrow\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s),\qquad j\in\mathbb{N}_0,$$

homogéneos en el sentido de que $a_{m-j}(x,t\xi)=t^{m-j}a_{m-j}(x,\xi)$ para $t>0$, y una función $\vartheta\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que se anula cerca de 0 y vale uno para $\|\xi\|\ge1$, tales que, para todo $N\ge1$,

$$a-\sum_{j=0}^{N-1}\vartheta a_{m-j}\in S^{m-N}_{1,0}(U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)).$$

Se escribe $a\in S^m_{\mathrm{cl}}(U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$ y $a_m$ se denomina **componente principal homogénea**.

La presencia de $\vartheta$ no altera la información homogénea: dos cortes producen símbolos cuya diferencia tiene soporte compacto en $\xi$ y pertenece a $S^{-\infty}(U\times\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$. La componente $a_m$ es única. Si $b_m$ es otra componente principal, entonces $a_m-b_m\in S^{m-1}_{1,0}(U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$ para $\|\xi\|\ge1$. Para $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$ y $t\ge1$, la homogeneidad da

$$t^m\|a_m(x,\omega)-b_m(x,\omega)\|\le C_K t^{m-1}.$$

Al dividir entre $t^m$ y hacer $t\to\infty$ se obtiene $a_m=b_m$. El mismo argumento inductivo prueba la unicidad de todas las componentes homogéneas.

**Definición 15.1.4.** (Desarrollo asintótico) Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, $r,s\in\mathbb{N}$, $m_0\ge m_1\ge\cdots$ números reales con $m_j\to-\infty$ y

$$a_j\in S^{m_j}_{1,0}(U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)).$$

Para $a \in S^{m_0}_{1,0}(U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$ escribimos

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

si, para todo $N \geq 1$,

$$a - \sum_{j=0}^{N-1} a_j \in S^{m_N}_{1,0}(U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)).$$

Cuando varios $m_j$ coinciden, la conclusión se interpreta después de agrupar los términos de igual orden.

La derivación puede efectuarse término a término: si $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$, entonces $D_x^\alpha D_\xi^\beta a \sim \sum_{j=0}^{\infty} D_x^\alpha D_\xi^\beta a_j$, con órdenes $m_j - |\beta|$. Los coeficientes de un desarrollo general no son únicos como funciones; lo que queda determinado es la clase del término de orden $m_j$ módulo símbolos del orden siguiente. Para símbolos clásicos, la homogeneidad elimina esa ambigüedad.

**Lema 15.1.5.** (Suma asintótica de símbolos) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $r,s \in \mathbb{N}$. En la situación de la Definición 15.1.4 existe

$$a \in S^{m_0}_{1,0}(U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$$

con $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$. En particular, si $h_{m_0-j}$ es suave en $U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ con valores en $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)$ y homogéneo de grado $m_0 - j$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$, entonces, para un corte radial $\vartheta$ como el de la Definición 15.1.3, puede elegirse $a \in S^{m_0}_{\mathrm{cl}}(U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$ con

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} \vartheta h_{m_0-j}.$$

La retícula de grados $m_0 - j$ en la última cláusula es esencial para la noción de la Definición 15.1.3. Una familia homogénea de grados reales meramente decrecientes admite la suma asintótica general, pero sólo define una expansión homogénea con ese conjunto de grados; será clásica en el sentido adoptado aquí cuando dichos grados pertenezcan a $m_0 - \mathbb{N}_0$, insertando componentes nulas en los grados ausentes.

*Demostración.* Durante esta demostración, $U, r, s$ permanecerán fijos y escribiremos

$$S^q := S^q_{1,0}\big(U \times \mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)\big).$$

Como $m_j \to -\infty$ y la sucesión es no creciente, cada valor del orden puede repetirse solamente un número finito de veces. Para cada valor $\mu$ que aparece, el conjunto

$$I_\mu := \{j \in \mathbb{N}_0 \mid m_j = \mu\}$$

es finito. Agrupamos los términos correspondientes a $I_\mu$ y sustituimos ese grupo por la suma finita $\sum_{j \in I_\mu} a_j$. Esto es exactamente la convención fijada después de la Definición 15.1.4. Basta tratar el caso

$$m_0 > m_1 > m_2 > \cdots.$$

Fijemos una exhaustión $K_1 \Subset K_2 \Subset \cdots$ de $U$ y una función $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que se anule en $\{\|\xi\| \le 1\}$ y valga uno en $\{\|\xi\| \ge 2\}$. Para un compacto $K \Subset U$ escribimos

$$q^K_{L,\mu}(c) := \max_{|\alpha|+|\beta|\le L} \sup_{x\in K,\,\xi\in\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{-\mu+|\beta|}\|D_x^\alpha D_\xi^\beta c(x,\xi)\|.$$

Elegiremos una sucesión $\varepsilon_j \to 0^+$ y pondremos

$$b_j(x,\xi) := \chi(\varepsilon_j\xi)a_j(x,\xi).$$

Si $N < j$, entonces $m_j < m_N$. La regla de Leibniz y el hecho de que $\chi(\varepsilon\xi)$ está sostenida donde $\|\xi\| \ge \varepsilon^{-1}$ muestran que, para $K, L, N, j$ fijos con $N < j$,

$$q^K_{L,m_N}\big(\chi(\varepsilon\cdot)a_j\big) \longrightarrow 0 \qquad (\varepsilon \longrightarrow 0^+). \tag{15.4}$$

En efecto, cada término de Leibniz contiene, además de una seminorma de $a_j$, el factor $\langle\xi\rangle^{m_j-m_N}$; cuando una derivada alcanza al corte aparecen potencias de $\varepsilon$, y en su soporte $\|\xi\|$ es comparable con $\varepsilon^{-1}$, de modo que se obtiene la misma o una potencia mejor de $\varepsilon^{m_N-m_j}$.
Para cada $j \ge 1$ sólo hay un número finito de condiciones

$$q^{K_p}_{p,m_N}(b_j) \le 2^{-j}, \qquad 0 \le N < j, \qquad 1 \le p \le j.$$

La convergencia (15.4) permite escoger $\varepsilon_j$ de modo que todas ellas se cumplan y, disminuyéndolo si es necesario, que $\varepsilon_j < \varepsilon_{j-1}$. Elegimos $\varepsilon_0 > 0$ arbitrariamente.
Para todo compacto $K \Subset U$ y todo $L$, las condiciones con $N = 0$, aplicadas en un $K_p$ que contenga a $K$ y con $p \ge L$, muestran que $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ converge en la seminorma $q^K_{L,m_0}$. Por consiguiente,

$$a := \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

pertenece a $S^{m_0}$. Fijado ahora $N$, el término $b_N$ pertenece a $S^{m_N}$ y las condiciones anteriores, esta vez con el orden objetivo $m_N$, prueban que $\displaystyle\sum_{j>N} b_j$ converge en todas las seminormas de $S^{m_N}$. Así, para cada $N$,

$$a - \sum_{j=0}^{N-1} a_j = \sum_{j=N}^{\infty} b_j + \sum_{j=0}^{N-1}(b_j - a_j).$$

La primera suma pertenece a $S^{m_N}$. Cada diferencia $b_j - a_j$ tiene soporte acotado en $\xi$ y, por lo tanto, pertenece a $S^{-\infty}(U\times\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$; esto prueba el desarrollo asintótico. Al desagrupar los grupos finitos se recupera la interpretación indicada en la definición. Para la última cláusula se aplica la misma construcción con cortes radiales a $a_j = \vartheta h_{m_0-j}$; el resto tras los primeros $N$ términos pertenece a $S^{m_0-N}$, que es exactamente la expansión de la Definición 15.1.3. □

### 15.1.4 Integrales oscilatorias y cuantización

Hasta ahora hemos trabajado con funciones simbólicas. Para convertirlas en operadores debemos dar sentido a una integral que, salvo en órdenes muy negativos, no es absolutamente convergente. La oscilación de la fase será la que compense el crecimiento del símbolo.

Sean $n, r, s \in \mathbb{N}$, $m < -n$, $a \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$ y $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$. Entonces la integral

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) u(y)\, dy\, d\xi$$

es absolutamente convergente. Para órdenes mayores, la oscilación de la exponencial sustituye la integrabilidad absoluta. Fijaremos esa sustitución mediante una regularización, no mediante una convención tácita.

Sea $c \in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2n})$ igual a uno cerca de $(0,0)$. Si $q(x,y,\xi)$ es suave y todas sus derivadas tienen crecimiento polinomial en $(y,\xi)$, definimos, siempre que el límite exista,

$$\operatorname{Os} \iint_{\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi} e^{i(x-y)\cdot\xi} q(x,y,\xi)\, dy\, d\xi := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi} e^{i(x-y)\cdot\xi} c(\varepsilon y, \varepsilon\xi) q(x,y,\xi)\, dy\, d\xi.$$

La existencia se probará bajo cotas de crecimiento de orden fijo. En concreto, supongamos que existen $\mu, \tau \in \mathbb{R}$ tales que, para cada compacto $K$ de la variable $x$ y cualesquiera multiíndices $\gamma, \alpha, \beta$, se cumple

$$\| D_x^\gamma D_y^\alpha D_\xi^\beta q(x,y,\xi) \| \le C_{K,\gamma,\alpha,\beta} \langle y \rangle^\tau \langle \xi \rangle^{\mu - |\beta|}, \qquad x \in K.$$

Los exponentes $\mu$ y $\tau$ no dependen del número de derivadas. La fase es la función real $(x-y)\cdot\xi$. Las identidades

$$e^{i(x-y)\cdot\xi} = \langle \xi \rangle^{-2N} (1 - \Delta_y)^N e^{i(x-y)\cdot\xi}$$

y

$$e^{i(x-y)\cdot\xi} = \langle x - y \rangle^{-2L} (1 - \Delta_\xi)^L e^{i(x-y)\cdot\xi}$$

permiten trasladar derivadas a la amplitud. Escribamos $c_\varepsilon(y,\xi) = c(\varepsilon y, \varepsilon\xi)$. Integrando primero por partes en $y$ y después en $\xi$, la integral regularizada es igual a la integral de $e^{i(x-y)\cdot\xi} R_\varepsilon(x,y,\xi)$, donde

$$R_\varepsilon = \langle x - y \rangle^{-2L} (1 - \Delta_\xi)^L \big[ \langle \xi \rangle^{-2N} (1 - \Delta_y)^N (c_\varepsilon q) \big].$$

Estas operaciones son válidas antes de tomar el límite porque el corte tiene soporte compacto. Para $0 < \varepsilon \le 1$, sus derivadas satisfacen

$$|D_y^\alpha D_\xi^\beta c_\varepsilon(y,\xi)| \le C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\beta|}.$$

En efecto, cada derivada aporta un factor de $\varepsilon$ y, en el soporte del término correspondiente, $\varepsilon\langle\xi\rangle$ está acotado independientemente de $\varepsilon$. Leibniz y las cotas de $q$ dan, para $x \in K$,

$$\| R_\varepsilon(x,y,\xi) \| \le C_K \langle y \rangle^{\tau - 2L} \langle \xi \rangle^{\mu - 2N}.$$

Aquí usamos que $\langle x-y \rangle$ y $\langle y \rangle$ son uniformemente comparables cuando $x$ recorre $K$. Elegimos $2N > \mu + n$ y $2L > \tau + n$; el último miembro es entonces integrable en $(y,\xi)$. Para cada $(y,\xi)$ fijo, el corte vale uno y todas sus derivadas positivas se anulan cuando $\varepsilon$ es suficientemente pequeño. Por convergencia dominada, el límite es la integral

absolutamente convergente que resulta al reemplazar $c_\varepsilon q$ por $q$ en $R_\varepsilon$. Esta expresión no depende del corte $c$.

Al derivar respecto de $x$ hasta un orden $d$, aparecen además potencias de $\xi$ de grado a lo sumo $d$. La misma prueba, con $2N > \mu + d + n$, da una mayorante integrable para todas esas derivadas, uniformemente sobre $K$. También la convergencia del integrando y de sus derivadas es uniforme en $x \in K$ para $(y,\xi)$ fijo. Se obtiene así convergencia en cada norma $C^d(K)$ y dependencia suave de la integral oscilatoria respecto de $x$.

Para la cuantización siguiente, $q(x,y,\xi) = a(x,\xi)u(y)$ satisface estas cotas con $\mu = m$ y $\tau = 0$, pues $u$ es de Schwartz. Lo mismo ocurre con $b(x,y,\xi)u(y)$ para las amplitudes de orden fijo que se introducirán enseguida. En las fórmulas de composición y reducción se aplica el argumento a las variables de integración, dejando las restantes como parámetros; las estimaciones simbólicas y la desigualdad de Peetre controlan los pesos que allí aparecen. Las cotas son locales en las variables que actúan como parámetros. El crecimiento polinomial de cada derivada, sin un control común de los exponentes, no se usará como hipótesis suficiente de existencia.

Junto con la suma asintótica, la regularización permite pasar de las expansiones formales a operadores bien definidos. Una construcción equivalente, con los restos estimados seminorma por seminorma, se encuentra en [135, Secciones 1 y 3].

**Definición 15.1.6.** (Cuantización de Kohn–Nirenberg) Sean $n, r, s \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}$ y $a \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$. Definimos

$$\mathrm{Op}(a)u(x) := (2\pi)^{-n} \operatorname{Os} \iint_{\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) u(y)\, dy\, d\xi, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r).$$

Equivalentemente,

$$\mathrm{Op}(a)u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \operatorname{Os} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi) \widehat{u}(\xi)\, d\xi.$$

La segunda fórmula se obtiene primero cuando las integrales son absolutamente convergentes, usando inversión de Fourier y Fubini, y después por regularización. El factor $(2\pi)^{-n}$ de la primera fórmula es consecuencia de las dos apariciones de la normalización unitaria; no puede sustituirse por $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$.

**Proposición 15.1.7.** (Continuidad de la cuantización) Sean $n, r, s \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}$ y

$$a \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)).$$

Entonces $\mathrm{Op}(a)$ es continuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^s)$. Por transposición se extiende de manera única a un operador continuo

$$\mathrm{Op}(a) \colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^s).$$

Si $a \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$, lleva $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^s)$; si, además, $a$ decrece rápidamente también en $x$, lleva $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^s)$.

*Demostración.* Derivar la segunda fórmula respecto de $x$ produce sumas de términos con factores $\xi^\gamma D_x^{\alpha-\gamma} a(x,\xi)$. Para controlar una potencia $x^\beta$, usamos $x_j e^{ix\cdot\xi} = -iD_{\xi_j} e^{ix\cdot\xi}$ e integramos por partes en $\xi$. Después de desarrollar con Leibniz, cada seminorma de Schwartz de $\mathrm{Op}(a)u$ queda acotada por una suma finita de seminormas simbólicas de $a$ y seminormas de Schwartz de $u$. Se elige el número de integraciones por partes mayor que $m + n$ para hacer integrable la variable $\xi$. Esto prueba simultáneamente la existencia, la pertenencia a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^s)$ y la continuidad.

El operador transpuesto se define por $\langle \mathrm{Op}(a)u, \varphi \rangle := \langle u, \mathrm{Op}(a)^t \varphi \rangle$, donde el transpuesto en el miem-

bro derecho se obtiene intercambiando las variables del núcleo; la proposición sobre amplitudes que se demostrará enseguida muestra que también preserva los espacios de Schwartz correspondientes. Si $a \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$, puede elegirse arbitrariamente grande el decrecimiento en $\xi$ y derivar bajo la integral contra una distribución temperada, lo que produce suavidad. El decrecimiento adicional en $x$ da todas las seminormas de Schwartz. □

### 15.1.5 Amplitudes y reducción a símbolos

La cuantización de Kohn–Nirenberg utiliza un símbolo evaluado en la variable de salida $x$. Al componer operadores, tomar adjuntos o cambiar coordenadas, aparecen de manera natural coeficientes que dependen también de la variable de entrada $y$. Antes de cerrar el cálculo bajo esas operaciones debemos mostrar que tales amplitudes pueden reducirse nuevamente a símbolos.

**Definición 15.1.8.** (Amplitud) Sean $n, r, s \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{R}$. Una **amplitud de orden** $m$ es un mapeo suave

$$b\colon \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)$$

tal que, para cualesquiera multiíndices $\alpha, \gamma, \beta$, existe $C_{\alpha,\gamma,\beta} > 0$ con

$$\|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta b(x,y,\xi)\| \le C_{\alpha,\gamma,\beta}\langle \xi\rangle^{m-|\beta|}.$$

Su operador, inicialmente sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$, se define por

$$I(b)u(x) := (2\pi)^{-n}\,\mathrm{Os}\iint_{\mathbb{R}^n_y\times\mathbb{R}^n_\xi} e^{i(x-y)\cdot\xi}\, b(x,y,\xi)u(y)\,dy\,d\xi.$$

Un símbolo es la amplitud particular independiente de $y$. La dirección inversa contiene el argumento que reaparecerá en la composición, los adjuntos y los cambios de coordenadas.

**Teorema 15.1.9.** (Reducción de amplitudes) Sean $n, r, s \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{R}$. Para cada amplitud $b$ de orden $m$ con valores en $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)$ existe

$$a \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$$

tal que $I(b) = \mathrm{Op}(a)$. El símbolo puede elegirse con desarrollo

$$a(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha D_y^\alpha b(x,y,\xi)\big|_{y=x}.$$

El símbolo queda determinado por el operador módulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$.

*Demostración.* Durante esta demostración, $n, r, s, m$ permanecerán fijos y escribiremos

$$S^q := S^q_{1,0}\big(\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)\big).$$

La reducción exacta se obtiene mediante la transformada de Fourier parcial del núcleo en la variable $x - y$.

Con la normalización del capítulo, definimos

$$a(x,\xi) := (2\pi)^{-n}\,\mathrm{Os}\iint_{\mathbb{R}^n_y\times\mathbb{R}^n_\eta} e^{-iy\cdot\eta}\,b(x,x+y,\xi+\eta)\,dy\,d\eta. \tag{15.5}$$

Esta integral oscilatoria existe. Para verlo, usamos, con $L,K\in\mathbb{N}$,

$$e^{-iy\cdot\eta}=\langle\eta\rangle^{-2K}(1-\Delta_y)^K e^{-iy\cdot\eta},\qquad e^{-iy\cdot\eta}=\langle y\rangle^{-2L}(1-\Delta_\eta)^L e^{-iy\cdot\eta},$$

aplicando primero la primera identidad y, a cada término resultante, la segunda. Tras integrar por partes, las derivadas quedan sobre la amplitud y sobre el peso en $\eta$. La desigualdad de Peetre del Lema 6.1.1 da, para todo $\mu\in\mathbb{R}$,

$$\langle\xi+\eta\rangle^{\mu}\le 2^{\frac{|\mu|}{2}}\langle\xi\rangle^{\mu}\langle\eta\rangle^{|\mu|}.$$

Al elegir $L>\frac{n}{2}$ y $2K>n+\big|m-|\beta|\big|$, el integrando resultante es absolutamente integrable y, después de aplicar $D_x^\alpha D_\xi^\beta$, queda acotado por

$$C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-|\beta|}.$$

El mismo argumento para cualquier número de derivadas prueba que $a\in S^m$. Insertando cortes compactos antes de usar Fubini, la fórmula del núcleo y los cambios $y-x\mapsto y$ y $\eta-\xi\mapsto\eta$ dan $I(b)=\mathrm{Op}(a)$; las estimaciones anteriores permiten retirar los cortes. De este modo, (15.5) construye directamente el símbolo asociado a la amplitud.

Fijemos ahora $N\ge 1$ y desarrollemos la amplitud respecto de $y$ alrededor de $x$:

$$b(x,y,\xi)=\sum_{|\alpha|<N}\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}D_y^\alpha b(x,x,\xi)+\sum_{|\alpha|=N}(y-x)^\alpha r_\alpha(x,y,\xi),$$

donde

$$r_\alpha(x,y,\xi)=\frac{N}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{N-1}D_y^\alpha b(x,x+t(y-x),\xi)\,dt.$$

Como $(y-x)^\alpha e^{i(x-y)\cdot\xi}=i^{|\alpha|}D_\xi^\alpha e^{i(x-y)\cdot\xi}$, la integración por partes en $\xi$ transforma cada término finito en

$$\frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}D_\xi^\alpha D_y^\alpha b(x,x,\xi).$$

Equivalentemente, al insertar este desarrollo de Taylor en (15.5), la identidad

$$y^\alpha e^{-iy\cdot\eta}=i^{|\alpha|}D_\eta^\alpha e^{-iy\cdot\eta}$$

produce esos mismos términos. En el resto, las $N$ integraciones por partes hacen actuar $D_\eta^\alpha$ sobre $r_\alpha(x,x+y,\xi+\eta)$. Cada derivada en $\eta$ es una derivada en la covariable de $b$ y reduce el orden en uno. La estimación usada para (15.5), aplicada ahora a esas derivadas, demuestra directamente que el resto reducido pertenece a $S^{m-N}$. Como $N$ es arbitrario, se obtiene el desarrollo anunciado, sin una segunda invocación de la reducción de amplitudes.

En el modelo global, la transformada parcial que define (15.5) recupera el símbolo a partir del núcleo. Tras localizar en un abierto, dos elecciones pueden diferir por una parte del núcleo separada de la diagonal; las integraciones por partes en la covariable muestran que su transformada pertenece a $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$.

Por lo tanto, el símbolo queda determinado por el operador módulo esa clase global regularizante. □

### 15.1.6 Ejemplos fundamentales

Antes de desarrollar el cálculo algebraico conviene reconocer dentro de la nueva clase algunos operadores ya conocidos. Los ejemplos siguientes muestran cómo el orden simbólico registra la pérdida o ganancia de derivadas y, al mismo tiempo, separan localidad, no localidad y regularización.

**Ejemplo 15.1.10.** (Operadores diferenciales) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $r, s \in \mathbb{N}$ y $A_\alpha \in C^\infty(U; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$. Para

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x) D^\alpha$$

el símbolo de Fourier es

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x)(i\xi)^\alpha, \qquad P = \mathrm{Op}(p).$$

Si $U = \mathbb{R}^n$ y los coeficientes y todas sus derivadas son acotados,

$$p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s));$$

localmente siempre pertenece a $S^m_{1,0}(U; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$. La componente principal de Fourier es

$$p_m(x,\xi) = i^m \sum_{|\alpha| = m} A_\alpha(x)\xi^\alpha = i^m \sigma_m(P)(x,\xi),$$

donde $\sigma_m(P)$ es exactamente el símbolo intrínseco de la Definición 11.1.1. Así quedan conciliadas la convención diferencial previamente fijada y la cuantización de Fourier. La multiplicación por $i^m$ no modifica la elipticidad.

El operador es local: su núcleo es una suma finita de derivadas transversales de la delta sobre la diagonal,

$$\mathbf{K}_P(x,y) = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x) D_x^\alpha \delta(x-y).$$

Por ello su soporte está contenido en la diagonal y allí se concentran todas sus singularidades. Las estimaciones de Fourier y localización ya probadas en los capítulos de Sobolev dan $P\colon H^{t+m}_{\mathrm{loc}}(U,\mathbb{C}^r) \longrightarrow H^t_{\mathrm{loc}}(U,\mathbb{C}^s)$; si $U = \mathbb{R}^n$ y los coeficientes y sus derivadas están globalmente acotados, se obtiene $P\colon H^{t+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r) \longrightarrow H^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^s)$.

**Ejemplo 15.1.11.** (Multiplicadores y potenciales de Bessel) Si $a$ depende únicamente de $\xi$, entonces $\mathrm{Op}(a)u = \mathcal{F}^{-1}(a\widehat{u})$. Para $s \in \mathbb{R}$, las estimaciones anteriores a la Definición 6.1.2 muestran que $\langle\xi\rangle^s \in S^s_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n)$, con componente principal $\|\xi\|^s$ para $\xi \neq 0$. Por lo tanto,

$$J^s = \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^s), \qquad J^{-s} = \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{-s}).$$

El primero tiene orden $s$ y el segundo orden $-s$; ninguno es local salvo cuando el símbolo es un polinomio. Cuando $s > 0$, el núcleo de $J^{-s}$ es el núcleo de Bessel de la Proposición 6.1.4.

Sus símbolos principales son $\|\xi\|^s$ y $\|\xi\|^{-s}$, respectivamente. Directamente de la definición por Fourier, para

todo $t \in \mathbb{R}$,

$$J^s \colon H^{t+s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^t(\mathbb{R}^n), \qquad J^{-s} \colon H^t(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{t+s}(\mathbb{R}^n) \quad (s > 0)$$

son isomorfismos. Los núcleos son suaves cuando $x \neq y$ y, salvo en los casos polinómicos locales, poseen una singularidad conormal en $x = y$; para $s > 0$, el núcleo de $J^{-s}$ pierde progresivamente esa singularidad al aumentar $s$, pero no se vuelve $C^\infty$ para un orden finito general.

**Ejemplo 15.1.12.** (Laplaciano fraccionario y bajas frecuencias) Sea $s > 0$. El multiplicador de $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ es $\|\xi\|^s$. Si $s$ no es un entero par no es suave en $\xi = 0$ y, por lo tanto, no pertenece a la clase inhomogénea global $S^s_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ que acabamos de definir. Si $\vartheta$ se anula cerca de cero y vale uno para $\|\xi\| \geq 1$, entonces $\vartheta(\xi)\|\xi\|^s \in S^s_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n)$. La parte restante tiene frecuencia compacta y transforma distribuciones de soporte compacto en funciones suaves. En consecuencia, el laplaciano fraccionario es microlocalmente un pseudodiferencial clásico de orden $s$, aunque su tratamiento global homogéneo conserva información adicional en frecuencia cero. Esta diferencia desaparece para $(I - \Delta)^{\frac{s}{2}}$, cuyo símbolo $\langle\xi\rangle^s$ es suave en todo $\mathbb{R}^n$.
Para $s > 0$, el multiplicador $\|\xi\|^s$ lleva continuamente $H^{t+s}(\mathbb{R}^n)$ en $H^t(\mathbb{R}^n)$ y tiene símbolo principal $\|\xi\|^s$. Es no local cuando $s$ no es un entero par. Si $0 < s < 2$, su núcleo fuera de la diagonal se representa, con una constante dimensional, por $\|x - y\|^{-n-s}$ y la acción se interpreta en valor principal mediante la diferencia $u(x) - u(y)$. Así, la singularidad del núcleo está en la diagonal, pero su soporte no: ésta es la distinción entre no localidad y pseudolocalidad.

**Ejemplo 15.1.13.** (Transformadas de Riesz y de Hilbert) La transformada de Riesz $R_j = D_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ posee, fuera de $\xi = 0$, el símbolo $\frac{i\xi_j}{\|\xi\|}$, homogéneo de grado cero. En dimensión uno, la transformada de Hilbert con núcleo principal $\pi^{-1}(x - y)^{-1}$ tiene multiplicador $-i\,\mathrm{sign}(\xi)$. Ambos son operadores no locales de orden cero en altas frecuencias; el corte en frecuencia cero produce representantes de $S^0_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n)$ con el mismo comportamiento microlocal.
Los multiplicadores indicados son también sus símbolos principales. Como son acotados, ambos operadores actúan continuamente en cada $H^t(\mathbb{R}^n)$. El núcleo de Riesz es, fuera de la diagonal, un múltiplo de $\frac{x_j - y_j}{\|x-y\|^{n+1}}$; el de Hilbert es $\pi^{-1}\,\mathrm{pv}(x-y)^{-1}$. Son suaves fuera de $x = y$, singulares sobre la diagonal y no están soportados en ella.

**Ejemplo 15.1.14.** (Regularizantes e inversas exactas) El símbolo $e^{-\|\xi\|^2}$ pertenece a $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}))$ y su operador es convolución con una gaussiana; lleva $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por otra parte, $I - \Delta$ tiene multiplicador $1 + \|\xi\|^2$ y su inversa exacta en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es $\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{-2})$. Este último ejemplo contiene, sin términos de error, el mecanismo general de la inversión simbólica elíptica.
El operador gaussiano tiene orden $-\infty$, símbolo principal nulo en cada cociente de orden finito, núcleo suave y no local, y lleva $H^t(\mathbb{R}^n)$ en $H^N(\mathbb{R}^n)$ para cualesquiera $t, N \in \mathbb{R}$. El inverso $(I - \Delta)^{-1}$ tiene orden $-2$, símbolo principal $\|\xi\|^{-2}$ y es un isomorfismo $H^t(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{t+2}(\mathbb{R}^n)$. Su núcleo de Bessel es suave fuera de la diagonal y tiene allí la singularidad correspondiente al orden $-2$; es una inversa exacta y, en particular, una parametrix sin residuo.

## 15.2 Núcleos, soporte propio y cálculo simbólico

El símbolo describe el operador en frecuencia, pero el núcleo muestra cómo interactúan dos puntos del espacio. Esta segunda descripción será esencial para distinguir los operadores locales de los no locales, formular el soporte propio y demostrar la pseudolocalidad. También permitirá ver por qué la composición, el adjunto y los cambios de coordenadas permanecen dentro del cálculo.

### 15.2.1 El núcleo y la diagonal

El Teorema del núcleo de Schwartz para haces vectoriales, Teorema 10.2.57, permite representar un operador continuo mediante una distribución en el producto. En el modelo escalar euclidiano, la Definición 15.1.6 da

$$\mathbf{K}_{\mathrm{Op}(a)}(x,y) = (2\pi)^{-n}\,\mathrm{Os}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}\,a(x,\xi)\,d\xi.$$

La singularidad posible se concentra en $x = y$. Si $x \neq y$, el operador

$$L_{x,y} := \frac{1}{i\|x-y\|^2}(x-y)\cdot D_\xi$$

satisface $L_{x,y}e^{i(x-y)\cdot\xi} = e^{i(x-y)\cdot\xi}$. Después de integrar por partes $N$ veces, las derivadas de orden $N$ respecto de $\xi$ reducen el símbolo a orden $m-N$. Para $N > m+n$, la integral obtenida es absolutamente convergente. El mismo procedimiento puede repetirse después de derivar en $x$ y $y$. Por lo tanto, $\mathbf{K}_{\mathrm{Op}(a)}$ es suave fuera de la diagonal

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} := \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Un operador $A$ se llama **pseudolocal** si, para toda distribución $u$ sobre la que esté definido,

$$\operatorname{sing\,supp}(Au) \subseteq \operatorname{sing\,supp}(u).$$

Esta propiedad no afirma que $A$ sea local: sólo impide que cree singularidades en puntos donde el dato es suave.

Así, un operador pseudodiferencial puede ser no local porque su núcleo no está sostenido en la diagonal, pero sigue siendo pseudolocal porque ese núcleo es suave fuera de ella. Para extender el operador a distribuciones generales y controlar los soportes hace falta, además, una condición global sobre las proyecciones de su núcleo.

**Definición 15.2.1.** (Soporte propio) Sean $N$ y $M$ variedades suaves sin frontera, sean $\mathbf{E} \to N$ y $\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito y sea

$$A\colon \Gamma_c(N,\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(M,\mathbf{F})$$

un operador continuo, considerado también con valores en $\mathcal{D}'(M,\mathbf{F})$, y sea $\mathbf{K}_A$ su núcleo sobre $M \times N$. Decimos que $A$ está **propiamente soportado** si las dos proyecciones

$$\mathrm{pr}_M\colon \operatorname{supp}\mathbf{K}_A \longrightarrow M, \qquad \mathrm{pr}_N\colon \operatorname{supp}\mathbf{K}_A \longrightarrow N$$

son mapeos propios. Equivalentemente, para todo compacto $K$ de uno de los factores, la intersección de $\operatorname{supp}\mathbf{K}_A$ con la preimagen de $K$ tiene proyección compacta en el otro factor.

En el cálculo pseudodiferencial de este capítulo se tomará $N = M$; la formulación con dos variedades sólo registra que el soporte propio es una condición del núcleo y de sus dos proyecciones.

Esta condición tiene dos consecuencias distintas. La proyección sobre la fuente, $\mathrm{pr}_N$, controla el soporte de $Au$ cuando $u$ tiene soporte compacto. La proyección sobre el destino, $\mathrm{pr}_M$, permite definir $Au$ para una distribución que no tiene soporte compacto: al evaluar localmente contra una función de prueba sólo interviene una parte compacta de la distribución. En particular, un operador propiamente soportado se extiende continuamente

$$A\colon \Gamma_c(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma_c(\mathbf{F}), \qquad A\colon \mathcal{D}'(N,\mathbf{E}) \longrightarrow \mathcal{D}'(M,\mathbf{F}),$$

si su expresión local es pseudodiferencial. La segunda extensión se define por dualidad con el transpuesto propiamente soportado.

**Proposición 15.2.2.** (Descomposición con soporte propio) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $r,s \in \mathbb{N}$ y $a \in S^m_{1,0}(U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$. Para el operador local $A = \mathrm{Op}(a)$ existe un operador pseudodiferencial propiamente soportado $A_0$ del mismo orden y un operador $R$ con núcleo suave tales que $A = A_0 + R$. Además, $A_0$ tiene el mismo símbolo principal que $A$.

*Demostración.* Elegimos una función $\chi(x,y)$ igual a uno en una vecindad de la diagonal y con soporte contenido en una vecindad propiamente soportada de ésta. Definimos $\mathbf{K}_{A_0} := \chi \mathbf{K}_A$. Entonces $A_0$ es propiamente soportado. La amplitud $\chi(x,y)a(x,\xi)$ se reduce a un símbolo por el Teorema 15.1.9. En su desarrollo, el término con $\alpha = 0$ es $a(x,\xi)$ y, para $|\alpha| \geq 1$,

$$D^\alpha_\xi D^\alpha_y \big(\chi(x,y)a(x,\xi)\big)\big|_{y=x} = 0,$$

porque $\chi$ es constante igual a uno en una vecindad de la diagonal. Por lo tanto, el símbolo reducido difiere de $a$ por un elemento de $S^{-\infty}(U\times\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s))$ y, en particular, tiene el mismo símbolo principal. Por otra parte, $(1-\chi)\mathbf{K}_A$ está sostenido fuera de una vecindad de la diagonal. Las integraciones por partes efectuadas al inicio de la sección prueban que es suave. Así, $R = A - A_0$ posee el núcleo indicado. □

**Definición 15.2.3.** (Operador regularizante) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $r,s \in \mathbb{N}$. La clase

$$\Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(U;\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)$$

está formada por los operadores lineales continuos

$$A\colon C^\infty_c(U,\mathbb{C}^r) \longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{C}^s)$$

cuyo núcleo de Schwartz, escrito respecto de la medida de Lebesgue en la variable de entrada, pertenece a

$$C^\infty(U\times U;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)).$$

Sus elementos se llaman **operadores regularizantes locales**. Definimos

$$\Psi^{-\infty}(U;\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s) := \big\{A \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(U;\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s) \;\big|\; \mathbf{K}_A \text{ está propiamente soportado}\big\}. \tag{15.6}$$

Así, la notación sin el subíndice loc incluye el soporte propio.

En todo $\mathbb{R}^n$, si

$$a \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)),$$

el operador global de Kohn–Nirenberg $\mathrm{Op}(a)$ tiene núcleo suave y, por la Proposición 15.1.7, actúa continuamente de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^s)$. Esta afirmación global no impone soporte propio; sólo pertenece a $\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$ si su núcleo satisface además esa condición.

**Proposición 15.2.4.** (Símbolos y núcleos regularizantes) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $r, s \in \mathbb{N}$ y sea $A$ un operador pseudodiferencial local de $C_c^\infty(U, \mathbb{C}^r)$ en $C^\infty(U, \mathbb{C}^s)$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) toda localización de $A$ posee un símbolo en $S^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$;

(b) $\mathbf{K}_A$ es suave cerca de la diagonal;

(c) $\mathbf{K}_A$ pertenece a $C^\infty(U \times U; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$, es decir, $A \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(U; \mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$.

Si $A$ está propiamente soportado, estas condiciones equivalen además a $A \in \Psi^{-\infty}(U; \mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$.

*Demostración.* Si una localización posee símbolo en $S^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$, después de aplicar un total de $q$ derivadas en $x$ y $y$ al núcleo sólo aparecen factores polinómicos en $\xi$ de grado a lo sumo $q$. La estimación (15.2) con $N > n + q$ produce una mayorante integrable en $\mathbb{R}^n_\xi$; por lo tanto, puede derivarse bajo la integral y el núcleo es suave cerca de la diagonal. Todo núcleo pseudodiferencial es suave fuera de la diagonal, como se probó al comienzo de esta sección, de modo que (b) implica (c).
Recíprocamente, supongamos (c) y elijamos $\chi(x, y)$ igual a uno en una vecindad de la diagonal, con soporte propiamente soportado dentro de una localización coordenada. La transformada parcial

$$a_\chi(x, \xi) := \int_U e^{-i(x-y)\cdot\xi} \chi(x, y) \mathbf{K}_A(x, y)\, dy$$

es un símbolo de decrecimiento rápido. Para multiíndices $\alpha, \beta$ se usa primero $(D_x + D_y) e^{-i(x-y)\cdot\xi} = 0$ e integración por partes en $y$ para obtener

$$D_x^\alpha D_\xi^\beta a_\chi(x, \xi) = (-i)^{|\beta|} \int_U e^{-i(x-y)\cdot\xi} (D_x + D_y)^\alpha \big( (x-y)^\beta \chi(x, y) \mathbf{K}_A(x, y) \big)\, dy.$$

Como $(1 - \Delta_y)^L e^{-i(x-y)\cdot\xi} = \langle \xi \rangle^{2L} e^{-i(x-y)\cdot\xi}$, una segunda integración por partes da, para cada compacto $K$ de la variable $x$,

$$\sup_{x \in K} \| D_x^\alpha D_\xi^\beta a_\chi(x, \xi) \| \le C_{K,\alpha,\beta,L} \langle \xi \rangle^{-2L}.$$

El soporte propio de $\chi$ hace que la variable $y$ recorra un compacto cuando $x \in K$. Como $L$ es arbitrario, $a_\chi \in S^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$. El operador correspondiente tiene núcleo $\chi \mathbf{K}_A$. La parte $(1 - \chi)\mathbf{K}_A$ es suave para todo pseudodiferencial, por la suavidad fuera de la diagonal probada antes. Por lo tanto, cada localización posee un símbolo regularizante y se obtiene (a). La última afirmación se sigue directamente de la Definición 15.2.3 al añadir el soporte propio. □

**Teorema 15.2.5.** (Pseudolocalidad) Si $A$ es pseudodiferencial y está propiamente soportado, entonces

$$\operatorname{sing\,supp}(Au) \subseteq \operatorname{sing\,supp}(u)$$

para toda distribución $u$.

*Demostración.* Sea $x_0 \notin \operatorname{sing\,supp}(u)$. Elegimos $\chi \in C_c^\infty$ igual a uno en una vecindad de la clausura de un abierto $W \ni x_0$ y con soporte en una región donde $u$ es suave. Escribimos $u = \chi u + (1-\chi)u$. El primer término es una función suave de soporte compacto y $A(\chi u)$ es suave por la continuidad de la cuantización. Si $x \in W$ y $y \in \operatorname{supp}(1-\chi)$, entonces $x \neq y$; por lo tanto, los pares que intervienen en $A((1-\chi)u)$ permanecen fuera de la diagonal, donde el núcleo es suave. El soporte propio permite restringir $y$ a un compacto al evaluar localmente, por lo que el emparejamiento de ese núcleo suave con $(1-\chi)u$ depende suavemente de $x$. Así, $Au$ es suave en $W$. □

### 15.2.2 Composición

La reducción de amplitudes permite cerrar ahora el cálculo bajo composición. El producto ordinario de los símbolos proporciona el término principal; las derivadas cruzadas en $x$ y $\xi$ describen las correcciones de orden menor.

Sean $r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, $A = \operatorname{Op}(a)$ y $B = \operatorname{Op}(b)$, con

$$a \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2})), \qquad b \in S^\ell_{1,0}(\mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r_0}, \mathbb{C}^{r_1})).$$

Como operadores sobre la clase de Schwartz, $A$ y $B$ pueden componerse sin hipótesis adicionales. Al sustituir las fórmulas integrales, introducir primero cortes compactos y reagrupar las fases, se obtiene una integral oscilatoria con amplitud. Después del cambio $z = x + y$ y $\eta = \zeta - \xi$, el símbolo de la composición puede escribirse como

$$(a\#b)(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \operatorname{Os} \iint_{\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\eta} e^{-iy\cdot\eta} a(x, \xi+\eta) b(x+y, \xi)\, dy\, d\eta.$$

La expansión de Taylor de $b(x+y,\xi)$ en $y = 0$, seguida de integración por partes en $\eta$, da el resultado siguiente.

**Teorema 15.2.6.** (Composición simbólica) Sean $n, r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, $m, \ell \in \mathbb{R}$ y sean

$$a \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2})), \qquad b \in S^\ell_{1,0}(\mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r_0}, \mathbb{C}^{r_1})).$$

Como operadores de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{r_0})$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{r_2})$,

$$\operatorname{Op}(a)\operatorname{Op}(b) = \operatorname{Op}(a\#b), \qquad a\#b \in S^{m+\ell}_{1,0}(\mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r_0}, \mathbb{C}^{r_2})),$$

y

$$a\#b \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha a)(D_x^\alpha b).$$

En particular, $(a\#b)_{m+\ell} = a_m b_\ell$ para símbolos clásicos. Las mismas fórmulas se aplican a operadores localizados en un abierto y a sus extensiones sobre distribuciones siempre que el soporte propio garantice que la composición está definida.

*Demostración.* La fórmula integral anterior se obtiene primero con cortes compactos, donde Fubini es aplicable, y después se retiran los cortes mediante las estimaciones de integrales oscilatorias. Para $N \geq 1$ escri-

bimos

$$b(x+y,\xi)=\sum_{|\alpha|<N}\frac{y^\alpha}{\alpha!}D_x^\alpha b(x,\xi)+\sum_{|\alpha|=N}y^\alpha r_\alpha(x,y,\xi).$$

Aquí se usa el resto integral de Taylor

$$r_\alpha(x,y,\xi)=\frac{N}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{N-1}D_x^\alpha b(x+ty,\xi)\,dt,\qquad |\alpha|=N.$$

Como $y^\alpha e^{-iy\cdot\eta}=i^{|\alpha|}D_\eta^\alpha e^{-iy\cdot\eta}$, la integración por partes hace actuar $i^{-|\alpha|}D_\eta^\alpha$ sobre $a(x,\xi+\eta)$. La integral de $e^{-iy\cdot\eta}$ contra una función independiente de $y$ recupera la evaluación en $\eta=0$, lo que produce los términos escritos.

La parte restante es una suma finita, para $|\alpha|=N$, de integrales en $t\in[0,1]$ cuyas amplitudes son

$$\frac{N\,i^{-N}}{\alpha!}(1-t)^{N-1}(D_\xi^\alpha a)(x,\xi+\eta)(D_x^\alpha b)(x+ty,\xi).$$

Son amplitudes de orden $m+\ell-N$, uniformemente en $t$. La estimación de reducción probada en el Teorema 15.1.9 proporciona, para cada seminorma de orden $P$, otra de orden finito $P'$ y una constante independiente de $t$ tales que

$$q_{P,m+\ell-N}(r_N^{\#})\le C_{P,N,m,\ell}\,q_{P',m}(a)q_{P',\ell}(b).$$

En un abierto se usa la misma desigualdad sobre $K\Subset U$, sustituyendo en el miembro derecho $K$ por un compacto ligeramente mayor. Por lo tanto, $r_N^{\#}\in S^{m+\ell-N}_{1,0}(\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{r_0},\mathbb{C}^{r_2}))$. Como $N$ es arbitrario, el Lema 15.1.5 concluye la expansión. □

**Corolario 15.2.7.** (Conmutadores) Sean $a\in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ y $b\in S^\ell_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ símbolos escalares, y supongamos definida la composición en ambos órdenes. Entonces $[\mathrm{Op}(a),\mathrm{Op}(b)]$ tiene orden a lo sumo $m+\ell-1$. Más precisamente,

$$a\#b-b\#a=\frac{1}{i}\{a,b\}+r,\qquad r\in S^{m+\ell-2}_{1,0}(\mathbb{R}^n),$$

donde

$$\{a,b\}:=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial a}{\partial\xi_j}\frac{\partial b}{\partial x_j}-\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial b}{\partial\xi_j}\right).$$

Si, además, $a$ y $b$ son clásicos, el conmutador es clásico y su componente homogénea de orden $m+\ell-1$ es

$$\frac{1}{i}\{a_m,b_\ell\}:=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial a_m}{\partial\xi_j}\frac{\partial b_\ell}{\partial x_j}-\frac{\partial a_m}{\partial x_j}\frac{\partial b_\ell}{\partial\xi_j}\right).$$

Si $r\in\mathbb{N}$,

$$a\in S^m_{\mathrm{cl}}\big(\mathbb{R}^n;M_{r\times r}(\mathbb{C})\big),\qquad b\in S^\ell_{\mathrm{cl}}\big(\mathbb{R}^n;M_{r\times r}(\mathbb{C})\big),$$

entonces el término de orden $m+\ell$ es $[a_m,b_\ell]$. Si éste se anula, el conmutador tiene orden a lo sumo $m+\ell-1$, y su componente homogénea de ese grado es

$$[a_m,b_{\ell-1}]+[a_{m-1},b_\ell]+\frac{1}{i}\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial a_m}{\partial\xi_j}\frac{\partial b_\ell}{\partial x_j}-\frac{\partial b_\ell}{\partial\xi_j}\frac{\partial a_m}{\partial x_j}\right).$$

En particular, si $a_m$ y $b_\ell$ son escalares multiplicados por la identidad, los dos conmutadores algebraicos de esta fórmula se anulan y queda únicamente el término de Poisson.

*Demostración.* El teorema de composición proporciona

$$a\#b \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha a)(D_x^\alpha b), \qquad b\#a \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha b)(D_x^\alpha a).$$

En el caso escalar, tomamos los términos con $|\alpha|<2$ en ambas expansiones. Los restos pertenecen a $S^{m+\ell-2}_{1,0}$ y los productos sin derivadas se cancelan porque $ab=ba$. Así,

$$a\#b - b\#a = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{n}\big[(D_{\xi_j}a)(D_{x_j}b) - (D_{\xi_j}b)(D_{x_j}a)\big] + r = \frac{1}{i}\{a,b\} + r,$$

con $r\in S^{m+\ell-2}_{1,0}$. Cada término de la suma tiene orden a lo sumo $m+\ell-1$, lo que prueba la afirmación sin suponer clasicidad.

Si los símbolos escalares son clásicos, en altas frecuencias podemos escribir $a=a_m+a_{<m}$ y $b=b_\ell+b_{<\ell}$, donde los restos tienen órdenes $m-1$ y $\ell-1$. Los términos de Poisson que contienen alguno de esos restos tienen orden a lo sumo $m+\ell-2$. Por tanto, la componente homogénea de orden $m+\ell-1$ es $\frac{1}{i}\{a_m,b_\ell\}$. La composición de las expansiones clásicas proporciona asimismo las componentes homogéneas de los órdenes inferiores.

Para símbolos matriciales, el mismo agrupamiento debe conservar el orden de los factores. El grado $m+\ell$ es $a_mb_\ell - b_\ell a_m = [a_m,b_\ell]$. Si se anula, el grado siguiente es la suma de los términos sin derivadas

$$[a_m,b_{\ell-1}] + [a_{m-1},b_\ell]$$

y de los términos con una derivada escritos en el enunciado. Si ambos símbolos principales son escalares multiplicados por la identidad, esos conmutadores algebraicos se anulan. □

### 15.2.3 Transpuesto y adjunto formal

La composición muestra que el cálculo es estable al encadenar operadores. La segunda operación necesaria para la teoría elíptica es el adjunto. En el nivel de los núcleos, el transpuesto intercambia $x$ y $y$; en el caso hermitiano se toma además el adjunto fibra a fibra. La amplitud resultante depende de $y$ y se reduce por el Teorema 15.1.9. Denotamos por $\mathrm{Op}(a)^*_h$ el adjunto formal hermitiano, determinado por el apareamiento de secciones de Schwartz.

**Teorema 15.2.8.** (Símbolo del adjunto) Sean $n,r,s\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{R}$ y

$$a\in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)).$$

Respecto de los productos de $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$ y $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^s)$ definidos por la medida de Lebesgue y los productos hermitianos usuales,

$$\mathrm{Op}(a)^*_h = \mathrm{Op}(a^{(*)}),$$

donde

$$a^{(*)}\in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^s,\mathbb{C}^r))$$

y

$$a^{(*)}(x,\xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha D_x^\alpha \big(a(x,\xi)^*\big).$$

En particular,

$$a^{(*)} - a^* \in S^{m-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^s, \mathbb{C}^r)).$$

Si $a$ es clásico, entonces $a^{(*)}$ también lo es y $(a^{(*)})_m = a_m^*$.

*Demostración.* Para $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$ y $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^s)$, la fórmula del núcleo y Fubini regularizado dan

$$\langle \operatorname{Op}(a)u, v\rangle = (2\pi)^{-n} \operatorname{Os} \iiint_{\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi} \Big\langle u(y), e^{i(y-x)\cdot\xi} a(x,\xi)^* v(x) \Big\rangle \, dx\, dy\, d\xi.$$

Así, la amplitud del adjunto es $a(y,\xi)^*$ después de renombrar las variables. Su reducción a símbolo es exactamente el desarrollo afirmado. El término con $\alpha = 0$ es $a^*$ y el resto tiene orden a lo sumo $m-1$. Si $a$ es clásico, al sustituir su expansión homogénea y agrupar los términos de igual grado se obtiene una expansión clásica para $a^{(*)}$: cada derivada en $\xi$ disminuye el grado en uno, y en el grado $m$ sólo queda $a_m^*$. □

Para un operador diferencial de orden entero $m$, la componente principal de Fourier es $a_m = i^m \sigma_m(P)$. Por lo tanto,

$$(a_m)^* = (-i)^m \sigma_m(P)^* = i^m \big((-1)^m \sigma_m(P)^*\big).$$

Al retirar el factor de conversión $i^m$, esta identidad coincide con

$$\sigma_m(P_h^*) = (-1)^m \sigma_m(P)^*$$

de la Proposición 11.1.6. La aparente diferencia de signos procede únicamente de la convención $D_j = \partial_j$ fijada al comienzo del capítulo.

**Corolario 15.2.9.** (Ideal de regularizantes) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Si $R \in \Psi^{-\infty}(U; \mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$, entonces $R_h^* \in \Psi^{-\infty}(U; \mathbb{C}^s, \mathbb{C}^r)$. Si $A\colon C_c^\infty(U, \mathbb{C}^s) \to C^\infty(U, \mathbb{C}^q)$ y $B\colon C_c^\infty(U, \mathbb{C}^p) \to C^\infty(U, \mathbb{C}^r)$ son operadores pseudodiferenciales con los soportes que hacen definidas las composiciones, entonces

$$AR \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(U; \mathbb{C}^r, \mathbb{C}^q), \qquad RB \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(U; \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^s).$$

Las composiciones pertenecen a las clases sin el subíndice loc cuando sus núcleos están propiamente soportados; esto ocurre, en particular, si los factores lo están.

*Demostración.* En símbolos, cada término de los desarrollos de composición y adjunto contiene derivadas de un símbolo de orden arbitrariamente negativo. Por lo tanto, permanece en $S^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q))$, con los espacios de valores ajustados en cada composición. La formulación mediante núcleos da la misma conclusión: la composición integra un núcleo suave contra un núcleo con singularidad sólo diagonal, y el soporte propio permite realizar la integral y derivarla. □

### 15.2.4 Cambios de coordenadas

Las fórmulas anteriores se obtuvieron en coordenadas euclidianas. Para que definan una teoría sobre variedades debemos comprobar que un cambio de carta transforma un pseudodiferencial en otro del mismo orden y que la componente principal obedece la regla cotangente esperada. Sea $\kappa\colon U \longrightarrow V$ un difeomorfismo entre abiertos euclidianos y sea $T_\kappa u := u \circ \kappa$. Si $A = \operatorname{Op}(a)$ actúa en $V$, consideremos

$$\widetilde{A} := T_\kappa A T_\kappa^{-1}.$$

Para $x, y \in U$ suficientemente próximos definimos

$$B(x,y) := \int_0^1 D\kappa\big(y + t(x-y)\big)\, dt.$$

El Lema de Hadamard 1.4.10, con $y$ como punto base, da la identidad exacta $\kappa(x) - \kappa(y) = B(x,y)(x-y)$ y también $B(x,x) = D\kappa(x)$. Después del cambio de variables $z = \kappa(y)$ y $\xi = B(x,y)^T \eta$, el operador transformado posee la amplitud

$$\widetilde{b}(x,y,\xi) = a\big(\kappa(x), B(x,y)^{-T}\xi\big)\frac{|\det D\kappa(y)|}{|\det B(x,y)|}.$$

Lejos de la diagonal el núcleo es suave, de modo que puede insertarse un corte y suponer que $B(x,y)$ es invertible.

**Teorema 15.2.10.** (Invariancia por cambios de coordenadas) El operador $\widetilde{A}$ es pseudodiferencial del mismo orden que $A$. Si $a$ es clásico de orden $m$, el símbolo principal transformado es

$$\widetilde{a}_m(x,\xi) = a_m\big(\kappa(x), D\kappa(x)^{-T}\xi\big).$$

El símbolo completo se obtiene reduciendo $\widetilde{b}$ mediante el Teorema 15.1.9 y depende de las derivadas de orden superior de $\kappa$.

*Demostración.* La fórmula anterior muestra que $\widetilde{b}$ es una amplitud de orden $m$ en cada par de compactos coordinados. Esto se prueba mediante la regla de la cadena: cada derivada en $\xi$ produce un factor $B^{-T}$ y una derivada en la covariable de $a$, por lo que reduce el orden; las derivadas en $x$ y $y$ sólo producen coeficientes suaves y derivadas espaciales de $a$. El Teorema 15.1.9 produce el símbolo completo; el control de los pesos en esa reducción es el de la desigualdad de Peetre del Lema 6.1.1. En $y = x$, el cociente de determinantes vale uno y $B(x,x) = D\kappa(x)$. El término $\alpha = 0$ de la reducción proporciona la fórmula principal, mientras que cada término con $|\alpha| \geq 1$ contiene una derivada en $\xi$ y tiene orden a lo sumo $m-1$. $\square$

La fórmula prueba las dos afirmaciones que se necesitan globalmente. El símbolo completo no es una función intrínseca porque cambia mediante términos que involucran derivadas superiores del difeomorfismo. En cambio, la componente principal se transforma exactamente por la acción cotangente: si $\eta \in T^*_{\kappa(x)}V$ y $\xi = D\kappa(x)^T\eta$, entonces $\eta = D\kappa(x)^{-T}\xi$. Por ello define un objeto global sobre el cotangente.

La reducción de amplitudes controla los restos de composición y adjunto, mientras que el cambio de coordenadas separa el símbolo completo, dependiente de la carta, de su componente principal cotangente. Esta organización aparece de manera detallada en [140, Capítulo II, Secciones 3–5] y, en una presentación posterior más compacta, en [141, Secciones 0.2–0.4].

## 15.3 Operadores pseudodiferenciales sobre variedades

La invariancia por cambios de coordenadas permite abandonar el modelo euclidiano. La definición global será local cerca de la diagonal y quedará completada por una condición de soporte propio cuando se quiera actuar sobre distribuciones sin soporte compacto.

Durante esta sección, $M$ será una variedad suave finito-dimensional y sin frontera. No se supondrá compacta, completa ni riemanniana hasta la subsección de cuantización geométrica. Sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito. El caso real se obtiene por complexificación y restricción.

### 15.3.1 Definición local e independencia de las elecciones

Sean $(U, \kappa)$ una carta y $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$, $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s)$ marcos locales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$. Si $\chi, \psi \in C_c^\infty(U)$, el operador localizado $\chi A \psi$ se representa, mediante la carta y los marcos, por una matriz de operadores entre funciones con soporte compacto en $\kappa(U)$. Extender por cero después de estrechar los soportes permite considerarla en $\mathbb{R}^n$.

**Definición 15.3.1.** (Operador pseudodiferencial sobre una variedad) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional y sin frontera, y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito. Para $m \in \mathbb{R}$, un operador lineal continuo

$$A \colon \Gamma_c(M, \mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(M, \mathbf{F})$$

pertenece a $\Psi^m_{\mathrm{loc}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$ si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(a) el núcleo $\mathbf{K}_A$ es suave fuera de $\Delta_M$;

(b) para toda carta $(U, \kappa)$, todo par de marcos locales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ sobre $U$ y cualesquiera $\chi, \psi \in C_c^\infty(U)$, cada entrada de la representación euclidiana de $\chi A \psi$ es $\mathrm{Op}(a_{ba})$ con $a_{ba} \in S^m_{1,0}(\kappa(U))$, módulo un operador de núcleo suave.

Si las representaciones pueden elegirse clásicas, escribimos $\Psi^m_{\mathrm{cl,loc}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$. Denotamos por

$$\Psi^m(M; \mathbf{E}, \mathbf{F}) \subseteq \Psi^m_{\mathrm{loc}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$$

la subclase de los operadores propiamente soportados. Esta última notación se usará en composición y en la acción global sobre distribuciones.

**Definición 15.3.2.** (Operadores regularizantes sobre una variedad) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito. Definimos

$$\Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F}) := \left\{ A \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F}) \text{ para algún } m \in \mathbb{R} \;\middle|\; \mathbf{K}_A \text{ es suave en } M \times M \right\}.$$

La Proposición 15.2.4, aplicada en cartas y marcos, muestra que un elemento de esta clase pertenece localmente a todos los órdenes. La clase propiamente soportada es

$$\Psi^{-\infty}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F}) := \left\{ A \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F}) \;\middle|\; \mathbf{K}_A \text{ está propiamente soportado} \right\}. \tag{15.7}$$

Si $M$ es cerrada, ambas clases coinciden. Si $M$ no es compacta, la suavidad del núcleo no implica soporte propio ni, una vez elegidas una métrica riemanniana y métricas fibradas hermitianas, que el operador

$L^2(M,\mathbf{E}) \longrightarrow L^2(M,\mathbf{F})$ sea compacto.

La definición se formula usando cartas, marcos y funciones de corte, pero esas elecciones sólo sirven para expresar localmente el núcleo. El resultado siguiente muestra que basta verificarla en un atlas trivializante y que la clase obtenida es intrínseca.

**Teorema 15.3.3.** (Independencia de cartas, marcos y cortes) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional y sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito y sea $m \in \mathbb{R}$. La Definición 15.3.1 es independiente del atlas, de los marcos locales y de las funciones de corte. Además, todo $A \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ puede escribirse $A = A_0 + R$, donde $A_0 \in \Psi^m(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $R \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$.

*Demostración.* Consideremos dos cartas traslapadas. Después de insertar cortes cuyos soportes permanezcan dentro del traslape, las representaciones están conjugadas por el difeomorfismo de transición. El Teorema 15.2.10 muestra que la conjugación preserva el orden y la clase clásica. Un cambio de marco de $\mathbf{E}$ o de $\mathbf{F}$ multiplica el operador a derecha o izquierda por una matriz suave. El Teorema 15.2.6, aplicado a símbolos independientes de $\xi$, muestra de nuevo que se preserva el orden. Si se cambia un corte, la diferencia queda sostenida donde las dos variables no coinciden o vuelve a ser una multiplicación suave; en el primer caso el núcleo es suave y en el segundo se aplica el cálculo de composición.
Para la última afirmación elegimos una vecindad propiamente soportada $\mathcal{U}$ de la diagonal y un corte $\rho \in C^\infty(M\times M)$, igual a uno cerca de $\Delta_M$ y con $\operatorname{supp}\rho \subseteq \mathcal{U}$. La existencia se obtiene de una cubierta localmente finita por abiertos relativamente compactos y una partición de la unidad. El núcleo $\rho\mathbf{K}_A$ define $A_0$ y es propio; $(1-\rho)\mathbf{K}_A$ es suave porque está separado de la diagonal. □

La necesidad de distinguir las dos clases no es tipográfica. En una variedad no compacta, la definición puramente local no controla el comportamiento del núcleo cuando ambas variables escapan a todo compacto. Sin soporte propio, una composición puede no estar definida aunque los dos factores sean localmente pseudodiferenciales. En una variedad cerrada toda proyección de un cerrado de $M\times M$ es propia, de modo que la distinción desaparece.

### 15.3.2 El símbolo principal global

Una vez establecida la independencia de las elecciones locales, las componentes homogéneas principales pueden pegarse sobre el cotangente. El resultado es el objeto global que conservará la composición, el adjunto y la elipticidad.

Sea $\pi\colon T^*M \longrightarrow M$ la proyección y sea $0_M$ la sección nula. En una carta y en marcos locales, un operador clásico $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl,loc}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ posee una componente principal $a_m(x,\xi)$. El Teorema 15.2.10 y la transformación de los marcos muestran que, en los traslapes, estas componentes satisfacen exactamente la regla de transformación de un homomorfismo de haces

$$\pi^*\mathbf{E} \longrightarrow \pi^*\mathbf{F}$$

sobre $T^*M \setminus 0_M$.

**Definición 15.3.4.** (Símbolo principal pseudodiferencial) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito y sea $\pi\colon T^*M \to M$. Para

$A \in \Psi^m_{\mathrm{cl,loc}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$, el **símbolo principal de Fourier** de $A$ es la sección suave

$$\sigma^{\Psi}_m(A) \in \Gamma\big(T^*M \setminus 0_M, \operatorname{Hom}(\pi^*\mathbf{E}, \pi^*\mathbf{F})\big)$$

cuya expresión local es $a_m$. Satisface

$$\sigma^{\Psi}_m(A)(x,t\xi) = t^m \sigma^{\Psi}_m(A)(x,\xi), \qquad t > 0.$$

Para un operador diferencial $P$ de orden $m$, la compatibilidad exacta con el Capítulo 11 es

$$\sigma^{\Psi}_m(P)(x,\xi) = i^m \sigma_m(P)(x,\xi). \tag{15.8}$$

La igualdad no debe escribirse sin el factor $i^m$, porque se fijó la convención $D_j = \partial_j$. Como ese factor es un escalar no nulo, las dos nociones de elipticidad coinciden. También se recuperan exactamente las reglas previas de composición y adjunto, como se comprobó después del Teorema 15.2.8.

**Ejemplo 15.3.5.** (El operador de Dirac como operador pseudodiferencial) Sea $M$ una variedad riemanniana sin frontera y sea $D = c \circ \nabla^{\mathbf{S}}$ un operador de tipo Dirac, construido en la Sección 8.3. Todo operador diferencial de orden uno es un operador pseudodiferencial clásico propiamente soportado; por tanto,

$$D \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{S},\mathbf{S}).$$

Al combinar (15.8) con (11.2) se obtiene, con la convención de Fourier de este capítulo,

$$\sigma^{\Psi}_1(D)(x,\xi) = i\,c(\xi). \tag{15.9}$$

Para $\xi \neq 0$, este homomorfismo es invertible y

$$\big(\sigma^{\Psi}_1(D)(x,\xi)\big)^{-1} = \frac{i\,c(\xi)}{|\xi|^2_{\mathbf{g}}},$$

pues $(i\,c(\xi))^2 = |\xi|^2_{\mathbf{g}} I$. Si $\mathbf{S}$ está graduado, la misma fórmula restringida a $\mathbf{S}^+_x \to \mathbf{S}^-_x$ es el símbolo pseudodiferencial de $D^+$.

**Definición 15.3.6.** (Espacio de símbolos principales) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera, sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito y sea $\pi\colon T^*M \to M$. Sea $\mathcal{S}^m_{\hom}(T^*M;\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}))$ el espacio de las secciones suaves de $\operatorname{Hom}(\pi^*\mathbf{E},\pi^*\mathbf{F})$ sobre $T^*M \setminus 0_M$ que son homogéneas de grado $m$ en las fibras positivas.

**Teorema 15.3.7.** (Sucesión exacta del símbolo principal) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{G} \to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito. Para todo $m \in \mathbb{R}$ existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Psi^{m-1}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F}) \longrightarrow \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F}) \xrightarrow{\sigma^{\Psi}_m} \mathcal{S}^m_{\hom}(T^*M;\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})) \longrightarrow 0.$$

Además, para todo $\ell \in \mathbb{R}$, si $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $B \in \Psi^\ell_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{G},\mathbf{E})$, entonces

$$\sigma^\Psi_{m+\ell}(AB) = \sigma^\Psi_m(A) \circ \sigma^\Psi_\ell(B)$$

y, cuando están fijadas métricas fibradas hermitianas y una densidad para definir el adjunto,

$$\sigma^\Psi_m(A^*_h) = \sigma^\Psi_m(A)^*.$$

*Demostración.* La buena definición y las dos compatibilidades se obtienen de los Teoremas 15.2.10, 15.2.6 y 15.2.8. Si $A$ tiene orden a lo sumo $m-1$, su componente homogénea de grado $m$ se anula. Recíprocamente, si esa componente se anula en todas las cartas, la definición de símbolo clásico muestra que cada representante local satisface las estimaciones de orden $m-1$; por lo tanto, $A \in \Psi^{m-1}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$.
Para la suprayectividad, elegimos una métrica auxiliar en $T^*M$, un corte que anule una vecindad de $0_M$, una cubierta localmente finita por trivializaciones y una partición de la unidad. Cuantizamos en cada carta la componente homogénea dada, multiplicada por el corte, y sumamos con un sistema cuadrático de funciones de localización. La suma es localmente finita y puede hacerse propiamente soportada insertando un corte cerca de la diagonal. En los traslapes, el Teorema 15.2.10 muestra que los términos de grado $m$ se pegan en la sección inicial; las discrepancias tienen orden a lo sumo $m-1$. El operador global resultante tiene el símbolo prescrito. □

### 15.3.3 El conormal de la diagonal

La definición por símbolos aún depende de una cuantización local. Existe una descripción equivalente que utiliza únicamente el núcleo: los pseudodiferenciales clásicos son exactamente los operadores cuyos núcleos son conormales a la diagonal. Para formular esta equivalencia fijaremos primero la convención de orden y de densidades para una subvariedad general.

Sea $X$ una variedad suave sin frontera de dimensión $d$, sea $Y \subseteq X$ una subvariedad embebida sin frontera de codimensión $k$ y sea $\mathbf{G} \to X$ un haz vectorial suave complejo de rango finito $r_{\mathbf{G}}$. Su haz normal y su haz conormal son

$$NY := \operatorname{coker}\big(TY \hookrightarrow TX|_Y\big), \qquad N^*Y := \{(y,\eta) \in T^*X|_Y \mid \eta|_{T_yY} = 0\}.$$

Denotemos por $\pi_Y : N^*Y \to Y$ la proyección y por $\boldsymbol{\mathcal{D}}_1(Y)$ el haz de densidades de peso uno de la Definición 2.14.14. Una carta $(y,z) \in \mathbb{R}^{d-k} \times \mathbb{R}^k$ es **adaptada a** $Y$ si $Y$ queda dada por $z=0$. En ella, los covectores conormales son precisamente $(y,0;0,\theta)$.

**Definición 15.3.8.** (Distribución conormal) Una distribución $u \in \mathcal{D}'(X,\mathbf{G})$ es **conormal clásica a** $Y$ **de orden** $m$, y escribimos

$$u \in I^m(X,Y;\mathbf{G}),$$

si es suave en $X \setminus Y$ y, para toda localización en una carta adaptada y una trivialización de $G$, puede escribirse, módulo una sección suave, como

$$u = \left[(2\pi)^{-k}\,\mathrm{Os}\int_{\mathbb{R}^k_\theta} e^{iz\cdot\theta} b(y,z,\theta)\,d\theta\right]|dy\,dz|, \qquad b \in S^{m+\frac{d-2k}{4}}_{\mathrm{cl}}\big(\mathbb{R}^d_{(y,z)} \times \mathbb{R}^k_\theta; \mathbb{C}^{r_{\mathbf{G}}}\big). \tag{15.10}$$

Aquí $|dy\,dz|$ registra la densidad coordenada implícita en la convención que define las distribuciones como

funcionales sobre secciones de prueba del haz dual. En las fórmulas euclidianas se suprime este factor, pero debe conservarse al analizar cambios de coordenadas. La amplitud se toma con soporte compacto en las variables espaciales después de localizar. El número $m$ es el **orden conormal**; el desplazamiento $\frac{d-2k}{4}$ adapta la convención de Hörmander al orden del operador que se usará en la diagonal.

La definición es independiente de las coordenadas adaptadas, como muestra el siguiente cálculo. Sean

$$\widetilde{y} = \varphi(y,z), \qquad \widetilde{z} = \psi(y,z)$$

dos sistemas adaptados relacionados por el difeomorfismo $\Phi = (\varphi,\psi)$. La identidad $\psi(y,0)=0$ y el Lema de Hadamard 1.4.10, aplicado con $y$ como parámetro, dan la factorización exacta

$$\psi_a(y,z) = \sum_{b=1}^{k} C_{ab}(y,z) z_b, \qquad C_{ab}(y,z) := \int_0^1 \partial_{z_b}\psi_a(y,tz)\,dt. \tag{15.11}$$

En particular, $C(y,0) = D_z\psi(y,0)$. Como

$$D\Phi(y,0) = \begin{pmatrix} D_y\varphi(y,0) & D_z\varphi(y,0) \\ 0 & C(y,0) \end{pmatrix}$$

es invertible, lo son $A(y) := D_y\varphi(y,0)$ y $C(y,0)$. Después de estrechar la carta, $C(y,z)$ permanece invertible. La sustitución lineal, para cada $(y,z)$ fijo,

$$\theta = C(y,z)^{T}\widetilde{\theta}, \qquad d\theta = |\det C(y,z)|\, d\widetilde{\theta} \tag{15.12}$$

es exacta y satisface $z\cdot\theta = \widetilde{z}\cdot\widetilde{\theta}$. Si $T(y,z)$ denota la matriz que pasa de las componentes de $G$ en el marco inicial a sus componentes en el nuevo, entonces la amplitud transformada es

$$\widetilde{b}(\widetilde{y},\widetilde{z},\widetilde{\theta}) := T(y,z)\, b\big(y,z,C(y,z)^{T}\widetilde{\theta}\big)\,|\det C(y,z)|\,|\det D\Phi(y,z)|^{-1}, \qquad (y,z)=\Phi^{-1}(\widetilde{y},\widetilde{z}). \tag{15.13}$$

En efecto, el último determinante es precisamente el que convierte $|dy\,dz|$ en $|d\widetilde{y}\,d\widetilde{z}|$. Para comprobar el orden, aplicamos primero las derivadas en $\widetilde{\theta}$ y después las derivadas espaciales. Leibniz y la regla de la cadena expresan cada derivada de $b\big(\Phi^{-1}(\widetilde{y},\widetilde{z}), C^{T}\widetilde{\theta}\big)$ como una suma finita de términos

$$A_{\alpha,\beta,\gamma;\delta,\nu,\rho}(\widetilde{y},\widetilde{z})\,\widetilde{\theta}^{\rho}\,(D_{y,z}^{\delta}D_{\theta}^{\nu}b)\big(y,z,C(y,z)^{T}\widetilde{\theta}\big),$$

donde $(y,z)=\Phi^{-1}(\widetilde{y},\widetilde{z})$ y

$$|\nu| = |\gamma| + |\rho|, \qquad |\delta| + |\rho| \le |\alpha| + |\beta|.$$

En efecto, una derivada espacial que alcanza a $b$ aumenta $|\delta|$; si alcanza a $C^{T}\widetilde{\theta}$, crea a la vez un factor lineal en $\widetilde{\theta}$ y una derivada en $\theta$; si alcanza a un coeficiente, sólo lo deriva. Esto prueba las dos relaciones por inducción sobre $|\alpha|+|\beta|$. La invertibilidad uniforme de $C$ sobre cada compacto localizado da $c\langle\widetilde{\theta}\rangle \le \langle C^{T}\widetilde{\theta}\rangle \le C\langle\widetilde{\theta}\rangle$. El factor $\widetilde{\theta}^{\rho}$ se compensa con las $|\rho|$ derivadas adicionales en $\theta$. Como los restantes factores de (15.13) son suaves, para todos los multiíndices $\alpha,\beta,\gamma$ existe una constante $C_{\alpha,\beta,\gamma}>0$ tal que

$$\big\| D_{\widetilde{y}}^{\alpha} D_{\widetilde{z}}^{\beta} D_{\widetilde{\theta}}^{\gamma}\widetilde{b}\big\| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}\langle\widetilde{\theta}\rangle^{m+\frac{d-2k}{4}-|\gamma|}.$$

Cada componente homogénea se transforma por la misma fórmula; por lo tanto, (15.13) pertenece a la misma clase clásica. El cálculo aplicado a $\Phi^{-1}$ prueba la implicación inversa.

El coeficiente principal no es, por sí solo, una función canónica. Si $\mu = m + \frac{d-2k}{4}$ y $b_\mu$ es la componente homogénea principal, entonces

$$b_\mu(y,0,\theta)|dy| \tag{15.14}$$

define una sección homogénea de grado $\mu$ de

$$\pi_Y^*\big(G\restriction_Y \otimes \boldsymbol{\mathcal{D}}_1(Y)\big) \quad \text{sobre } N^*Y \setminus 0_Y,$$

módulo el grado siguiente. Éste es el **símbolo conormal principal** en la convención de densidades fijada arriba. Para verificar su invariancia, restringimos (15.13) a $z=0$. La forma triangular de $D\Phi(y,0)$ implica

$$|\det D\Phi(y,0)| = |\det A(y)|\,|\det C(y,0)|,$$

y, por consiguiente,

$$\widetilde{b}_\mu\big(\varphi(y,0),0,\widetilde{\theta}\big) = T(y,0)\,b_\mu\big(y,0,C(y,0)^T\widetilde{\theta}\big)\,|\det A(y)|^{-1} \quad \text{mod } \{\text{símbolos conormales de grado a lo sumo } \mu-1\}. \tag{15.15}$$

Como $|d\widetilde{y}| = |\det A(y)|\,|dy|$ sobre $Y$, la multiplicación de (15.15) por $|d\widetilde{y}|$ cancela el único determinante restante. A su vez, $\theta = C(y,0)^T\widetilde{\theta}$ es exactamente la regla de cambio de las coordenadas en $N^*Y$. De aquí que $b_\mu(y,0,\theta)|dy|$ defina la sección global anunciada. Esta comprobación explica por qué omitir la línea de densidades produciría un objeto no canónico.

Las fases normales empleadas en las cartas adaptadas se relacionan mediante la sustitución lineal homogénea (15.12). Como no se introducen variables de fase adicionales, los cambios quedan completamente descritos por la regla cotangente y por las densidades anteriores. Con esta convención, la normalización coincide con [84, Teoremas 18.2.8–18.2.11]: en dimensión ambiente $d$ y codimensión $k$, una distribución conormal de orden $m$ se representa por una amplitud de orden $m + \frac{d-2k}{4}$.

Para $X = M \times M$ y $Y = \Delta_M$, el espacio tangente en $(x,x)$ está formado por los pares $(v,v)$. Un covector $(\xi,\eta)$ lo anula si y sólo si $\xi(v)+\eta(v)=0$ para todo $v \in T_xM$. Por lo tanto,

$$N^*\Delta_M = \{(x,\xi;x,-\xi) \mid x \in M,\ \xi \in T_x^*M\}. \tag{15.16}$$

Ésta es la razón geométrica por la que el cotangente, y no el tangente, parametriza las oscilaciones del núcleo.

En este caso $d = 2n$ y $k = n$, de modo que el desplazamiento de la Definición 15.3.8 es $\frac{2n-2n}{4} = 0$. Por lo tanto, una distribución $\mathbf{K} \in I^m(M\times M, \Delta_M; \mathbf{F}\boxtimes\mathbf{E}^*)$ se escribe localmente, módulo una sección suave, como

$$(2\pi)^{-n}\,\mathrm{Os}\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{i(x-y)\cdot\xi}\,b(x,y,\xi)\,d\xi, \qquad b \text{ amplitud clásica de orden } m.$$

El haz $\boldsymbol{\mathcal{D}}_1$ de la Definición 2.14.14 aporta el factor de densidad necesario. Para relacionarlo con un núcleo operatorial, fijemos temporalmente una densidad positiva $\nu$ en $M$ y usemos $\nu$ tanto para identificar secciones suaves con distribuciones como para escribir la integración en la variable de entrada. El símbolo conormal principal del núcleo sobre la diagonal toma entonces valores en

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \otimes \boldsymbol{\mathcal{D}}_1(\Delta_M).$$

La identificación $\Delta_M \cong M$ y la división por $\nu$ producen una sección de $\operatorname{Hom}(\pi^*\mathbf{E}, \pi^*\mathbf{F})$. Si $\widetilde{\nu} = f\nu$, el coeficiente del núcleo relativo a la integración en la entrada adquiere $f(y)^{-1}$, factor que se cancela con la nueva densidad de integración $f(y)\nu(y)$. El emparejamiento en la salida multiplica, en cambio, la distribución núcleo por $f(x)$; su símbolo conormal sobre la diagonal adquiere por ello $f\restriction_{\Delta_M}$, y la división final por $\widetilde{\nu} = f\nu$ cancela exactamente ese factor. Por lo tanto, la sección normalizada es independiente de $\nu$. En una carta, tomando la densidad coordenada, esa sección es precisamente la componente homogénea de la amplitud de Kohn–Nirenberg. De este modo, la normalización por la densidad conserva el orden del operador y produce un símbolo conormal principal intrínseco.

**Teorema 15.3.9.** (Caracterización por núcleos conormales) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito. Sea

$$A \colon \Gamma_c(M, \mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(M, \mathbf{F})$$

un operador continuo y propiamente soportado. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$;

(b) $\mathbf{K}_A \in I^m(M \times M, \Delta_M; \mathbf{F} \boxtimes \mathbf{E}^*)$.

La equivalencia respeta el símbolo principal: la componente homogénea de la amplitud conormal, restringida a $N^*\Delta_M$ mediante (15.16) y normalizada por la densidad como se explicó arriba, es $\sigma^{\Psi}_m(A)$.

*Demostración.* Supongamos (a). En una carta y en marcos locales, la fórmula del núcleo de $\operatorname{Op}(a)$ es una representación oscilatoria con amplitud $a(x, \xi)$. Los cambios de carta transforman la fase y la amplitud como en la prueba del Teorema 15.2.10; la componente principal obedece la regla cotangente. Fuera de la diagonal, las integraciones por partes de la primera subsección de 15.2 producen suavidad. Por lo tanto, (b) se cumple.

Recíprocamente, supongamos (b). Cada representación conormal local define un operador con amplitud de orden $m$. El Teorema 15.1.9 lo reduce a un símbolo clásico de ese orden. El término suave restante es regularizante por la Proposición 15.2.4. Así se obtiene (a). En ambos sentidos, el término $\alpha = 0$ de la reducción de amplitudes conserva la componente homogénea principal; los demás términos tienen al menos una derivada en $\xi$ y reducen el orden. Esto demuestra la última afirmación. □

Combinando el teorema anterior con el Teorema 15.1.9 obtenemos una equivalencia precisa entre las tres descripciones:

$$\begin{aligned} \text{símbolo clásico de orden } m \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{amplitud clásica de orden } m, \\ \text{amplitud clásica de orden } m \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{núcleo conormal de orden } m \text{ a } \Delta_M. \end{aligned}$$

La primera equivalencia es exacta en el nivel de operadores y determina los símbolos completos, en cada carta y marcos, módulo la clase $S^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s))$ correspondiente; la segunda es exacta módulo núcleos suaves. El símbolo principal es exactamente el mismo objeto global en las tres formulaciones.

## 15.4 Cuantización riemanniana mediante la exponencial

La definición global anterior se obtiene localizando la cuantización de Kohn–Nirenberg. Cuando se fija una métrica y conexiones en los haces, puede construirse además una cuantización geométrica: la diferencia $x-y$ se sustituye por el vector $\exp_x^{-1}(y)$ y las fibras se comparan mediante transporte paralelo. Esta formulación no elimina las coordenadas de las pruebas, pero separa con claridad las elecciones geométricas de la parte simbólica.

Supongamos ahora que $(M,\mathbf{g})$ es riemanniana, sin frontera, pero no necesariamente completa ni compacta. Sean $\mathbf{E},\mathbf{F}$ haces vectoriales complejos con métricas fibradas hermitianas y conexiones compatibles. Existe una vecindad abierta $\mathcal{V}$ de la sección nula de $TM$ en la que

$$(x,v)\longmapsto (x,\exp_x v)$$

es un difeomorfismo sobre una vecindad $\mathcal{U}$ de $\Delta_M$. Esta afirmación es local alrededor de cada $(x,0)$ y se globaliza estrechando una cubierta localmente finita; no exige un radio de inyectividad uniforme. Escribimos

$$\ell(x,y):=\exp_x^{-1}(y)\in T_xM,\qquad (x,y)\in\mathcal{U}.$$

Sea $\tau^{\mathbf{E}}_{x\leftarrow y}\colon \mathbf{E}_y\longrightarrow \mathbf{E}_x$ el transporte paralelo a lo largo de la geodésica radial $t\mapsto \exp_x(t\ell(x,y))$. Elegimos $\chi\in C^\infty(M\times M)$ propiamente soportada, con soporte en $\mathcal{U}$ e igual a uno cerca de la diagonal. La métrica induce medidas de Lebesgue $dv_x$ en $T_xM$ y $d\xi_x$ en $T_x^*M$.

Por la construcción de la Subsección 2.7.1, la conexión de Levi–Civita determina la descomposición horizontal–vertical de $T(T^*M)$, mientras que las conexiones de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ inducen la conexión pullback sobre $\pi^*\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})\to T^*M$. Al derivar esta conexión en direcciones horizontales y verticales se obtienen las derivadas $\nabla^{\mathrm{H}}$ y $\nabla^{\mathrm{V}}$ definidas en (2.67). Escribimos $\langle\xi\rangle_{\mathbf{g}}=(1+\|\xi\|_{\mathbf{g}}^2)^{\frac12}$.

Fijemos una carta $(U,x^1,\dots,x^n)$, las coordenadas inducidas $(x,\xi)$, determinadas por $\xi=\xi_j dx^j$, y marcos $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r)$ y $\mathbf{f}=(\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_s)$ de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$. Adoptamos las convenciones

$$\nabla^{\mathbf{E}}_{\partial_i}\mathbf{e}_\alpha=\sum_{\gamma=1}^{r}\mathbf{e}_\gamma(\omega_i^{\mathbf{E}})_{\gamma\alpha},\qquad \nabla^{\mathbf{F}}_{\partial_i}\mathbf{f}_b=\sum_{c=1}^{s}\mathbf{f}_c(\omega_i^{\mathbf{F}})_{cb},\qquad \nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^k\partial_k.$$

La Proposición 2.7.27 derivó, a partir de la ecuación de transporte paralelo del covector, el signo de la fórmula

$$H_i=D_{x^i}+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k(x)\xi_k D_{\xi_j};$$

ésta es la identidad (2.65). En particular, si $\mathbf{a}\in\Gamma(\pi^*\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})|_{T^*U})$ y también denotamos por $\mathbf{a}(x,\xi)$ su matriz local, la Proposición 2.7.28 proporciona

$$\nabla^{\mathrm{V}}_j\mathbf{a}=D_{\xi_j}\mathbf{a},\qquad \nabla^{\mathrm{H}}_i\mathbf{a}=H_i\mathbf{a}+\omega_i^{\mathbf{F}}\mathbf{a}-\mathbf{a}\omega_i^{\mathbf{E}};$$

éstas son las identidades (2.68).

Para iterar intrínsecamente estas operaciones introducimos los haces

$$\mathscr{T}^{p,q}:=\pi^*\big((T^*M)^{\otimes p}\otimes(TM)^{\otimes q}\otimes\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})\big).$$

La conexión de Levi–Civita sobre los factores tensoriales, la conexión de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y la descomposición horizontal–vertical inducen

$$\nabla^{\mathrm{H}}\colon \Gamma(\mathscr{T}^{p,q}) \longrightarrow \Gamma(\mathscr{T}^{p+1,q}), \qquad \nabla^{\mathrm{V}}\colon \Gamma(\mathscr{T}^{p,q}) \longrightarrow \Gamma(\mathscr{T}^{p,q+1}).$$

Como en el Capítulo 9, el índice nuevo se añade al principio del bloque horizontal o vertical correspondiente. Si $T$ tiene componentes $T_{i_1\cdots i_p;}{}^{j_1\cdots j_q}$, entonces

$$\begin{aligned}\Big((\nabla^{\mathrm{H}}T)_{i i_1\cdots i_p;}\Big)^{j_1\cdots j_q} &= H_i T_{i_1\cdots i_p;}{}^{j_1\cdots j_q} + \omega_i^{\mathbf{F}} T_{i_1\cdots i_p;}{}^{j_1\cdots j_q} - T_{i_1\cdots i_p;}{}^{j_1\cdots j_q}\omega_i^{\mathbf{E}} \\ &\quad - \sum_{a=1}^{p} \Gamma^{k}_{i i_a} T_{i_1\cdots k\cdots i_p;}{}^{j_1\cdots j_q} + \sum_{b=1}^{q} \Gamma^{j_b}_{ik} T_{i_1\cdots i_p;}{}^{j_1\cdots k\cdots j_q}, \end{aligned} \tag{15.17}$$

$$\Big((\nabla^{\mathrm{V}}T)_{i_1\cdots i_p;}\Big)^{j j_1\cdots j_q} = D_{\xi_j} T_{i_1\cdots i_p;}{}^{j_1\cdots j_q}. \tag{15.18}$$

En particular, $\nabla^{\mathrm{H}}a$ toma valores en $\pi^*T^*M\otimes\pi^*\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, mientras que $\nabla^{\mathrm{V}}a$ toma valores en $\pi^*TM\otimes\pi^*\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. El subíndice de $\nabla^{\mathrm{V}}_j$ en la fórmula direccional anterior etiqueta la dirección vertical $\mathbf{d}x^j$; no es un índice covariante del tensor vertical. Definimos

$$(\nabla^{\mathrm{H}})^p(\nabla^{\mathrm{V}})^q a \in \Gamma(\mathscr{T}^{p,q})$$

aplicando primero las $q$ derivadas verticales y después las $p$ horizontales, siempre con la recurrencia tensorial precedente.

Para registrar el orden de las derivaciones sin suponer conmutatividad, sea $\mathfrak{W}_p := \{1,\dots,n\}^p$, con $\mathfrak{W}_0 := \{\varnothing\}$. Para palabras $I = (i_1,\dots,i_p) \in \mathfrak{W}_p$ y $J = (j_1,\dots,j_q) \in \mathfrak{W}_q$ ponemos

$$\nabla^{\mathrm{H}}_I := \nabla^{\mathrm{H}}_{i_1}\cdots\nabla^{\mathrm{H}}_{i_p}, \qquad \nabla^{\mathrm{V}}_J := \nabla^{\mathrm{V}}_{j_1}\cdots\nabla^{\mathrm{V}}_{j_q}. \tag{15.19}$$

Estas expresiones son composiciones direccionales deliberadas, no componentes de una derivada tensorial. La palabra conserva el orden; en particular, no se reemplaza $I$ por un multiíndice ni se conmutan letras. Sólo para contar las derivadas verticales escribimos $\beta(J) := e_{j_1} + \cdots + e_{j_q} \in \mathbb{N}_0^n$.

**Proposición 15.4.1.** (Conmutadores horizontal–vertical) En una carta coordenada y en los marcos locales precedentes, las composiciones direccionales satisfacen

$$[\nabla^{\mathrm{V}}_j, \nabla^{\mathrm{V}}_\ell]a = 0, \tag{15.20}$$

$$[\nabla^{\mathrm{H}}_i, \nabla^{\mathrm{V}}_j]a = -\Gamma^{j}_{ik}\nabla^{\mathrm{V}}_k a, \tag{15.21}$$

$$[\nabla^{\mathrm{H}}_i, \nabla^{\mathrm{H}}_j]a = \mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\partial_i,\partial_j)a - a\mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\partial_i,\partial_j) + R_{ij\ell}{}^{k}\xi_k\nabla^{\mathrm{V}}_\ell a. \tag{15.22}$$

En particular, el orden de una palabra puede cambiarse sólo al precio de los términos de curvatura y de orden vertical exhibidos aquí.

*Demostración.* La primera identidad sigue de la conmutación de las derivadas $D_{\xi_j}$. Como $H_i = D_{x^i} + \Gamma^{k}_{i\ell}\xi_k D_{\xi_\ell}$,

$$[H_i, D_{\xi_j}] = -\Gamma^{j}_{i\ell} D_{\xi_\ell}, \qquad [H_i, H_j] = R_{ij\ell}{}^{k}\xi_k D_{\xi_\ell}.$$

Al añadir las matrices de conexión, su curvatura sobre $\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es $\mathbf{R}^{\mathbf{F}}(\partial_i,\partial_j)a - a\mathbf{R}^{\mathbf{E}}(\partial_i,\partial_j)$. Estas tres identidades dan (15.20)– (15.22). □

El resultado siguiente sigue el esquema triangular del Lema 9.1.28; aquí es necesario registrar además las derivadas verticales creadas por (2.65).

**Lema 15.4.2.** (Expresión local de las derivadas geométricas iteradas) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave de dimensión $n$, sin frontera, no necesariamente completa ni compacta, y sea $\pi\colon T^*M \to M$. Sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos de rangos $r,s$, provistos de métricas fibradas y conexiones compatibles. La descomposición horizontal de $T(T^*M)$ es la determinada por la conexión de Levi–Civita, y las derivadas sobre $\pi^*\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ son las de (2.67). Fijemos una carta $(U,x^1,\dots,x^n)$ y marcos locales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, y sea

$$\mathbf{a} \in \Gamma(\pi^*\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})|_{T^*U}).$$

Considérense los coeficientes como elementos de $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(M_{s\times r}(\mathbb{C}))$. Para $I \in \mathfrak{W}_p$ y $J \in \mathfrak{W}_q$ existen coeficientes $C^{I,J}_{\mu,\nu}(x,\xi)$, indexados por el conjunto finito explícito

$$\mathcal{A}_{I,J} := \big\{(\mu,\beta(J)+\gamma) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n \;\big|\; |\mu|+|\gamma| \le p\big\}, \tag{15.23}$$

tales que

$$\nabla^{\mathrm{H}}_I \nabla^{\mathrm{V}}_J \mathbf{a} = \sum_{(\mu,\nu)\in\mathcal{A}_{I,J}} C^{I,J}_{\mu,\nu}(x,\xi)\big(D_x^\mu D_\xi^\nu \mathbf{a}(x,\xi)\big). \tag{15.24}$$

Si $\nu = \beta(J)+\gamma$, el coeficiente $C^{I,J}_{\mu,\nu}$ es polinómico en $\xi$ de grado a lo sumo $|\gamma|$. Para $p \ge 1$ sus coeficientes son sumas finitas de productos y composiciones formados con $D_x^\delta \Gamma_{ij}^k$, $D_x^\delta \omega_i^{\mathbf{E}}$ y $D_x^\delta \omega_i^{\mathbf{F}}$, donde $|\delta| \le p-1$; para $p=0$ no interviene ninguno de estos datos.
Más precisamente, sean $L_B(T) := BT$, $R_D(T) := TD$ y

$$\mathcal{H}_i C := D_{x^i} C + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{ij}^k \xi_k D_{\xi_j} C$$

para un coeficiente con valores en $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(M_{s\times r}(\mathbb{C}))$. Con la convención de que un coeficiente cuyo índice no pertenece a $\mathcal{A}_{I,J}$ es cero, los coeficientes quedan determinados por

$$C^{\varnothing,J}_{0,\beta(J)} = \mathrm{Id}_{M_{s\times r}(\mathbb{C})} \tag{15.25}$$

y, si $I^+ = (i,i_1,\dots,i_p)$,

$$C^{I^+,J}_{\mu,\nu} = \mathcal{H}_i C^{I,J}_{\mu,\nu} + L_{\omega_i^{\mathbf{F}}} \circ C^{I,J}_{\mu,\nu} - R_{\omega_i^{\mathbf{E}}} \circ C^{I,J}_{\mu,\nu} + \mathbf{1}_{\{\mu_i \ge 1\}} C^{I,J}_{\mu-e_i,\nu} + \sum_{j,k=1}^n \mathbf{1}_{\{\nu_j \ge 1\}} \Gamma_{ij}^k \xi_k C^{I,J}_{\mu,\nu-e_j}. \tag{15.26}$$

*Demostración.* Si $|I|+|J|=1$, las dos posibilidades son, por (2.68),

$$\nabla^{\mathrm{V}}_j \mathbf{a} = D_{\xi_j}\mathbf{a}$$

y

$$\nabla_i^{\mathrm{H}}\mathbf{a} = D_{x^i}\mathbf{a} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \xi_k D_{\xi_j}\mathbf{a} + L_{\omega_i^{\mathbf{F}}}(\mathbf{a}) - R_{\omega_i^{\mathbf{E}}}(\mathbf{a}).$$

En el primer caso el único coeficiente es la identidad con $(\mu,\nu)=(0,e_j)$. En el segundo son la identidad para $(e_i,0)$, el endomorfismo $(\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\xi_k)\mathrm{Id}_{M_{s\times r}(\mathbb{C})}$ para $(0,e_j)$ y $L_{\omega_i^{\mathbf{F}}} - R_{\omega_i^{\mathbf{E}}}$ para $(0,0)$. Los grados respectivos son 0, 1 y 0, y no aparece ninguna derivada de los datos de conexión.

Comencemos por la inducción vertical. Para $q=1$ ya se obtuvo $\nabla_j^{\mathrm{V}}\mathbf{a} = D_{\xi_j}\mathbf{a}$. Si $\nabla_J^{\mathrm{V}}\mathbf{a} = D_\xi^{\beta(J)}\mathbf{a}$ y $J^+ = (j, j_1, \dots, j_q)$, entonces la primera identidad de (2.68) da

$$\nabla_{J^+}^{\mathrm{V}}\mathbf{a} = D_{\xi_j}\left(D_\xi^{\beta(J)}\mathbf{a}\right) = D_\xi^{\beta(J)+e_j}\mathbf{a}.$$

No aparece un coeficiente adicional porque las coordenadas lineales de cada fibra tienen conexión vertical trivial. Esto prueba (15.25) para toda palabra $J$. Si se añade una letra vertical a $J$ manteniendo una palabra horizontal $I$, la convención (15.19) coloca esa derivación antes de las horizontales: se sustituye el dato inicial $C_{0,\beta(J)}^{\varnothing,J}$ por $C_{0,\beta(J)+e_j}^{\varnothing,J^+}$ y se aplican después, en el mismo orden, las recurrencias horizontales correspondientes a las letras de $I$. Así se obtiene el paso vertical para cualquier $I$, con la derivación $\nabla_j^{\mathrm{V}}$ aplicada antes de las derivadas horizontales.

Fijemos ahora $J$ y supongamos (15.24) para una palabra $I$ de longitud $p$. Para abreviar, sea $A_{\mu,\nu} := D_x^\mu D_\xi^\nu \mathbf{a}$. Al aplicar una derivada horizontal adicional a cada sumando y usar Leibniz se obtienen los términos

$$\begin{aligned}\nabla_i^{\mathrm{H}}\left(C_{\mu,\nu}^{I,J}A_{\mu,\nu}\right) &= (D_{x^i}C_{\mu,\nu}^{I,J})A_{\mu,\nu} + \sum_{j,k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\xi_k(D_{\xi_j}C_{\mu,\nu}^{I,J})A_{\mu,\nu}\\ &\quad + C_{\mu,\nu}^{I,J}D_x^{\mu+e_i}D_\xi^\nu\mathbf{a} + \sum_{j,k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\xi_k C_{\mu,\nu}^{I,J}D_x^\mu D_\xi^{\nu+e_j}\mathbf{a}\\ &\quad + L_{\omega_i^{\mathbf{F}}}\left(C_{\mu,\nu}^{I,J}A_{\mu,\nu}\right) - R_{\omega_i^{\mathbf{E}}}\left(C_{\mu,\nu}^{I,J}A_{\mu,\nu}\right).\end{aligned}$$

Las dos primeras expresiones derivan el coeficiente, la tercera deriva espacialmente a $\mathbf{a}$, la cuarta procede de la parte vertical del levantamiento horizontal y las dos últimas son, respectivamente, la multiplicación de conexión a izquierda y a derecha. Al reagrupar por la derivada $D_x^\mu D_\xi^\nu\mathbf{a}$ se obtiene exactamente (15.26).

Verifiquemos las cuatro propiedades inductivas. Los tres primeros términos de la recurrencia conservan $(\mu,\nu)$; el cuarto sustituye $\mu$ por $\mu+e_i$; el último sustituye $\nu=\beta(J)+\gamma$ por $\nu+e_j$. En los tres casos $|\mu|+|\gamma|\le p+1$. Las derivaciones en $x$ conservan el grado en $\xi$; el operador $\xi_k D_{\xi_j}$ tampoco lo aumenta; las multiplicaciones de conexión lo conservan; y el término que crea $D_{\xi_j}$ multiplica por una función lineal en $\xi$, por lo que el nuevo grado es a lo sumo $|\gamma|+1$. Al derivar un coeficiente anterior en $x$ pueden aparecer derivadas de orden $p$ de $\Gamma$, $\omega^{\mathbf{E}}$ o $\omega^{\mathbf{F}}$; los demás términos sólo introducen los datos sin derivar. Éste es precisamente el límite $(p+1)-1$. Finalmente, (15.23) es finito y cada una de las sumas de (15.26) contiene un número finito de términos. Queda probado el paso $p \longmapsto p+1$ y, con él, el lema. Las inducciones $q \longmapsto q+1$ para el dato vertical y $p \longmapsto p+1$ para las letras horizontales cubren, en particular, cada nivel total $p+q = N+1$ a partir de niveles anteriores. □

La relación anterior es triangular y puede invertirse sin perder control de los índices.

**Lema 15.4.3.** (Fórmula local triangular inversa) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave de dimensión $n$, sin frontera, no necesariamente completa ni compacta. Sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales complejos de rango finito con métricas fibradas y conexiones compatibles; usemos la conexión de Levi–Civita para el levantamiento horizontal. Fijemos una carta $U$, marcos de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ sobre $U$, y $\mathbf{a}\in\Gamma(\pi^{*}\operatorname{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})|_{T^{*}U})$. Para cada $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ existen coeficientes $\widetilde{C}_{I,J}^{\alpha,\beta}(x,\xi)$ tales que

$$D_x^{\alpha}D_{\xi}^{\beta}\mathbf{a}=\sum_{(I,J)\in\widetilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\beta}}\widetilde{C}_{I,J}^{\alpha,\beta}(x,\xi)\big(\nabla_I^{\mathrm{H}}\nabla_J^{\mathrm{V}}\mathbf{a}\big),\tag{15.27}$$

donde el conjunto finito admitido es

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\beta}:=\bigcup_{h=0}^{|\alpha|}\ \bigcup_{q=|\beta|}^{|\beta|+|\alpha|-h}\mathfrak{W}_h\times\mathfrak{W}_q.\tag{15.28}$$

Para $I\in\mathfrak{W}_h$ y $J\in\mathfrak{W}_q$, el coeficiente puede elegirse polinómico en $\xi$ de grado a lo sumo $q-|\beta|$ y formado con derivadas en $x$ de $\Gamma$, $\omega^{\mathbf{E}}$ y $\omega^{\mathbf{F}}$ de orden a lo sumo $|\alpha|-1$ cuando $|\alpha|\geq 1$.

*Demostración.* Ordenamos las derivadas parciales por su *complejidad horizontal* $|\alpha|$; la cantidad de derivadas verticales no interviene en el primer componente de este orden. Si $|\alpha|=0$, elegimos una palabra $J_\beta$ que contenga cada índice $j$ exactamente $\beta_j$ veces. La inducción vertical de la prueba anterior da $D_{\xi}^{\beta}\mathbf{a}=\nabla_{J_\beta}^{\mathrm{V}}\mathbf{a}$, que es (15.27).

Supongamos construida la fórmula inversa para toda derivada de complejidad horizontal menor que $p$ y para cualquier multiíndice vertical. Sea $|\alpha|=p$ y elijamos una palabra $I_\alpha$ que contenga $i$ exactamente $\alpha_i$ veces. En (15.24), aplicada a $(I_\alpha,J_\beta)$, hay un único término con $|\mu|=p$: para obtenerlo, cada una de las $p$ derivadas horizontales debe elegir $D_{x^i}$ actuando sobre $\mathbf{a}$. Su coeficiente es la identidad, su índice es $(\alpha,\beta)$ y todos los demás términos tienen $|\mu|\leq p-1$. Por lo tanto,

$$D_x^{\alpha}D_{\xi}^{\beta}\mathbf{a}=\nabla_{I_\alpha}^{\mathrm{H}}\nabla_{J_\beta}^{\mathrm{V}}\mathbf{a}-\sum_{(\mu,\nu)\in\mathcal{A}_{I_\alpha,J_\beta}\setminus\{(\alpha,\beta)\}}C_{\mu,\nu}^{I_\alpha,J_\beta}D_x^{\mu}D_{\xi}^{\nu}\mathbf{a}.\tag{15.29}$$

Sustituimos en cada sumando la hipótesis inductiva correspondiente a $(\mu,\nu)$. Esto define, después de sumar coeficientes con las mismas palabras, la recurrencia exacta

$$\widetilde{C}_{I,J}^{\alpha,\beta}=\mathbf{1}_{\{(I,J)=(I_\alpha,J_\beta)\}}\operatorname{Id}_{M_{s\times r}(\mathbb{C})}-\sum_{(\mu,\nu)\in\mathcal{A}_{I_\alpha,J_\beta}\setminus\{(\alpha,\beta)\}}C_{\mu,\nu}^{I_\alpha,J_\beta}\circ\widetilde{C}_{I,J}^{\mu,\nu},\tag{15.30}$$

donde la suma se restringe a $\mathcal{A}_{I_\alpha,J_\beta}$ y un coeficiente no definido se interpreta como cero.

Resta comprobar los límites. Escribamos $\nu=\beta+\gamma$; el lema anterior da $|\mu|+|\gamma|\leq p$. Si una palabra producida al sustituir $D_x^{\mu}D_{\xi}^{\nu}\mathbf{a}$ tiene longitudes $h$ y $q$, la hipótesis inductiva da $h\leq|\mu|$ y

$$|\nu|\leq q\leq|\nu|+|\mu|-h\leq|\beta|+p-h.$$

Esto es exactamente (15.28). El grado del producto de coeficientes es a lo sumo $|\gamma|+(q-|\nu|)=q-|\beta|$. Sus jets de conexión tienen orden a lo sumo $p-1$, porque el primer factor posee ese límite y los coeficientes inductivos usan a lo sumo $|\mu|-1$. Las sumas son finitas. Así queda probado el paso de complejidad horizontal $p-1$ a

$p$. □

**Lema 15.4.4.** (Derivadas tensoriales y palabras ordenadas) En una carta y marcos locales, cada componente de $(\nabla^{\mathrm{H}})^p(\nabla^{\mathrm{V}})^q a$ es la palabra direccional con los mismos índices, más una suma finita de palabras con menos de $p$ letras horizontales. Los coeficientes son polinomios universales en los símbolos de Christoffel y sus derivadas de orden a lo sumo $p-1$. Recíprocamente, cada palabra de longitudes $(p,q)$ es la componente correspondiente del tensor iterado más una suma del mismo tipo. Sobre cada compacto, las dos familias de componentes son por lo tanto equivalentes sin pérdida de orden.

*Demostración.* Para $(p,q)=(1,0)$ o $(0,1)$ no hay corrección. Las primeras identidades no triviales son

$$\left((\nabla^{\mathrm{H}})^2 a\right)_{ij} = \nabla^{\mathrm{H}}_i(\nabla^{\mathrm{H}}_j a) - \Gamma^k_{ij}\nabla^{\mathrm{H}}_k a$$

y

$$\left(\nabla^{\mathrm{H}}\nabla^{\mathrm{V}} a\right)_{i;}{}^{j} = \nabla^{\mathrm{H}}_i(\nabla^{\mathrm{V}}_j a) + \Gamma^j_{ik}\nabla^{\mathrm{V}}_k a.$$

Las fórmulas (15.17)–(15.18) muestran inductivamente que añadir un índice deja como término principal la palabra obtenida al añadir la misma letra y que todas las correcciones tienen menor longitud horizontal. La matriz triangular tiene diagonal identidad; despejar por inducción da la afirmación inversa. Las cotas uniformes sobre compactos siguen de las cotas de los jets de Christoffel. □

**Definición 15.4.5.** (Símbolo geométrico completo) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave sin frontera, no necesariamente completa ni compacta, sea $\pi\colon T^*M\to M$ y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales complejos de rangos finitos respectivos $r_{\mathbf{E}}, r_{\mathbf{F}}$, con métricas fibradas $\mathbf{h}_{\mathbf{E}},\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$ y conexiones compatibles. En $T^*M$ usamos el levantamiento horizontal de Levi–Civita y en $\pi^*\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ la conexión pullback inducida por las conexiones de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$. Un **símbolo geométrico de orden** $m$ es una sección

$$\mathbf{a}\in\Gamma\big(\pi^*\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})\big)$$

tal que, para cada compacto $K\Subset M$ y todos $p,q\in\mathbb{N}_0$, existe $C_{K,p,q}>0$ con

$$\left\|(\nabla^{\mathrm{H}})^p(\nabla^{\mathrm{V}})^q\mathbf{a}(x,\xi)\right\|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}},\mathbf{h}_{\mathbf{F}}} \le C_{K,p,q}\langle\xi\rangle_{\mathbf{g}}^{m-q}, \qquad x\in K,\quad \xi\in T^*_xM. \tag{15.31}$$

La clase se denota por $S^m_{\mathbf{g},\nabla}(T^*M;\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}))$.
En (15.31), la escritura $(\nabla^{\mathrm{H}})^p(\nabla^{\mathrm{V}})^q\mathbf{a}$ designa el tensor de $\mathscr{T}^{p,q}$ definido por la recurrencia intrínseca anterior, y la norma es la inducida por $\mathbf{g}$ y las métricas fibradas. Las palabras (15.19) se conservan únicamente como composiciones auxiliares para las inducciones locales.
El símbolo es **clásico** si existen secciones $\mathbf{a}_{m-j}$ sobre $T^*M\setminus 0_M$, homogéneas de grado $m-j$, tales que, para un corte radial $\vartheta$ nulo cerca de $0_M$ e igual a uno en altas frecuencias,

$$\mathbf{a}-\sum_{j=0}^{N-1}\vartheta\,\mathbf{a}_{m-j}\in S^{m-N}_{\mathbf{g},\nabla}(T^*M;\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})) \qquad (N\ge 1).$$

Escribimos entonces $\mathbf{a}\in S^m_{\mathrm{cl},\mathbf{g},\nabla}(T^*M;\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}))$.

La comparación con las clases locales es cuantitativa. Fijemos una norma matricial $\|\cdot\|_0$ en los marcos elegidos y denotemos por $\|\cdot\|_{\mathrm{op},0}$ la norma inducida en los espacios de endomorfismos correspondientes. Para un tensor $T \in \mathscr{T}^{p,q}$ denotamos por $\|T\|_{0,\mathrm{comp}}$ la norma euclidiana producto de las normas matriciales de sus componentes en la carta y los marcos fijados; para $(p,q) = (0,0)$ coincide con $\|\cdot\|_0$. Para $K \Subset U$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{R}$ definimos

$$p^{\mathrm{loc}}_{K,N,m}(a) := \max_{|\alpha|+|\beta|\le N} \sup_{x\in K,\,\xi\in\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{-m+|\beta|} \|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)\|_0, \tag{15.32}$$

$$p^{\mathrm{geom}}_{K,N,m}(a) := \max_{p+q\le N} \sup_{x\in K,\,\xi\in T_x^*M} \langle\xi\rangle_{\mathbf{g}}^{-m+q} \|(\nabla^{\mathrm{H}})^p(\nabla^{\mathrm{V}})^q a(x,\xi)\|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E},\mathbf{h_F}}, \tag{15.33}$$

$$p^{\mathrm{word}}_{K,N,m}(a) := \max_{\substack{p+q\le N\\ I\in\mathfrak{W}_p,\ J\in\mathfrak{W}_q}} \sup_{x\in K,\,\xi\in T_x^*M} \langle\xi\rangle_{\mathbf{g}}^{-m+q} \|\nabla^{\mathrm{H}}_I \nabla^{\mathrm{V}}_J a(x,\xi)\|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E},\mathbf{h_F}}. \tag{15.34}$$

Las normas tensoriales son las inducidas por $\mathbf{g}$ y las métricas fibradas.

**Proposición 15.4.6.** (Equivalencia cuantitativa de seminormas simbólicas) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave sin frontera, no necesariamente completa ni compacta; sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos de rango finito con métricas fibradas $\mathbf{h_E},\mathbf{h_F}$ y conexiones compatibles. Fijemos una carta $(U,x)$, marcos locales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, y un símbolo $\mathbf{a} \in \Gamma(\pi^*\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F})|_{T^*U})$. Para cada $K \Subset U$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{R}$ existe $C_{K,N,m} \ge 1$ tal que

$$C^{-1}_{K,N,m} p^{\mathrm{loc}}_{K,N,m}(\mathbf{a}) \le p^{\mathrm{word}}_{K,N,m}(\mathbf{a}) \le C_{K,N,m} p^{\mathrm{loc}}_{K,N,m}(\mathbf{a}), \qquad C^{-1}_{K,N,m} p^{\mathrm{word}}_{K,N,m}(\mathbf{a}) \le p^{\mathrm{geom}}_{K,N,m}(\mathbf{a}) \le C_{K,N,m} p^{\mathrm{word}}_{K,N,m}(\mathbf{a}). \tag{15.35}$$

En particular, en ambas desigualdades basta el mismo orden $N$: no se pierden derivadas. Las constantes dependen de $K,N,m$, de la carta y los marcos, de la comparación entre las normas euclidiana y riemanniana, de las métricas fibradas y de cotas sobre $K$ para las derivadas de $\Gamma$, $\omega^{\mathbf{E}}$ y $\omega^{\mathbf{F}}$ de orden a lo sumo $N-1$; cuando $N=0$ no dependen de esos jets.

*Demostración.* La compacidad de $K$ proporciona constantes $c_K, C_K, c'_K, C'_K > 0$ con

$$c_K\langle\xi\rangle \le \langle\xi\rangle_{\mathbf{g}} \le C_K\langle\xi\rangle, \qquad c'_K\|T\|_{0,\mathrm{comp}} \le \|T\|_{\mathbf{g},\mathbf{h_E},\mathbf{h_F}} \le C'_K\|T\|_{0,\mathrm{comp}}.$$

Los límites polinómicos y de jets del Lema 15.4.2 implican que, para $p+q \le N$, existe $B_{K,N} > 0$ tal que

$$\|C^{I,J}_{\mu,\beta(J)+\gamma}(x,\xi)\|_{\mathrm{op},0} \le B_{K,N}\langle\xi\rangle^{|\gamma|}, \qquad x \in K, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Como $|\mu| + |\beta(J)+\gamma| \le p+q \le N$, cada derivada parcial de (15.24) está incluida en $p^{\mathrm{loc}}_{K,N,m}$. Además,

$$\langle\xi\rangle^{|\gamma|}\|D_x^\mu D_\xi^{\beta(J)+\gamma}\mathbf{a}\|_0 \le p^{\mathrm{loc}}_{K,N,m}(\mathbf{a})\langle\xi\rangle^{m-q}.$$

Sumar el número finito de índices de (15.23) y usar las dos comparaciones de normas prueba la cota de $p^{\mathrm{word}}$ por $p^{\mathrm{loc}}$ en (15.35).

Para la dirección inversa, el Lema 15.4.3 da una constante $\widetilde{B}_{K,N} > 0$ tal que, si $(I,J) \in \mathfrak{W}_h \times \mathfrak{W}_q$ contribuye a $D_x^\alpha D_\xi^\beta \mathbf{a}$ con $|\alpha|+|\beta| \le N$, entonces

$$\|\widetilde{C}^{\alpha,\beta}_{I,J}(x,\xi)\|_{\mathrm{op},0} \le \widetilde{B}_{K,N}\langle\xi\rangle^{q-|\beta|}, \qquad h+q \le |\alpha|+|\beta| \le N.$$

Por la definición de la seminorma de palabras,

$$\langle \xi \rangle^{q-|\beta|} \| \nabla_I^{\mathrm{H}} \nabla_J^{\mathrm{V}} \mathbf{a} \|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}},\mathbf{h}_{\mathbf{F}}} \le C'_{K,N,m} p^{\mathrm{word}}_{K,N,m}(\mathbf{a}) \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}.$$

La suma finita de (15.27) acota $p^{\mathrm{loc}}$ por $p^{\mathrm{word}}$. Las recurrencias (15.26) y (15.30) muestran exactamente la dependencia declarada de las constantes. Finalmente, el Lema 15.4.4, aplicado para $p+q \le N$, compara $p^{\mathrm{geom}}$ con $p^{\mathrm{word}}$ usando los mismos órdenes. Aumentando una sola vez la constante se obtienen las cuatro desigualdades enunciadas. □

La Proposición 15.4.6 prueba que $S^m_{\mathbf{g},\nabla}(T^*M;\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}))$ coincide, en cada carta $(U,\kappa)$ relativamente compacta y en marcos locales de los haces, con $S^m_{1,0}(\kappa(U)\times\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{r_{\mathbf{E}}},\mathbb{C}^{r_{\mathbf{F}}}))$ y que ambas familias de seminormas generan la misma topología de Fréchet. También prueba que sustituir la métrica, las conexiones, los marcos o las cartas por otros datos suaves no cambia la clase local: se aplica (15.35) a cada elección y se interpone la familia local. En una base no compacta todas las constantes dependen de $K$, de modo que esta equivalencia sólo es uniforme sobre compactos.

**Definición 15.4.7.** (Cuantización riemanniana) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave de dimensión $n$, sin frontera, no necesariamente completa ni compacta. Sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales complejos de rango finito, con métricas fibradas y conexiones compatibles; sea $\chi\in C^\infty(M\times M)$ el corte propiamente soportado fijado al comienzo de esta sección, y usemos el transporte paralelo de $\mathbf{E}$ en la variable de entrada. Para $a\in S^m_{\mathbf{g},\nabla}(T^*M;\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}))$ y $\mathbf{u}\in\Gamma_c(M,\mathbf{E})$ definimos

$$\mathrm{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}(a)\mathbf{u}(x) := (2\pi)^{-n}\,\mathrm{Os}\int_{T^*_xM}\int_{T_xM} e^{-i\langle\xi,v\rangle}\chi(x,\exp_x v)\,a(x,\xi) \cdot \tau^{\mathbf{E}}_{x\leftarrow\exp_x v}\mathbf{u}(\exp_x v)\,dv_x\,d\xi_x.$$

La fórmula puede escribirse con la medida riemanniana. Si

$$\exp_x^*(d\lambda_{\mathbf{g}})(v) = j_x(v)\,dv_x,$$

entonces el integrando sobre $M$ contiene el factor $j_x(\ell(x,y))^{-1}d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$. Por ello la Definición 15.4.7 es compatible con la convención global $d\lambda_{\mathbf{g}}$: el factor $j_x(\ell(x,y))^{-1}$ es el jacobiano que relaciona ambas medidas.

Esta construcción es la cuantización pseudodiferencial asociada a la linealización $\ell$, no la cuantización geométrica de sistemas hamiltonianos. Sigue la idea intrínseca de Bokobza–Haggiag [23, Capítulos III–VI]: una linealización, un corte y un transporte convierten un símbolo cotangente en un núcleo cercano a la diagonal.

**Teorema 15.4.8.** (Equivalencia entre cuantización local y riemanniana) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave sin frontera, no necesariamente completa ni compacta. Sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales complejos de rango finito, con métricas fibradas y conexiones compatibles, y sea $\chi$ un corte propiamente soportado como en la Definición 15.4.7. Se cumplen las dos afirmaciones siguientes.

(i) Si $a\in S^m_{\mathrm{cl},\mathbf{g},\nabla}(T^*M;\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}))$, entonces

$$\mathrm{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}(a)\in\Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$$

y su símbolo principal es la componente homogénea $a_m$.

(ii) Si $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$, existe un símbolo geométrico clásico $a$ tal que

$$A - \mathrm{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}(a) \in \Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F}).$$

Si se permite añadir a la cuantización el núcleo suave de ese resto, la reconstrucción es exacta.

*Demostración.* Durante esta demostración, $M, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ y los datos geométricos permanecerán fijos; abreviaremos $\Psi^q := \Psi^q(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$, $\Psi^{-\infty} := \Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $S^q_{\mathbf{g},\nabla} := S^q_{\mathbf{g},\nabla}(T^*M;\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\mathbf{F}))$. Para (i), localicemos el operador con funciones sostenidas en una carta y elijamos la carta de manera que los segmentos que aparecen abajo permanezcan en ella. Sean $\mathbf{g}_0(x) := \det(\mathbf{g}(x))$ y $T(x,y)$ la matriz de $\tau^{\mathbf{E}}_{x\leftarrow y}$. Puesto que $\ell(x,x) = 0$, el Lema de Hadamard 1.4.10, en su versión con parámetros, da componente a componente la identidad exacta

$$\ell^a(x,y) = \sum_{b=1}^{n} C^a_b(x,y)(y^b - x^b), \qquad C^a_b(x,y) := \int_0^1 \partial_{y^b}\ell^a(x, x + t(y-x))\,dt. \tag{15.36}$$

Como $D_y\ell(x,x) = \mathrm{Id}_{T_xM}$, se tiene $C(x,x) = I$. Después de estrechar el soporte de la localización, $C(x,y)$ es invertible y tanto $C$ como $C^{-1}$ y cualquiera de sus familias finitas de derivadas están acotados.
En las coordenadas cotangentes, $d\xi_x = \mathbf{g}_0(x)^{-\frac12}\,d\xi$, mientras que $d\lambda_{\mathbf{g}}(y) = \mathbf{g}_0(y)^{\frac12}\,dy$. La fórmula que precede al teorema y (15.36) convierten el operador localizado en

$$(2\pi)^{-n}\,\mathrm{Os}\iint_{\mathbb{R}^n_y\times\mathbb{R}^n_\xi} e^{-i(y-x)\cdot C(x,y)^T\xi} h(x,y)a(x,\xi)T(x,y)u(y)\,dy\,d\xi,$$

donde, incluyendo en $h$ las dos funciones de localización,

$$h(x,y) = \chi(x,y)j_x(\ell(x,y))^{-1}\left(\frac{\mathbf{g}_0(y)}{\mathbf{g}_0(x)}\right)^{\frac12}.$$

Hacemos ahora el cambio exacto

$$\eta = C(x,y)^T\xi, \qquad \xi = L(x,y)\eta, \qquad L(x,y) := C(x,y)^{-T}. \tag{15.37}$$

Su jacobiano es $d\xi = |\det C(x,y)|^{-1}\,d\eta$. Por consiguiente, la amplitud local completa es

$$b(x,y,\eta) = h(x,y)|\det C(x,y)|^{-1}a\big(x, L(x,y)\eta\big)T(x,y). \tag{15.38}$$

Verifiquemos sus estimaciones. Las reglas de la cadena, aplicando primero las derivadas en $\eta$ y después las espaciales, producen una suma finita de términos

$$B_{\alpha,\beta,\gamma;\mu,\nu,\rho}(x,y)\eta^\rho(D_x^\mu D_\xi^\nu a)\big(x, L(x,y)\eta\big), \tag{15.39}$$

al calcular $D_x^\alpha D_y^\beta D_\eta^\gamma[a(x,L\eta)]$. Los índices de cada término satisfacen

$$|\nu| = |\gamma| + |\rho|, \qquad |\mu| + |\rho| \le |\alpha| + |\beta|,$$

y los coeficientes $B_{\alpha,\beta,\gamma;\mu,\nu,\rho}$ son productos de derivadas de $L$. Estas afirmaciones se obtienen inductivamente: una derivada espacial que alcanza a $a$ produce $D_x a$; una que alcanza a $L\eta$ produce simultáneamente

un factor lineal en $\eta$ y una derivada adicional en $\xi$; y una que alcanza a un coeficiente sólo deriva ese coeficiente. Esto enumera las tres posibilidades de Leibniz y conserva las dos relaciones mostradas.
Sobre el compacto espacial considerado existen $c, C > 0$ tales que $c\langle\eta\rangle \le \langle L(x,y)\eta\rangle \le C\langle\eta\rangle$. La Proposición 15.4.6 y (15.39) dan, para todos $\alpha, \beta, \gamma$, una constante $C_{\alpha,\beta,\gamma} > 0$ con

$$\left\| D_x^\alpha D_y^\beta D_\eta^\gamma a(x, L\eta) \right\| \le C_{\alpha,\beta,\gamma} \langle\eta\rangle^{m-|\gamma|}.$$

En efecto, el factor $\eta^\rho$ de cada sumando se compensa exactamente con las $|\rho|$ derivadas adicionales en $\xi$. Todas las derivadas de $h$, $|\det C|^{-1}$ y $T$ están acotadas en el compacto, por lo que

$$\|D_x^\alpha D_y^\beta D_\eta^\gamma b(x,y,\eta)\| \le C'_{\alpha,\beta,\gamma} \langle\eta\rangle^{m-|\gamma|}. \tag{15.40}$$

Esto prueba, derivada por derivada, que $b$ es una amplitud de orden $m$. Si $a$ es clásico, sustituir $L\eta$ en cada componente homogénea conserva su grado, y la misma estimación aplicada a cada resto prueba que $b$ es clásica. El Teorema 15.1.9 reduce (15.38) a un símbolo local clásico de orden $m$.
En la diagonal se cumplen $C(x,x) = L(x,x) = I$, $T(x,x) = I$, $j_x(0) = 1$, $\mathbf{g}_0(x)^{\frac{1}{2}} \mathbf{g}_0(x)^{-\frac{1}{2}} = 1$ y los cortes localizadores pueden tomarse iguales a uno. Así, $b_m(x,x,\eta) = a_m(x,\eta)$. El término de índice cero en la reducción amplitud–símbolo conserva esta componente; todo término restante contiene al menos una derivada en $\eta$ y tiene orden a lo sumo $m-1$. Esto prueba (i), incluido el enunciado sobre el símbolo principal.
Para (ii) construiremos todos los términos, no sólo el primero. Pongamos $R_0 := A$ y $r_m := \sigma_m^\Psi(R_0)$. Un corte radial, nulo cerca de la sección cero e igual a uno para covectores grandes, extiende $r_m$ a un símbolo geométrico clásico $a^{(0)}$ de orden $m$. Por (i), $\sigma_m^\Psi(\mathrm{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}(a^{(0)})) = r_m$; de aquí

$$R_1 := R_0 - \mathrm{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}(a^{(0)}) \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{m-1}.$$

La afirmación inductiva exacta es la siguiente: para cierto $N \ge 1$ se han construido $a^{(j)} \in S^{m-j}_{\mathrm{cl},\mathbf{g},\nabla}$, $0 \le j < N$, de modo que

$$R_N := A - \mathrm{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}\left( \sum_{j=0}^{N-1} a^{(j)} \right) \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{m-N}. \tag{15.41}$$

El caso $N = 1$ acaba de probarse. Supongamos (15.41) y sea $r_{m-N} := \sigma_{m-N}^\Psi(R_N)$. Extendemos $r_{m-N}$ mediante un corte radial a $a^{(N)} \in S^{m-N}_{\mathrm{cl},\mathbf{g},\nabla}$. La parte (i) da

$$\sigma_{m-N}^\Psi\big(\mathrm{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}(a^{(N)})\big) = r_{m-N}.$$

Por la exactitud del símbolo principal,

$$R_{N+1} := R_N - \mathrm{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}(a^{(N)}) \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{m-N-1},$$

que es precisamente (15.41) con $N+1$. Esto completa la inducción.
El Lema 15.1.5, aplicado en las cartas y reunido mediante una partición localmente finita, proporciona $a \in S^m_{\mathrm{cl},\mathbf{g},\nabla}$ tal que, para todo $N \ge 1$,

$$a - \sum_{j=0}^{N-1} a^{(j)} \in S^{m-N}_{\mathbf{g},\nabla}. \tag{15.42}$$

La parte (i), ahora en orden $m-N$, transforma el miembro izquierdo de (15.42) en un operador de $\Psi^{m-N}$. Al sumarlo con $R_N$ obtenemos

$$A - \mathrm{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}(a) \in \Psi^{m-N} \qquad \text{para todo } N \geq 1.$$

La intersección de estas clases es $\Psi^{-\infty}$ por la caracterización mediante núcleos suaves. Esto concluye (ii). □

El teorema distingue dos niveles que no deben confundirse: la componente principal se recupera en un solo paso, módulo $\Psi^{m-1}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$; la equivalencia módulo $\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ requiere construir todos los términos y aplicar la suma asintótica.

**Proposición 15.4.9.** (Dependencia de las elecciones) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos de rango finito. Considérense dos reglas de cuantización geométrica obtenidas al elegir métricas riemannianas, métricas fibradas, conexiones compatibles, linealizaciones y cortes propiamente soportados como en la Definición 15.4.7. Para un símbolo de orden $m$, cambiar el corte modifica la cuantización por un operador de $\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$. Cambiar los demás datos modifica el símbolo completo, pero no la clase $\Psi^{m}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$, el símbolo principal ni la cuantización módulo $\Psi^{m-1}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$. Después de corregir sucesivamente los términos inferiores, las dos cuantizaciones se corresponden módulo $\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$.

*Demostración.* Durante esta demostración, $M,\mathbf{E},\mathbf{F}$ permanecerán fijos; escribiremos $\Psi^{q} := \Psi^{q}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $\Psi^{-\infty} := \Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$. Trabajemos en una carta relativamente compacta y escribamos $v = y - x$. Usaremos las factorizaciones exactas del Lema de Hadamard 1.4.10, con $x$ como parámetro. Si una función matricial suave $F(x,v)$ satisface $F(x,0)=0$, entonces

$$F(x,v) = \sum_{j=1}^{n} v_j F_j(x,v), \qquad F_j(x,v) = \int_0^1 \partial_{v_j} F(x,tv)\,dt. \tag{15.43}$$

Si además $D_v F(x,0) = 0$, entonces

$$F(x,v) = \sum_{|\alpha|=2} v^{\alpha} F_{\alpha}(x,v), \qquad F_{\alpha}(x,v) = \frac{2}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)\,\partial_v^{\alpha} F(x,tv)\,dt. \tag{15.44}$$

En general, si las derivadas verticales de orden menor que $L$ se anulan en $v=0$, la misma demostración da

$$F(x,v) = \sum_{|\alpha|=L} v^{\alpha} F_{\alpha,L}(x,v), \qquad F_{\alpha,L}(x,v) = \frac{L}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^{L-1}\,\partial_v^{\alpha} F(x,tv)\,dt. \tag{15.45}$$

Estas identidades también proporcionan las cotas necesarias. Por ejemplo, para $K$ compacto y $N \in \mathbb{N}_0$ existe $C_{K,N,L} > 0$ tal que

$$\max_{|\rho|+|\sigma|\leq N} \sup_{x\in K,\ v\in\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon)} \|D_x^{\rho} D_v^{\sigma} F_{\alpha,L}(x,v)\| \leq C_{K,N,L} \max_{|\rho'|+|\sigma'|\leq N+L} \sup_{x\in K,\ v\in\overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon)} \|D_x^{\rho'} D_v^{\sigma'} F(x,v)\|.$$

Cada monomio transversal tiene una traducción exacta en el orden del símbolo. Para la fase lineal norma-

lizada,

$$v^{\alpha} e^{-i\eta\cdot v} = i^{|\alpha|} D_{\eta}^{\alpha} e^{-i\eta\cdot v}, \qquad \int_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-i\eta\cdot v} v^{\alpha} c(\eta)\, d\eta = (-i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-i\eta\cdot v} D_{\eta}^{\alpha} c(\eta)\, d\eta. \tag{15.46}$$

La segunda identidad se entiende primero con un corte en $\eta$ y luego por el procedimiento oscilatorio ya establecido. Así, un factor $v^{\alpha}$ aplicado a una amplitud de orden $r$ produce una amplitud de orden $r-|\alpha|$. Sean primero $\chi_0$ y $\chi_1$ dos cortes admisibles. Su diferencia se anula en una vecindad de $v=0$, por lo que todas sus derivadas verticales en $v=0$ son cero. Para cada $L$, la fórmula (15.45) y (15.46) expresan el núcleo de la diferencia mediante una amplitud de orden $m-L$. Dado cualquier orden prescrito elegimos $L$ mayor; la diferencia pertenece a todos los órdenes y, por la caracterización de los operadores regularizantes, posee núcleo suave.

Consideremos ahora dos conexiones en $\mathbf{E}$ y sus transportes radiales $T_0(x,x+v)$ y $T_1(x,x+v)$. Ambos valen la identidad para $v=0$. Definamos

$$F(x,v) := T_1(x,x+v) - T_0(x,x+v).$$

Aplicada a esta función $F$, la identidad (15.43) da

$$T_1(x,x+v) - T_0(x,x+v) = \sum_{j=1}^{n} v_j T_j(x,v), \qquad T_j(x,v) = \int_0^1 \partial_{v_j} F(x,tv)\, dt. \tag{15.47}$$

Los coeficientes $T_j$ satisfacen las cotas anteriores para cada familia finita de derivadas. La integración por partes de (15.46) muestra que la diferencia de las cuantizaciones, manteniendo fijos los demás datos, tiene amplitud de orden $m-1$.

La misma factorización controla los factores jacobianos y las medidas. En las coordenadas de (15.38), la combinación escalar correspondiente a unos datos geométricos cualesquiera es

$$q(x,y) = j_x(\ell(x,y))^{-1} \left(\frac{g_0(y)}{g_0(x)}\right)^{\frac{1}{2}} |\det C(x,y)|^{-1}, \qquad q(x,x) = 1.$$

Para una linealización no exponencial, $q$ denota el factor exacto obtenido del jacobiano de $y \longmapsto \ell(x,y)$ y de las densidades elegidas; la identidad $D_y \ell(x,x) = I$ vuelve a dar $q(x,x)=1$. Por lo tanto, para dos elecciones $q_1 - q_0$ satisface (15.43); sus coeficientes y todas sus derivadas hasta orden $N$ están acotados por una constante $C_{K,N}$ en cada compacto. Cada término de la diferencia vuelve a tener orden a lo sumo $m-1$ después de (15.46).

Falta comparar dos linealizaciones $\ell_0$ y $\ell_1$. Ambas satisfacen

$$\ell_{\kappa}(x,x) = 0, \qquad D_y \ell_{\kappa}(x,x) = I, \qquad \kappa \in \{0,1\}.$$

En consecuencia, $G(x,v) := \ell_1(x,x+v) - \ell_0(x,x+v)$ satisface las dos hipótesis de (15.44), y

$$G(x,v) = \sum_{|\alpha|=2} v^{\alpha} G_{\alpha}(x,v), \qquad G_{\alpha}(x,v) = \frac{2}{\alpha!} \int_0^1 (1-t) \partial_v^{\alpha} G(x,tv)\, dt. \tag{15.48}$$

Definamos $\ell_t = \ell_0 + tG$. Al estrechar la vecindad, todas las $\ell_t$, $0 \le t \le 1$, son linealizaciones y las matrices $C_t$

de (15.36) son uniformemente invertibles. La identidad fundamental del cálculo

$$e^{-i\langle \xi,\ell_1\rangle} - e^{-i\langle \xi,\ell_0\rangle} = -i\int_0^1 e^{-i\langle \xi,\ell_t\rangle}\langle \xi, G\rangle\, dt \tag{15.49}$$

es exacta. En cada integrando hacemos $\eta = C_t(x,y)^T\xi$. El factor $\langle \xi, G\rangle$ se convierte, por (15.48), en una suma de monomios $v^\alpha$, $|\alpha| = 2$, multiplicados por una función lineal en $\eta$ y por coeficientes suaves uniformemente acotados en $t$. Antes de integrar por partes la amplitud tiene orden $m+1$; dos aplicaciones de (15.46) la llevan al orden $m-1$. Las reglas de Leibniz usadas en (15.39) dan, para todos $\rho,\sigma,\gamma$, una constante $C_{K,\rho,\sigma,\gamma} > 0$ independiente de $t$ tal que la amplitud final $d_t$ satisface

$$\|D_x^\rho D_y^\sigma D_\eta^\gamma d_t(x,y,\eta)\| \le C_{K,\rho,\sigma,\gamma}\langle \eta\rangle^{m-1-|\gamma|}. \tag{15.50}$$

La integración en $t\in[0,1]$ conserva la estimación.

Una modificación de la métrica se descompone en el cambio de su linealización exponencial, ya tratado, y el cambio de los factores $q$; una modificación de la conexión de $\mathbf{E}$ se reduce a (15.47). La conexión de $\mathbf{F}$ interviene en las seminormas del símbolo, no en la integral que transporta la sección de entrada, y la Proposición 15.4.6 prueba que su cambio conserva la clase simbólica. Combinando (15.47), la factorización de $q$ y (15.50), obtenemos para cada familia finita de derivadas la estimación de una amplitud de orden $m-1$. Por lo tanto, todas las cuantizaciones consideradas tienen el mismo símbolo principal; ésta es una conclusión de las factorizaciones, no una hipótesis.

Finalmente, sean $Q_0, Q_1$ dos de estas reglas de cuantización. Lo probado afirma que $Q_0(a) - Q_1(a) \in \Psi^{m-1}$ para todo símbolo de orden $m$. Tomamos el símbolo principal de esta diferencia, elegimos una corrección de orden $m-1$ para uno de los dos símbolos y restamos. Si después de $N$ correcciones la diferencia pertenece a $\Psi^{m-N}$, su símbolo principal de grado $m-N$ determina la corrección siguiente y la nueva diferencia pertenece a $\Psi^{m-N-1}$. Una suma asintótica de las correcciones produce dos símbolos correspondientes cuya diferencia operatorial pertenece a $\Psi^{m-N}$ para todo $N$, es decir, a $\Psi^{-\infty}$. □

Queda así separado lo canónico de lo auxiliar. Son canónicos la clase $\Psi^m(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$, el símbolo principal, la elipticidad y la clase del operador módulo órdenes inferiores. El invariante microlocal direccional se añadirá después de construirlo por Fourier y demostrar su invariancia. Dependen de elecciones el símbolo completo, la cuantización concreta, la métrica, las conexiones, el corte y el transporte. El calificativo *intrínseco* para la fórmula riemanniana significa que todos esos datos son geométricos y globales, no que el resultado sea independiente de ellos término por término.

En una variedad curva, la sustitución de derivadas parciales por covariantes en la fórmula plana de composición requiere términos adicionales de orden inferior. Los términos inferiores contienen los jets de la exponencial, la conexión y la curvatura. Las fórmulas especialmente simples de [23, Capítulo VI] requieren una linealización localmente afín; la existencia de ésta equivale a una estructura afín local. Para el cálculo general, las fórmulas locales de los Teoremas 15.2.6 y 15.2.8, unidas a la equivalencia recién probada, proporcionan las expansiones con todos esos términos geométricos.

## 15.5 Inversión elíptica y análisis microlocal

El cálculo simbólico fue construido para invertir operadores elípticos sin exigir una inversa exacta. Primero se invertirá la componente principal y se corregirán sucesivamente los términos de orden inferior. El residuo final será regularizante; esta ganancia arbitraria de derivadas es la fuente tanto de la regularidad elíptica como de su versión microlocal.

**Definición 15.5.1.** (Parametrix) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito. Sea $A\in\Psi^m(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$. Un operador $B\in\Psi^{-m}(M;\mathbf{F},\mathbf{E})$ es una **parametrix derecha** si $AB-I_{\mathbf{F}}\in\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{F},\mathbf{F})$, una **parametrix izquierda** si $BA-I_{\mathbf{E}}\in\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ y una **parametrix bilateral** si satisface ambas condiciones. Para el cálculo puramente local se sustituyen las tres clases por sus variantes con el subíndice loc.

La elipticidad permite invertir un operador en altas frecuencias, aunque no garantiza una inversa algebraica o funcional. La diferencia entre ambas afirmaciones es esencial: la primera produce una parametrix módulo operadores regularizantes; la segunda también exige controlar el núcleo y el conúcleo en una realización concreta. Desarrollaremos primero la construcción simbólica y después mediremos la regularidad direccional con el frente de onda. Todas las pruebas se dan con la convención $D_j=\partial_j$ y, por lo tanto, con los factores $i^{-|\alpha|}$ del Teorema 15.2.6.

### 15.5.1 Criterios de elipticidad

Comenzamos por reunir varias formulaciones que se usarán indistintamente. Para una matriz $T$, denotamos por $s_{\min}(T)$ su menor valor singular.

**Proposición 15.5.2.** (Equivalencias de elipticidad) Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, $r\in\mathbb{N}$ y $m\in\mathbb{R}$. Sea

$$a\in S^m_{\mathrm{cl}}\big(U;\mathrm{End}(\mathbb{C}^r)\big),\qquad a\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_{m-j}.$$

Las condiciones siguientes son equivalentes, con constantes que pueden depender de cada compacto $K\Subset U$:

(a) $a$ es elíptico en el sentido de la Definición 15.1.2;

(b) existen $c_K,R_K>0$ tales que

$$\|a(x,\xi)v\|\geq c_K\langle\xi\rangle^m\|v\|,\qquad x\in K,\quad \|\xi\|\geq R_K;$$

(c) existen $c_K,R_K>0$ tales que

$$|\det a(x,\xi)|\geq c_K\langle\xi\rangle^{mr},\qquad x\in K,\quad \|\xi\|\geq R_K;$$

(d) $a_m(x,\xi)$ es invertible para todo $x\in U$ y todo $\xi\neq 0$;

(e) existe $b_0\in S^{-m}_{1,0}(U;\mathrm{End}(\mathbb{C}^r))$ tal que

$$ab_0-I_r\in S^{-1}_{1,0}(U;\mathrm{End}(\mathbb{C}^r)),\qquad b_0a-I_r\in S^{-1}_{1,0}(U;\mathrm{End}(\mathbb{C}^r)).$$

Además, en la región de altas frecuencias donde $a$ es invertible, su inversa satisface $a^{-1} \in S^{-m}_{1,0}(U;\mathrm{End}(\mathbb{C}^r))$.

*Demostración.* Durante esta demostración, $U, r, m$ permanecerán fijos y escribiremos

$$S^q := S^q_{1,0}\big(U;\mathrm{End}(\mathbb{C}^r)\big).$$

La identidad

$$s_{\min}(a(x,\xi)) = \|a(x,\xi)^{-1}\|^{-1}$$

prueba la equivalencia entre (a) y (b). Si se cumple (b), todos los valores singulares están acotados inferiormente por $c_K\langle\xi\rangle^m$, de modo que su producto da (c). Recíprocamente, las estimaciones de $S^m$ implican

$$\|\mathrm{adj}\, a(x,\xi)\| \le C_K\langle\xi\rangle^{m(r-1)}.$$

Por la fórmula $a^{-1} = (\det a)^{-1}\,\mathrm{adj}\, a$, la condición (c) produce la cota de (a).
Supongamos (d). Sobre el compacto $K\times\mathbb{S}^{n-1}$, la función $s_{\min}(a_m)$ tiene un mínimo positivo. Por la definición de la expansión clásica, existe $C_K > 0$ tal que, uniformemente para $x \in K$, $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $t \ge 1$,

$$\left\| t^{-m}a(x,t\omega) - a_m(x,\omega)\right\| \le C_K t^{-1}.$$

Esta desigualdad produce (b). En sentido inverso, si $a_m(x_0,\omega_0)v = 0$ para algún $v \neq 0$, la misma convergencia contradice la cota inferior de (b) aplicada a $(x_0, t\omega_0)$.
Si (d) vale, elegimos un corte radial $\vartheta$ que se anule cerca del origen y sea uno para frecuencias grandes, y ponemos

$$b_0(x,\xi) = \vartheta(\xi)a_m(x,\xi)^{-1}.$$

La homogeneidad de grado $-m$ y la compacidad local de la esfera muestran que $b_0 \in S^{-m}$. Como $a - \vartheta a_m \in S^{m-1}$ en altas frecuencias, los dos productos de (e) son $I_r$ módulo $S^{-1}$. Si (e) vale, entonces $ab_0 = I_r + r$ con $r \in S^{-1}$. Para frecuencias grandes $\|r\| < \frac{1}{2}$; por lo tanto, $a$ es invertible y

$$\|a^{-1}\| \le \|(I_r + r)^{-1}\|\,\|b_0\| \le C_K\langle\xi\rangle^{-m}.$$

Finalmente, en la región donde $a$ es invertible,

$$D_{x_j}(a^{-1}) = -a^{-1}(D_{x_j}a)a^{-1}, \qquad D_{\xi_j}(a^{-1}) = -a^{-1}(D_{\xi_j}a)a^{-1}.$$

Escribamos $\gamma = (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^{2n}$ y $D^\gamma = D_x^\alpha D_\xi^\beta$. Al aplicar $D^\gamma$ a $aa^{-1} = I_r$, separar el sumando en el que ninguna derivada alcanza a $a$ y multiplicar por $a^{-1}$ a la izquierda se obtiene la recurrencia exacta

$$D^\gamma(a^{-1}) = -a^{-1}\sum_{0<\delta\le\gamma}\binom{\gamma}{\delta}(D^\delta a)D^{\gamma-\delta}(a^{-1}), \qquad |\gamma| \ge 1. \tag{15.51}$$

El caso base $|\gamma| = 0$ es la cota $\|a^{-1}\| \le C_K\langle\xi\rangle^{-m}$ ya demostrada. Supongamos que, para todo $\gamma' = (\alpha',\beta')$ con $|\gamma'| < q$,

$$\|D^{\gamma'}a^{-1}(x,\xi)\| \le C_{K,\gamma'}\langle\xi\rangle^{-m-|\beta'|}.$$

Sea $|\gamma| = q$ y escribamos $\delta = (\alpha_1, \beta_1)$. Como $0 < \delta \le \gamma$, el factor $D^{\gamma-\delta}(a^{-1})$ está cubierto por la hipótesis inductiva. Cada sumando de (15.51) queda entonces acotado por

$$C_{K,\gamma,\delta}\langle\xi\rangle^{-m}\langle\xi\rangle^{m-|\beta_1|}\langle\xi\rangle^{-m-(|\beta|-|\beta_1|)} = C_{K,\gamma,\delta}\langle\xi\rangle^{-m-|\beta|}.$$

La suma contiene un número finito de multiíndices $\delta$; por lo tanto,

$$\|D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} a^{-1}(x,\xi)\| \le C_{K,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-m-|\beta|},$$

lo que cierra el paso inductivo y prueba la afirmación restante. □

**Definición 15.5.3.** (Conjunto elíptico y conjunto característico) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos del mismo rango finito. Sea $A \in \Psi^{m}_{\mathrm{cl,loc}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$. Su **conjunto elíptico** es

$$\mathrm{Ell}(A) := \left\{ (x,\xi) \in T^*M \setminus 0_M \mid \sigma^{\Psi}_m(A)(x,\xi) \text{ es un isomorfismo} \right\},$$

y su **conjunto característico** es

$$\mathrm{Char}(A) := (T^*M \setminus 0_M) \setminus \mathrm{Ell}(A).$$

El operador es **elíptico** si $\mathrm{Char}(A) = \varnothing$.

Esta elipticidad es local en la variable base. No implica la elipticidad uniforme de la Definición 15.1.2 en una variedad no compacta. La elipticidad con parámetro, que exige invertir uniformemente una familia $\lambda I - A$ en un sector, se definirá sólo al construir potencias complejas.

La homogeneidad del símbolo principal muestra que $\mathrm{Ell}(A)$ es abierto y cónico, mientras que $\mathrm{Char}(A)$ es cerrado y cónico. En una carta, pertenecer a $\mathrm{Ell}(A)$ equivale a que la cota inferior de la Proposición 15.5.2 sea válida en una vecindad de la base y en una vecindad cónica de la covariable. Para un operador diferencial $P$, la identidad (15.8) muestra que esta definición coincide con la elipticidad diferencial, pese al factor $i^m$.

## 15.5.2 Construcción bilateral de una parametrix

Las equivalencias anteriores reducen la elipticidad a la inversión uniforme de la componente principal en altas frecuencias. A partir de esa inversa se construyen, por recurrencia, correcciones a derecha y a izquierda. La recurrencia se escribe primero en coordenadas, donde los órdenes de cada sumando pueden seguirse de manera explícita. Sea $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}$ un símbolo clásico elíptico. Buscamos primero un desarrollo

$$b^{\mathrm{d}} \sim \sum_{k=0}^{\infty} b^{\mathrm{d}}_{-m-k}$$

tal que $a \# b^{\mathrm{d}} \sim I_r$; la letra d recuerda que $\mathrm{Op}(b^{\mathrm{d}})$ queda a la derecha de $\mathrm{Op}(a)$. El término de grado cero impone

$$b^{\mathrm{d}}_{-m} = a_m^{-1}.$$

Para $N \geq 1$, la componente de grado $-N$ de $a\#b^{\mathrm{d}}$ es

$$\sum_{\substack{j,k\geq 0,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ j+k+|\alpha|=N}} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha a_{m-j})(D_x^\alpha b^{\mathrm{d}}_{-m-k}).$$

Al separar el único sumando que contiene la incógnita $b^{\mathrm{d}}_{-m-N}$ se obtiene la recurrencia explícita

$$b^{\mathrm{d}}_{-m-N} = -a_m^{-1} \sum_{\substack{j,k\geq 0,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ j+k+|\alpha|=N,\ k<N}} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha a_{m-j})(D_x^\alpha b^{\mathrm{d}}_{-m-k}). \tag{15.52}$$

Para construir una parametrix a la izquierda escribimos $b^{\mathrm{i}}\#a \sim I_r$. Ahora $b^{\mathrm{i}}_{-m} = a_m^{-1}$ y

$$b^{\mathrm{i}}_{-m-N} = -\left( \sum_{\substack{j,k\geq 0,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ j+k+|\alpha|=N,\ k<N}} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha b^{\mathrm{i}}_{-m-k})(D_x^\alpha a_{m-j}) \right) a_m^{-1}. \tag{15.53}$$

En particular, los primeros correctores son

$$\begin{aligned} b^{\mathrm{d}}_{-m-1} &= -a_m^{-1}\left( a_{m-1}a_m^{-1} + i^{-1}\sum_{\ell=1}^{n}(D_{\xi_\ell}a_m)(D_{x_\ell}a_m^{-1}) \right), \\ b^{\mathrm{i}}_{-m-1} &= -\left( a_m^{-1}a_{m-1} + i^{-1}\sum_{\ell=1}^{n}(D_{\xi_\ell}a_m^{-1})(D_{x_\ell}a_m) \right) a_m^{-1}. \end{aligned}$$

El orden de los factores importa para símbolos matriciales. Asimismo, los factores $i^{-|\alpha|}$ no pueden suprimirse: proceden exactamente de la convención $D = \partial$ fijada al comienzo del capítulo.

**Teorema 15.5.4.** (Existencia y equivalencia de parametrices) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos del mismo rango finito. Sea $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) $A$ es elíptico;

(b) existe $B \in \Psi^{-m}_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{F}, \mathbf{E})$ tal que

$$AB = I_{\mathbf{F}} - R_{\mathbf{F}}, \qquad BA = I_{\mathbf{E}} - R_{\mathbf{E}}, \qquad R_{\mathbf{E}} \in \Psi^{-\infty}(M; \mathbf{E}, \mathbf{E}), \qquad R_{\mathbf{F}} \in \Psi^{-\infty}(M; \mathbf{F}, \mathbf{F});$$

(c) el símbolo principal de $A$ admite un inverso homogéneo de grado $-m$ sobre $T^*M \setminus 0_M$.

El operador $B$ puede elegirse propiamente soportado y es una parametrix bilateral de $A$. Dos parametrices bilaterales difieren por un operador de $\Psi^{-\infty}(M; \mathbf{F}, \mathbf{E})$.

*Demostración.* En un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y en marcos de rango común $r$, las fórmulas (15.52) y (15.53) definen términos homogéneos de grados $-m-k$. Verifiquemos esta afirmación por inducción. Para $k = 0$, $a_m^{-1}(x, t\xi) = t^{-m}a_m(x,\xi)^{-1}$. Supongamos que $b^{\mathrm{d}}_{-m-k}$ es homogéneo de grado $-m-k$ para $k < N$. En cada su-

mando de (15.52), $D_\xi^\alpha a_{m-j}$ tiene grado $m-j-|\alpha|$ y $D_x^\alpha b^{\mathrm{d}}_{-m-k}$ conserva el grado $-m-k$; como $j+k+|\alpha|=N$, su producto tiene grado $-N$. La multiplicación por $a_m^{-1}$ reduce el grado en $m$ y da exactamente $-m-N$. La suma es finita porque $j,k,|\alpha|\le N$. En la recurrencia izquierda ocurre lo mismo: la suma entre paréntesis tiene grado $-N$ y el factor $a_m^{-1}$ colocado a la derecha produce el grado $-m-N$. Esto prueba simultáneamente los dos pasos inductivos. El Lema 15.1.5 produce símbolos $b^{\mathrm{d}}, b^{\mathrm{i}} \in S^{-m}_{\mathrm{cl}}(U;\mathrm{End}(\mathbb{C}^r))$ con esos desarrollos. El Teorema 15.2.6 y las recurrencias dan

$$a\#b^{\mathrm{d}} - I_r \in S^{-\infty}(U\times\mathbb{R}^n;\mathrm{End}(\mathbb{C}^r)), \qquad b^{\mathrm{i}}\#a - I_r \in S^{-\infty}(U\times\mathbb{R}^n;\mathrm{End}(\mathbb{C}^r)).$$

Al cuantizar y ajustar el soporte propio obtenemos una parametrix derecha $B_{\mathrm{d}}$ y una izquierda $B_{\mathrm{i}}$. Si $AB_{\mathrm{d}} = I_{\mathbf{F}} - R_{\mathrm{d}}$ y $B_{\mathrm{i}}A = I_{\mathbf{E}} - R_{\mathrm{i}}$, entonces

$$B_{\mathrm{i}} - B_{\mathrm{d}} = B_{\mathrm{i}}(I_{\mathbf{F}} - AB_{\mathrm{d}}) - (I_{\mathbf{E}} - B_{\mathrm{i}}A)B_{\mathrm{d}} = B_{\mathrm{i}}R_{\mathrm{d}} - R_{\mathrm{i}}B_{\mathrm{d}}.$$

El Corolario 15.2.9 muestra que esta diferencia es regularizante. Por ello cualquiera de las dos parametrices es bilateral módulo $\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ en el defecto izquierdo y $\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{F},\mathbf{F})$ en el derecho.
Globalmente, (c) proporciona la sección homogénea $\mathbf{a}_m^{-1} := \sigma_m^{\Psi}(A)^{-1}$. La suprayectividad de la sucesión exacta del Teorema 15.3.7 permite cuantizarla como un operador $B_0$ de orden $-m$; entonces $AB_0 - I_{\mathbf{F}}$ y $B_0A - I_{\mathbf{E}}$ tienen orden $-1$. Pongamos $B_0^{\mathrm{d}} = B_0^{\mathrm{i}} = B_0$.
La afirmación inductiva derecha es

$$B^{\mathrm{d}}_{<N} := \sum_{k=0}^{N-1} B_k^{\mathrm{d}}, \qquad B_k^{\mathrm{d}} \in \Psi^{-m-k}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{F},\mathbf{E}), \qquad AB^{\mathrm{d}}_{<N} - I_{\mathbf{F}} \in \Psi^{-N}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{F},\mathbf{F}).$$

El caso base $N=1$ es la elección de $B_0$. Supuesta la afirmación para $N$, definimos la sección global homogénea

$$\mathbf{e}_N^{\mathrm{d}} := \sigma^{\Psi}_{-N}\big(AB^{\mathrm{d}}_{<N} - I_{\mathbf{F}}\big) \in \mathcal{S}^{-N}_{\mathrm{hom}}\big(T^*M;\mathrm{End}(\mathbf{F})\big)$$

y

$$\mathbf{c}^{\mathrm{d}}_{-m-N} := -\mathbf{a}_m^{-1}\,\mathbf{e}_N^{\mathrm{d}} \in \mathcal{S}^{-m-N}_{\mathrm{hom}}\big(T^*M;\mathrm{Hom}(\mathbf{F},\mathbf{E})\big).$$

Son secciones globales: $\mathbf{e}_N^{\mathrm{d}}$ es el símbolo principal de un operador global y la composición de haces $\mathbf{a}_m^{-1}\circ\mathbf{e}_N^{\mathrm{d}}$ transforma $\pi^*\mathbf{F}$ en $\pi^*\mathbf{E}$. La suprayectividad de la sucesión exacta proporciona $B_N^{\mathrm{d}} \in \Psi^{-m-N}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{F},\mathbf{E})$ con símbolo principal $\mathbf{c}^{\mathrm{d}}_{-m-N}$. La regla del producto de símbolos principales da

$$\begin{aligned}\sigma^{\Psi}_{-N}\big(A(B^{\mathrm{d}}_{<N} + B_N^{\mathrm{d}}) - I_{\mathbf{F}}\big) &= \mathbf{e}_N^{\mathrm{d}} + \sigma_m^{\Psi}(A)\mathbf{c}^{\mathrm{d}}_{-m-N}\\ &= \mathbf{e}_N^{\mathrm{d}} - \sigma_m^{\Psi}(A)\mathbf{a}_m^{-1}\mathbf{e}_N^{\mathrm{d}} = 0.\end{aligned}$$

Por exactitud, el nuevo error pertenece a $\Psi^{-N-1}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{F},\mathbf{F})$; esto cierra el paso derecho.
Para el lado izquierdo suponemos $B^{\mathrm{i}}_{<N}A - I_{\mathbf{E}} \in \Psi^{-N}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ y ponemos

$$\mathbf{e}_N^{\mathrm{i}} := \sigma^{\Psi}_{-N}\big(B^{\mathrm{i}}_{<N}A - I_{\mathbf{E}}\big) \in \mathcal{S}^{-N}_{\mathrm{hom}}\big(T^*M;\mathrm{End}(\mathbf{E})\big), \qquad \mathbf{c}^{\mathrm{i}}_{-m-N} := -\mathbf{e}_N^{\mathrm{i}}\,\mathbf{a}_m^{-1}.$$

Ahora $\mathbf{c}^{\mathrm{i}}_{-m-N}$ es una sección global de $\mathrm{Hom}(\pi^*\mathbf{F},\pi^*\mathbf{E})$ y puede cuantizarse como $B_N^{\mathrm{i}} \in \Psi^{-m-N}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{F},\mathbf{E})$. En este caso

$$\sigma^{\Psi}_{-N}\big((B^{\mathrm{i}}_{<N} + B_N^{\mathrm{i}})A - I_{\mathbf{E}}\big) = \mathbf{e}_N^{\mathrm{i}} + \mathbf{c}^{\mathrm{i}}_{-m-N}\sigma_m^{\Psi}(A) = 0,$$

de modo que el error izquierdo también desciende de $-N$ a $-N-1$. En una carta, las componentes de las dos elecciones de $\mathbf{c}_{-m-N}$ son exactamente los miembros derechos de (15.52) y (15.53); las fórmulas globales anteriores prueban, y no presuponen, que esas expresiones pegan.

El Lema 15.1.5, aplicado en una cubierta localmente finita y seguido del ajuste de soporte propio, suma las dos familias en operadores $B_{\mathrm{d}}$ y $B_{\mathrm{i}}$. Los pasos inductivos prueban que $AB_{\mathrm{d}} - I_{\mathbf{F}}$ pertenece a $\Psi^{-N}(M;\mathbf{F},\mathbf{F})$ y $B_{\mathrm{i}}A - I_{\mathbf{E}}$ a $\Psi^{-N}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ para cada $N$, luego son regularizantes. La identidad algebraica de las líneas anteriores muestra que $B_{\mathrm{i}} - B_{\mathrm{d}} \in \Psi^{-\infty}(M;\mathbf{F},\mathbf{E})$ y cualquiera de los dos es bilateral. Esto reproduce globalmente las recurrencias locales y prueba (c)⇒(b). La implicación (b)⇒(c) se obtiene tomando símbolos principales en $AB = I_{\mathbf{F}} - R_{\mathbf{F}}$ y $BA = I_{\mathbf{E}} - R_{\mathbf{E}}$. La equivalencia entre (a) y (c) es la Proposición 15.5.2, aplicada en cartas. Si $B$ y $\widetilde{B}$ son bilaterales, la misma identidad anterior, con $B_{\mathrm{i}} = B$ y $B_{\mathrm{d}} = \widetilde{B}$, prueba que $B - \widetilde{B}$ es regularizante. □

**Observación 15.5.5.** (Una parametrix no significa una inversa) Las identidades del teorema se cumplen módulo núcleos suaves, no de manera exacta. Una parametrix existe por el comportamiento de altas frecuencias; una inversa exige además inyectividad y suprayectividad en el espacio donde se realice $A$. Por ejemplo, en una variedad cerrada y conexa, el laplaciano es elíptico y posee una parametrix, pero las funciones constantes pertenecen a su núcleo. En consecuencia, no es invertible sobre todo $C^{\infty}(M)$. Si una realización de $A$ posee una inversa verdadera, ésta coincide con cualquier parametrix módulo la corrección que elimina los restos regularizantes; esa afirmación adicional no forma parte de la elipticidad simbólica.

**Corolario 15.5.6.** (Regularidad elíptica cualitativa) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos del mismo rango finito. Sea $A \in \Psi^{m}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ elíptico y propiamente soportado. Si $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(M,\mathbf{E})$ y $A\mathbf{u}$ es suave en un abierto $V \subseteq M$, entonces $\mathbf{u}$ es suave en $V$. En particular,

$$\operatorname{sing\,supp}(A\mathbf{u}) = \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{u}).$$

*Demostración.* Sea $B$ una parametrix bilateral. De $BA = I_{\mathbf{E}} - R_{\mathbf{E}}$ se obtiene $\mathbf{u} = B(A\mathbf{u}) + R_{\mathbf{E}}\mathbf{u}$. El primer sumando es suave en $V$ por la pseudolocalidad de $B$, y el segundo es suave en todo $M$. Esto prueba la primera afirmación. La inclusión opuesta para los soportes singulares es el Teorema 15.2.5. □

### 15.5.3 Frente de onda en un abierto euclidiano

La regularidad elíptica cualitativa detecta los puntos donde una distribución es suave. Para registrar también las direcciones cotangentes en las que falla la suavidad necesitamos localizar en la base y observar el decaimiento de Fourier dentro de conos.

Escribimos

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) := \{v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} v \text{ es compacto}\}.$$

Una distribución $v$ con soporte compacto es temperada y su transformada de Fourier es la función suave

$$\widehat{v}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \langle v(x), e^{-ix\cdot\xi} \rangle.$$

La continuidad de $v$ sobre las funciones con soporte en un compacto fijo muestra que $\widehat{v}$ y todas sus derivadas tienen crecimiento a lo más polinomial. El frente de onda registra las direcciones en las que este crecimiento mejora a decrecimiento rápido después de localizar en la variable espacial.

Diremos que dos conos abiertos $\Gamma', \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfacen $\Gamma' \Subset_{\mathrm{c}} \Gamma$ si

$$\overline{\Gamma' \cap \mathbb{S}^{n-1}} \subseteq \Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}.$$

**Lema 15.5.7.** (Estabilidad al estrechar el cono) Sea $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que, para todo $N$, existe $C_N$ tal que

$$|\widehat{v}(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N}, \qquad \xi \in \Gamma,$$

donde $\Gamma$ es un cono abierto. Si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\Gamma' \Subset_{\mathrm{c}} \Gamma$, entonces $\widehat{\psi v}$ decrece rápidamente en $\Gamma'$.

*Demostración.* Con la normalización unitaria,

$$\widehat{\psi v}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi - \eta)\widehat{v}(\eta)\, d\eta.$$

La función $\widehat{v}$ tiene crecimiento polinomial y $\widehat{\psi}$ es de Schwartz. Para $\xi \in \Gamma'$ dividimos la integral en $\eta \in \Gamma$ y $\eta \notin \Gamma$. En la primera región se usa el decrecimiento arbitrario de $\widehat{v}$ y la desigualdad de Peetre del Lema 6.1.1. En la segunda, la separación angular de los conos da una constante $c > 0$ tal que

$$|\xi - \eta| \geq c(|\xi| + |\eta|)$$

si $\xi \in \Gamma'$ y $\eta \notin \Gamma$. El decrecimiento de $\widehat{\psi}$ compensa entonces tanto cualquier potencia de $\xi$ como el crecimiento polinomial de $\widehat{v}$. Las dos integrales quedan acotadas por $C'_N \langle \xi \rangle^{-N}$ para todo $N$. □

**Definición 15.5.8.** (Frente de onda euclidiano) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $u \in \mathcal{D}'(U)$. Un punto $(x_0, \xi_0) \in U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es una **dirección regular** de $u$ si existen $\varphi \in C_c^\infty(U)$, igual a uno en una vecindad de $x_0$, y un cono abierto $\Gamma$ que contiene a $\xi_0$, tales que, para todo $N \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_{\xi \in \Gamma} \langle \xi \rangle^N |\widehat{\varphi u}(\xi)| < \infty.$$

El **frente de onda** de $u$ es el complemento de las direcciones regulares:

$$\mathrm{WF}(u) \subseteq U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

El Lema 15.5.7 muestra que la definición no depende de la función de corte: si $\psi$ tiene soporte en la región donde $\varphi = 1$, entonces $\psi u = \psi(\varphi u)$ y basta estrechar el cono.

**Proposición 15.5.9.** (Propiedades elementales del frente de onda) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Para $u, v \in \mathcal{D}'(U)$ y $f \in C^\infty(U)$ se cumplen:

(i) $\mathrm{WF}(u)$ es cerrado en $T^*U \setminus 0_U$ y cónico en la covariable;

(ii)
$$\mathrm{WF}(u+v) \subseteq \mathrm{WF}(u) \cup \mathrm{WF}(v), \qquad \mathrm{WF}(fu) \subseteq \mathrm{WF}(u);$$

(iii) la proyección $\pi \colon T^*U \longrightarrow U$ satisface

$$\pi\big(\mathrm{WF}(u)\big) = \operatorname{sing\,supp}(u).$$

*Demostración.* Si una función de corte y un cono prueban regularidad en $(x_0, \xi_0)$, la misma función sirve para los puntos base de una vecindad de $x_0$ y el mismo cono sirve para las direcciones cercanas a $\xi_0$. El conjunto de direcciones regulares es, por lo tanto, abierto. La invariancia bajo dilataciones positivas es inmediata y prueba (i).

Para una suma se elige un corte común y se intersecan dos conos de regularidad. Para $fu$, se toma un corte $\psi$ con soporte donde el corte original vale uno y se aplica el Lema 15.5.7 al multiplicador suave $\psi f$. Esto prueba (ii).

Si $u$ es suave cerca de $x_0$, una localización $\varphi u$ pertenece a $C_c^\infty$ y su transformada es de Schwartz en todas las direcciones. Por consiguiente, $x_0$ no pertenece a la proyección del frente de onda. Recíprocamente, supongamos que ninguna covariable no nula sobre $x_0$ pertenece al frente de onda. La compacidad de $\mathbb{S}^{n-1}$ permite elegir un número finito de conos de regularidad que cubren la esfera. Tras escoger una sola función $\varphi$, igual a uno cerca de $x_0$ y con soporte contenido en la intersección de las regiones donde valen los cortes correspondientes, el lema anterior muestra que $\widehat{\varphi u}$ decrece más rápido que cualquier potencia en todas las direcciones. Así, $\xi^\alpha \widehat{\varphi u} \in L^1$ para todo $\alpha$. La inversión de Fourier, aplicada distribucionalmente, implica $\varphi u \in C^\infty$. Luego $u$ es suave cerca de $x_0$, lo que concluye (iii). □

### 15.5.4 Invariancia y definición global

La definición euclidiana está expresada en frecuencias, pero la dirección que registra pertenece al cotangente. Debemos comprobar que un difeomorfismo transporta esas direcciones mediante su mapeo cotangente y conserva el decaimiento rápido en los conos correspondientes. La afirmación precisa es la siguiente.

**Proposición 15.5.10.** (Invariancia por difeomorfismos) Sea $\kappa\colon U \longrightarrow V$ un difeomorfismo entre abiertos euclidianos y sea $u \in \mathcal{D}'(U)$. Para la distribución transformada $\kappa_* u \in \mathcal{D}'(V)$ se tiene

$$\mathrm{WF}(\kappa_* u) = \left\{ \left(\kappa(x), D\kappa(x)^{-T}\xi\right) \mid (x,\xi) \in \mathrm{WF}(u) \right\}.$$

*Demostración.* Localicemos $u$ en un compacto donde $\kappa$ sea la carta considerada. La transformada de Fourier de una localización de $\kappa_* u$ puede escribirse, por inversión de Fourier de la distribución localizada, como una integral en $(x,\xi)$ cuya fase es

$$x \cdot \xi - \kappa(x) \cdot \eta.$$

Sus puntos estacionarios en $x$ satisfacen $\xi = D\kappa(x)^T \eta$. Supongamos que $(x_0, \xi_0)$ es regular y pongamos $\eta_0 = D\kappa(x_0)^{-T}\xi_0$. Se estrechan la vecindad de $x_0$ y los conos de $\xi_0, \eta_0$ de modo que toda solución de la relación estacionaria permanezca dentro del cono donde la transformada localizada de $u$ decrece rápidamente. En esa región se usa dicho decrecimiento. En el complemento, el gradiente $\xi - D\kappa(x)^T\eta$ está separado de cero; integrar reiteradamente por partes con

$$L = \frac{1 - i(\xi - D\kappa(x)^T\eta)\cdot D_x}{1 + \|\xi - D\kappa(x)^T\eta\|^2}$$

produce cualquier potencia negativa de $\langle \eta \rangle$. Los jacobianos y los cortes son amplitudes suaves de soporte compacto y no alteran las estimaciones. Así, $(\kappa(x_0), \eta_0)$ es regular para $\kappa_* u$. La aplicación del mismo argumento a $\kappa^{-1}$ da la inclusión inversa y concluye la igualdad. □

**Definición 15.5.11.** (Frente de onda global) Sean $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera, $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave complejo de rango finito y $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E})$. En una carta $\kappa\colon U \to \mathbb{R}^n$ y un marco local, escribimos $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^r)$. Declaramos que $(x, \xi) \in T^*M \setminus 0_M$ no pertenece a $\mathrm{WF}(\mathbf{u})$ si

$$\big(\kappa(x), D\kappa(x)^{-T}\xi\big) \notin \bigcup_{a=1}^{r} \mathrm{WF}(u^a).$$

La Proposición 15.5.10 prueba la independencia de la carta. Un cambio de marco multiplica las componentes por una matriz suave invertible; la Proposición 15.5.9(ii), aplicada en ambos sentidos, prueba la independencia del marco. Por lo tanto, $\mathrm{WF}(\mathbf{u})$ es un subconjunto cerrado y cónico de $T^*M \setminus 0_M$, y

$$\pi\big(\mathrm{WF}(\mathbf{u})\big) = \operatorname{sing\,supp}(\mathbf{u}).$$

La definición tampoco depende de escoger una densidad positiva para representar las distribuciones en coordenadas: dos elecciones difieren por una función suave no nula. En el caso riemanniano se usa, como en el resto del análisis riemanniano, la medida $d\lambda_{\mathbf{g}}$. En este sentido preciso, el frente de onda es canónico: no depende del atlas, del marco, de una métrica ni de la densidad auxiliar.

### 15.5.5 Acción pseudodiferencial y regularidad microlocal

La pseudolocalidad afirma que un pseudodiferencial no crea singularidades en la base. El frente de onda permite refinar esa afirmación: tampoco crea nuevas direcciones singulares. Cuando el símbolo es elíptico en un covector, una parametrix microlocal recupera además la dirección singular del dato a partir de la de su imagen.

**Teorema 15.5.12.** (Los operadores pseudodiferenciales no crean frentes) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito. Sea $A \in \Psi^m(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$ propiamente soportado. Entonces, para toda $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E})$,

$$\mathrm{WF}(A\mathbf{u}) \subseteq \mathrm{WF}(\mathbf{u}).$$

En particular, para todo multiíndice $\alpha$ y toda función suave $f$,

$$\mathrm{WF}(D^\alpha \mathbf{u}) \subseteq \mathrm{WF}(\mathbf{u}), \qquad \mathrm{WF}(f\mathbf{u}) \subseteq \mathrm{WF}(\mathbf{u})$$

en coordenadas.

*Demostración.* La afirmación es local. En coordenadas, fijemos $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}(\mathbf{u})$ y escribamos $A = \mathrm{Op}(a)$ módulo un operador regularizante. Elegimos $\psi \in C_c^\infty$, igual a uno cerca de $x_0$ y sostenida donde un corte que verifica la regularidad de $(x_0, \xi_0)$ vale uno, y descomponemos $\mathbf{u} = \psi\mathbf{u} + (1 - \psi)\mathbf{u}$. El segundo sumando produce una función suave cerca de $x_0$ porque el núcleo de $A$ es suave fuera de la diagonal. Para $\mathbf{v} = \psi\mathbf{u} \in \mathcal{E}'$ y $\varphi \in C_c^\infty$ sostenida cerca de $x_0$, la fórmula de cuantización da

$$\widehat{\varphi A \mathbf{v}}(\zeta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{x \to \theta}\big(\varphi(x) a(x, \eta)\big)(\zeta - \eta)\, \widehat{\mathbf{v}}(\eta)\, d\eta. \tag{15.54}$$

Integrando por partes en $x$, para todo $L$ se obtiene

$$\left\|\mathcal{F}_{x\to\theta}\big(\varphi a(\cdot,\eta)\big)(\theta)\right\| \le C_L\langle\theta\rangle^{-L}\langle\eta\rangle^{m}.$$

Se toma un cono $\Gamma$ donde $\widehat{\mathbf{v}}$ decrezca rápidamente y un cono $\Gamma' \Subset_{\mathrm{c}} \Gamma$ que contenga a $\xi_0$. En (15.54) se separan $\eta \in \Gamma$ y $\eta \notin \Gamma$. En la primera parte, el decrecimiento de $\widehat{\mathbf{v}}$ absorbe el orden $m$; en la segunda se usa $|\zeta-\eta| \ge c(|\zeta|+|\eta|)$ para $\zeta \in \Gamma'$. Como $L$ es arbitrario y $\widehat{\mathbf{v}}$ tiene crecimiento polinomial, el miembro derecho decrece rápidamente en $\Gamma'$. Esto prueba la inclusión. Las dos afirmaciones finales son casos particulares, pues las derivadas y las multiplicaciones suaves son operadores pseudodiferenciales. □

Para invertir sólo cerca de un covector conviene fijar una terminología. Sean $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito. Diremos que $R \in \Psi^{s}_{\mathrm{loc}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ es **microlocalmente regularizante** en $q=(x_0,\xi_0)\in T^*M\setminus 0_M$ si, en alguna carta y en marcos locales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, el símbolo de una localización de $R$ satisface, en un producto $V\times\Gamma$ que contiene a $q$,

$$\|D_x^{\alpha}D_{\xi}^{\beta}r(x,\xi)\| \le C_{N,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-N}$$

para todo $N$ y para frecuencias grandes. La prueba del teorema anterior, usando estas cotas en la parte cónica correspondiente y la separación de conos en su complemento, da

$$q \notin \mathrm{WF}(R\mathbf{u}) \qquad \text{para toda } \mathbf{u}\in\mathcal{D}'(M,\mathbf{E}). \tag{15.55}$$

Comprobemos que la condición no depende de la carta. Sea $\kappa\colon U\to\widetilde{U}$ un cambio de coordenadas, escribamos

$$\mathcal{B}_{\kappa}(x,y) := \int_0^1 D\kappa\big(y+t(x-y)\big)\,dt$$

y supongamos que $r$ verifica las cotas anteriores cerca de $(\kappa(x_0),\eta_0)$, donde $\eta_0 = D\kappa(x_0)^{-T}\xi_0$. Tras insertar un corte $\rho(x,y)$ igual a uno cerca de la diagonal, la fórmula del Teorema 15.2.10 da la amplitud transformada

$$\widetilde{b}(x,y,\xi) = \rho(x,y)\,r\big(\kappa(x),\mathcal{B}_{\kappa}(x,y)^{-T}\xi\big)\,\frac{|\det D\kappa(y)|}{|\det \mathcal{B}_{\kappa}(x,y)|}. \tag{15.56}$$

Los cambios de marco sólo añaden a esta expresión matrices suaves a izquierda y derecha.

Por continuidad de $\mathcal{B}_{\kappa}^{-T}$ sobre las direcciones unitarias, se pueden escoger conos $\Gamma_2 \Subset_{\mathrm{c}} \Gamma_1$ alrededor de $\boldsymbol{\xi}_0$ y una vecindad $U_0$ de $x_0$ tales que

$$\mathcal{B}_{\kappa}(x,y)^{-T}\boldsymbol{\xi}\in\Gamma, \qquad c\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \le \langle\mathcal{B}_{\kappa}(x,y)^{-T}\boldsymbol{\xi}\rangle \le C\langle\boldsymbol{\xi}\rangle$$

para $x,y\in U_0$, $\boldsymbol{\xi}\in\Gamma_1$ y frecuencias grandes. Fijemos un corte angular $\vartheta$ sostenido en $\Gamma_1$ e igual a uno en $\Gamma_2$. La regla de la cadena muestra que cada derivada de $\vartheta(\boldsymbol{\xi})\widetilde{b}(x,y,\boldsymbol{\xi})$ es suma finita de términos

$$c_{\mu,\nu,\lambda}(x,y)\,\boldsymbol{\xi}^{\mu}(D_z^{\nu}D_{\eta}^{\lambda}r)\big(\kappa(x),\mathcal{B}_{\kappa}(x,y)^{-T}\boldsymbol{\xi}\big),$$

y de términos de la misma forma con una derivada de $\vartheta$. Los coeficientes $c_{\mu,\nu,\lambda}$ y todas sus derivadas están acotados al estrechar $U_0$. Dado $L$, se aplica la cota de $r$ con exponente $L+|\mu|$; la comparabilidad anterior produce, para cualesquiera $\alpha,\gamma,\beta$,

$$\|D_x^{\alpha}D_y^{\gamma}D_{\xi}^{\beta}(\vartheta\widetilde{b})(x,y,\boldsymbol{\xi})\| \le C_{L,\alpha,\gamma,\beta}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-L} \tag{15.57}$$

en $U_0 \times U_0 \times \Gamma_2$.

Al reducir (15.56), cada término

$$\frac{i^{-|\delta|}}{\delta!} D_\xi^\delta D_y^\delta \widetilde{b}(x,y,\xi)\big|_{y=x}$$

satisface (15.57) con cualquier $L$. Si $s$ es un orden global de $r$, el resto tras sumar todos los términos con $|\delta| < J$ satisface las estimaciones simbólicas de orden $s - J$ por el Teorema 15.1.9. Para una cota prescrita $\langle\xi\rangle^{-L}$ se elige $J > s + L$; así, también el resto satisface esa cota en el cono menor. El símbolo transformado satisface por lo tanto las estimaciones de orden $-L$ en $U_0 \times \Gamma_2$ para todo $L$. La aplicación del mismo cálculo a $\kappa^{-1}$ prueba la equivalencia de las dos condiciones. Los factores suaves de marcos y densidades ya considerados no modifican ninguna cota. Esto prueba la independencia de la carta y de las trivializaciones auxiliares.

**Proposición 15.5.13.** (Parametrix microlocal) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos del mismo rango finito. Si $q \in \mathrm{Ell}(A)$ para $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl,loc}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$, existen $B \in \Psi^{-m}_{\mathrm{cl,loc}}(M; \mathbf{F}, \mathbf{E})$ y operadores $R_{\mathbf{E}}, R_{\mathbf{F}}$, microlocalmente regularizantes en $q$, tales que

$$BA = I_{\mathbf{E}} - R_{\mathbf{E}}, \qquad AB = I_{\mathbf{F}} - R_{\mathbf{F}}$$

microlocalmente en $q$.

*Demostración.* Elegimos una carta $\kappa\colon U \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y marcos locales de rango común $r$. En esta demostración escribiremos

$$S^j := S^j_{1,0}\big(\Omega; \mathrm{End}(\mathbb{C}^r)\big).$$

Elegimos vecindades $V_2 \Subset V_1 \Subset \Omega$ del punto base y conos $\Gamma_2 \Subset_{\mathrm{c}} \Gamma_1$ alrededor de la covariable de $q$ de modo que $a_m$ sea invertible en $V_1 \times \Gamma_1$. Sea $\chi(x,\xi)$ un corte de grado cero para frecuencias grandes, sostenido en $V_1 \times \Gamma_1$ e igual a uno en $V_2 \times \Gamma_2$. Ponemos

$$b^{\mathrm{d}}_{-m} = b^{\mathrm{i}}_{-m} = \chi a_m^{-1}.$$

Como todas las derivadas de $\chi$ se anulan en el producto menor, allí $a \# b^{\mathrm{d}}_{-m} - I_{\mathbf{F}} \in S^{-1}$ y $b^{\mathrm{i}}_{-m} \# a - I_{\mathbf{E}} \in S^{-1}$.
La afirmación inductiva derecha es que, después de construir $b^{\mathrm{d}}_{-m-k}$ para $0 \le k < N$,

$$a \# \sum_{k=0}^{N-1} b^{\mathrm{d}}_{-m-k} - I_{\mathbf{F}} \in S^{-N} \qquad \text{en } V_2 \times \Gamma_2.$$

Sea $e^{\mathrm{d}}_N$ la componente homogénea de grado $-N$ del error, calculada en $V_1 \times \Gamma_1$. Definimos

$$b^{\mathrm{d}}_{-m-N} = -\chi a_m^{-1} e^{\mathrm{d}}_N.$$

En $V_2 \times \Gamma_2$ la componente nueva de grado $-N$ es $e^{\mathrm{d}}_N + a_m b^{\mathrm{d}}_{-m-N} = 0$; la fórmula de composición da entonces un error en $S^{-N-1}$. Este es exactamente el paso de (15.52), y prueba la inducción derecha.
Para la izquierda, si $e^{\mathrm{i}}_N$ es la componente de grado $-N$ de

$$\left( \sum_{k=0}^{N-1} b^{\mathrm{i}}_{-m-k} \right) \# a - I_{\mathbf{E}},$$

calculada en $V_1 \times \Gamma_1$, se toma $b^{\mathrm{i}}_{-m-N} = -\chi e^{\mathrm{i}}_N a_m^{-1}$. La igualdad $e^{\mathrm{i}}_N + b^{\mathrm{i}}_{-m-N} a_m = 0$ reduce otra vez el error a $S^{-N-1}$ y reproduce (15.53).
El Lema 15.1.5 suma ambas familias en símbolos $b^{\mathrm{d}}, b^{\mathrm{i}} \in S^{-m}$. Para cada $N$, los dos errores pertenecen a $S^{-N}$ en $V_2 \times \Gamma_2$, luego son microlocalmente regularizantes en $q$. A nivel de operadores,

$$B_{\mathrm{i}} - B_{\mathrm{d}} = B_{\mathrm{i}}(I_{\mathbf{F}} - AB_{\mathrm{d}}) - (I_{\mathbf{E}} - B_{\mathrm{i}}A)B_{\mathrm{d}}.$$

La expansión de composición muestra que componer un símbolo de orden finito con uno que pertenece a $S^{-N}$ en el producto menor para todo $N$ conserva esa propiedad, tras estrechar una vez más los conos. Por lo tanto, $B_{\mathrm{i}} - B_{\mathrm{d}}$ es microlocalmente regularizante y $B := B_{\mathrm{d}}$ satisface también la identidad izquierda. Al cuantizar, insertar cortes espaciales y ajustar el soporte propio se obtienen las dos identidades indicadas; los cambios sólo añaden núcleos suaves cerca de $q$. □

**Teorema 15.5.14.** (Regularidad elíptica microlocal) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos del mismo rango finito. Sea $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$ propiamente soportado. Para toda $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E})$,

$$\mathrm{WF}(A\mathbf{u}) \subseteq \mathrm{WF}(\mathbf{u}) \subseteq \mathrm{WF}(A\mathbf{u}) \cup \mathrm{Char}(A).$$

Equivalentemente,

$$\mathrm{WF}(A\mathbf{u}) \cap \mathrm{Ell}(A) = \mathrm{WF}(\mathbf{u}) \cap \mathrm{Ell}(A). \tag{15.58}$$

Si $A$ es elíptico, entonces $\mathrm{WF}(A\mathbf{u}) = \mathrm{WF}(\mathbf{u})$.

*Demostración.* La primera inclusión es el Teorema 15.5.12. Sea ahora $q \in \mathrm{Ell}(A)$ y supongamos que $q \notin \mathrm{WF}(A\mathbf{u})$. Una parametrix microlocal da $\mathbf{u} = B(A\mathbf{u}) + R_{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ cerca de $q$. El primer sumando no tiene frente de onda en $q$ por el teorema anterior, y el segundo tampoco lo tiene por (15.55). Así, $q \notin \mathrm{WF}(\mathbf{u})$, que es la segunda inclusión. Las demás afirmaciones son reformulaciones de esas dos inclusiones. □

La definición de frente de onda también puede expresarse enteramente en el lenguaje del cálculo pseudodiferencial.

**Teorema 15.5.15.** (Caracterización mediante operadores de orden cero) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave complejo de rango finito. Sea $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E})$ y sea $q \in T^*M \setminus 0_M$. Son equivalentes:

(a) $q \notin \mathrm{WF}(\mathbf{u})$;

(b) existe $Q \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{E})$, propiamente soportado y elíptico en $q$, tal que $Q\mathbf{u} \in \Gamma(M, \mathbf{E})$.

En consecuencia,

$$\mathrm{WF}(\mathbf{u}) = \bigcap \big\{ \mathrm{Char}(Q) \mid Q \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{E}),\ Q\mathbf{u} \in \Gamma(M, \mathbf{E}) \big\}. \tag{15.59}$$

Puede restringirse la intersección a operadores cuyo símbolo principal es escalar por la identidad de $\mathbf{E}$.

*Demostración.* Supongamos (a). En una carta y un marco local elegimos una función $\varphi$, igual a uno cerca del punto base, y un cono $\Gamma$ en el que $\widehat{\varphi \mathbf{u}}$ decrece rápidamente. Sean $\chi$ un corte espacial, igual a uno en una vecindad menor, y $\vartheta$ un corte homogéneo de grado cero, sostenido angularmente en $\Gamma$ e igual a uno cerca de la semirrecta de $q$ para frecuencias grandes. Cuantizamos

$$q_0(x,\xi) = \chi(x)\vartheta(\xi) I_{\mathbf{E}}$$

y ajustamos el soporte propio. En la región donde interviene $q_0$, la función $\vartheta\widehat{\varphi\mathbf{u}}$ decrece rápidamente. La fórmula de inversión de Fourier y la estimación (15.54) muestran que $Q\mathbf{u}$ es suave; las partes separadas de la diagonal también son suaves. Además, el símbolo principal de $Q$ es la identidad cerca de $q$, de modo que $Q$ es elíptico allí. Esto prueba (b).

Si (b) se cumple, la regularidad elíptica microlocal aplicada a $Q$ da

$$\mathrm{WF}(\mathbf{u}) \cap \mathrm{Ell}(Q) = \mathrm{WF}(Q\mathbf{u}) \cap \mathrm{Ell}(Q) = \varnothing.$$

Como $q \in \mathrm{Ell}(Q)$, se obtiene (a). La fórmula (15.59) es la traducción conjuntista de esta equivalencia. La construcción del primer párrafo ya usa un símbolo escalar por $I_{\mathbf{E}}$, lo que prueba la última afirmación. □

### 15.5.6 Frente de onda del núcleo

La descripción conormal del núcleo y la definición de frente de onda deben coincidir en la diagonal. El resultado siguiente identifica exactamente las direcciones posibles y explica, en términos microlocales, por qué un pseudodiferencial sólo relaciona un covector con su opuesto en la variable de entrada.

**Teorema 15.5.16.** (Frente de onda del núcleo pseudodiferencial) Sea $M$ una variedad suave finito-dimensional sin frontera y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales suaves complejos de rango finito. Si $A \in \Psi^{m}_{\mathrm{cl,loc}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $\mathbf{K}_A$ es su núcleo de Schwartz, entonces

$$\mathrm{WF}(\mathbf{K}_A) \subseteq N^*\Delta_M \setminus 0_{M\times M} = \big\{(x,\xi;x,-\xi) \mid (x,\xi) \in T^*M \setminus 0_M\big\}. \tag{15.60}$$

*Demostración.* Por el Teorema 15.3.9, en una carta $\kappa\colon U \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y en marcos locales de rangos $r_{\mathbf{E}}, r_{\mathbf{F}}$, módulo una función suave el núcleo tiene la forma

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n}\,\mathrm{Os}\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{i(x-y)\cdot\xi}\, b(x,y,\xi)\,d\xi, \qquad b\colon \Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{r_{\mathbf{E}}},\mathbb{C}^{r_{\mathbf{F}}}),$$

con $b$ una amplitud clásica de orden $m$. Ya sabemos que $K$ es suave si $x \neq y$. Localicemos ahora cerca de un punto de la diagonal con $\rho \in C^\infty_c$ y tomemos Fourier en $(x,y)$. Salvo una constante dependiente sólo de $n$,

$$\widehat{\rho K}(\zeta,\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{(x,y)\to(\theta,\omega)}\big(\rho b(\cdot,\cdot,\xi)\big)(\zeta-\xi,\eta+\xi)\,d\xi. \tag{15.61}$$

Integrar por partes en $x$ y $y$ da, para todo $N$,

$$\big\|\mathcal{F}_{x,y}(\rho b)(\theta,\omega,\xi)\big\| \le C_N \langle(\theta,\omega)\rangle^{-N}\langle\xi\rangle^{m}.$$

Consideremos un cono cerrado de covectores $(\zeta,\eta)$ que no corta el conormal, es decir, en el cual

$$|\zeta+\eta| \geq c\big(|\zeta|+|\eta|\big).$$

Con $q=\frac{\zeta-\eta}{2}$ y $\xi=q+\tau$ se tiene la identidad

$$|\zeta-\xi|^2+|\eta+\xi|^2 = 2|\tau|^2+\tfrac{1}{2}|\zeta+\eta|^2.$$

En el cono considerado, $|q|\leq C|\zeta+\eta|$. Al insertar la estimación anterior en (15.61), escoger $N$ arbitrariamente grande e integrar en $\tau$, obtenemos, para todo $L$,

$$|\widehat{\rho K}(\zeta,\eta)| \leq C_L\langle(\zeta,\eta)\rangle^{-L}.$$

Por la Definición 15.5.8, ningún covector con $\zeta+\eta\neq 0$ pertenece al frente de onda sobre la diagonal. Los covectores restantes son exactamente $(x,\xi;x,-\xi)$, de acuerdo con (15.16). La invariancia por cambios de coordenadas y la multiplicación por los factores suaves procedentes de los marcos y de una densidad globalizan la inclusión. □

Si se adopta la convención de cambiar el signo en la covariable de entrada,

$$\mathrm{WF}'(\mathbf{K}_A) := \big\{(x,\xi;y,\eta)\,|\,(x,\xi;y,-\eta)\in \mathrm{WF}(\mathbf{K}_A)\big\},$$

la inclusión (15.60) se convierte en

$$\mathrm{WF}'(\mathbf{K}_A) \subseteq \big\{(x,\xi;x,\xi)\,|\,(x,\xi)\in T^*M\setminus 0_M\big\}.$$

Así, el núcleo pseudodiferencial transmite una singularidad sólo en el mismo punto y en la misma dirección cotangente. Esta afirmación contiene la pseudolocalidad cualitativa y, junto con la parametrix microlocal, explica la igualdad elíptica (15.58).

La construcción simbólica de la parametrix y la inclusión conormal para el frente de onda del núcleo corresponden, con la traducción $D=\partial$, a los Teoremas 18.1.9, 18.1.16 y 18.1.24 de [84]. Estas pruebas muestran explícitamente la recurrencia, el control de los restos y el paso de Fourier a la formulación global.

## 15.6 Acción en Sobolev, cálculo uniforme y teoría de Fredholm

El cálculo simbólico adquiere contenido analítico cuando se traduce en estimaciones entre espacios de Sobolev. En esta sección escribiremos

$$H^s(M,\mathbf{E}) := H^{s,2}(M,\mathbf{E}), \qquad s\in\mathbb{R},$$

y usaremos las métricas fibradas y la medida $d\lambda_{\mathbf{g}}$ para definir los productos de $L^2(M,\mathbf{E})$ y $L^2(M,\mathbf{F})$. En el caso complejo se mantiene la convención previamente fijada: el producto hermitiano es lineal en la primera variable. Primero probaremos la estimación euclidiana de orden cero; después la trasladaremos a variedades, distinguiremos cuidadosamente el caso uniforme no compacto del caso cerrado y deduciremos la propiedad de Fredholm.

### 15.6.1 La estimación de Calderón–Vaillancourt

El punto decisivo es que un símbolo de orden cero define un operador acotado entre los espacios $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$ y $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^s)$, aunque su núcleo no sea absolutamente integrable. Damos una prueba mediante paquetes de ondas, porque exhibe un número finito de seminormas y no usa interpolación ni teoría espectral.

**Teorema 15.6.1.** (Calderón–Vaillancourt) Sean $n,r,s\in\mathbb{N}$ y sea

$$a\in S^0_{1,0}\big(\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)\big)$$

y sea $N_{\mathrm{CV}}:=4n+4$. Existe una constante $C=C(n,r,s)>0$ tal que

$$\|\mathrm{Op}(a)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^s)}\le C\,q_{N_{\mathrm{CV}},0}(a)\,\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} \tag{15.62}$$

para todo $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$. En consecuencia, $\mathrm{Op}(a)$ se extiende de manera única a un operador continuo de $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$ en $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^s)$.

*Demostración.* Basta tratar el caso escalar: en rango finito se aplica el argumento a cada entrada de la matriz. Fijemos $g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ no nula y definamos

$$g_{z,\zeta}(x):=e^{ix\cdot\zeta}g(x-z),\qquad (Wu)(z,\zeta):=\langle u,g_{z,\zeta}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)},\qquad (z,\zeta)\in\mathbb{R}^{2n}.$$

La identidad de Plancherel, aplicada primero en $\zeta$ y después en $z$, da la identidad de Moyal

$$\|Wu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}=(2\pi)^n\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{15.63}$$

Por polarización, $W^*W=c_gI$, donde $c_g=(2\pi)^n\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.
Consideremos el núcleo matricial de $W\,\mathrm{Op}(a)W^*$:

$$\mathcal{M}_a(z,\zeta;w,\eta):=\langle \mathrm{Op}(a)g_{w,\eta},g_{z,\zeta}\rangle.$$

La fórmula de cuantización de la Definición 15.1.6 lo escribe como una integral oscilatoria en $(x,y,\theta)$ con fase

$$\Phi=x\cdot(\theta-\zeta)+y\cdot(\eta-\theta)$$

y amplitud

$$(2\pi)^{-n}a(x,\theta)g(y-w)\overline{g(x-z)}.$$

Pongamos $L=n+1$. Como

$$(1-\Delta_x)^Le^{i\Phi}=\langle\theta-\zeta\rangle^{2L}e^{i\Phi},\qquad (1-\Delta_y)^Le^{i\Phi}=\langle\theta-\eta\rangle^{2L}e^{i\Phi},$$

integramos por partes $L$ veces en $x$ y en $y$. Las derivadas en $x$ alcanzan a $a$ y a $g(x-z)$; las derivadas en $y$ sólo alcanzan a $g(y-w)$. En los soportes de esos dos factores se tiene

$$\langle z-w\rangle\le C_g\langle x-y\rangle.$$

Para introducir ese peso sin modificar la integral oscilatoria, expandimos el polinomio $\langle z-w\rangle^{2L} = (1+|z-w|^2)^L$ mediante $z-w = (x-y)-(x-z)+(y-w)$. Los factores en $x-z$ y $y-w$ se incorporan a las funciones suaves de soporte compacto y sus derivadas. Los factores restantes son monomios $(x-y)^\gamma$ con $|\gamma| \le 2L$; usamos

$$(x-y)^\gamma e^{i\Phi} = i^{-|\gamma|} D_\theta^\gamma e^{i\Phi}$$

para integrar por partes en $\theta$. Las derivadas de los pesos $\langle \theta-\zeta\rangle^{-2L}$ y $\langle \theta-\eta\rangle^{-2L}$ no empeoran su decrecimiento, y las que alcanzan al símbolo están controladas por $q_{4L,0}(a)$. Se obtiene

$$|\mathcal{M}_a(z,\zeta;w,\eta)| \le C_g q_{4L,0}(a) \langle z-w\rangle^{-2L} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \theta-\zeta\rangle^{-2L} \langle \theta-\eta\rangle^{-2L}\, d\theta.$$

Como $2L > n$, la desigualdad elemental de convolución, junto con la comparación de pesos de Peetre del Lema 6.1.1, da

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \theta-\zeta\rangle^{-2L} \langle \theta-\eta\rangle^{-2L}\, d\theta \le C_L \langle \zeta-\eta\rangle^{-2L}.$$

Esta desigualdad se prueba dividiendo el dominio en las regiones $\|\theta-\zeta\| \ge \frac{\|\zeta-\eta\|}{2}$ y $\|\theta-\eta\| \ge \frac{\|\zeta-\eta\|}{2}$. Por lo tanto,

$$|\mathcal{M}_a(z,\zeta;w,\eta)| \le C q_{4n+4,0}(a) \langle z-w\rangle^{-2n-2} \langle \zeta-\eta\rangle^{-2n-2}. \tag{15.64}$$

El miembro derecho es integrable respecto de $(w,\eta)$ uniformemente en $(z,\zeta)$, y también respecto de $(z,\zeta)$ uniformemente en $(w,\eta)$. La Proposición B.8.3, aplicada con $X = Y = \mathbb{R}^{2n}$, la medida de Lebesgue y $r = s = 1$, muestra que el operador integral con núcleo $\mathcal{M}_a$ es acotado en $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. Finalmente,

$$\operatorname{Op}(a) = c_g^{-2} W^* \big( W \operatorname{Op}(a) W^* \big) W,$$

y (15.63) produce (15.62). La densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$ en $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$ da la extensión única. □

El entero $4n+4$ es una elección suficiente que utiliza sólo un número finito de derivadas. Para otras elecciones y demostraciones, véanse [140, 84, 135].

### 15.6.2 Acción sobre las escalas de Sobolev

Recordemos que

$$J^t = \operatorname{Op}(\langle \xi\rangle^t) \colon H^t(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

es un isomorfismo isométrico con la normalización unitaria fijada en la Definición 4.11.1 y el Teorema 4.11.10.

**Teorema 15.6.2.** (Mapeo de Sobolev euclidiano) Sean $n, r, q \in \mathbb{N}$, $m, \sigma \in \mathbb{R}$ y

$$a \in S^m_{1,0}\big(\mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^q)\big).$$

Entonces

$$\operatorname{Op}(a) \colon H^{\sigma+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r) \longrightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^q)$$

es continuo. Su norma queda controlada por una cantidad finita de seminormas de $a$ en $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^q))$.

*Demostración.* El cálculo de composición del Teorema 15.2.6 muestra que

$$B := J^{\sigma}\operatorname{Op}(a)J^{-(\sigma+m)}$$

es un operador pseudodiferencial de orden cero. Las seminormas de un número fijo de términos de su símbolo y del resto quedan controladas por un número finito de seminormas de $a$. El Teorema 15.6.1 da

$$\|\operatorname{Op}(a)u\|_{H^{\sigma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^q)} = \|J^{\sigma}\operatorname{Op}(a)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^q)} \le C\|J^{\sigma+m}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} = C\|u\|_{H^{\sigma+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)}.$$

□

Antes de pasar a variedades conviene aislar el otro término que aparece al localizar un operador: un núcleo suave con soporte compacto. A diferencia de la parte pseudodiferencial, este término mejora la regularidad en un número arbitrario de derivadas. La estimación siguiente precisa cuántas derivadas del núcleo bastan para controlar cada mapeo de Sobolev.

**Lema 15.6.3.** (Mapeo Sobolev de un núcleo suave con soporte compacto) Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos acotados, $K \Subset U \times V$, $r, s \in \mathbb{N}$ y

$$k \in C^{\infty}\big(U \times V; \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)\big), \qquad \operatorname{supp} k \subseteq K.$$

Para $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, definamos

$$a_{\sigma} := \max\{0, \lceil \sigma \rceil\}, \qquad b_{\tau} := \max\{0, \lceil -\tau \rceil\}, \qquad N(n,\sigma,\tau) := a_{\sigma} + b_{\tau}. \tag{15.65}$$

Para $u \in H^{\tau}(V, \mathbb{C}^r)$, elijamos una extensión $\widetilde{u} \in H^{\tau}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$ de $u$. Para cada $x \in U$, definimos $T_k u(x) \in \mathbb{C}^s$ mediante

$$\langle T_k u(x), w\rangle_{\mathbb{C}^s} := \langle \widetilde{u}, k(x,\cdot)^* w\rangle_{H^{\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r), H^{-\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)}, \qquad w \in \mathbb{C}^s, \tag{15.66}$$

donde $k(x,\cdot)^* w$ se prolonga por cero fuera de $V$ y el emparejamiento es lineal en la primera variable, de acuerdo con la convención hermitiana del capítulo. Esta definición no depende de la extensión elegida y determina un operador lineal continuo

$$T_k \colon H^{\tau}(V, \mathbb{C}^r) \longrightarrow H^{\sigma}(U, \mathbb{C}^s).$$

El mapeo $x \mapsto T_k u(x)$ es suave y, para cada multiíndice $\alpha$,

$$\big\langle D_x^{\alpha}(T_k u)(x), w\big\rangle_{\mathbb{C}^s} = \big\langle \widetilde{u}, \big(D_x^{\alpha} k\big)(x,\cdot)^* w\big\rangle_{H^{\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r), H^{-\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)}. \tag{15.67}$$

Si $u$ admite un representante en $L^1_{\mathrm{loc}}(V, \mathbb{C}^r)$, entonces

$$(T_k u)(x) = \int_V k(x,y)u(y)\,dy, \qquad x \in U.$$

Además, existe una constante $C = C(n,\sigma,\tau,U,V,K,r,s) > 0$, independiente de $k$, tal que

$$\|T_k\|_{\mathcal{L}(H^{\tau}(V,\mathbb{C}^r), H^{\sigma}(U,\mathbb{C}^s))} \le C \max_{|\alpha|+|\beta| \le N(n,\sigma,\tau)} \sup_{(x,y)\in K} \|D_x^{\alpha} D_y^{\beta} k(x,y)\|. \tag{15.68}$$

La elección de $N$ en (15.65) es suficiente; valores menores pueden ser válidos, pero no se requieren para las aplicaciones posteriores.

*Demostración.* Los espacios sobre abiertos se entienden con la norma cociente de restricción de la Definición 6.1.5, aplicada componente a componente. Sean $K_U := \mathrm{pr}_1(K) \Subset U$ y $K_V := \mathrm{pr}_2(K) \Subset V$. Para $x \in U$ y $w \in \mathbb{C}^s$ se tiene

$$k(x,\cdot)^* w \in C_c^\infty(V,\mathbb{C}^r), \qquad \operatorname{supp}\big(k(x,\cdot)^* w\big) \subseteq K_V.$$

Su prolongación por cero pertenece a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$ y, por la Proposición 6.1.6, a $H^{-\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$. El miembro derecho de (15.66) está, por lo tanto, bien definido. Como el producto hermitiano es lineal en la primera variable, ese miembro es antilineal en $w$. Si $(e_j)_{j=1}^s$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^s$, el vector

$$\sum_{j=1}^{s} \big\langle \widetilde{u}, k(x,\cdot)^* e_j \big\rangle_{H^\tau(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r),H^{-\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)}\, e_j$$

satisface (15.66) para todo $w \in \mathbb{C}^s$. La no degeneración del producto hermitiano prueba que es el único vector con esa propiedad.

Comprobemos la independencia de la extensión. Si $\widetilde{u}_1$ y $\widetilde{u}_2$ restringen a $u$ sobre $V$, entonces $d := \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$ se anula como distribución en $V$. Puesto que $k(x,\cdot)^* w$ tiene soporte compacto contenido en $V$, el emparejamiento de Sobolev coincide aquí con la acción distributiva y

$$\langle d, k(x,\cdot)^* w\rangle_{H^\tau(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r),H^{-\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} = 0.$$

Así, (15.66) no depende de $\widetilde{u}$.

Para cada $w \in \mathbb{C}^s$, el mapeo

$$x \longmapsto k(x,\cdot)^* w$$

es suave de $U$ en el espacio de Fréchet $C^\infty_{K_V}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$ de funciones suaves sostenidas en $K_V$. La inclusión de este espacio en $H^{-\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)$ es continua. Al componer con el emparejamiento contra $\widetilde{u}$, obtenemos una función suave de $x$ y podemos derivar dentro de la dualidad. Al tomar $w$ sucesivamente en una base ortonormal de $\mathbb{C}^s$, se concluye que $x \mapsto T_k u(x)$ es suave y se obtiene (15.67) para todo multiíndice $\alpha$.

Si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(V,\mathbb{C}^r)$, el emparejamiento con una función de prueba recupera la integral de Lebesgue. Por la definición del adjunto y por la convención hermitiana,

$$\begin{aligned} \langle T_k u(x), w\rangle_{\mathbb{C}^s} &= \int_V \big\langle u(y), k(x,y)^* w\big\rangle_{\mathbb{C}^r}\, dy \\ &= \int_V \big\langle k(x,y)u(y), w\big\rangle_{\mathbb{C}^s}\, dy. \end{aligned}$$

Como esto vale para todo $w \in \mathbb{C}^s$, la definición por dualidad coincide con la integral usual afirmada en el enunciado.

Resta probar la estimación. Fijemos $\varepsilon > 0$ y elijamos la extensión de modo que

$$\|\widetilde{u}\|_{H^\tau(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} \le \|u\|_{H^\tau(V,\mathbb{C}^r)} + \varepsilon.$$

Si $|\alpha| \le a_\sigma$ y $\|w\|_{\mathbb{C}^s} = 1$, la dualidad, $b_\tau \ge -\tau$ y (15.67) dan

$$\begin{aligned}\left|\left\langle D_x^\alpha (T_k u)(x), w\right\rangle_{\mathbb{C}^s}\right| &\le \|\widetilde{u}\|_{H^\tau(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} \|\big(D_x^\alpha k\big)(x,\cdot)^* w\|_{H^{-\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} \\ &\le \|\widetilde{u}\|_{H^\tau(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} \|\big(D_x^\alpha k\big)(x,\cdot)^* w\|_{H^{b_\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)}.\end{aligned}$$

Para $q \in \mathbb{N}_0$, la comparación polinómica

$$\langle \xi \rangle^{2q} \le C_{n,q} \sum_{|\beta| \le q} |\xi^\beta|^2$$

y el Teorema de Plancherel 4.11.10, aplicados componente a componente, implican

$$\|f\|^2_{H^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} \le C_{n,q} \sum_{|\beta| \le q} \|D^\beta f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)}.$$

Como todas las funciones de prueba anteriores están sostenidas en $K_V$, esta desigualdad con $q = b_\tau$ proporciona

$$\|\big(D_x^\alpha k\big)(x,\cdot)^* w\|_{H^{b_\tau}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} \le C_0 \max_{|\beta| \le b_\tau} \sup_{(z,y)\in K} \|D_z^\alpha D_y^\beta k(z,y)\|. \tag{15.69}$$

Aquí $C_0$ depende de $n, b_\tau, r, s$ y del volumen de $K_V$, pero no de $x, k, u$ ni $w$.
Tomando el supremo sobre los vectores unitarios $w$, integrando respecto de $x \in K_U$, sumando sobre $|\alpha| \le a_\sigma$ y aplicando la misma comparación de Plancherel con $q = a_\sigma$, obtenemos

$$\|T_k u\|_{H^{a_\sigma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^s)} \le C_1 \|\widetilde{u}\|_{H^\tau(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^r)} \max_{\substack{|\alpha| \le a_\sigma \\ |\beta| \le b_\tau}} \sup_{(x,y)\in K} \|D_x^\alpha D_y^\beta k(x,y)\|.$$

En esta fórmula prolongamos $T_k u$ por cero fuera de $U$; la prolongación es suave porque $\operatorname{supp}(T_k u) \subseteq K_U \Subset U$. Puesto que $a_\sigma \ge \sigma$, la inclusión $H^{a_\sigma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^s) \hookrightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^s)$ y la restricción a $U$ son continuas. Finalmente, $|\alpha| + |\beta| \le a_\sigma + b_\tau = N(n,\sigma,\tau)$; hacemos $\varepsilon \to 0^+$ y obtenemos (15.68). □

La versión local requiere distinguir soporte compacto de regularidad local. Para un compacto $K \Subset M$ ponemos

$$H^t_K(M,\mathbf{E}) := \{\mathbf{u} \in H^t_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E}) \mid \operatorname{supp}\mathbf{u} \subseteq K\}, \qquad H^t_{\mathrm{comp}}(M,\mathbf{E}) := \bigcup_{K \Subset M} H^t_K(M,\mathbf{E}),$$

con la topología inductiva usual. La topología de $H^t_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E})$ está definida por las seminormas $\|\chi \mathbf{u}\|_{H^t(M,\mathbf{E})}$, $\chi \in C_c^\infty(M)$, de acuerdo con la Definición 6.1.7.

**Proposición 15.6.4.** (Versiones local y de soporte compacto) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave finito-dimensional sin frontera, no necesariamente completa, y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones métricas. Sean $m, s \in \mathbb{R}$ y $A \in \Psi^m_{\mathrm{loc}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$. Entonces

$$A\colon H^{s+m}_{\mathrm{comp}}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^s_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{F})$$

es continuo. Si $A$ está propiamente soportado, se tienen además extensiones continuas

$$A\colon H^{s+m}_{\mathrm{comp}}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^s_{\mathrm{comp}}(M,\mathbf{F}), \qquad A\colon H^{s+m}_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^s_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{F}).$$

*Demostración.* Sean $\chi, \psi \in C_c^\infty(M)$. En un número finito de cartas y marcos, $\chi A \psi$ es una matriz de operadores euclidianos de orden $m$, módulo un núcleo suave. El Teorema 15.6.2 controla la parte pseudodiferencial, mientras que el Lema 15.6.3 controla el núcleo suave y muestra que gana un número arbitrario de derivadas. Esto prueba el primer mapeo después de elegir $\psi = 1$ cerca del soporte del dato.
Si $A$ está propiamente soportado, la imagen de un compacto tiene soporte en otro compacto. Para el mapeo local, dado $\chi$, el soporte propio permite elegir $\psi \in C_c^\infty(M)$ tal que

$$\chi A = \chi A \psi$$

en una vecindad del soporte de $\chi$. La estimación ya demostrada se aplica a $\psi u$. Estas estimaciones son precisamente la continuidad para las topologías inductiva y proyectiva indicadas. □

**Corolario 15.6.5.** (Regularidad elíptica Sobolev local) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave finito-dimensional sin frontera, no necesariamente completa, y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones métricas. Sean $m, s \in \mathbb{R}$ y sea $A \in \Psi_{\mathrm{cl}}^m(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$ elíptico y propiamente soportado. Si $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(M, \mathbf{E})$ y $A\mathbf{u} \in H^s_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{F})$, entonces $\mathbf{u} \in H^{s+m}_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$. En particular, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{u} \in H^t_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E}) \quad \Longleftrightarrow \quad A\mathbf{u} \in H^{t-m}_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{F}).$$

*Demostración.* Sea $B \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{-m}(M; \mathbf{F}, \mathbf{E})$ una parametrix. La identidad $BA = I - R$, con $R \in \Psi^{-\infty}(M; \mathbf{E}, \mathbf{E})$, da $\mathbf{u} = B(A\mathbf{u}) + R\mathbf{u}$. La Proposición 15.6.4 lleva el primer término a $H^{s+m}_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$ y el segundo es suave. Esto prueba la primera afirmación. La implicación restante de la equivalencia es el mapeo local de $A$. Para operadores diferenciales, el resultado recupera la regularidad del Teorema 11.4.2; el cálculo pseudodiferencial añade la localización por codirecciones del Teorema 15.5.14. □

En particular, si $M$ es cerrada, toda condición de soporte propio es automática y una cubierta finita da el siguiente resultado.

**Corolario 15.6.6.** (Mapeo sobre una variedad cerrada) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces hermitianos complejos de rango finito, provistos de conexiones métricas. Sean $m, s \in \mathbb{R}$ y sea $A \in \Psi^m(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$. Entonces

$$A_s \colon H^{s+m}(M, \mathbf{E}) \longrightarrow H^s(M, \mathbf{F})$$

es continuo. La norma de $A_s$ se controla mediante un número finito de seminormas simbólicas en un atlas finito y un número finito de seminormas del núcleo regularizante.

*Demostración.* Como $M$ es compacta, la función constante 1 pertenece a $C_c^\infty(M)$. En la topología de $H^t_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{E})$ definida antes de la Proposición 15.6.4, la seminorma correspondiente a $\chi = 1$ es

$$\|1\,\mathbf{u}\|_{H^t(M,\mathbf{E})} = \|\mathbf{u}\|_{H^t(M,\mathbf{E})}.$$

Recíprocamente, la continuidad de la multiplicación por funciones suaves, obtenida en coordenadas mediante el Lema 6.1.8, muestra que cada seminorma $\|\chi\mathbf{u}\|_{H^t(M,\mathbf{E})}$ está acotada por un múltiplo de $\|\mathbf{u}\|_{H^t(M,\mathbf{E})}$.

Por lo tanto,

$$H^t_{\mathrm{loc}}(M,\mathbf{E}) = H^t(M,\mathbf{E})$$

como espacios topológicos. Además, el soporte de toda distribución en $M$ es un cerrado de un espacio compacto. En la definición de $H^t_{\mathrm{comp}}(M,\mathbf{E})$ podemos tomar $K = M$, y se obtiene

$$H^t_{\mathrm{comp}}(M,\mathbf{E}) = H^t(M,\mathbf{E})$$

también como espacios topológicos.
La Proposición 15.6.4, con estas dos identificaciones y $t = s + m$, proporciona el mapeo continuo

$$A_s\colon H^{s+m}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^s(M,\mathbf{F}).$$

Para la afirmación sobre la norma, la compacidad de $M$ permite escoger un atlas finito, trivializaciones unitarias y un número finito de funciones de corte. En la prueba de la Proposición 15.6.4, cada parte localizada cerca de la diagonal se estima mediante el Teorema 15.6.2; su constante depende de un número finito de seminormas del símbolo local. Las partes alejadas de la diagonal tienen núcleo suave por la Proposición 15.2.4, y el Lema 15.6.3 las controla mediante un número finito de seminormas de ese núcleo. Como sólo interviene un número finito de localizaciones, la norma de $A_s$ queda controlada por el número finito de seminormas indicado en el enunciado. □

### 15.6.3 Cálculo pseudodiferencial uniforme de propagación finita

Los resultados anteriores son locales y, sobre una variedad cerrada, una cubierta finita basta para reunir sus constantes. En una variedad no compacta una misma estimación puede deteriorarse al cambiar de carta. Para evitarlo fijaremos un sistema de localización de geometría acotada, exigiremos cotas simbólicas uniformes y controlaremos además la propagación de los residuos.

En una cubierta infinita no basta pedir que cada representante local sea un símbolo: las constantes de sus estimaciones podrían crecer con la carta. No existe una única extensión del cálculo pseudodiferencial a variedades abiertas. Consideraremos el cálculo de propagación finita y cotas locales uniformes, suficiente para las aplicaciones posteriores y compatible con el modelo de [57, Sección 5]. El Capítulo 13 ya construyó cartas geodésicas, sistemas cuadráticos y marcos síncronos con todas sus derivadas controladas; el Capítulo 14 probó la independencia de las normas de secciones respecto de esas elecciones. Sólo desarrollaremos la información pseudodiferencial nueva.

Fijemos un sistema cuadrático geodésico admisible

$$\mathcal{Q} = (U_i, \varphi_i, h_i, \mathbf{e}_i^{\mathbf{E}}, \mathbf{e}_i^{\mathbf{F}})_{i\in I}, \qquad U_i = B_{\mathbf{g}}(p_i, 2r), \qquad \sum_{i\in I} h_i^2 = 1,$$

con los marcos síncronos de la Proposición 8.2.26. El radio $r$ y la separación de los centros son los del Teorema 13.1.22. Para $\rho \geq 0$ ponemos

$$I_{\mathcal{Q}}(i,\rho) := \{j \in I \mid d_{\mathbf{g}}(U_i, U_j) \leq \rho\}, \qquad N_{\mathcal{Q}}(\rho) := \sup_{i\in I} \#I_{\mathcal{Q}}(i,\rho).$$

**Lema 15.6.7.** (Número uniforme de interacciones a distancia acotada) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa, sin frontera y de geometría acotada, y sea $\mathcal{Q}$ el sistema cuadrático geodésico admisible anterior, de radio $r>0$ y multiplicidad de solapamiento finita. Para cada $\rho\geq 0$ se tiene $N_{\mathcal{Q}}(\rho)<\infty$. Más precisamente, si

$$L_{\mathcal{Q}} := \sup_{i\in I} \#\{j\in I \mid U_i\cap U_j\neq\varnothing\}$$

y

$$k(\rho) := \left\lceil \frac{\rho+4r}{r}\right\rceil + 2,$$

entonces

$$N_{\mathcal{Q}}(\rho)\leq 1 + L_{\mathcal{Q}} + \cdots + L_{\mathcal{Q}}^{k(\rho)}. \tag{15.70}$$

*Demostración.* Si $d_{\mathbf{g}}(U_i,U_j)\leq\rho$, entonces $d_{\mathbf{g}}(p_i,p_j)\leq\rho+4r$. La completitud y Hopf–Rinow proporcionan una geodésica minimizante entre los centros. La dividimos en a lo más $\left\lceil \frac{\rho+4r}{r}\right\rceil+1$ segmentos de longitud no mayor que $r$. Cada punto de división pertenece a alguna bola $B_{\mathbf{g}}(p_\nu,r)$ de la cubierta. Dos centros elegidos en divisiones consecutivas distan a lo más $3r$, de modo que sus bolas de radio $2r$ se intersectan. Agregando $i$ y $j$ en los extremos obtenemos una cadena de a lo más $k(\rho)$ intersecciones que une $U_i$ con $U_j$. Desde una carta hay a lo más $L_{\mathcal{Q}}$ elecciones en cada paso. Contar todas las cadenas de longitud entre cero y $k(\rho)$ da (15.70). El conteo admite repeticiones, por lo cual sigue siendo una cota superior. □

El lema anterior garantiza que, para un radio de propagación fijado, cada carta sólo interactúa con un número uniforme de cartas. Con este control podemos escoger una representación diagonal del operador y definir las seminormas que medirán, por separado, su parte simbólica y su residuo suave.

Pongamos $B := B_{\mathrm{euc}}(0,2r)$. Las funciones del sistema geodésico pueden elegirse con $\operatorname{supp}(h_i\circ\varphi_i^{-1})\subset B_{\mathrm{euc}}\left(0,\frac{3r}{2}\right)$, como en la prueba del Teorema 13.1.22. Si $\mathbf{u}\in\Gamma_c(\mathbf{E})$, denotemos por $\mathbf{u}_i\colon U_i\to\mathbb{C}^{r_{\mathbf{E}}}$ su columna de componentes en el marco $\mathbf{e}_i^{\mathbf{E}}$ y definamos el análisis y la síntesis locales por

$$\mathcal{A}_i^{\mathbf{E}}\mathbf{u} := \widetilde{(h_i\mathbf{u}_i)\circ\varphi_i^{-1}},$$
$$\mathcal{S}_i^{\mathbf{F}}v := h_i\sum_{b=1}^{r_{\mathbf{F}}}(v^b\circ\varphi_i)\mathbf{e}_{i,b}^{\mathbf{F}}.$$

La tilde indica extensión por cero; ésta es suave porque el soporte de $h_i$ queda separado uniformemente del borde de $U_i$. Las funciones de corte auxiliares de (B3) se insertan antes de prolongar una expresión que no contenga ya el factor $h_i$.

La suma localmente finita

$$w_{\mathcal{Q}}(x,y) := \sum_{i\in I} h_i(x)h_i(y)$$

tiene derivadas uniformemente acotadas cerca de la diagonal y $w_{\mathcal{Q}}(x,x)=1$. En efecto, en cada carta intervienen a lo más $L_{\mathcal{Q}}$ sumandos y sus derivadas se controlan mediante (B2). El teorema del valor medio en las cartas y la comparación uniforme entre distancia euclidiana y riemanniana dan números $\delta_{\mathcal{Q}}>0$ y $c_{\mathcal{Q}}>0$ tales que

$$w_{\mathcal{Q}}(x,y)\geq\frac{1}{2},\qquad d_{\mathbf{g}}(x,y)\leq 2\delta_{\mathcal{Q}}, \tag{15.71}$$

y todas las derivadas de $w_{\mathcal{Q}}^{-1}$ están acotadas por constantes independientes de la carta en esa región. Disminuimos

$\delta_{\mathcal{Q}}$ para que sea menor que un cuarto del radio normal y que la $2\delta_{\mathcal{Q}}$–vecindad de cada $\operatorname{supp}(h_i)$ permanezca en $U_i$.

Fijemos una función $\omega_{\mathcal{Q}} \in C^\infty(M \times M, [0,1])$ que valga uno cuando $d_{\mathbf{g}}(x,y) \le \frac{\delta_{\mathcal{Q}}}{3}$ y se anule cuando $d_{\mathbf{g}}(x,y) \ge \frac{2\delta_{\mathcal{Q}}}{3}$. Se construye aplicando un corte fijo a $d_{\mathbf{g}}(x,y)^2$ dentro del radio normal; sus derivadas covariantes están uniformemente acotadas. En la carta $i$ escribimos $\omega_i$ para su representante y ponemos

$$(\operatorname{Op}_{\omega_i}(a_i)v)(x) := (2\pi)^{-n} \operatorname{Os}\!\iint_{B_y \times \mathbb{R}^n_\xi} e^{i(x-y)\cdot\xi}\, \omega_i(x,y)\, a_i(x,\xi)\, v(y)\, dy\, d\xi, \qquad x \in B.$$

Esta fórmula usa la misma carta y los mismos marcos para $x$ y $y$. Definimos

$$Q_i^{\mathcal{Q}}(a_i) := \mathcal{S}_i^{\mathbf{F}} \operatorname{Op}_{\omega_i}(a_i) \mathcal{A}_i^{\mathbf{E}}. \tag{15.72}$$

Su núcleo está sostenido donde $x, y \in \operatorname{supp}(h_i)$ y $d_{\mathbf{g}}(x,y) \le \frac{2\delta_{\mathcal{Q}}}{3}$. En la notación abreviada usual, (15.72) es precisamente

$$h_i\, \varphi_i^{*} \operatorname{Op}_{\omega_i}(a_i)(\varphi_i^{-1})^{*} h_i,$$

con las identificaciones mediante $\mathbf{e}_i^{\mathbf{E}}, \mathbf{e}_i^{\mathbf{F}}$ escritas en $\mathcal{A}_i^{\mathbf{E}}$ y $\mathcal{S}_i^{\mathbf{F}}$.

Para una familia $(a_i)_{i\in I}$ definimos la seminorma simbólica de representación

$$q^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{N,m}((a_i)) := \sup_{i\in I} \max_{|\alpha|+|\beta|\le N} \sup_{x\in B,\, \xi\in\mathbb{R}^n} \langle \xi\rangle^{-m+|\beta|} \| D_x^\alpha D_\xi^\beta a_i(x,\xi)\|. \tag{15.73}$$

Decimos que un operador con núcleo $\mathbf{K}_R$ tiene propagación a lo más $\rho$ si

$$\operatorname{supp} \mathbf{K}_R \subseteq \{(x,y) \in M \times M \mid d_{\mathbf{g}}(x,y) \le \rho\}.$$

Si $R$ tiene núcleo suave de propagación a lo más $\rho$, entonces

$$\mathbf{K}_R \in C^\infty\big(M_x \times M_y; \mathbf{F}_x \boxtimes \mathbf{E}_y^{*}\big) = C^\infty\big(M_x \times M_y; \operatorname{Hom}(\mathbf{E}_y, \mathbf{F}_x)\big).$$

Equipamos este haz con la conexión producto inducida por la conexión de $\mathbf{F}$ en la variable $x$ y la conexión dual de $\mathbf{E}$ en la variable $y$. La expresión $(\nabla_x)^p (\nabla_y)^q \mathbf{K}_R$ denota las derivadas tensoriales iteradas respecto de cada factor, con el índice nuevo en el primer lugar de su bloque; las dos conexiones de producto conmutan entre sí. En la expresión siguiente la norma es la inducida por $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$ y $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ sobre $(T_x^{*}M)^{\otimes p} \otimes (T_y^{*}M)^{\otimes q} \otimes \operatorname{Hom}(\mathbf{E}_y, \mathbf{F}_x)$. Ponemos

$$s^{\mathrm{u}}_N(R) := \max_{p+q\le N} \sup_{(x,y)\in M\times M} \|(\nabla_x)^p (\nabla_y)^q \mathbf{K}_R(x,y)\|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{F}},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}. \tag{15.74}$$

**Definición 15.6.8.** (Representación uniforme diagonal) Sea $(M,\mathbf{g})$ completa, sin frontera y de geometría acotada, y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}, \mathbf{h}_{\mathbf{F}}$, provistos de conexiones compatibles de geometría acotada. Una **representación uniforme diagonal de orden** $m$ **y radio residual** $\rho$ de un operador $A\colon \Gamma_c(M,\mathbf{E}) \to \Gamma(M,\mathbf{F})$ es un par $\mathfrak{r} = ((a_i)_{i\in I}, R)$ tal que

$$A = A_{\mathrm{near}} + R, \qquad A_{\mathrm{near}} := \sum_{i\in I} Q_i^{\mathcal{Q}}(a_i), \tag{15.75}$$

$q^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{N,m}((a_i)) < \infty$ para todo $N$, y $R$ tiene propagación a lo más $\rho$ y satisface $s^{\mathrm{u}}_N(R) < \infty$ para todo $N$. Denotamos

el conjunto de estas representaciones por $\mathrm{Rep}^{\mathcal{Q}}_{m,\rho}(A)$ y definimos sus seminormas por

$$P^{\mathcal{Q}}_{m,N}(\mathfrak{r}) := q^{\mathfrak{u},\mathcal{Q}}_{N,m}((a_i)) + s^{\mathfrak{u}}_N(R). \tag{15.76}$$

El operador pertenece a $\Psi^m_{\mathfrak{u},\rho}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ si este conjunto no es vacío, y $\Psi^m_{\mathfrak{u}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F}) := \bigcup_{\rho\geq 0}\Psi^m_{\mathfrak{u},\rho}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$.

Si $\mathbf{E}=\mathbf{F}$, la identidad pertenece al cálculo con $a_i(x,\xi)=I$ y $R=0$, pues $\mathrm{Op}_{\omega_i}(I)=I$ sobre el soporte de $h_i$, porque $\omega_i=1$ en la diagonal, y

$$\sum_{i\in I} Q^{\mathcal{Q}}_i(I)u = \sum_{i\in I} h_i^2 u = u.$$

Ésta es la razón para usar la misma carta en las dos variables y un sistema cuadrático.

Las cantidades (15.76) dependen de la representación. Para obtener seminormas del operador, fijamos $\rho\geq\delta_{\mathcal{Q}}$ y ponemos

$$\|A\|^{\mathfrak{u},\mathcal{Q}}_{m,N;\rho} := \inf_{\mathfrak{r}\in\mathrm{Rep}^{\mathcal{Q}}_{m,\rho}(A)} P^{\mathcal{Q}}_{m,N}(\mathfrak{r}), \tag{15.77}$$

con valor $+\infty$ si no hay tal representación. Sobre $\Psi^m_{\mathfrak{u},\rho}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ son seminormas: la suma y el producto por un escalar se realizan componente a componente en las representaciones, y al tomar representaciones que aproximan los dos ínfimos se obtienen la desigualdad triangular y la homogeneidad. Son las seminormas cociente del mapeo lineal

$$((a_i),R)\longmapsto \sum_{i\in I} Q^{\mathcal{Q}}_i(a_i)+R.$$

Las seminormas cociente separan puntos. Si todas se anulan para un operador $A$, para cada $j\geq 1$ puede elegirse una representación de $A$ cuya suma de las primeras $j$ seminormas sea menor que $2^{-j}$. En cualquier par fijo de cartas, sus núcleos convergen entonces a cero en el sentido de distribuciones: para la parte pseudodiferencial esto se sigue de la continuidad de la cuantización sobre funciones de prueba y, para el residuo, de la convergencia uniforme del núcleo. Todas las representaciones tienen el mismo núcleo distribucional $\mathbf{K}_A$; por unicidad, $\mathbf{K}_A=0$ y $A=0$. Por lo tanto, cada etapa $\Psi^m_{\mathfrak{u},\rho}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$, con $\rho\geq\delta_{\mathcal{Q}}$, es un espacio localmente convexo de Hausdorff y metrizable, pues la familia de seminormas está numerada por $N\in\mathbb{N}_0$.

Estas etapas se consideran únicamente como espacios localmente convexos; su completitud, y por consiguiente la propiedad de ser espacios de Fréchet, requeriría demostrar que el espacio de representaciones escogido es completo y que el núcleo del mapeo cociente es cerrado en esa realización. Si $\rho_1\leq\rho_2$, la inclusión de la primera etapa en la segunda es continua, porque una representación de radio $\rho_1$ también lo es de radio $\rho_2$; la imagen puede no ser cerrada. En particular, la unión filtrada no se identifica con un límite inductivo estricto ni con un espacio LF.

La estructura global que se utilizará es bornológica y se fija de manera explícita: una familia $\mathscr{B}\subset\Psi^m_{\mathfrak{u}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ se llama **acotada en el cálculo uniforme** si existe $\rho\geq\delta_{\mathcal{Q}}$ tal que $\mathscr{B}\subset\Psi^m_{\mathfrak{u},\rho}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ y

$$\sup_{A\in\mathscr{B}}\|A\|^{\mathfrak{u},\mathcal{Q}}_{m,N;\rho}<\infty \qquad \text{para todo } N\in\mathbb{N}_0.$$

Esta definición no identifica tales familias con los conjuntos acotados de una topología de límite inductivo. Cuando $\mathcal{Q}$ y $\rho$ estén fijados, sólo entonces omitiremos esos superíndices de $q^{\mathfrak{u}}$, $P$ y $\|\cdot\|^{\mathfrak{u}}_{m,N;\rho}$.

Definimos $\Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ como los operadores de propagación finita $R\colon \Gamma_c(M,\mathbf{E})\to\Gamma(M,\mathbf{F})$ cuyo núcleo

$$\mathbf{K}_R \in C^\infty\big(M\times M;\operatorname{Hom}(\mathbf{E}_y,\mathbf{F}_x)\big)$$

satisface (15.74) para todo $N\in\mathbb{N}_0$. En los marcos síncronos del sistema $\mathcal{Q}$, esta condición equivale a que todos los núcleos localizados $h_i(x)\mathbf{K}_R(x,y)h_j(y)$ tengan derivadas parciales de cualquier orden acotadas por constantes independientes de $(i,j)$; la equivalencia se deduce de las cotas uniformes de las conexiones, de los cambios de marco y de las funciones $h_i$. Ésta es la compatibilidad requerida con el sistema de localización. La propagación finita es global, no microlocal; por Hopf–Rinow, todo operador del cálculo lleva $\Gamma_c(M,\mathbf{E})$ en $\Gamma_c(M,\mathbf{F})$. Si $M$ no es compacta, pertenecer a $\Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ no implica que la extensión $L^2(M,\mathbf{E})\to L^2(M,\mathbf{F})$ sea compacta; la Observación 15.6.16 exhibe un contraejemplo.

**Lema 15.6.9.** (Símbolo exacto de un núcleo uniformemente suave) Sean $r_{\mathbf{E}},r_{\mathbf{F}}\in\mathbb{N}$, sea $B=B_{\mathrm{euc}}(0,2r)\subset\mathbb{R}^n$ y sea

$$K_i\in C_c^\infty\big(B\times B;\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r_{\mathbf{E}}},\mathbb{C}^{r_{\mathbf{F}}})\big),\qquad i\in I,$$

una familia de núcleos apoyados en un compacto fijo de $B\times B$, cuyas derivadas están acotadas uniformemente. Sus símbolos exactos

$$r_i(x,\xi):=\int_{B_y} e^{-i(x-y)\cdot\xi}K_i(x,y)\,dy$$

forman una familia acotada en $S^{-P}_{1,0}(B\times\mathbb{R}^n;\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r_{\mathbf{E}}},\mathbb{C}^{r_{\mathbf{F}}}))$ para cada $P\in\mathbb{R}$. En particular, la definición de $\Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ coincide con la intersección de los órdenes cuando se fija un radio común y se usan las representaciones diagonales anteriores.

*Demostración.* La identidad que evita los términos espurios producidos al derivar la fase es, para cualesquiera multiíndices $\alpha,\beta$,

$$D_x^\alpha D_\xi^\beta r_i(x,\xi)=(-i)^{|\beta|}\int_{B_y} e^{-i(x-y)\cdot\xi}(D_x+D_y)^\alpha\big[(x-y)^\beta K_i(x,y)\big]\,dy. \tag{15.78}$$

Para probarla, $D_\xi^\beta$ produce exactamente $(-i)^{|\beta|}(x-y)^\beta$. Además, $(D_x+D_y)e^{-i(x-y)\cdot\xi}=0$; integrar por partes el término $D_y$ muestra que derivar la integral respecto de $x$ equivale a aplicar $D_x+D_y$ al factor restante. Iterar esta igualdad da (15.78).

Ahora usamos

$$\langle\xi\rangle^{2L}e^{-i(x-y)\cdot\xi}=(1-\Delta_y)^L e^{-i(x-y)\cdot\xi}$$

y trasladamos $(1-\Delta_y)^L$ por integración por partes al último factor de (15.78). Como los soportes permanecen en un compacto fijo, resulta

$$\langle\xi\rangle^{2L}\|D_x^\alpha D_\xi^\beta r_i(x,\xi)\|\le C_{\alpha,\beta,L}\max_{|\mu|+|\nu|\le|\alpha|+|\beta|+2L}\|D_x^\mu D_y^\nu K_i\|_{L^\infty(B\times B;\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r_{\mathbf{E}}},\mathbb{C}^{r_{\mathbf{F}}}))},$$

con constante independiente de $i$. Dado $P$, elegir $2L\ge P+|\beta|$ prueba las estimaciones de $S^{-P}_{1,0}(B\times\mathbb{R}^n;\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r_{\mathbf{E}}},\mathbb{C}^{r_{\mathbf{F}}}))$. La comparación entre derivadas parciales locales y covariantes, usando las cotas de los símbolos de Christoffel y de las matrices de conexión, identifica estas estimaciones con (15.74).

Si $R\in\Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$, tomamos $a_i=0$ en (15.75), de modo que pertenece a todos los órdenes con el mismo

radio. Para la implicación recíproca no suponemos que una sola representación sirva simultáneamente en todos los órdenes. Sea $A$ un operador de propagación finita que pertenece a $\Psi_{\mathrm{u}}^{\mu}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ para cada $\mu\in\mathbb{R}$, y fijemos $p,q\in\mathbb{N}_0$. Elegimos $\mu<-n-p-q-2$ y una representación de $A$ de ese orden,

$$A=\sum_{i\in I} Q_i^{\mathcal{O}}(a_i^{(\mu)})+R_\mu.$$

Al aplicar $p$ derivadas en la variable de salida y $q$ en la de entrada al núcleo de cada pieza diagonal, los términos de la integral oscilatoria están acotados por $C_{p,q}\langle\xi\rangle^{\mu+p+q}$. Esta función es integrable en $\mathbb{R}^n$, y la multiplicidad uniforme de la cubierta da una cota independiente de la carta para la suma de las piezas. El núcleo de $R_\mu$ ya es uniformemente suave. Por consiguiente, el mismo núcleo distribucional $\mathbf{K}_A$ está representado por un núcleo de clase $C^{p,q}$ y sus derivadas correspondientes están uniformemente acotadas. Al variar $p,q$, las representaciones obtenidas son compatibles porque todas representan el único núcleo distribucional $\mathbf{K}_A$. Así, $\mathbf{K}_A$ es suave y satisface (15.74) para todo $N$; junto con la propagación finita de $A$, esto prueba $A\in\Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$. □

Las representaciones anteriores permiten controlar una familia de símbolos carta por carta. Para construir parametrices debemos sumar expansiones formales usando cortes de frecuencia que puedan elegirse de manera uniforme en el índice de la carta. El siguiente lema es la versión uniforme de la suma asintótica simbólica.

**Lema 15.6.10.** (Suma asintótica uniforme) Sean $r_{\mathbf{E}},r_{\mathbf{F}}\in\mathbb{N}$, sea $\mathcal{I}$ un conjunto de índices y sean $m_0>m_1>\cdots$ números reales con $m_j\to-\infty$. En este lema abreviaremos

$$S^{\mu}:=S^{\mu}_{1,0}\big(B\times\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{r_{\mathbf{E}}},\mathbb{C}^{r_{\mathbf{F}}})\big).$$

Para cada $j\in\mathbb{N}_0$, sea $(a_\nu^{(j)})_{\nu\in\mathcal{I}}$ una familia en $S^{m_j}$ tal que

$$q^{\mathrm{u}}_{N,m_j}((a_\nu^{(j)}))<\infty\qquad\text{para todos } N,j.$$

Existe una familia $(a_\nu)_{\nu\in\mathcal{I}}\subset S^{m_0}$, acotada en las seminormas de $S^{m_0}$, para la cual, para todo $N\geq 1$ y todo $L\in\mathbb{N}_0$,

$$q^{\mathrm{u}}_{L,m_N}\left((a_\nu)-\sum_{j=0}^{N-1}(a_\nu^{(j)})\right)<\infty. \tag{15.79}$$

Si aparecen órdenes repetidos, se agrupan primero las familias del mismo orden.

*Demostración.* Tomemos $\chi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que se anule para $\|\xi\|\leq 1$ y valga uno para $\|\xi\|\geq 2$. Si $j>N$, Leibniz y el soporte de las derivadas de $\chi(\varepsilon\xi)$ dan

$$q^{\mathrm{u}}_{L,m_N}\big((\chi(\varepsilon\cdot)a_\nu^{(j)})_\nu\big)\leq C_{L,N,j}\varepsilon^{m_N-m_j}q^{\mathrm{u}}_{L,m_j}((a_\nu^{(j)})),\qquad 0<\varepsilon\leq 1. \tag{15.80}$$

En efecto, un término donde $D_\xi^\gamma$ alcanza al corte está sostenido en $\varepsilon^{-1}\leq\|\xi\|\leq 2\varepsilon^{-1}$ si $|\gamma|>0$ y en $\|\xi\|\geq\varepsilon^{-1}$ si $\gamma=0$; en ambos casos

$$\varepsilon^{|\gamma|}\langle\xi\rangle^{m_j-m_N+|\gamma|}\leq C_{N,j,\gamma}\varepsilon^{m_N-m_j}.$$

La constante es uniforme en $\nu$ porque la seminorma del último miembro de (15.80) lo es.

Elegimos $\varepsilon_j \in (0,1]$ de manera decreciente. Una vez fijados $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{j-1}$, la potencia positiva de (15.80) permite escoger $\varepsilon_j$ de modo que

$$q^{\mathrm{u}}_{L,m_N}\big((\chi(\varepsilon_j\cdot)a_\nu^{(j)})_\nu\big) \le 2^{-j} \tag{15.81}$$

para todos los pares $0 \le N < j$ y $0 \le L \le j$. Definimos

$$a_\nu(x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\varepsilon_j\xi)a_\nu^{(j)}(x,\xi).$$

Para una seminorma fija $q^{\mathrm{u}}_{L,m_0}$, los términos con $j > \max\{L,0\}$ forman, por (15.81), una serie dominada por $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}$; los términos restantes son finitos. Esto prueba la convergencia en todas las seminormas de $S^{m_0}$, uniformemente en $\nu$.

Fijemos ahora $N \ge 1$. Se tiene la identidad exacta

$$a_\nu - \sum_{j=0}^{N-1} a_\nu^{(j)} = \sum_{j=0}^{N-1} (\chi(\varepsilon_j\xi)-1)a_\nu^{(j)} + \sum_{j=N}^{\infty} \chi(\varepsilon_j\xi)a_\nu^{(j)}.$$

La primera suma posee soporte uniformemente acotado en $\xi$ y pertenece a todas las clases simbólicas. En la segunda, los términos con $N \le j \le \max\{N,L\}$ son finitos y pertenecen a $S^{m_N}$; el resto converge en $q^{\mathrm{u}}_{L,m_N}$ por (15.81). Esto prueba (15.79) para cada $L$. □

**Definición 15.6.11.** (Clasicidad y elipticidad uniformes) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa, sin frontera y de geometría acotada; sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones compatibles de geometría acotada; fíjese un sistema admisible $\mathcal{Q}$ como el anterior, pónganse $r_{\mathbf{E}} := \operatorname{rk}\mathbf{E}$, $r_{\mathbf{F}} := \operatorname{rk}\mathbf{F}$ y sea $m \in \mathbb{R}$. Un operador $A \in \Psi^m_{\mathrm{u}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ es **uniformemente clásico** si admite una representación diagonal cuyos símbolos poseen expansiones

$$a_i \sim \sum_{j=0}^{\infty} a^{(i)}_{m-j}$$

cuyas componentes homogéneas, restringidas a $\|\xi\| = 1$, tienen todas sus derivadas acotadas por constantes independientes de $i$, y si los restos después de $N$ componentes están acotados uniformemente en

$$S^{m-N}_{1,0}\big(B\times\mathbb{R}^n;\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r_{\mathbf{E}}},\mathbb{C}^{r_{\mathbf{F}}})\big).$$

Se escribe $A \in \Psi^m_{\mathrm{u,cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$.

Su símbolo principal es la sección global cuyas matrices en una carta se obtienen de

$$\sigma^{\Psi}_m(A)(x,\xi) = \sum_{i\in I} h_i(x)^2\,\big[a^{(i)}_m(x,\xi)\big]_{\mathbf{e}^{\mathbf{E}}_i,\mathbf{e}^{\mathbf{F}}_i}, \tag{15.82}$$

donde cada sumando se transporta a la fibra y a la covariable correspondientes. La suma es finita en cada punto. La independencia de la representación y del sistema se probará a continuación mediante la transformación exacta de los núcleos cercanos a la diagonal.

Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ tienen el mismo rango, un $A \in \Psi^m_{\mathrm{u,cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ es **uniformemente elíptico** si existe $c>0$ tal que

$$\left\|\sigma^{\Psi}_m(A)(x,\xi)v\right\|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}(x)} \geq c\|v\|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)}, \qquad x\in M,\quad \|\xi\|_{\mathbf{g}}=1,\quad v\in \mathbf{E}_x. \tag{15.83}$$

Por homogeneidad, esto equivale, para $\xi \neq 0_x$, a

$$\left\|\sigma^{\Psi}_m(A)(x,\xi)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}((\mathbf{F}_x,\mathbf{h}_{\mathbf{F}}(x)),(\mathbf{E}_x,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)))} \leq c^{-1}\|\xi\|_{\mathbf{g}}^{-m}.$$

La definición se formuló respecto de un sistema geodésico admisible $\mathcal{Q}$. Antes de utilizar el cálculo debemos comprobar que cambiar las cartas, los marcos o las funciones de corte no altera la clase de operadores ni sus familias acotadas. Compararemos, por ello, dos sistemas admisibles $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}^\sharp$, incluidos sus marcos. Las cotas cruzadas de (B1), empleadas en el Lema 13.3.4 y en la Proposición 14.5.3, proporcionan las dos multiplicidades cruzadas finitas; denotemos por $L_\times$ el máximo de ellas. Para precisar cuántas derivadas se usan, dados $N\in\mathbb{N}_0$ y $\mu\in\mathbb{R}$ definimos

$$L_N := n+N+1, \qquad K_{N,\mu} := n+N+1+\lceil|\mu|\rceil, \qquad \nu(N,\mu,n) := N+2L_N+2K_{N,\mu}+4.$$

En la fórmula exacta de reducción de amplitudes (15.5), $L_N$ integraciones mediante $1-\Delta_\eta$ hacen integrable la variable espacial y $K_{N,\mu}$ integraciones mediante $1-\Delta_y$ hacen integrable la variable de frecuencia después de tomar $N$ derivadas. Por consiguiente, la seminorma de orden $N$ del símbolo reducido usa a lo más $\nu(N,\mu,n)$ derivadas de la amplitud. Este número no es óptimo, pero está fijado y no depende de la carta.

Denotemos por $I^\sharp$ el conjunto de índices del sistema $\mathcal{Q}^\sharp$. Tomemos una representación $\mathfrak{r}=((a_i),R)\in \mathrm{Rep}^{\mathcal{Q}}_{m,\rho}(A)$. Elegimos $0<\delta<\frac14\min\{\delta_{\mathcal{Q}},\delta_{\mathcal{Q}^\sharp}\}$ y un corte uniforme $\zeta(x,y)$ que valga uno para $d_{\mathbf{g}}(x,y)\leq\delta$ y se anule para $d_{\mathbf{g}}(x,y)\geq 2\delta$. Separamos exactamente

$$\mathbf{K}_{A_{\mathrm{near}}} = \zeta\mathbf{K}_{A_{\mathrm{near}}} + (1-\zeta)\mathbf{K}_{A_{\mathrm{near}}}.$$

El segundo sumando está separado de la diagonal. Las integraciones por partes en la covariable usadas en la prueba de la pseudolocalidad, con las seminormas uniformes de $(a_i)$, muestran que es un núcleo uniformemente suave de propagación a lo más $\frac{2\delta_{\mathcal{Q}}}{3}$; lo incorporamos a $R$.

En el soporte del primer sumando, $w_{\mathcal{Q}^\sharp}\geq\frac12$ por (15.71). Por lo tanto, la identidad

$$\zeta\mathbf{K}_{A_{\mathrm{near}}}(x,y) = \sum_{a\in I^\sharp} h^\sharp_a(x)\frac{\zeta(x,y)\mathbf{K}_{A_{\mathrm{near}}}(x,y)}{w_{\mathcal{Q}^\sharp}(x,y)}h^\sharp_a(y) \tag{15.84}$$

redistribuye el núcleo de manera exacta en piezas que usan la misma carta $U^\sharp_a$ para $x$ y $y$. Para un $a$ fijo sólo intervienen los índices

$$J(a) := \{i\in I \mid U_i\cap U^\sharp_a\neq\varnothing\}, \qquad \#J(a)\leq L_\times.$$

Escribamos $\Phi_{ia} := \varphi_i\circ(\varphi^\sharp_a)^{-1}$ en el traslape y

$$B_{ia}(x,y) := \int_0^1 D\Phi_{ia}(y+t(x-y))\,dt.$$

Entonces $\Phi_{ia}(x)-\Phi_{ia}(y)=B_{ia}(x,y)(x-y)$ y, disminuyendo $\delta$ si fuera necesario, $B_{ia}$ es invertible con inversa uniformemente acotada. Sean $G^{\mathbf{E}}_{ia}(y)$ y $G^{\mathbf{F}}_{ia}(x)$ las matrices de cambio de los marcos nuevos a los antiguos. Después del

cambio $\xi = B_{ia}(x,y)^{T}\eta$, la contribución del índice $i$ al término $a$ de (15.84) tiene, antes de reducirla, la amplitud

$$c_{ai}(x,y,\xi) = \Theta_{ai}(x,y)G^{\mathbf{F}}_{ia}(x)a_i\big(\Phi_{ia}(x), B_{ia}(x,y)^{-T}\xi\big)G^{\mathbf{E}}_{ia}(y)^{-1}\frac{|\det D\Phi_{ia}(y)|}{|\det B_{ia}(x,y)|}, \tag{15.85}$$

donde $\Theta_{ai}$ es el producto de $\zeta$, las funciones $h_i$ en las dos variables, el corte $\omega_i$, los cortes auxiliares necesarios y $w^{-1}_{\mathcal{Q}^\sharp}$. Todos estos factores se expresan en la carta $a$ y sus derivadas están acotadas uniformemente. La fórmula incluye por separado la transición de coordenadas, los dos cambios de marco y el jacobiano de la variable de integración.

La reducción exacta del Teorema 15.1.9, aplicada a $\displaystyle\sum_{i\in J(a)} c_{ai}$, produce un símbolo $a^\sharp_a$ en la única carta $a$. La regla de Leibniz, la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19, el número de derivadas fijado por $\nu$ y $\#J(a)\le L_\times$ dan una representación $\mathfrak{r}^\sharp$ de $A$ para la cual

$$P^{\mathcal{Q}^\sharp}_{m,N}(\mathfrak{r}^\sharp) \le C_{N,m}L_\times P^{\mathcal{Q}}_{m,\nu(N,m,n)}(\mathfrak{r}). \tag{15.86}$$

La constante depende de las cotas, hasta orden $\nu(N,m,n)+2$, de las transiciones y sus inversas, de los cambios de marco y sus inversas, de los cortes, de las métricas fibradas y de las densidades, pero no de $a$ ni de $i$. El nuevo residuo tiene propagación a lo más $\rho^{\mathrm{com}} := \max\{\rho, \delta_{\mathcal{Q}}, \delta_{\mathcal{Q}^\sharp}\}$.

Tomamos ahora el ínfimo de (15.86) sobre todas las representaciones de radio a lo más $\rho$. Así obtenemos la comparación intrínseca

$$\|A\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}^\sharp}_{m,N;\rho^{\mathrm{com}}} \le C_{N,m}L_\times \|A\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{m,\nu(N,m,n);\rho}. \tag{15.87}$$

Intercambiar $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}^\sharp$ da la desigualdad en el otro sentido, después de usar el radio común $\rho^{\mathrm{com}}$. Esto prueba la independencia cuantitativa de la clase, de su filtración por radios, de sus conjuntos acotados y de la topología localmente convexa. Aplicada a las componentes homogéneas principales de (15.85), la misma fórmula da la regla cotangente exacta y prueba que (15.82) es independiente de la representación y del sistema.

Una vez probada la independencia de las elecciones, queda verificar que el cálculo uniforme conserva las operaciones que motivaron su construcción. Escribiremos $A^*_h$ para el adjunto formal hermitiano del operador pseudodiferencial $A$, de acuerdo con los teoremas locales precedentes. Reservamos $T^\dagger$ para el adjunto hilbertiano de un operador acotado entre dos espacios de Hilbert cuyos productos internos ya están fijados. Para una representación de radio residual $\rho$ escribiremos

$$\widehat{\rho} := \max\left\{\rho, \frac{2\delta_{\mathcal{Q}}}{3}\right\};$$

ésta es una cota para la propagación del operador completo, incluida su parte diagonal. Dados $N\in\mathbb{N}_0$ y $\mu,\lambda\in\mathbb{R}$, definimos el número de derivadas y el factor de interacción

$$\mathfrak{n}_N(\mu,\lambda) := \nu(N,\mu+\lambda,n)+\nu(N,\mu,n)+\nu(N,\lambda,n), \tag{15.88}$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{Q}}(\rho,\sigma) := (1+L_{\mathcal{Q}})^2\big(1+N_{\mathcal{Q}}(\rho+\sigma)\big)^2. \tag{15.89}$$

El segundo factor registra conjuntamente los solapamientos de las piezas diagonales y las interacciones a distancia acotada de los núcleos residuales; para las aplicaciones sólo necesitaremos que sea finito y dependa de los datos indicados.

**Proposición 15.6.12.** (Propiedades del cálculo uniforme) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa, sin frontera y de geometría acotada, y sean $\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{G}\to M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas, con conexiones compatibles de geometría acotada. Sean $m,\ell\in\mathbb{R}$, $\rho_A,\rho_B\geq\delta_{\mathcal{Q}}$, $A\in\Psi^m_{\mathrm{u},\rho_A}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $B\in\Psi^\ell_{\mathrm{u},\rho_B}(M;\mathbf{G},\mathbf{E})$. Entonces

(i) $AB\in\Psi^{m+\ell}_{\mathrm{u},\rho_{AB}}(M;\mathbf{G},\mathbf{F})$ con
$$\rho_{AB}:=\rho_A+\rho_B;$$

(ii) $A_h^*\in\Psi^m_{\mathrm{u},\rho_A}(M;\mathbf{F},\mathbf{E})$;

(iii) las clases $\Psi^{-\infty}_{\mathrm{u}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ son estables bajo adjuntos y forman un ideal bilateral entre los espacios correspondientes dentro del cálculo de propagación finita.

En particular, la composición es el mapeo bilineal continuo de etapas

$$\begin{aligned}\Psi^{m_1}_{\mathrm{u},\rho_1}(M;\mathbf{F},\mathbf{G})\times\Psi^{m_2}_{\mathrm{u},\rho_2}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})&\longrightarrow\Psi^{m_1+m_2}_{\mathrm{u},\rho_1+\rho_2}(M;\mathbf{E},\mathbf{G}),\\(A,B)&\longmapsto A\circ B,\end{aligned}\tag{15.90}$$

para $\rho_1,\rho_2\geq\delta_{\mathcal{Q}}$, y el adjunto es un mapeo continuo de $\Psi^m_{\mathrm{u},\rho}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ en $\Psi^m_{\mathrm{u},\rho}(M;\mathbf{F},\mathbf{E})$. Para cada $N$ existe $C_{N,m,\ell}$, independiente de los índices locales, tal que

$$\|AB\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{m+\ell,N;\rho_{AB}}\leq C_{N,m,\ell}\mathfrak{M}_{\mathcal{Q}}(\rho_A,\rho_B)\|A\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{m,\mathfrak{n}_N(m,\ell);\rho_A}\|B\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{\ell,\mathfrak{n}_N(m,\ell);\rho_B}.\tag{15.91}$$

Además, con $\mathfrak{a}_N(m):=\nu(N,m,n)+N+2$, se tiene

$$\|A_h^*\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{m,N;\rho_A}\leq C_{N,m}\|A\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{m,\mathfrak{a}_N(m);\rho_A}.\tag{15.92}$$

*Demostración.* Tomemos representaciones diagonales $\mathfrak{r}_A=((a_i),R_A)$ y $\mathfrak{r}_B=((b_j),R_B)$. Como $\rho_A,\rho_B\geq\delta_{\mathcal{Q}}$, se tiene $\widehat{\rho}_A=\rho_A$ y $\widehat{\rho}_B=\rho_B$. La fórmula del núcleo de la composición es

$$\mathbf{K}_{AB}(x,y)=\int_{M_z}\mathbf{K}_A(x,z)\mathbf{K}_B(z,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(z).$$

Si el integrando no se anula, entonces $d_{\mathbf{g}}(x,y)\leq\widehat{\rho}_A+\widehat{\rho}_B$, lo que prueba la cota de propagación. Separamos

$$AB=A_{\mathrm{near}}B_{\mathrm{near}}+A_{\mathrm{near}}R_B+R_AB_{\mathrm{near}}+R_AR_B.\tag{15.93}$$

Consideremos primero el primer sumando. Su núcleo es la suma de

$$K_{ij}(x,y):=\int_{M_z}\mathbf{K}_{Q_i(a_i)}(x,z)\mathbf{K}_{Q_j(b_j)}(z,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(z).$$

Sólo aparece si $U_i\cap U_j\neq\varnothing$; por lo tanto, fijado $i$, hay a lo más $L_{\mathcal{Q}}$ valores de $j$. Elegimos un corte $\zeta$ que se anule fuera de $d_{\mathbf{g}}(x,y)<\frac{\delta_{\mathcal{Q}}}{2}$ y valga uno cerca de la diagonal. La parte $(1-\zeta)K_{ij}$ está separada de la diagonal. Las integraciones por partes en las dos covariables, antes y después de integrar en $z$, dan todas las cotas de (15.74); intervienen a lo más $L_{\mathcal{Q}}$ sumandos por carta. Esta parte se incorpora al residuo.

Para $\zeta K_{ij}$ usamos nuevamente la identidad exacta (15.84):

$$\zeta(x,y)\sum_{(i,j)\in I\times I}K_{ij}(x,y)=\sum_{a\in I}h_a(x)\frac{\zeta(x,y)\sum_{(i,j)\in I\times I}K_{ij}(x,y)}{w_{\mathcal{Q}}(x,y)}h_a(y). \tag{15.94}$$

Al disminuir una vez el soporte de $\zeta$, la elección de $\delta_{\mathcal{Q}}$ garantiza que, si el sumando $a,i,j$ no se anula, los tres puntos $x,z,y$ pertenecen a $U_a$. Además, $U_i\cap U_a\neq\varnothing$ y $U_j\cap U_a\neq\varnothing$; para $a$ fijo hay a lo más $L_{\mathcal{Q}}^2$ pares $(i,j)$. Escribamos $\Phi_{ia}=\varphi_i\circ\varphi_a^{-1}$ y

$$B_{ia}(x,z)=\int_0^1 D\Phi_{ia}(z+t(x-z))\,dt.$$

En la carta $a$, el cambio $\eta=B_{ia}(x,z)^{-T}\xi$ transforma la primera pieza en la amplitud

$$c_{ia}(x,z,\xi)=\Theta_{ia}(x,z)G_{ia}^{\mathbf{F}}(x)a_i\big(\Phi_{ia}(x),B_{ia}(x,z)^{-T}\xi\big)G_{ia}^{\mathbf{E}}(z)^{-1}\frac{|\det D\Phi_{ia}(z)|}{|\det B_{ia}(x,z)|}. \tag{15.95}$$

Aquí $\Theta_{ia}$ contiene los cortes correspondientes; para la segunda pieza se obtiene, con $\Phi_{ja}$, la misma fórmula en las variables $(z,y)$ y con los cambios de marco $G_{ja}^{\mathbf{E}},G_{ja}^{\mathbf{G}}$. Las dos matrices intermedias toman valores en el mismo marco $\mathbf{e}_a^{\mathbf{E}}$. Ésta es una transformación dentro de la única carta $a$, no una cuantización con variables base en cartas distintas. Las cotas uniformes de las transiciones, de los marcos y de los jacobianos controlan todas las derivadas de ambas amplitudes. La reducción exacta da símbolos $\widetilde{a}_{ia}(x,\xi)$ y $\widetilde{b}_{ja}(x,\xi)$, ambos definidos en la carta $a$. El Teorema 15.2.6, aplicado ahora en esa única carta, produce

$$\widetilde{a}_{ia}\#\widetilde{b}_{ja}\sim\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}D_\xi^\alpha\widetilde{a}_{ia}\,D_x^\alpha\widetilde{b}_{ja}.$$

La derivación de esta fórmula hasta orden $N$, incluida la reducción de las dos amplitudes, utiliza como máximo $\mathfrak{n}_N(m,\ell)$ derivadas de $(a_i)$ y $(b_j)$. Sumando los no más de $L_{\mathcal{Q}}^2$ pares se obtiene un símbolo $c_a$ en la misma carta $a$ y una parte uniformemente suave.

Los tres términos restantes de (15.93) son uniformemente suaves. Para $R_AR_B$ esto se comprueba derivando bajo la integral; el dominio de integración se cubre, para cada carta de salida, por a lo más $N_{\mathcal{Q}}(\widehat{\rho}_A+\widehat{\rho}_B)$ cartas, cada una de volumen uniformemente acotado. En $A_{\mathrm{near}}R_B$ se aplica la pieza pseudodiferencial, en su única carta, a las derivadas del núcleo suave de $R_B$; en $R_AB_{\mathrm{near}}$ se procede en la otra variable. El mismo conteo y Calderón–Vaillancourt después de conjugar por potencias de $\langle D\rangle$ dan, para la representación construida,

$$P^{\mathcal{Q}}_{m+\ell,N}(\mathfrak{r}_{AB})\le C_{N,m,\ell}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{Q}}(\widehat{\rho}_A,\widehat{\rho}_B)P^{\mathcal{Q}}_{m,\mathfrak{n}_N(m,\ell)}(\mathfrak{r}_A)P^{\mathcal{Q}}_{\ell,\mathfrak{n}_N(m,\ell)}(\mathfrak{r}_B). \tag{15.96}$$

Su residuo tiene radio a lo más $\rho_{AB}$. Elegir representaciones que aproximen por separado los dos ínfimos y hacerlas tender a ellos prueba (15.91).

El adjunto de $Q_i^{\mathcal{Q}}(a_i)$ sigue usando la carta $i$ en ambas variables. El Teorema 15.2.8 y la reducción exacta dan un símbolo $a_i^{(*)}$ con

$$a_i^{(*)}(x,\xi)\sim\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}D_\xi^\alpha D_x^\alpha(a_i(x,\xi)^*).$$

En marcos no unitarios se intercalan las matrices de las métricas fibradas y la densidad local de $d\lambda_{\mathbf{g}}$. Sus derivadas y las de sus inversas están acotadas uniformemente. La diferencia entre el núcleo adjunto exacto

y la cuantización truncada de $a_i^{(*)}$ es uniformemente suave y conserva la propagación. Esto prueba primero la análoga de (15.92) para $P_{m,N}^{\mathcal{Q}}$ y después, tomando el ínfimo, la desigualdad declarada. Finalmente, $\mathbf{K}_{R_h^*}(x,y) = \mathbf{K}_R(y,x)^*$ conserva el radio y todas las seminormas (15.74). Los argumentos de los tres términos suaves anteriores, con un factor ya regularizante, prueban la propiedad de ideal bilateral. □

La estabilidad por composición permite pasar ahora a la inversión elíptica. Se invertirá primero el símbolo principal en cada carta, se corregirán los términos de orden inferior mediante una recurrencia uniforme y se sumarán esas correcciones sin perder el control de la propagación.

**Teorema 15.6.13.** (Parametrix uniforme) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa, sin frontera y de geometría acotada, y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos del mismo rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones compatibles de geometría acotada. Si $m \in \mathbb{R}$ y $A \in \Psi_{\mathrm{u,cl}}^m(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ es uniformemente elíptico, existe $B \in \Psi_{\mathrm{u}}^{-m}(M;\mathbf{F},\mathbf{E})$ tal que

$$BA - I \in \Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}), \qquad AB - I \in \Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{F},\mathbf{F}).$$

*Demostración.* Fijemos una representación diagonal de $A$ de radio residual $\rho_A$ y usemos la convención $\widehat{\rho}_A$ introducida antes de la Proposición 15.6.12. Localizamos el símbolo completo de $A$ en una sola carta cada vez. Más precisamente, aplicamos la redistribución (15.84) con dos cortes que valen uno sobre $\operatorname{supp}(h_i)$ y reducimos la amplitud en la carta $i$. Denotemos el símbolo resultante por $a^{(i)}$. Sus familias homogéneas satisfacen

$$a^{(i)}(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{m-k}^{(i)}(x,\xi),$$

y $a_m^{(i)}$ es la matriz, en el marco $i$, del símbolo global $\sigma_m^{\Psi}(A)$. De este modo, la inversión se aplica a la matriz local del símbolo principal global y utiliza directamente la elipticidad uniforme.
Para $j,N \in \mathbb{N}_0$ ponemos

$$A_{j,N} := \sup_{i\in I} \max_{|\gamma|\le N} \sup_{\substack{x\in B,\ \xi\in\mathbb{R}^n \\ \|\xi\|=1}} \|D^\gamma a_{m-j}^{(i)}(x,\xi)\|, \qquad D^\gamma := D_x^{\gamma_x} D_\xi^{\gamma_\xi}.$$

Sea $I_N$ la misma cantidad para $(a_m^{(i)})^{-1}$. Derivando la identidad $(a_m^{(i)})^{-1} a_m^{(i)} = I$, aislando el término $\eta = 0$ y multiplicando por la derecha por $(a_m^{(i)})^{-1}$ se obtiene, para $|\gamma| \ge 1$, la recurrencia multiíndice exacta

$$D^\gamma (a_m^{(i)})^{-1} = -\sum_{0<\eta\le\gamma} \binom{\gamma}{\eta} D^{\gamma-\eta}(a_m^{(i)})^{-1} (D^\eta a_m^{(i)})(a_m^{(i)})^{-1}. \tag{15.97}$$

En particular, $I_0 \le c^{-1}$, después de la comparación uniforme de las normas de las fibras, y

$$I_N \le I_0 + C_N I_0 A_{0,N} \sum_{p=0}^{N-1} I_p. \tag{15.98}$$

Esta recurrencia prueba por inducción que $I_N < \infty$ para todo $N$ y explicita qué derivadas del símbolo principal intervienen.

Las componentes formales de los inversos izquierdo y derecho se definen por

$$b_{-m}^{\mathrm{L},(i)} = b_{-m}^{\mathrm{R},(i)} := (a_m^{(i)})^{-1}, \tag{15.99}$$

$$b_{-m-j}^{\mathrm{L},(i)} := -\left[\sum_{\substack{k,q\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ k+q+|\alpha|=j,\ q<j}} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha b_{-m-q}^{\mathrm{L},(i)} D_x^\alpha a_{m-k}^{(i)}\right](a_m^{(i)})^{-1}, \quad j\geq 1, \tag{15.100}$$

$$b_{-m-j}^{\mathrm{R},(i)} := -(a_m^{(i)})^{-1}\left[\sum_{\substack{k,q\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ k+q+|\alpha|=j,\ q<j}} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha a_{m-k}^{(i)} D_x^\alpha b_{-m-q}^{\mathrm{R},(i)}\right]. \tag{15.101}$$

Se ha aislado respectivamente $b_{-m-j}a_m$ en $b\#a$ y $a_m b_{-m-j}$ en $a\#b$; los demás sumandos tienen $q<j$. Definamos $B_{j,N}^{\mathrm{L}}$ y $B_{j,N}^{\mathrm{R}}$ como el supremo, sobre $i$, $x\in B$, $\|\xi\|=1$ y $|\gamma|\leq N$, de las derivadas de las componentes correspondientes. Leibniz y (15.97) dan las cotas cuantificadas

$$B_{j,N}^{\mathrm{L}} \leq C_{j,N} I_{N+j} \sum_{\substack{k,q\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ k+q+|\alpha|=j,\ q<j}} B_{q,N+j}^{\mathrm{L}} A_{k,N+j}, \tag{15.102}$$

$$B_{j,N}^{\mathrm{R}} \leq C_{j,N} I_{N+j} \sum_{\substack{k,q\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ k+q+|\alpha|=j,\ q<j}} A_{k,N+j} B_{q,N+j}^{\mathrm{R}}. \tag{15.103}$$

La inducción en $j$ prueba que ambas cantidades son finitas para todo $j,N$. Cada componente tiene grado $-m-j$; la homogeneidad convierte las cotas sobre la esfera en estimaciones simbólicas uniformes.

Para realizar la primera suma de Borel, fijemos cortes radiales $\vartheta,\chi$ que se anulan en $\|\xi\|\leq 1$ y valen uno en $\|\xi\|\geq 2$. El Lema 15.6.10 elige sucesiones $\varepsilon_j^{\mathrm{L}},\varepsilon_j^{\mathrm{R}}\to 0^+$ para las cuales

$$\widetilde{b}_{\mathrm{L}}^{(i)}(x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\varepsilon_j^{\mathrm{L}}\xi)\vartheta(\xi) b_{-m-j}^{\mathrm{L},(i)}(x,\xi), \tag{15.104}$$

$$\widetilde{b}_{\mathrm{R}}^{(i)}(x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\varepsilon_j^{\mathrm{R}}\xi)\vartheta(\xi) b_{-m-j}^{\mathrm{R},(i)}(x,\xi) \tag{15.105}$$

son familias de $S^{-m}_{1,0}(B\times\mathbb{R}^n;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{r_{\mathrm{F}}},\mathbb{C}^{r_{\mathrm{E}}}))$ y, después de restar los primeros $N$ sumandos, pertenecen uniformemente a la clase análoga de orden $-m-N$. Estas sumas fijan el desarrollo que debe realizar el inverso global.

Su término principal define, en el modelo diagonal adoptado,

$$b_0^{(i)}(x,\xi) := \vartheta(\xi)(a_m^{(i)}(x,\xi))^{-1}, \qquad B_0 := \sum_{i\in I} Q_i^{\mathcal{Q}}(b_0^{(i)}). \tag{15.106}$$

En particular, la cuantización diagonal de $\widetilde{b}_{\mathrm{L}}^{(i)}$ o de $\widetilde{b}_{\mathrm{R}}^{(i)}$ difiere de $B_0$ en orden $-m-1$. La igualdad $\sum_{i\in I} h_i^2 = 1$ muestra que el símbolo principal de $B_0$ es $\sigma_m^{\Psi}(A)^{-1}$. Tomamos $\rho_{B_0} := \delta_{\mathcal{Q}}$ y

$$R_0 := I - B_0 A \in \Psi^{-1}_{\mathrm{u},\rho_0}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}), \qquad S_0 := I - AB_0 \in \Psi^{-1}_{\mathrm{u},\rho_0}(M;\mathbf{F},\mathbf{F}), \qquad \rho_0 := \widehat{\rho}_A + \widehat{\rho}_{B_0}.$$

Precisemos ahora las cotas de las potencias, incluidos sus radios. Sea

$$\mathfrak{C}_N(\rho,\sigma;\mu,\lambda) := C_{N,\mu,\lambda}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{Q}}(\rho,\sigma), \tag{15.107}$$

donde $C_{N,\mu,\lambda}$ es la constante de (15.91). Para $j \geq 1$ ponemos

$$r_{j,N} := \|R_0^j\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{-j,N;j\rho_0}, \qquad s_{j,N} := \|S_0^j\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{-j,N;j\rho_0},$$
$$\ell_{j,N} := \|R_0^j B_0\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{-m-j,N;j\rho_0+\rho_{B_0}}, \qquad d_{j,N} := \|B_0 S_0^j\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{-m-j,N;\rho_{B_0}+j\rho_0},$$

y $b_{0,N} := \|B_0\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{-m,N;\rho_{B_0}}$, $a_N := \|A\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{m,N;\rho_A}$. Para $j = 0$ adoptamos $\ell_{0,N} = d_{0,N} = b_{0,N}$. La cancelación exacta de los símbolos principales de $B_0A$ y $AB_0$, seguida de la reducción de amplitudes con una derivada adicional, proporciona la base

$$r_{1,N} + s_{1,N} \leq C_{N,m}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{Q}}(\widehat{\rho}_A,\widehat{\rho}_{B_0})\left(1 + b_{0,\mathfrak{n}_{N+1}(-m,m)}a_{\mathfrak{n}_{N+1}(-m,m)}\right). \tag{15.108}$$

La construcción de la composición y después el paso al ínfimo dan, para $j \geq 1$,

$$r_{j+1,N} \leq \mathfrak{C}_N(j\rho_0,\rho_0;-j,-1)r_{j,\mathfrak{n}_N(-j,-1)}r_{1,\mathfrak{n}_N(-j,-1)}, \tag{15.109}$$
$$s_{j+1,N} \leq \mathfrak{C}_N(j\rho_0,\rho_0;-j,-1)s_{j,\mathfrak{n}_N(-j,-1)}s_{1,\mathfrak{n}_N(-j,-1)}, \tag{15.110}$$
$$\ell_{j,N} \leq \mathfrak{C}_N(j\rho_0,\rho_{B_0};-j,-m)r_{j,\mathfrak{n}_N(-j,-m)}b_{0,\mathfrak{n}_N(-j,-m)}, \tag{15.111}$$
$$d_{j,N} \leq \mathfrak{C}_N(\rho_{B_0},j\rho_0;-m,-j)b_{0,\mathfrak{n}_N(-m,-j)}s_{j,\mathfrak{n}_N(-m,-j)}. \tag{15.112}$$

En particular, las cuatro familias de cantidades son finitas. Las fórmulas muestran simultáneamente el crecimiento del radio, el aumento $N \mapsto \mathfrak{n}_N$ del número de derivadas y la aparición explícita de $N_{\mathcal{Q}}(j\rho_0 + \rho_0)$ dentro de $\mathfrak{M}_{\mathcal{Q}}$. Para $R_0^N$ y $S_0^N$ las dos primeras recurrencias, iteradas desde $r_{1,N}$ y $s_{1,N}$, son las cotas cuantificadas requeridas; en particular,

$$R_0^N \in \Psi^{-N}_{\mathrm{u},N\rho_0}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}), \qquad S_0^N \in \Psi^{-N}_{\mathrm{u},N\rho_0}(M;\mathbf{F},\mathbf{F}). \tag{15.113}$$

Para $N \geq 1$ introducimos las sumas finitas

$$C_N^{\mathrm{L}} := \sum_{j=0}^{N-1} R_0^j B_0, \qquad C_N^{\mathrm{R}} := B_0 \sum_{j=0}^{N-1} S_0^j. \tag{15.114}$$

Las identidades $B_0A = I - R_0$ y $AB_0 = I - S_0$ dan exactamente

$$I - C_N^{\mathrm{L}}A = R_0^N, \qquad I - AC_N^{\mathrm{R}} = S_0^N. \tag{15.115}$$

Usamos ahora las representaciones producidas recursivamente en la prueba de la Proposición 15.6.12. Sean $(c^{\mathrm{L}}_{j,i})_i$ y $(c^{\mathrm{R}}_{j,i})_i$ sus familias de símbolos cercanos a la diagonal para $R_0^jB_0$ y $B_0S_0^j$. Las cotas (15.111) y (15.112), antes de tomar el ínfimo, verifican las hipótesis de la suma asintótica uniforme. Con otras dos sucesiones

de cortes obtenemos explícitamente

$$b_{\mathrm{L}}^{(i)}(x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\delta_j^{\mathrm{L}}\xi)\, c_{j,i}^{\mathrm{L}}(x,\xi), \qquad B_{\mathrm{L}} := \sum_{i\in I} Q_i^{\mathcal{Q}}(b_{\mathrm{L}}^{(i)}), \tag{15.116}$$

$$b_{\mathrm{R}}^{(i)}(x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\delta_j^{\mathrm{R}}\xi)\, c_{j,i}^{\mathrm{R}}(x,\xi), \qquad B_{\mathrm{R}} := \sum_{i\in I} Q_i^{\mathcal{Q}}(b_{\mathrm{R}}^{(i)}). \tag{15.117}$$

Aquí se suman sólo los símbolos de las partes cercanas a la diagonal. No se suman los núcleos residuales de $R_0^j B_0$ ni de $B_0 S_0^j$, cuyos radios crecen con $j$; esta distinción mantiene una propagación fija para $B_{\mathrm{L}}$ y $B_{\mathrm{R}}$.
Para cada $N$, la propiedad definitoria de las dos sumas de Borel y los finitos residuos de los términos con $j<N$ dan

$$B_{\mathrm{L}} - C_N^{\mathrm{L}} \in \Psi_{\mathrm{u}}^{-m-N}(M;\mathbf{F},\mathbf{E}), \qquad B_{\mathrm{R}} - C_N^{\mathrm{R}} \in \Psi_{\mathrm{u}}^{-m-N}(M;\mathbf{F},\mathbf{E}). \tag{15.118}$$

El radio de una representación de estas diferencias puede depender de $N$; los cuatro operadores $B_{\mathrm{L}}$, $B_{\mathrm{R}}$, $B_{\mathrm{L}}A-I$ y $AB_{\mathrm{R}}-I$, en cambio, tienen propagaciones fijas. Al combinar (15.118) con (15.115) se obtiene, para todo $N$,

$$B_{\mathrm{L}}A - I \in \Psi_{\mathrm{u}}^{-N}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}), \qquad AB_{\mathrm{R}} - I \in \Psi_{\mathrm{u}}^{-N}(M;\mathbf{F},\mathbf{F}).$$

Los dos residuos son operadores fijos de propagación finita y pertenecen, respectivamente, a $\Psi_{\mathrm{u}}^{-N}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ y $\Psi_{\mathrm{u}}^{-N}(M;\mathbf{F},\mathbf{F})$ para todo $N$. Aplicamos la implicación recíproca del Lema 15.6.9: dados $p,q$, elegimos $N > n+p+q+2$ y una representación de orden $-N$ del residuo correspondiente. La convergencia absoluta de las derivadas de su núcleo diagonal y el núcleo uniformemente suave de esa representación proporcionan las cotas covariantes de órdenes $p,q$. La unicidad del núcleo distribucional hace compatibles estas representaciones al variar $p,q$; por lo tanto, ambos residuos pertenecen, respectivamente, a $\Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ y $\Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{F},\mathbf{F})$.
Si $B_{\mathrm{L}}A = I - R_{\mathbf{E}}$ y $AB_{\mathrm{R}} = I - R_{\mathbf{F}}$, entonces

$$B_{\mathrm{L}} - B_{\mathrm{R}} = B_{\mathrm{L}}R_{\mathbf{F}} - R_{\mathbf{E}}B_{\mathrm{R}} \in \Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{F},\mathbf{E}).$$

Tomando $B = B_{\mathrm{L}}$ y usando la propiedad de ideal también en el lado derecho, obtenemos

$$BA - I \in \Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}), \qquad AB - I \in \Psi_{\mathrm{u}}^{-\infty}(M;\mathbf{F},\mathbf{F}). \tag{15.119}$$

□

La parametrix anterior sigue siendo una construcción simbólica. Para obtener regularidad global debemos relacionar las seminormas uniformes con las normas de Sobolev definidas mediante el sistema de localización. El Lema 15.6.3 controla los residuos suaves, mientras que la parte diagonal se reduce al teorema euclidiano.

**Teorema 15.6.14.** (Mapeo uniforme de Sobolev) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa, sin frontera, de dimensión $n$ y geometría acotada; sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones compatibles de geometría acotada, y fijemos el sistema admisible $\mathcal{Q}$ anterior. Si $m,s\in\mathbb{R}$, $\rho\geq\delta_{\mathcal{Q}}$ y $A\in\Psi_{\mathrm{u},\rho}^{m}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces

$$A\colon H^{s+m}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^{s}(M,\mathbf{F})$$

es continuo. Existen un entero $N = N(n, m, s)$ y una constante $C_s$, que dependen de los datos uniformes del sistema pero no del índice de una carta ni de $A$, tales que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H^{s+m}(M,\mathbf{E}),H^s(M,\mathbf{F}))} \le C_s\big(1 + N_{\mathcal{Q}}(\rho)\big)\|A\|^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{m,N;\rho}. \tag{15.120}$$

En particular, todo $R \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{u}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ actúa continuamente de $H^t(M,\mathbf{E})$ en $H^s(M,\mathbf{F})$ para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$. Todas estas estimaciones son uniformes para familias acotadas del cálculo.

*Demostración.* Sea $\mathfrak{r} = ((a_i), R)$ una representación diagonal de $A$ de radio residual $\rho$. Introduzcamos los operadores de análisis, bloque diagonal y síntesis

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{E}}\mathbf{u} &:= (\mathcal{A}_i^{\mathbf{E}}\mathbf{u})_{i\in I}, \\ \mathbf{T}_{(a_i)}(v_i) &:= (\mathrm{Op}_{\omega_i}(a_i)v_i)_{i\in I}, \\ \mathbf{S}_{\mathbf{F}}(v_i) &:= \sum_{i\in I} \mathcal{S}_i^{\mathbf{F}} v_i. \end{aligned}$$

La parte cercana a la diagonal factoriza exactamente como

$$A_{\mathrm{near}} = \mathbf{S}_{\mathbf{F}}\mathbf{T}_{(a_i)}\mathbf{A}_{\mathbf{E}}. \tag{15.121}$$

El análisis y la síntesis son los operadores de retracción y corretracción del capítulo anterior: su continuidad se estableció en (13.36) y su equivalencia con las normas globales en el Lema 13.3.10. La reducción de la amplitud $\omega_i(x,y)a_i(x,\xi)$ usa un número finito, independiente de $i$, de derivadas. El Teorema 15.6.2, aplicado componente a componente, proporciona por lo tanto un $N_0 = N_0(n,m,s)$ tal que para toda $\mathbf{u} \in \Gamma_c(M,\mathbf{E})$

$$\|A_{\mathrm{near}}\mathbf{u}\|_{H^s(M,\mathbf{F})} \le C_s q^{\mathrm{u},\mathcal{Q}}_{N_0,m}((a_i))\|\mathbf{u}\|_{H^{s+m}(M,\mathbf{E})}. \tag{15.122}$$

Para el residuo localizamos $h_i R h_j$. Sólo puede ser no nulo si $j \in I_{\mathcal{Q}}(i,\rho)$. Aplicamos el Lema 15.6.3, cuya definición por dualidad actúa directamente sobre los espacios de restricción, al elemento $h_j\mathbf{u} \in H^{s+m}(U_j,\mathbf{E})$ en los rectángulos coordenados fijos, con

$$\sigma = s, \qquad \tau = s+m, \qquad N_1 := \max\{0, \lceil s\rceil\} + \max\{0, \lceil -s-m\rceil\}.$$

Los soportes de los núcleos localizados quedan en un compacto fijo de los rectángulos, pues los factores $h_i, h_j$ están uniformemente separados de los bordes de las cartas. La comparación uniforme entre derivadas parciales y covariantes hasta el orden $N_1$ da

$$\|h_i R h_j \mathbf{u}\|_{H^s(U_i,\mathbf{F})} \le C_s s^{\mathrm{u}}_{N_1}(R)\|h_j\mathbf{u}\|_{H^{s+m}(U_j,\mathbf{E})}.$$

En cada suma hay a lo más $N_{\mathcal{Q}}(\rho)$ índices. Cauchy–Schwarz, seguido del conteo inverso de los pares $(i,j)$, produce

$$\|R\mathbf{u}\|_{H^s(M,\mathbf{F})} \le C_s N_{\mathcal{Q}}(\rho) s^{\mathrm{u}}_{N_1}(R)\|\mathbf{u}\|_{H^{s+m}(M,\mathbf{E})}. \tag{15.123}$$

Con $N := \max\{N_0, N_1\}$, (15.122) y (15.123) dan primero

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H^{s+m}(M,\mathbf{E}),H^s(M,\mathbf{F}))} \le C_s(1 + N_{\mathcal{Q}}(\rho))P^{\mathcal{Q}}_{m,N}(\mathfrak{r}).$$

Tomar el ínfimo sobre todas las representaciones de radio $\rho$ prueba (15.120). Si $R$ es regularizante, se usa la representación $((0), R)$ y se considera $R$ como operador de orden $t - s$; se obtiene el mapeo de $H^t(M, \mathbf{E})$ en $H^s(M, \mathbf{F})$. La densidad de $\Gamma_c(M, \mathbf{E})$, demostrada mediante el mismo par análisis–síntesis en el capítulo anterior, completa las extensiones. □

**Corolario 15.6.15.** (Estimación y regularidad elípticas uniformes) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa, sin frontera y de geometría acotada, y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos del mismo rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones compatibles de geometría acotada. Sean $m \in \mathbb{R}$ y $A \in \Psi^m_{\mathrm{u,cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$ uniformemente elíptico. Para $s, t \in \mathbb{R}$ existe $C_{s,t} > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{s+m}(M,\mathbf{E})} \leq C_{s,t} \big( \|A\mathbf{u}\|_{H^s(M,\mathbf{F})} + \|\mathbf{u}\|_{H^t(M,\mathbf{E})} \big), \qquad \mathbf{u} \in \Gamma_c(M, \mathbf{E}). \tag{15.124}$$

Si $\mathbf{u} \in H^t(M, \mathbf{E})$ y $A\mathbf{u} \in H^s(M, \mathbf{F})$ en sentido distribucional, entonces $\mathbf{u} \in H^{s+m}(M, \mathbf{E})$.

*Demostración.* Sea $B$ la parametrix de (15.119) y escribamos $BA = I - R_{\mathbf{E}}$. El teorema anterior da

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{s+m}(M,\mathbf{E})} \leq \|BA\mathbf{u}\|_{H^{s+m}(M,\mathbf{E})} + \|R_{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{H^{s+m}(M,\mathbf{E})} \leq C_{s,t} \big( \|A\mathbf{u}\|_{H^s(M,\mathbf{F})} + \|\mathbf{u}\|_{H^t(M,\mathbf{E})} \big),$$

porque $B$ tiene orden $-m$ y $R_{\mathbf{E}}$ es uniformemente regularizante. La misma identidad distribucional prueba la última afirmación. □

**Observación 15.6.16.** (Uniforme no significa compacto) En una variedad sin frontera y no compacta, un elemento de $\Psi^{-\infty}_{\mathrm{u}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$ no tiene por qué ser compacto ni Fredholm. En $\mathbb{R}^n$, sea $0 \neq \kappa \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ y

$$Ru := \kappa * u.$$

Su símbolo $(2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{\kappa}(\xi)$ pertenece a $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}))$ con la normalización unitaria de la Definición 4.11.1, y su núcleo tiene propagación finita y cotas invariantes por traslación. Por lo tanto, $R \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{u}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}, \mathbb{C})$. Elijamos $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ con $Ru \neq 0$ y pongamos $u_j(x) = u(x - je_1)$. Entonces $Ru_j$ es la traslación correspondiente de $Ru$; una subsucesión con soportes disjuntos no puede converger. Así, $R$ no es compacto. Además, $\widehat{\kappa}(\xi) \to 0$ cuando $\|\xi\| \to \infty$; funciones normalizadas con soportes de Fourier en bolas disjuntas que escapan al infinito forman una sucesión ortonormal $(v_j)$ con $Rv_j \to 0$. Como $v_j$ converge débilmente a cero, su distancia a cualquier subespacio finito–dimensional tiende a uno. Esto contradice la cota inferior de un operador Fredholm sobre el complemento ortogonal de su núcleo; por lo tanto, $R$ tampoco es Fredholm.

Por la misma razón, la existencia de una parametrix con residuos *uniformemente* regularizantes no prueba Fredholm. Por ejemplo, $D_1 = \partial_1 \colon H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ es uniformemente elíptico, pero su rango no es cerrado. En variedades abiertas hacen falta hipótesis adicionales en el infinito; no se introducirán aquí.

### 15.6.4 Variedades cerradas: compacidad y clases de Schatten

En una variedad no compacta, un núcleo uniformemente suave puede trasladarse hacia el infinito y no producir un operador compacto. Sobre una variedad cerrada desaparece esa posibilidad: los núcleos suaves son compactos y, de hecho, pertenecen a clases de Schatten. Esta diferencia es la que permitirá pasar de una parametrix regularizante a la propiedad de Fredholm.

Fijamos primero la terminología funcional que se usará en esta subsección. Sean $H_1, H_2$ espacios de Hilbert

separables y $T\colon H_1 \to H_2$ compacto. Sus **números singulares** son los autovalores, repetidos según su multiplicidad y ordenados de manera no creciente y completados con ceros cuando el rango es finito,

$$s_j(T) := \lambda_j\big((T^{\dagger}T)^{\frac{1}{2}}\big), \qquad j \geq 1.$$

Para $1 \leq p < \infty$, la **clase de Schatten** $\mathfrak{S}_p(H_1, H_2)$ está formada por los operadores compactos tales que

$$\|T\|_{\mathfrak{S}_p} := \left( \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

En particular, $\mathfrak{S}_2$ es la clase de Hilbert–Schmidt y $\mathfrak{S}_1$ es la clase traza. Si $(e_j)$ es una base ortonormal de $H_1$, entonces

$$\|T\|_{\mathfrak{S}_2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|_{H_2}^2; \tag{15.125}$$

esta cantidad no depende de la base y se llama la **norma de Hilbert–Schmidt**. Si $H_1 = H_2 = H$ y $T \in \mathfrak{S}_1(H)$, su **traza** es

$$\operatorname{Tr}(T) := \sum_{j=1}^{\infty} \langle Te_j, e_j \rangle_H. \tag{15.126}$$

La serie converge absolutamente y su suma es independiente de la base ortonormal. Estas afirmaciones se obtienen primero para operadores de rango finito mediante la descomposición en valores singulares y después por completitud respecto de las normas $\mathfrak{S}_2$ y $\mathfrak{S}_1$.

**Proposición 15.6.17.** (Núcleos cuadrado-integrables y producto de clases de Schatten) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada, de dimensión $n$, y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas. Un operador integral

$$(T_K u)(x) = \int_{M_y} K(x,y)\, u(y)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$$

es de Hilbert–Schmidt si y sólo si, salvo igualdad casi por doquier, su núcleo pertenece a

$$L^2\big(M \times M; \operatorname{Hom}(\mathbf{E}_y, \mathbf{F}_x)\big).$$

Aquí $\|K(x,y)\|_{\mathrm{HS}}$ es la norma euclidiana de la matriz de $K(x,y)\colon \mathbf{E}_y \to \mathbf{F}_x$ en bases ortonormales, independiente de dichas bases. En ese caso,

$$\|T_K\|_{\mathfrak{S}_2}^2 = \int_{M_x \times M_y} \|K(x,y)\|_{\mathrm{HS}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}}(x)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y). \tag{15.127}$$

Además, si $C \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$ y $B \in \mathfrak{S}_2(H_2, H_3)$, entonces

$$BC \in \mathfrak{S}_1(H_1, H_3), \qquad \|BC\|_{\mathfrak{S}_1} \leq \|B\|_{\mathfrak{S}_2} \|C\|_{\mathfrak{S}_2}. \tag{15.128}$$

*Demostración.* La identificación isométrica entre el producto tensorial hilbertiano $L^2(M,\mathbf{F})\widehat{\otimes}\overline{L^2(M,\mathbf{E})}$ y los operadores de Hilbert–Schmidt envía un tensor elemental $f\otimes\bar{e}$ al operador $u\mapsto\langle u,e\rangle f$. En marcos ortonormales locales, esta identificación es precisamente $K\mapsto T_K$; Parseval y Tonelli dan (15.127). La sobreyectividad de la identificación prueba también la implicación recíproca y la unicidad del núcleo en $L^2(M\times M;\operatorname{Hom}(\mathbf{E}_y,\mathbf{F}_x))$.
Para la última afirmación, usemos una descomposición en valores singulares

$$Cu=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(C)\langle u,e_j\rangle f_j,$$

donde $(e_j)$ es ortonormal en $H_1$ y $(f_j)$ es un sistema ortonormal en $H_2$. Entonces

$$BCu=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(C)\langle u,e_j\rangle Bf_j$$

es una representación nuclear. En efecto, un operador de rango uno $u\mapsto\langle u,e\rangle h$ tiene norma $\mathfrak{S}_1$ igual a $\|e\|\|h\|$; por la desigualdad triangular, una serie de tales operadores con suma de esas cantidades finita converge en $\mathfrak{S}_1$. Ahora, por Cauchy–Schwarz y (15.125),

$$\sum_{j=1}^{\infty}s_j(C)\|Bf_j\|\le\left(\sum_{j=1}^{\infty}s_j(C)^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Bf_j\|^2\right)^{\frac12}\le\|C\|_{\mathfrak{S}_2}\|B\|_{\mathfrak{S}_2}.$$

En la última desigualdad se prolongó $(f_j)$ a una base ortonormal de $H_2$. Las sumas parciales convergen, por lo tanto, en norma de clase traza y prueban (15.128). □

**Proposición 15.6.18.** (Regularizantes sobre una variedad cerrada) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\longrightarrow M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones hermitianas. Si $R\in\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces, para todos $s,t\in\mathbb{R}$,

$$R\colon H^s(M,\mathbf{E})\longrightarrow H^t(M,\mathbf{F})$$

es continuo y compacto. De hecho, como operador de $L^2(M,\mathbf{E})$ en $L^2(M,\mathbf{F})$, $R$ es de clase traza.

*Demostración.* Al localizar el núcleo en rectángulos coordenados, la definición por dualidad del Lema 15.6.3 se aplica directamente a cada elemento de $H^s(M,\mathbf{E})$ y permite derivar bajo el emparejamiento con la distribución. Por lo tanto, $R$ lleva $H^s(M,\mathbf{E})$ continuamente en $H^N(M,\mathbf{F})$ para todo $N$. Elegimos $N>t$. La inclusión $H^N(M,\mathbf{F})\hookrightarrow H^t(M,\mathbf{F})$ es compacta por el Teorema de Rellich–Kondrashov, obtenido de 6.6.4 mediante un atlas finito; la factorización prueba la compacidad.
Para la última afirmación localizamos el núcleo en un número finito de rectángulos coordenados y prolongamos cada pieza suavemente a un toro. Sus coeficientes dobles de Fourier decrecen más rápidamente que cualquier potencia. La pieza es, por lo tanto, una suma de operadores de rango uno cuyos coeficientes son absolutamente sumables, y es de clase traza. Una suma finita conserva esa propiedad. □

**Lema 15.6.19.** (Fórmula diagonal para un núcleo continuo) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada y sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana. Si $T\in\mathfrak{S}_1(L^2(M,\mathbf{E}))$ posee un núcleo integral continuo $\mathbf{K}_T(x,y)$, entonces

$$\operatorname{Tr}(T)=\int_{M_x}\operatorname{tr}_{\mathbf{E}_x}\mathbf{K}_T(x,x)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(x).$$

*Demostración.* Fijemos una cubierta finita $(V_i)$ con $\overline{V}_i$ contenida en un abierto $U_i$ provisto de un marco unitario $(\mathbf{e}_{i,a})$. Tomemos subdivisiones medibles finitas $\mathcal{P}_\nu$ cuyas celdas de medida positiva estén contenidas en algún $V_i$ y cuyo diámetro máximo $\delta_\nu$ tienda a cero; las celdas nulas se descartan. Para cada celda $Q\subset V_i$ y cada vector del marco local, sea

$$\mathbf{v}_{Q,a}:=\lambda_{\mathbf{g}}(Q)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_Q\mathbf{e}_{i,a},$$

y denotemos por $P_\nu$ la proyección ortogonal sobre el espacio generado por estos vectores. Si $\mathbf{u}\in\Gamma(M,\mathbf{E})$ y $\mathbf{u}=\sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}}u_{i,a}\mathbf{e}_{i,a}$ en $U_i$, entonces, sobre $Q\subset V_i$,

$$P_\nu\mathbf{u}=\sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}}\left(\frac{1}{\lambda_{\mathbf{g}}(Q)}\int_{Q_y}u_{i,a}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\right)\mathbf{e}_{i,a}.$$

La uniformidad de los módulos de continuidad de los coeficientes en esta cubierta finita da $\|P_\nu\mathbf{u}-\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\le C\omega_{\mathbf{u}}(\delta_\nu)$. Por la densidad de las secciones suaves y $\|P_\nu\|\le 1$, se sigue que $P_\nu\to I$ fuertemente.
Como $T$ es de clase traza,

$$\|T-P_\nu TP_\nu\|_{\mathfrak{S}_1}\longrightarrow 0;$$

en efecto, $T-P_\nu TP_\nu=(I-P_\nu)T+P_\nu T(I-P_\nu)$, y ambos términos convergen a cero en norma de traza, primero para $T$ de rango finito y luego por aproximación de $T$ y $T^\dagger$ en $\mathfrak{S}_1$. En consecuencia,

$$\operatorname{Tr}(T)=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{Q\in\mathcal{P}_\nu}\sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}}\frac{1}{\lambda_{\mathbf{g}}(Q)}\int_{Q_x\times Q_y}\big\langle\mathbf{K}_T(x,y)\mathbf{e}_{i,a}(y),\mathbf{e}_{i,a}(x)\big\rangle\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(x).$$

En $\overline{V}_i\times\overline{V}_i$ pongamos

$$k_{i,a}(x,y):=\big\langle\mathbf{K}_T(x,y)\mathbf{e}_{i,a}(y),\mathbf{e}_{i,a}(x)\big\rangle.$$

Estas funciones son uniformemente continuas. Si $\omega$ es el máximo de sus módulos de continuidad, la diferencia entre la última suma y la integral diagonal está acotada por

$$\operatorname{rk}(\mathbf{E})\lambda_{\mathbf{g}}(M)\omega(\delta_\nu),$$

que tiende a cero. Finalmente, $\sum_{a=1}^{r_{\mathbf{E}}}k_{i,a}(x,x)=\operatorname{tr}_{\mathbf{E}_x}\mathbf{K}_T(x,x)$, de modo que el límite es independiente del marco y prueba la fórmula. □

**Teorema 15.6.20.** (Umbrales de Hilbert–Schmidt y de traza) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada de dimensión $n$, y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\longrightarrow M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones hermitianas. Sea $m\in\mathbb{R}$.

(i) Si $A \in \Psi^m(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $m < -\frac{n}{2}$, entonces

$$A \in \mathfrak{S}_2\big(L^2(M,\mathbf{E}), L^2(M,\mathbf{F})\big),$$

es decir, $A$ es de Hilbert–Schmidt.

(ii) Si $m < -n$, entonces

$$A \in \mathfrak{S}_1\big(L^2(M,\mathbf{E}), L^2(M,\mathbf{F})\big).$$

Si $\mathbf{E} = \mathbf{F}$, su traza está dada por la fórmula diagonal

$$\operatorname{Tr}(A) = \int_{M_x} \operatorname{tr}_{\mathbf{E}_x} \mathbf{K}_A(x,x)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x). \tag{15.129}$$

Si, con la convención de la Definición 15.4.7,

$$A = \operatorname{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}(a) + R, \qquad R \in \Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}),$$

y $m < -n$, entonces

$$\operatorname{Tr}(A) = (2\pi)^{-n} \int_{M_x} \int_{T_x^*M} \operatorname{tr}_{\mathbf{E}_x} a(x,\xi)\, d\xi_x\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x) + \int_{M_x} \operatorname{tr}_{\mathbf{E}_x} \mathbf{K}_R(x,x)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x). \tag{15.130}$$

*Demostración.* Localicemos primero una pieza cuyo símbolo $a(x,\xi)$ tenga soporte compacto en $x$. Su núcleo es

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)\, d\xi.$$

Plancherel en la variable $y$ da

$$\int_{\mathbb{R}^n_y} \|K(x,y)\|_{\mathrm{HS}}^2\, dy = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \|a(x,\xi)\|_{\mathrm{HS}}^2\, d\xi.$$

El miembro derecho es integrable en $x$ cuando $2m < -n$. El cuadrado de la norma de Hilbert–Schmidt de un operador integral es la norma $L^2(M \times M; \operatorname{Hom}(\mathbf{E}_y, \mathbf{F}_x))$ de su núcleo; un atlas finito y la Proposición 15.6.18 para los restos prueban (i).

Supongamos $m < -n$. Construimos un operador escalar elíptico $Q_{\mathbf{E}} \in \Psi^{\frac{m}{2}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ con símbolo completo local $\langle\xi\rangle^{\frac{m}{2}} I_{\mathbf{E}}$ módulo términos de orden inferior y, por lo tanto, con símbolo principal $\|\xi\|^{\frac{m}{2}} I_{\mathbf{E}}$, y una parametrix $C_{\mathbf{E}} \in \Psi^{-\frac{m}{2}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$. Si $C_{\mathbf{E}} Q_{\mathbf{E}} = I - R_{\mathbf{E}}$, entonces

$$A = (AC_{\mathbf{E}})Q_{\mathbf{E}} + AR_{\mathbf{E}}.$$

Los dos primeros factores tienen orden $\frac{m}{2} < -\frac{n}{2}$ y son de Hilbert–Schmidt por (i); su producto es de clase traza. El último término es regularizante y de clase traza por la proposición anterior. Esto prueba (ii).

Cuando $m < -n$, en cada pieza localizada la integral que define el núcleo posee la mayorante uniforme $C\langle\xi\rangle^m \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La convergencia dominada prueba que el núcleo es conjuntamente continuo en $(x,y)$; una suma finita de piezas y el resto suave conservan esta propiedad. El Lema 15.6.19, aplicado al operador de clase traza ya construido, da (15.129). En la cuantización geométrica, $j_x(0) = 1$ y el transporte paralelo sobre

la diagonal es la identidad; por ello

$$\mathbf{K}_{\mathrm{Op}_{\mathbf{g},\nabla,\chi}(a)}(x,x) = (2\pi)^{-n} \int_{T_x^*M} a(x,\xi)\, d\xi_x.$$

Sumar el término $R$ prueba (15.130). □

### 15.6.5 Operadores elípticos y Fredholm

La parametrix elíptica produce identidades inversas módulo operadores regularizantes. En una variedad cerrada esos residuos son compactos, de modo que la teoría de Atkinson convierte inmediatamente la inversión simbólica en una afirmación de Fredholm. Comenzaremos con la forma de este criterio que se adapta a las dos identidades de una parametrix.

**Lema 15.6.21.** (Criterio de parametrix compacta) Sean $X, Y$ espacios de Hilbert y sean $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,X)$. Si

$$ST - I_X \in \mathcal{K}(X), \qquad TS - I_Y \in \mathcal{K}(Y),$$

entonces $T$ es Fredholm en el sentido de la Definición B.2.40.

*Demostración.* Denotemos por $T^\dagger\colon Y \to X$ y $S^\dagger\colon X \to Y$ los adjuntos hilbertianos acotados. No son adjuntos formales de operadores diferenciales: dependen de los productos internos concretos de $X$ y $Y$. Si $Tu = 0$, entonces $u = (I_X - ST)u$; la bola unidad de $\ker T$ es, por lo tanto, relativamente compacta. Un espacio normado con bola unidad relativamente compacta es finito–dimensional, así que $\dim\ker T < \infty$. Aplicando el mismo argumento a $T^\dagger$ y $S^\dagger$ obtenemos $\dim\ker T^\dagger < \infty$.
Probemos que el rango es cerrado. En $(\ker T)^\perp$, si no existiera $c > 0$ con $\|Tu\|_Y \geq c\|u\|_X$, habría una sucesión $u_j \perp \ker T$, $\|u_j\|_X = 1$ y $Tu_j \to 0$. De

$$u_j = STu_j + (I_X - ST)u_j$$

y de la compacidad de $I_X - ST$ extraeríamos una subsucesión convergente a $u$. Entonces $\|u\| = 1$, $Tu = 0$ y $u \perp \ker T$, contradicción. La cota inferior sobre $(\ker T)^\perp$ implica que $\mathrm{Ran}\, T$ es cerrado. Finalmente,

$$\mathrm{coker}\, T \cong (\mathrm{Ran}\, T)^\perp = \ker T^\dagger$$

es finito–dimensional. □

**Teorema 15.6.22.** (Fredholm elíptico sobre una variedad cerrada) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones hermitianas. Sean $m, s \in \mathbb{R}$ y $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ elíptico. Entonces

$$A_s\colon H^{s+m}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^s(M,\mathbf{F})$$

es Fredholm. Su núcleo y su conúcleo poseen representantes suaves:

$$\ker A_s = \{\mathbf{u} \in \Gamma(M,\mathbf{E}) \mid A\mathbf{u} = 0\}, \tag{15.131}$$

$$\big(\mathrm{coker}\, A_s\big)' \cong \{\mathbf{w} \in \Gamma(M,\overline{\mathbf{F}}) \mid \overline{A_h^*}\,\mathbf{w} = 0\} \cong \overline{\{\mathbf{v} \in \Gamma(M,\mathbf{F}) \mid A_h^*\mathbf{v} = 0\}}. \tag{15.132}$$

En particular,

$$\operatorname{ind}(A_s) = \dim\ker\big(A\colon \Gamma(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(M,\mathbf{F})\big) - \dim\ker\big(A_h^*\colon \Gamma(M,\mathbf{F}) \longrightarrow \Gamma(M,\mathbf{E})\big). \tag{15.133}$$

*Demostración.* La construcción elíptica proporciona una parametrix $B \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{-m}(M;\mathbf{F},\mathbf{E})$ y residuos

$$BA = I - R_{\mathbf{E}}, \qquad AB = I - R_{\mathbf{F}}, \qquad R_{\mathbf{E}} \in \Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}), \qquad R_{\mathbf{F}} \in \Psi^{-\infty}(M;\mathbf{F},\mathbf{F}).$$

Por el Corolario 15.6.6, $B\colon H^s(M,\mathbf{F}) \longrightarrow H^{s+m}(M,\mathbf{E})$ es continuo, y por la Proposición 15.6.18 los dos residuos son compactos en los espacios correspondientes. El Lema 15.6.21 prueba que $A_s$ es Fredholm.
Si $\mathbf{u}$ es una distribución y $A\mathbf{u} = 0$, la primera identidad da $\mathbf{u} = R_E\mathbf{u}$. Como $R_{\mathbf{E}}$ es regularizante, $\mathbf{u}$ es suave. Esto prueba (15.131) y muestra que el núcleo no depende del orden de Sobolev. Por la Proposición 14.5.5, aplicada en la variedad cerrada, el dual complejo–lineal de $H^s(M,\mathbf{F})$ es $H^{-s}(M,\overline{\mathbf{F}})$. Definimos el operador conjugado del adjunto hermitiano por

$$\overline{A_h^*}\colon \Gamma(M,\overline{\mathbf{F}}) \longrightarrow \Gamma(M,\overline{\mathbf{E}}), \qquad \overline{A_h^*}(\overline{\mathbf{v}}) := \overline{A_h^*\mathbf{v}}.$$

Es complejo–lineal. En cartas, se obtiene conjugando los coeficientes y el núcleo de $A_h^*$; por lo tanto pertenece a $\Psi_{\mathrm{cl}}^m(M;\overline{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{E}})$ y es elíptico. La identidad definitoria del adjunto hermitiano se convierte en la identidad bilineal

$$\langle A\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{F},\overline{\mathbf{F}}} = \langle \mathbf{u}, \overline{A_h^*}\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{E},\overline{\mathbf{E}}}.$$

En consecuencia, el anulador del rango de $A_s$ se identifica con

$$\ker\left(\overline{A_h^*}\colon H^{-s}(M,\overline{\mathbf{F}}) \longrightarrow H^{-s-m}(M,\overline{\mathbf{E}})\right).$$

El operador conjugado es elíptico y el mismo argumento de regularización hace suaves sus soluciones. La conjugación puntual identifica su núcleo con el espacio conjugado de $\ker A_h^*$. Esto da (15.132) y, junto con la definición del índice, produce (15.133). □

**Corolario 15.6.23.** (Independencia del exponente de Sobolev) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones hermitianas; y sean $m \in \mathbb{R}$ y $A \in \Psi_{\mathrm{cl}}^m(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ elíptico. Entonces

$$\operatorname{ind}\left(A\colon H^{s+m}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^s(M,\mathbf{F})\right)$$

es independiente de $s \in \mathbb{R}$.

*Demostración.* Los dos espacios de soluciones suaves que aparecen en (15.133) no dependen de $s$. □

### 15.6.6 Estabilidad analítica del índice

Una vez obtenida la propiedad de Fredholm, el índice sólo puede cambiar si la familia abandona el conjunto de operadores Fredholm. Las perturbaciones compactas y las deformaciones continuas preservan ese conjunto; aplicadas al cálculo pseudodiferencial, muestran que los términos de orden inferior no alteran el índice.

**Teorema 15.6.24.** (Perturbaciones compactas y familias continuas) Sean $X, Y$ espacios de Hilbert.

(i) Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es Fredholm y $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, entonces $T+K$ es Fredholm y

$$\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(T).$$

(ii) El conjunto de operadores de Fredholm es abierto en $\mathcal{L}(X,Y)$ y el índice es localmente constante.

(iii) Si $\Lambda$ es conexo y $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{L}(X,Y)$ es una familia continua de operadores de Fredholm, entonces $\operatorname{ind}(T_\lambda)$ es constante en $\Lambda$.

*Demostración.* Como $T$ es Fredholm, existen descomposiciones ortogonales

$$X = \ker T \oplus X_0, \qquad Y = \operatorname{Ran} T \oplus Y_0,$$

con $Y_0$ finito–dimensional. La restricción $T\colon X_0 \to \operatorname{Ran} T$ es un isomorfismo continuo. Definimos $S\colon Y \to X$ como su inversa en $\operatorname{Ran} T$ y cero en $Y_0$. Entonces $ST - I_X$ y $TS - I_Y$ tienen rango finito. Para $T+K$, los productos con $S$ difieren de la identidad por operadores compactos, de modo que el Lema 15.6.21 prueba que $T+K$ es Fredholm.
Para operadores suficientemente próximos a $T$, las componentes entre $X_0$ y $\operatorname{Ran} T$ siguen siendo invertibles por la estabilidad de la invertibilidad. Eliminando ese bloque mediante operaciones invertibles, el operador próximo queda reducido a un mapeo entre $\ker T$ y $Y_0$. Su índice es

$$\dim \ker T - \dim Y_0 = \operatorname{ind} T,$$

independientemente del rango de ese bloque finito. Esto prueba simultáneamente la apertura y la constancia local. Aplicada al camino $T + tK$ demuestra la igualdad de índices en (i). Finalmente, una función localmente constante con valores enteros es constante sobre un espacio conexo, lo que da (iii). □

**Corolario 15.6.25.** (Estabilidad pseudodiferencial) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones hermitianas; sean $m, s \in \mathbb{R}$; y sea $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$ elíptico.

(a) Si $K\colon H^{s+m}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^s(M,\mathbf{F})$ es compacto, entonces $A+K$ es Fredholm y tiene el mismo índice que $A$.

(b) En particular, esto vale si $K$ es regularizante. También vale para $K \in \Psi^{m-\varepsilon}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ con $\varepsilon > 0$, pues

$$H^{s+m}(M,\mathbf{E}) \xrightarrow{K} H^{s+\varepsilon}(M,\mathbf{F}) \hookrightarrow H^s(M,\mathbf{F})$$

y la segunda flecha es compacta.

(c) Si $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia elíptica de orden $m$, continua en la topología pseudodiferencial de orden $m$, y $\Lambda$ es conexo, entonces $\operatorname{ind} A_\lambda$ es independiente de $\lambda$.

*Demostración.* Los dos primeros incisos se siguen de la Proposición 15.6.18, del teorema anterior y de Rellich. Para (c), el teorema de mapeo muestra que la continuidad en un número suficiente de seminormas simbólicas implica continuidad en

$$\mathcal{L}\big(H^{s+m}(M,\mathbf{E}),H^{s}(M,\mathbf{F})\big).$$

Cada $A_\lambda$ es Fredholm por el Teorema 15.6.22; se aplica entonces el inciso (iii) del teorema anterior. □

La estabilidad obtenida aquí es enteramente analítica: usa parametrices, regularidad, compacidad y continuidad en norma. En una variedad cerrada, éstos son exactamente los argumentos que convierten la elipticidad del símbolo en un entero bien definido y estable.

## 15.7 Potencias complejas, calor e índice analítico

La parametrix de un operador elíptico invierte su símbolo respecto de la composición. Para construir potencias no enteras hace falta invertir, de manera uniforme, una familia completa: el resolvente $\lambda I - A$. La variable $\lambda$ no tiene el mismo peso que la covariable $\xi$. Si $A$ tiene orden $m > 0$, el escalamiento natural es

$$(\xi,\lambda)\longmapsto(t\xi,t^{m}\lambda).$$

Este escalamiento gobierna la parametrix del resolvente, las potencias complejas y su comparación con el cálculo espectral.

En toda la sección, $(M,\mathbf{g})$ será una variedad riemanniana suave cerrada de dimensión $n$ y $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Mantendremos fijos estos datos y, dentro de esta sección, abreviaremos

$$\Gamma(\mathbf{E}):=\Gamma(M,\mathbf{E}),\qquad \Psi^{\mu}(M;\mathbf{E}):=\Psi^{\mu}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}).$$

Sea

$$A\in\Psi^{m}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E}),\qquad m>0,$$

un operador elíptico clásico. Escribiremos $a\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_{m-j}$ para su símbolo de Fourier en coordenadas y marcos locales. Si $A$ es diferencial, debe recordarse la conversión fijada al principio del capítulo:

$$a_m(x,\xi)=i^{m}\sigma_m(A)(x,\xi).$$

La condición sectorial se formulará para $a_m$, pues éste es el símbolo que interviene en la cuantización. Al escribir $\sigma(A)$ y $\rho(A)$ entenderemos el espectro y el resolvente de la realización cerrada en $L^2(M,\mathbf{E})$ con dominio $H^{m}(M,\mathbf{E})$.

**Lema 15.7.1.** (Norma de gráfica y realización elíptica) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$; y sea $A\in\Psi^{m}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ elíptico, con $m>0$. Entonces existen constantes $c,C>0$ tales que

$$c\|\mathbf{u}\|_{H^{m}(M,\mathbf{E})}\le\|\mathbf{u}\|_{L^{2}(M,\mathbf{E})}+\|A\mathbf{u}\|_{L^{2}(M,\mathbf{E})}\le C\|\mathbf{u}\|_{H^{m}(M,\mathbf{E})},\qquad \mathbf{u}\in\Gamma(M,\mathbf{E}).\tag{15.134}$$

El operador $A\colon H^{m}(M,\mathbf{E})\subset L^{2}(M,\mathbf{E})\longrightarrow L^{2}(M,\mathbf{E})$ es cerrado, $\Gamma(M,\mathbf{E})$ es un núcleo esencial y su norma de

gráfica es equivalente a la norma de $H^m(M,\mathbf{E})$.

*Demostración.* La propiedad de mapeo $A : H^m(M,\mathbf{E}) \to L^2(M,\mathbf{E})$ da $\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|A\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \le C\|\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})}$. Sean $B \in \Psi^{-m}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E})$ y $R \in \Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ tales que $BA = I - R$. Entonces

$$\|\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})} \le \|BA\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})} + \|R\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})} \le C_1\|A\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} + C_2\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})},$$

pues $B : L^2(M,\mathbf{E}) \to H^m(M,\mathbf{E})$ y $R : L^2(M,\mathbf{E}) \to H^m(M,\mathbf{E})$ son continuos. Esto prueba (15.134) sobre $\Gamma(\mathbf{E})$ y, por densidad, sobre $H^m(M,\mathbf{E})$.
Si $\mathbf{u}_j \in H^m(M,\mathbf{E})$, $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $L^2(M,\mathbf{E})$ y $A\mathbf{u}_j \to \mathbf{f}$ en $L^2(M,\mathbf{E})$, la primera desigualdad aplicada a $\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k$ muestra que $(\mathbf{u}_j)$ es de Cauchy en $H^m(M,\mathbf{E})$. Su límite en $H^m(M,\mathbf{E})$ coincide con $\mathbf{u}$, y la continuidad $A : H^m(M,\mathbf{E}) \to L^2(M,\mathbf{E})$ da $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$; por lo tanto, la realización es cerrada. Finalmente, para $\mathbf{u} \in H^m(M,\mathbf{E})$ elegimos $\mathbf{v}_j \in \Gamma(\mathbf{E})$ con $\mathbf{v}_j \to \mathbf{u}$ en $H^m(M,\mathbf{E})$. La segunda desigualdad implica $\mathbf{v}_j \to \mathbf{u}$ en norma de gráfica. Ésta es exactamente la afirmación de que $\Gamma(\mathbf{E})$ es un núcleo esencial. □

**Proposición 15.7.2.** (Resolvente compacto y espectro discreto) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$; y sea $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ elíptico, con $m > 0$, realizado en $L^2(M,\mathbf{E})$ con dominio $H^m(M,\mathbf{E})$. Si $\rho(A) \neq \varnothing$, todo resolvente de la realización anterior es compacto: para cada $\lambda_0 \in \rho(A)$,

$$(\lambda_0 I - A)^{-1} : L^2(M,\mathbf{E}) \longrightarrow L^2(M,\mathbf{E})$$

es compacto. Bajo esta hipótesis, $\sigma(A)$ está formado por autovalores aislados, cada uno de multiplicidad algebraica finita, y no posee puntos de acumulación finitos. Si $A$ es autoadjunto y acotado inferiormente, entonces $\rho(A) \neq \varnothing$ y existe una base ortonormal $(\boldsymbol{\varphi}_j)$ de $L^2(M,\mathbf{E})$ formada por eigensecciones suaves. Repetidos los autovalores según su multiplicidad,

$$A\boldsymbol{\varphi}_j = \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j, \qquad \lambda_j \longrightarrow +\infty.$$

*Demostración.* Una parametrix $B \in \Psi^{-m}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E})$ y un residuo $R \in \Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ dan $\mathbf{u} = BAu + R\mathbf{u}$ para $\mathbf{u} \in \Gamma(M,\mathbf{E})$. Las propiedades de mapeo y la prolongación por densidad producen la estimación elíptica

$$\|\mathbf{u}\|_{H^m(M,\mathbf{E})} \le C\big(\|A\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\big), \qquad \mathbf{u} \in H^m(M,\mathbf{E}). \tag{15.135}$$

Si $\mathbf{u} = (\lambda_0 I - A)^{-1} f$, la continuidad del resolvente en $L^2(M,\mathbf{E})$ y $A\mathbf{u} = \lambda_0 \mathbf{u} - f$ muestran mediante (15.135) que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ es continuo de $L^2(M,\mathbf{E})$ en $H^m(M,\mathbf{E})$. La inclusión $H^m(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow L^2(M,\mathbf{E})$ es compacta por Rellich, luego el resolvente, visto en $L^2(M,\mathbf{E})$, es compacto.
La correspondencia espectral

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda_0 - \lambda)^{-1} \in \sigma\big((\lambda_0 I - A)^{-1}\big), \qquad \lambda \neq \lambda_0,$$

reduce las afirmaciones sobre aislamiento y multiplicidad algebraica al teorema espectral de los operadores compactos. En el caso autoadjunto acotado inferiormente elegimos $\lambda_0$ real por debajo del espectro. El resolvente es entonces compacto y autoadjunto; su teorema espectral proporciona una base ortonormal de

autovectores. La correspondencia anterior y la cota inferior fuerzan $\lambda_j \to +\infty$. Finalmente, $A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ y la regularidad elíptica implican $\varphi_j \in \Gamma(\mathbf{E})$. □

### 15.7.1 Corte espectral y cálculo mínimo con parámetro

La construcción de $A^z$ requiere elegir una rama del logaritmo y controlar el resolvente a lo largo de un sector que evite tanto el espectro principal como el espectro de la realización cerrada. Fijaremos primero el corte y después construiremos la parametrix uniforme de $\lambda I - A$.

Para $\theta \in \mathbb{R}$ pongamos

$$L_\theta := \{ re^{i\theta} \mid r > 0 \}.$$

En $\mathbb{C} \setminus (L_\theta \cup \{0\})$ fijamos la rama

$$\log_\theta \lambda = \log|\lambda| + i \arg_\theta \lambda, \qquad \theta - 2\pi < \arg_\theta \lambda < \theta,$$

y escribimos $\lambda^z := e^{z \log_\theta \lambda}$.

**Definición 15.7.3.** (Ángulo de Agmon y corte espectral) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada y sea $(\mathbf{E}, \mathbf{h}_\mathbf{E}) \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana y sea $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{E})$ elíptico, con $m > 0$ y símbolo principal de Fourier $a_m$. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Decimos que $\theta$ es un **ángulo de Agmon para el símbolo principal** de $A$ si

$$\operatorname{spec} a_m(x, \xi) \cap L_\theta = \varnothing$$

para todo $(x, \xi) \in T^*M \setminus 0_M$. Es un **corte espectral admisible para** $A$ si, además,

$$\sigma(A) \cap L_\theta = \varnothing.$$

Para definir todas las potencias, positivas y negativas, supondremos también $0 \in \rho(A)$, es decir, que $A$ es invertible. Si $0$ es un autovalor, las potencias reducidas requieren separar el espacio propio generalizado, como se precisa a continuación.

Si $0 \in \sigma(A)$ y $A$ no es necesariamente autoadjunto, la separación correcta no se hace sólo con $\ker A$. Bajo la existencia del corte espectral admisible, $\rho(A) \neq \varnothing$; la Proposición 15.7.2 muestra entonces que $0$ es aislado. Sea

$$\Pi_0 := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \varepsilon} (\lambda I - A)^{-1} \, d\lambda \tag{15.136}$$

su proyección de Riesz, con la circunferencia positivamente orientada y sin otro punto del espectro en su interior. Su rango es el espacio propio generalizado finito–dimensional de $0$, y $L^2(M, \mathbf{E}) = \operatorname{ran} \Pi_0 \oplus \ker \Pi_0$ es una descomposición $A$–invariante. La restricción de $A$ a $\ker \Pi_0$ es invertible; por **potencia reducida** entenderemos exclusivamente la potencia de esa restricción, prolongada por cero sobre $\operatorname{ran} \Pi_0$. Esta convención no afirma una ley de grupo sobre todo $L^2(M, \mathbf{E})$. Si $A$ es autoadjunto, $\Pi_0$ es la proyección ortogonal sobre $\ker A$ y no aparece ninguna parte nilpotente.

En una carta cotangente, con la norma euclidiana fijada por la convención local del capítulo, la cantidad

$$\rho_m(\xi,\lambda) := \|\xi\|_{\mathbb{R}^n} + |\lambda|^{\frac{1}{m}}$$

es homogénea de grado uno para el escalamiento ponderado fijado al inicio. Para efectuar excisiones suaves usaremos el peso equivalente

$$\widehat{\rho}_m(\xi,\lambda) := \left(\langle \xi\rangle^{2m} + |\lambda|^2\right)^{\frac{1}{2m}}. \tag{15.137}$$

A diferencia de $\rho_m$, este peso es suave también sobre los ejes; ambos son comparables en la región de altas frecuencias y parámetros grandes.

**Definición 15.7.4.** (Símbolo y elipticidad con parámetro) Sean $m > 0$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $r \in \mathbb{N}$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un sector cerrado. Consideramos familias con valores en $\operatorname{End}(\mathbb{C}^r)$ y ponemos

$$\Omega_m(\xi,\lambda) := |\lambda| + \langle \xi\rangle^m.$$

Si

$$c \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n \times \Lambda; \operatorname{End}(\mathbb{C}^r))$$

es suave hasta las caras del sector en las variables reales $(x,\xi,\operatorname{Re}\lambda,\operatorname{Im}\lambda)$, para $K \Subset U$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ y $k,\ell \in \mathbb{N}_0$ definimos las seminormas siguientes, donde $\|\cdot\|_{\mathrm{op},\mathbb{C}^r}$ es la norma de operador inducida por la norma hermitiana estándar:

$$\mathfrak{p}^{\mathrm{R},j}_{K,\alpha,\beta,k,\ell}(c) := \sup_{\substack{x\in K,\ \xi\in\mathbb{R}^n\\ \lambda\in\Lambda}} \langle\xi\rangle^{j+|\beta|}\Omega_m(\xi,\lambda)^{1+k+\ell}\left\|D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k \partial_{\bar\lambda}^\ell c(x,\xi,\lambda)\right\|_{\mathrm{op},\mathbb{C}^r}, \tag{15.138}$$

$$\mathfrak{p}^{\mathrm{D},j}_{K,\alpha,\beta,k,\ell}(c) := \sup_{\substack{x\in K,\ \xi\in\mathbb{R}^n\\ \lambda\in\Lambda}} \langle\xi\rangle^{j+|\beta|}\Omega_m(\xi,\lambda)^{k+\ell}\left\|D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k \partial_{\bar\lambda}^\ell c(x,\xi,\lambda)\right\|_{\mathrm{op},\mathbb{C}^r}. \tag{15.139}$$

Aquí $D_x^\alpha = \partial_x^\alpha$ y $D_\xi^\beta = \partial_\xi^\beta$, de acuerdo con la convención del capítulo, mientras que $\partial_\lambda = \frac{1}{2}(\partial_{\operatorname{Re}\lambda} - i\partial_{\operatorname{Im}\lambda})$ y $\partial_{\bar\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_{\operatorname{Re}\lambda} + i\partial_{\operatorname{Im}\lambda})$ son las derivadas de Wirtinger.

Una familia $q^{(j)}$, con $j \geq 0$, es de **tipo resolvente** $j$ si todas las seminormas (15.138) son finitas. Es de **tipo defecto** $j$ si todas las seminormas (15.139) son finitas. En particular, para el primer tipo se tiene

$$\|D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k \partial_{\bar\lambda}^\ell q^{(j)}(x,\xi,\lambda)\|_{\mathrm{op},\mathbb{C}^r} \leq C_{K,\alpha,\beta,k,\ell,j}\langle\xi\rangle^{-j-|\beta|}\Omega_m(\xi,\lambda)^{-1-k-\ell},$$

y para el segundo se sustituye el último factor por $\Omega_m^{-k-\ell}$. Las familias de tipo resolvente $j$ y de tipo defecto $j$ se comportan, respectivamente, como órdenes $-m-j$ y $-j$ en el cono $|\lambda| \leq C\langle\xi\rangle^m$, pero conservan la estimación correcta cuando domina $|\lambda|$.

Una familia es **holomorfa con parámetro** si $\partial_{\bar\lambda} c = 0$ en el interior de $\Lambda$. Es **regularizante simultáneamente en $\xi$ y $\lambda$** si, para todos $P,Q \in \mathbb{N}_0$, todo compacto $K$ y todos $\alpha,\beta,k,\ell$, existe una constante $C_{K,P,Q,\alpha,\beta,k,\ell} > 0$ tal que

$$\left\|D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k \partial_{\bar\lambda}^\ell c(x,\xi,\lambda)\right\|_{\mathrm{op},\mathbb{C}^r} \leq C_{K,P,Q,\alpha,\beta,k,\ell}\langle\xi\rangle^{-P}(1+|\lambda|)^{-Q}. \tag{15.140}$$

Esta condición se abreviará diciendo que $c$ es regularizante con parámetro. Pertenecer a todos los tipos resolvente $j$ sólo impone decaimiento arbitrario en $\xi$ y el factor resolvente en $\lambda$; la condición (15.140) exige además cada potencia de $1+|\lambda|$ y no se deduce de la anterior.

Ésta es la versión débil del cálculo con parámetro. La cota fuerte condensada en una sola potencia de $\rho_m$ no es válida para un pseudodiferencial clásico general cuando $|\lambda|$ domina a $\langle\xi\rangle^m$; las cotas separadas anteriores sí lo son. En alta frecuencia, una familia de tipo resolvente 0 es **clásica con parámetro** si sus componentes son homogéneas para $(\xi,\lambda)\mapsto(t\xi,t^m\lambda)$ y el resto después de $N$ componentes es de tipo resolvente $N$ para $\|\xi\|\geq 1$. La parte complementaria de frecuencias acotadas sólo se exige regularizante respecto de $\xi$, conservando el factor de decaimiento $\Omega_m^{-1-k-\ell}$. Si $c_j$ es de tipo resolvente $j$, escribimos

$$c\sim\sum_{j=0}^{\infty}c_j\quad\Longleftrightarrow\quad c-\sum_{j=0}^{N-1}c_j\text{ es de tipo resolvente }N\text{ para todo }N\in\mathbb{N}_0. \tag{15.141}$$

La misma convención, sustituyendo *resolvente* por *defecto*, se usa para familias de tipo defecto.
El símbolo principal homogéneo $a_m$ es **elíptico con parámetro** en $\Lambda$ si $\lambda I-a_m(x,\xi)$ es invertible para $\xi\neq 0$ y $\lambda\in\Lambda$, y, para todo $K\Subset U$, existe $C_K>0$ tal que su inversa satisface

$$\|\big(\lambda I-a_m(x,\xi)\big)^{-1}\|\leq C_K\big(|\lambda|+\|\xi\|^m\big)^{-1},\qquad x\in K.$$

Esta condición es más fuerte que la elipticidad de $A$ sin parámetro.

El peso suave de (15.137) satisface

$$2^{-\frac12}\Omega_m(\xi,\lambda)\leq\widehat{\rho}_m(\xi,\lambda)^m\leq\Omega_m(\xi,\lambda). \tag{15.142}$$

En efecto, para $a,b\geq 0$ se tiene $\frac{a+b}{\sqrt2}\leq(a^2+b^2)^{\frac12}\leq a+b$; basta tomar $a=\langle\xi\rangle^m$ y $b=|\lambda|$. Si $\chi\in C^\infty(\mathbb{R})$ es constante fuera de un compacto de $(0,\infty)$, fijamos $0<c_\chi<C_\chi$ tales que $\operatorname{supp}\chi'\subseteq[c_\chi,C_\chi]$. La regla de la cadena proporciona, cuando $|\gamma|+r+s\geq 1$,

$$\big|D_\xi^\gamma\partial_\lambda^r\partial_{\bar\lambda}^s\chi(\varepsilon\widehat{\rho}_m)\big|\leq C_{\gamma,r,s}\langle\xi\rangle^{-|\gamma|}\Omega_m^{-r-s}\mathbf{1}_{\{c_\chi\varepsilon^{-1}\leq\widehat{\rho}_m\leq C_\chi\varepsilon^{-1}\}}. \tag{15.143}$$

Para justificar todos los órdenes de derivación, se deriva primero $\widehat{\rho}_m^{2m}=\langle\xi\rangle^{2m}+|\lambda|^2$. Una derivada en $\xi$ del cociente resultante está acotada por $C\langle\xi\rangle^{-1}$, y una derivada de Wirtinger está acotada por $C\widehat{\rho}_m^{-m}$. Al repetir Leibniz, cada término contiene $|\gamma|$ factores del primer tipo y $r+s$ del segundo, posiblemente agrupados en derivadas de orden mayor; sus exponentes totales son los mismos. La comparación (15.142) concluye (15.143).

**Lema 15.7.5.** (Suma asintótica en las clases débiles con parámetro) Fijemos $m>0$, un abierto $U\subseteq\mathbb{R}^n$, un rango $r\in\mathbb{N}$ y un sector cerrado $\Lambda\subseteq\mathbb{C}$ como en la Definición 15.7.4. Sea $(c_j)_{j\geq0}$ una sucesión de familias $\operatorname{End}(\mathbb{C}^r)$–valuadas tal que $c_j$ es de tipo resolvente $j$. Existe una familia $c$ de tipo resolvente 0 que satisface $c\sim\sum_{j=0}^{\infty}c_j$ en el sentido de (15.141). La afirmación también vale para familias de tipo defecto. Si todos los $c_j$ son holomorfos en $\lambda$, la suma puede elegirse holomorfa. Dos sumas cualesquiera difieren por una familia que pertenece a todos los tipos resolvente $N$; la diferencia es regularizante con parámetro precisamente cuando, además, satisface las potencias de $1+|\lambda|$ de (15.140). Finalmente, supongamos que para cada $P,Q$ y cada familia finita de derivadas existe $J$ tal que los términos $c_j$, $j\geq J$, satisfacen una desigualdad de la forma (15.140), con constantes que pueden depender de $j$. Entonces puede usarse el corte conjunto $\chi(\varepsilon_j\widehat{\rho}_m)$ y elegirse los $\varepsilon_j$ con la propiedad cuantificada siguiente. Para cada seminorma simultánea $\mathfrak{s}_{K,P,Q,\alpha,\beta,k,\ell}$ existe

$J$ tal que, para todo $N \geq J$,

$$\mathfrak{s}_{K,P,Q,\alpha,\beta,k,\ell}\left(\sum_{j=N}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \widehat{\rho}_m) c_j\right) \leq \sum_{j=N}^{\infty} 2^{-j}.$$

Esta segunda suma auxiliar no es, en general, holomorfa en $\lambda$.

*Demostración.* Elegimos $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(t) = 0$ para $t \leq 1$ y $\chi(t) = 1$ para $t \geq 2$. Agotamos cada carta por compactos $K_1 \Subset K_2 \Subset \cdots$ y enumeramos en una sucesión $(\mathfrak{p}_\nu)_{\nu \geq 1}$ las seminormas (15.138) con $K = K_d$ y todos los índices $d, \alpha, \beta, k, \ell$. Para $0 < \varepsilon \leq 1$ ponemos

$$\chi_{j,\varepsilon}(\xi) := \chi(\varepsilon \langle \xi \rangle).$$

La regla de la cadena, aplicada sucesivamente, da

$$|D_\xi^\gamma \chi_{j,\varepsilon}(\xi)| \leq C_\gamma \langle \xi \rangle^{-|\gamma|} \mathbf{1}_{\{\langle \xi \rangle \geq \varepsilon^{-1}\}}. \tag{15.144}$$

Para $\gamma = 0$, el indicador sólo expresa el soporte del corte. En la zona donde una derivada del corte no se anula se tiene $\varepsilon \langle \xi \rangle \in [1, 2]$; cada derivada de $\langle \xi \rangle$ aporta una potencia que queda acotada por la del miembro derecho.

Leibniz, (15.144) y la desigualdad definitoria de $c_j$ muestran que cada término de $D_\xi^\beta(\chi_{j,\varepsilon} c_j)$ está acotado por

$$C \langle \xi \rangle^{-j-|\beta|} \Omega_m^{-1-k-\ell} \mathbf{1}_{\{\langle \xi \rangle \geq \varepsilon^{-1}\}}.$$

Por lo tanto, para cada seminorma $\mathfrak{p}_\nu$ de tipo resolvente 0 existe $C_{j,\nu} > 0$ tal que

$$\mathfrak{p}_\nu(\chi_{j,\varepsilon} c_j) \leq C_{j,\nu} \varepsilon^j. \tag{15.145}$$

Las derivadas $\partial_\lambda^k \partial_{\bar\lambda}^\ell$ recaen sólo sobre $c_j$, porque este corte depende de $\xi$ y no de $\lambda$; por ello se conserva exactamente el exponente $-1-k-\ell$ de $\Omega_m$.

Ponemos $\varepsilon_0 = 1$ y elegimos recursivamente $\varepsilon_j \in (0, 2^{-j}]$ para $j \geq 1$. En el paso $j$ imponemos, para las primeras $j$ seminormas y para cada $N = 0, 1, \ldots, j-1$, que la seminorma de tipo resolvente $N$ del término cortado no exceda $2^{-j}$; para $N = 0$ esto equivale a exigir

$$C_{j,\nu} \varepsilon_j^j \leq 2^{-j}, \qquad 1 \leq \nu \leq j. \tag{15.146}$$

Hay sólo un número finito de condiciones en cada paso y todas contienen una potencia positiva $\varepsilon_j^{j-N}$, de modo que la elección es posible. Definimos

$$c := \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \langle \xi \rangle) c_j. \tag{15.147}$$

La serie es localmente finita: para $\xi$ fijo se cumple $\varepsilon_j \langle \xi \rangle \leq 2^{-j} \langle \xi \rangle < 1$ desde cierto índice. Para una seminorma fija $\mathfrak{p}_\nu$, su cola desde $j \geq \max\{\nu, 1\}$ está dominada por $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}$; por lo tanto, converge en cada seminorma de tipo resolvente 0.

Fijemos $N$. Para $j > N$, el cálculo anterior, normalizado con $\langle\xi\rangle^{N+|\beta|}$, contiene $\langle\xi\rangle^{N-j} \le \varepsilon_j^{j-N}$ sobre el soporte del corte. Las condiciones impuestas al elegir $\varepsilon_j$ prueban la convergencia de $\displaystyle\sum_{j=N}^{\infty} \chi(\varepsilon_j\langle\xi\rangle)c_j$ en cada seminorma de tipo resolvente $N$. Además,

$$c - \sum_{j=0}^{N-1} c_j = \sum_{j=N}^{\infty} \chi(\varepsilon_j\langle\xi\rangle)c_j - \sum_{j=0}^{N-1} \big(1 - \chi(\varepsilon_j\langle\xi\rangle)\big)c_j. \tag{15.148}$$

La segunda suma es finita y cada sumando tiene $\xi$ en un compacto, por lo que pertenece a todo tipo resolvente $N$. Esto prueba la estimación del resto para cada $N$.

Para el tipo defecto se repiten las mismas desigualdades con $\Omega_m^{-k-\ell}$; ningún paso modifica esa potencia. Si los $c_j$ son holomorfos, la suma localmente finita (15.147) también lo es. Al restar dos sumas y usar (15.148) para todo $N$, la diferencia pertenece a todos los tipos indicados. Si para cada $Q$ posee además el factor $(1+|\lambda|)^{-Q}$, se obtiene exactamente (15.140); ésta es la formulación cuantificada del decaimiento residual simultáneo. Para probar la última afirmación usamos ahora $\chi(\varepsilon_j\widehat{\rho}_m)$ y enumeramos también las seminormas

$$\mathfrak{s}_{K,P,Q,\alpha,\beta,k,\ell}(d) := \sup_{\substack{x\in K,\,\xi\in\mathbb{R}^n\\ \lambda\in\Lambda}} \langle\xi\rangle^{P}(1+|\lambda|)^{Q}\|D_x^{\alpha}D_\xi^{\beta}\partial_\lambda^{k}\partial_{\bar\lambda}^{\ell}d\|.$$

Fijada una de ellas, aplicamos la hipótesis a los exponentes $P+L$ y $Q+L$. Leibniz y (15.143) dan, sobre el soporte del corte, una cota

$$\mathfrak{s}_{K,P,Q,\alpha,\beta,k,\ell}\big(\chi(\varepsilon_j\widehat{\rho}_m)c_j\big) \le C_{j,L} \sup_{\substack{x\in K,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in\Lambda\\ \widehat{\rho}_m(\xi,\lambda)\ge\varepsilon_j^{-1}}} \langle\xi\rangle^{-L}(1+|\lambda|)^{-L}.$$

Por (15.142), en cada punto del último supremo se cumple $\langle\xi\rangle \ge c\widehat{\rho}_m$ o $1+|\lambda| \ge c\widehat{\rho}_m^{\,m}$. Por lo tanto, el miembro derecho no excede $C_{j,L}\varepsilon_j^{\min\{1,m\}L}$. Para una seminorma débil de tipo resolvente o defecto se absorben primero las potencias positivas de $\langle\xi\rangle$ y $\Omega_m$ eligiendo $P+L$ y $Q+L$ todavía mayores, y se obtiene la misma potencia positiva de $\varepsilon_j$.

Reducimos recursivamente $\varepsilon_j$ para que las primeras $j$ seminormas aplicables no excedan $2^{-j}$. Para una seminorma fija, aumentamos si hace falta el índice $J$ de la hipótesis hasta que esa seminorma figure entre las primeras $j$ para todo $j \ge J$. La condición se impone entonces a cada sumando de índice $j \ge J$ y, para todo $N \ge J$, su cola queda dominada por $\displaystyle\sum_{j=N}^{\infty} 2^{-j}$. Además, $1-\chi(\varepsilon_j\widehat{\rho}_m)$ tiene soporte conjunto compacto en $(\xi,\lambda)$ para cada $j$ fijo. Así, las correcciones finitas son regularizantes con parámetro y las colas satisfacen (15.140). Esto prueba la afirmación sin identificar la regularización simultánea con la mera pertenencia a todos los tipos resolvente. □

El corte de esta prueba depende sólo de $\xi$ y preserva la holomorfía. En cambio, los cortes globales $\chi(\varepsilon\widehat{\rho}_m)$ necesarios para excisar conjuntamente el origen $(\xi,\lambda) = (0,0)$ contienen $|\lambda|^2$ y, salvo que sean constantes, no son holomorfos. Distinguiremos siempre la familia simbólica auxiliar que contiene estos cortes, las componentes homogéneas holomorfas y el resolvente exacto holomorfo.

La primera condición no es una afirmación sobre el espectro global de $A$. Es una condición uniforme sobre una familia finito–dimensional de matrices. Por la homogeneidad de $a_m$ y la compacidad del haz de coesferas, puede

ensancharse el rayo: existe $\varepsilon_{\mathrm{p}} > 0$ tal que

$$\lambda I - a_m(x,\xi) \quad \text{es invertible si} \quad \xi \neq 0, \quad \lambda \in \Lambda^{\mathrm{p}}_{\theta,\varepsilon_{\mathrm{p}}},$$

donde

$$\Lambda^{\mathrm{p}}_{\theta,\varepsilon_{\mathrm{p}}} := \{ re^{i\varphi} \mid r > 0,\ |\varphi - \theta| \leq \varepsilon_{\mathrm{p}} \}$$

se entiende módulo $2\pi$. Por ahora no afirmamos que este sector principal esté contenido en $\rho(A)$. Esa conclusión se obtendrá primero para $|\lambda|$ grande mediante la parametrix y la serie de Neumann. Sólo después se estrechará el sector para evitar el conjunto espectral compacto restante; este orden lógico evita usar la existencia del resolvente para construirlo. Hasta ese momento, todas las seminormas con parámetro y todas las sumas asintóticas siguientes se toman con $\Lambda = \Lambda^{\mathrm{p}}_{\theta,\varepsilon_{\mathrm{p}}}$.

La inversión sobre el compacto normalizado y una nueva dilatación proporcionan

$$\left\| (\lambda I - a_m(x,\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}((\mathbf{E}_x, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)))} \leq C \left( |\lambda| + |\xi|^m_{\mathbf{g}} \right)^{-1}.$$

Después de derivar la identidad $(\lambda I - a_m)(\lambda I - a_m)^{-1} = I$, se obtienen, para los términos homogéneos que aparecerán enseguida y, en un marco unitario local, para $\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} \geq 1$, estimaciones débiles de la forma

$$\left\| D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k q_{-m-j}(x,\xi,\lambda) \right\|_{\mathrm{op},\mathbb{C}^r} \leq C_{\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{-j-|\beta|} \Omega_m(\xi,\lambda)^{-1-k}.$$

Estas cotas, junto con la holomorfía en $\lambda$, son el fragmento del cálculo con parámetro que se usará.

**Proposición 15.7.6.** (Parametrix del resolvente) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sea $(\mathbf{E}, \mathbf{h}_{\mathbf{E}}) \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$; y sea $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{E})$ elíptico, con $m > 0$ y símbolo completo local $a$. Supongamos que $\theta$ es un corte espectral admisible para $A$ y que $0 \in \rho(A)$. Existe una familia simbólica auxiliar global $\widetilde{q}$ de tipo resolvente 0, no necesariamente holomorfa, que es una inversa bilateral de $\lambda I - a$ módulo familias regularizantes con parámetro en el sector principal $\Lambda^{\mathrm{p}}_{\theta,\varepsilon_{\mathrm{p}}}$. En la región de alta frecuencia su expansión clásica es

$$\widetilde{q}(x,\xi,\lambda) \underset{\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} \to \infty}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} q_{-m-j}(x,\xi,\lambda), \qquad \lambda \in \Lambda^{\mathrm{p}}_{\theta,\varepsilon_{\mathrm{p}}},$$

donde las componentes sólo se consideran para $\xi \neq 0$, son holomorfas en $\lambda$ y satisfacen

$$q_{-m-j}(x, t\xi, t^m\lambda) = t^{-m-j} q_{-m-j}(x,\xi,\lambda), \qquad t > 0,$$

y se determinan recursivamente del modo siguiente. Si

$$p_m := \lambda I - a_m, \qquad p_{m-k} := -a_{m-k} \quad (k \geq 1),$$

entonces

$$q_{-m} = p_m^{-1}$$

y, para $j \geq 1$,

$$q_{-m-j} = -q_{-m} \sum_{\substack{k+\ell+|\alpha|=j \\ 0\leq \ell<j}} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha p_{m-k})(D_x^\alpha q_{-m-\ell}). \tag{15.149}$$

La misma componente satisface también la recurrencia derecha

$$q_{-m-j} = - \sum_{\substack{k+\ell+|\alpha|=j \\ 0\leq \ell<j}} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha q_{-m-\ell})(D_x^\alpha p_{m-k}) q_{-m}. \tag{15.150}$$

Para todo compacto $K$, todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ y $k \in \mathbb{N}_0$ existe $C_{K,j,\alpha,\beta,k} > 0$ tal que, si $\|\xi\| \geq 1$,

$$\left\| D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k q_{-m-j}(x,\xi,\lambda) \right\| \leq C_{K,j,\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{-j-|\beta|} \Omega_m(\xi,\lambda)^{-1-k}, \qquad \partial_{\bar\lambda} q_{-m-j} = 0. \tag{15.151}$$

Existen $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{p}}$ y $R_0 > 0$ tales que

$$\Lambda_{\theta,\varepsilon} := \{ r e^{i\varphi} \mid r > 0,\ |\varphi - \theta| \leq \varepsilon \} \subseteq \rho(A).$$

El símbolo completo del resolvente en este sector, $r(x,\xi,\lambda)$, tomado en una cuantización local fija, es holomorfo en $\lambda$; para $|\lambda| \geq R_0$ posee la misma expansión de alta frecuencia

$$r(x,\xi,\lambda) \underset{\|\xi\|\to\infty}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} q_{-m-j}(x,\xi,\lambda).$$

Para cada $s \in \mathbb{R}$ existe una constante $C_s > 0$ tal que, para $\lambda \in \Lambda_{\theta,\varepsilon}$ con $|\lambda| \geq R_0$, el resolvente cumple

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\mathbf{u}\|_{H^{s+m}(M,\mathbf{E})} + |\lambda| \|(\lambda I - A)^{-1}\mathbf{u}\|_{H^s(M,\mathbf{E})} \leq C_s \|\mathbf{u}\|_{H^s(M,\mathbf{E})}. \tag{15.152}$$

La constante $C_s$ depende de $s$, del sector, de un número finito de seminormas con parámetro del símbolo y de las elecciones de un atlas finito, pero no de $\mathbf{u}$ ni de $\lambda$ en la región indicada; la estimación vale para toda $\mathbf{u} \in H^s(M,\mathbf{E})$.

*Demostración.* La fórmula de composición simbólica da

$$(p\#q)(x,\xi,\lambda) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha p)(D_x^\alpha q).$$

La transferencia de los pesos euclidianos en las estimaciones de composición se rige por la desigualdad de Peetre del Lema 6.1.1; el peso $\Omega_m(\xi,\lambda)$ conserva además el factor resolvente que se registra separadamente a continuación. El término de grado cero respecto del peso total es $p_m q_{-m}$; imponer $p_m q_{-m} = I$ produce $q_{-m} = p_m^{-1}$. La estimación de elipticidad con parámetro prueba (15.151) para $j = 0$, $\alpha = \beta = 0$ y $k = 0$. Si $\mathscr{D}$ es una de las derivadas $D_{x^r}$, $D_{\xi_r}$ o $\partial_\lambda$, derivar $p_m q_{-m} = I$ da la identidad exacta

$$\mathscr{D} q_{-m} = -q_{-m} (\mathscr{D} p_m) q_{-m}. \tag{15.153}$$

Para $\mathscr{D} = \partial_{\bar\lambda}$, el segundo miembro es cero. Al ordenar conjuntamente las derivadas escribimos $\mathscr{D}^\nu =$

$D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^h$ y usamos el orden componente a componente en los multiíndices triples. Leibniz aplicado a $\mathscr{D}^\nu(p_m q_{-m}) = 0$, seguido de multiplicación por $q_{-m}$ a la izquierda, da la recurrencia exacta

$$\mathscr{D}^\nu q_{-m} = -q_{-m} \sum_{0<\delta\le\nu} \binom{\nu}{\delta} (\mathscr{D}^\delta p_m)(\mathscr{D}^{\nu-\delta} q_{-m}). \tag{15.154}$$

Esta fórmula cierra una inducción sobre $|\nu|$: en cada sumando la derivada de $q_{-m}$ del último factor tiene orden estrictamente menor. Si la componente de $\delta$ en $\lambda$ es cero, las cotas simbólicas de $p_m$ y la hipótesis inductiva acotan ese sumando por

$$C\Omega_m^{-1}\langle\xi\rangle^{m-|\delta_\xi|}\langle\xi\rangle^{-|\beta|+|\delta_\xi|}\Omega_m^{-1-h} \le C\langle\xi\rangle^{-|\beta|}\Omega_m^{-1-h}.$$

Si esa componente es uno, el sumando sólo puede ser no nulo cuando $\mathscr{D}^\delta p_m = I$; la hipótesis inductiva da entonces $C\langle\xi\rangle^{-|\beta|}\Omega_m^{-1-h}$ directamente. Para dos o más derivadas en $\lambda$ el factor derivado de $p_m$ es cero. La suma de (15.154) es finita, de modo que

$$\|D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k q_{-m}\| \le C_{K,\alpha,\beta,k}\langle\xi\rangle^{-|\beta|}\Omega_m^{-1-k}.$$

Esto establece el caso inicial, incluida la holomorfía.

Supongamos ahora construidas las componentes $q_{-m},\dots,q_{-m-j+1}$ y demostradas para ellas la homogeneidad, la holomorfía y (15.151). El coeficiente de grado $-j$ en $p\#q$ es

$$p_m q_{-m-j} + \sum_{\substack{k+\ell+|\gamma|=j\\ 0\le\ell<j}} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!}(D_\xi^\gamma p_{m-k})(D_x^\gamma q_{-m-\ell}).$$

Anularlo y multiplicar por $q_{-m}$ a la izquierda da exactamente (15.149); por lo tanto, la componente nueva es única. Bajo la dilatación $(\xi,\lambda)\mapsto(t\xi,t^m\lambda)$, el producto dentro de la suma tiene grado

$$(m-k-|\gamma|)+(-m-\ell) = -(k+\ell+|\gamma|) = -j.$$

El factor exterior $q_{-m}$ reduce el grado a $-m-j$. Todos los factores de la recurrencia son holomorfos en $\lambda$, de modo que la componente nueva también lo es.

Para probar sus estimaciones, escribimos ahora el índice del símbolo como $\kappa$ y el número de derivadas en $\lambda$ como $h$. Al distribuir $D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^h$ entre los tres factores de un sumando con $\kappa+\ell+|\gamma| = j$, cada término de Leibniz tiene, salvo su coeficiente multinomial, la forma

$$\big(D_x^{\alpha_0} D_\xi^{\beta_0}\partial_\lambda^{h_0} q_{-m}\big)\big(D_x^{\alpha_1} D_\xi^{\beta_1+\gamma}\partial_\lambda^{h_1} p_{m-\kappa}\big)\big(D_x^{\alpha_2+\gamma} D_\xi^{\beta_2}\partial_\lambda^{h_2} q_{-m-\ell}\big),$$

donde $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, $\beta_0+\beta_1+\beta_2=\beta$ y $h_0+h_1+h_2=h$. Si $h_1=0$, las hipótesis inductivas acotan su norma por

$$C\langle\xi\rangle^{-j-|\beta|+m}\Omega_m^{-2-h} \le C\langle\xi\rangle^{-j-|\beta|}\Omega_m^{-1-h}.$$

Si $h_1=1$, el término sólo es no nulo para $\kappa=0$, $\gamma=0$, $\alpha_1=\beta_1=0$; entonces $j=\ell$ y los dos factores resolventes dan exactamente $C\langle\xi\rangle^{-j-|\beta|}\Omega_m^{-1-h}$. Si $h_1\ge 2$, el término es cero. Hay un número finito de distribuciones de Leibniz y un número finito de ternas $(\kappa,\ell,\gamma)$ para cada $j$, por lo que su suma prueba (15.151) para la

componente nueva. Esto concluye la inducción.

Para la compatibilidad bilateral, la ecuación $q\#p = I$ produce en el grado $-j$ la ecuación

$$q_{-m-j}p_m + \sum_{\substack{k+\ell+|\alpha|=j \\ 0\le \ell<j}} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha q_{-m-\ell})(D_x^\alpha p_{m-k}) = 0,$$

y multiplicar por $q_{-m}$ a la derecha da (15.150). Para comprobar que no define componentes distintas, sean $q^{\mathrm{d}}$ la serie formal determinada por $p\#q^{\mathrm{d}} = I$ y $q^{\mathrm{i}}$ la determinada por $q^{\mathrm{i}}\#p = I$. La asociatividad formal, cuyo coeficiente de cada grado contiene sólo sumas finitas, da

$$q^{\mathrm{i}} = q^{\mathrm{i}}\#(p\#q^{\mathrm{d}}) = (q^{\mathrm{i}}\#p)\#q^{\mathrm{d}} = q^{\mathrm{d}}.$$

Así, las dos recurrencias determinan término a término la misma serie. Toda esta construcción es de alta frecuencia: $a_{m-k}$ y $q_{-m-j}$ sólo se evalúan para $\xi \neq 0$.

Para completar la construcción sobre el eje $\xi = 0$ usamos el símbolo completo

$$p(x,\xi,\lambda) := \lambda I - a(x,\xi),$$

que sí es suave para toda $\xi$. Existe $R > 0$ tal que $p$ es puntualmente invertible cuando $\widehat{\rho}_m \ge R$. Para verlo cuantitativamente, fijemos $C_0 > 0$. En el cono $|\lambda| \le C_0\langle\xi\rangle^m$, la estimación principal y la cota $\|a - a_m\| \le C_1\langle\xi\rangle^{m-1}$ implican

$$\|p_m^{-1}(a - a_m)\| \le C_2\langle\xi\rangle^{-1}.$$

Si $\langle\xi\rangle \ge 2C_2$, la serie geométrica matricial invierte $p = p_m - (a - a_m) = p_m[I - p_m^{-1}(a - a_m)]$. En el cono complementario elegimos $C_0 \ge 2C_3$, donde $\|a(x,\xi)\| \le C_3\langle\xi\rangle^m$; entonces

$$\|\lambda^{-1}a(x,\xi)\| \le \tfrac{1}{2} \quad \text{si} \quad |\lambda| \ge C_0\langle\xi\rangle^m,$$

y $p = \lambda[I - \lambda^{-1}a]$ es invertible. La comparación (15.142) permite escoger un único $R$ para ambos conos.

Sea $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ nula en $(-\infty, 1]$ e igual a uno en $[2,\infty)$. Definimos, prolongando por cero donde no interviene la inversa,

$$b_0(x,\xi,\lambda) := \chi\!\left(\frac{\widehat{\rho}_m(\xi,\lambda)}{R}\right) p(x,\xi,\lambda)^{-1}.$$

La fórmula de la derivada de una inversa (15.153), ahora aplicada a $p^{-1}$, las cotas simbólicas de $a$ y (15.143) muestran, derivada por derivada, que $b_0$ es una familia global de tipo resolvente 0. No es holomorfa, pues el corte depende de $|\lambda|^2$. Para

$$e := I - p\#b_0$$

se tiene $e$ de tipo defecto 1: la contribución $I - \chi$ posee soporte compacto conjunto en $(\xi,\lambda)$, y cada término restante del cálculo simbólico contiene al menos una derivada en $\xi$. Por lo tanto, fuera de ese soporte compacto se tiene la cota más precisa

$$\left\| D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k \partial_{\bar\lambda}^\ell e \right\| \le C_{\alpha,\beta,k,\ell}\langle\xi\rangle^{m-1-|\beta|}\Omega_m(\xi,\lambda)^{-1-k-\ell}. \tag{15.155}$$

Es decir, además de perder una potencia de $\langle\xi\rangle$, el defecto contiene el factor $\langle\xi\rangle^{m-1}\Omega_m^{-1}$. Para obtener las po-

tencias del defecto partimos de $e^{\#(N+1)} = e^{\#N}\#e$. Si la cota siguiente vale para $N$, la fórmula de composición distribuye las derivadas entre $e^{\#N}$ y $e$; el producto de los factores de peso es

$$\langle\xi\rangle^{N(m-1)}\Omega_m^{-N}\langle\xi\rangle^{m-1}\Omega_m^{-1} = \langle\xi\rangle^{(N+1)(m-1)}\Omega_m^{-(N+1)}.$$

Cada derivada en $\xi$ reduce la potencia de $\langle\xi\rangle$ y cada derivada de Wirtinger reduce la de $\Omega_m$; Leibniz produce una suma finita. El caso $N = 1$ es (15.155), así que la inducción da, módulo una familia de soporte conjunto compacto,

$$\left\| D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k \partial_{\bar\lambda}^\ell e^{\#N} \right\| \le C_{N,\alpha,\beta,k,\ell}\langle\xi\rangle^{N(m-1)-|\beta|}\Omega_m^{-N-k-\ell}.$$

Dados $P, Q \in \mathbb{N}_0$, elegimos un entero $N \ge \max\{Q, P + mQ + 1\}$. Como $\Omega_m \ge 1 + |\lambda|$, $\Omega_m \ge \langle\xi\rangle^m$ y $N - Q \ge 0$, tenemos

$$\Omega_m^{-N-k-\ell} \le (1+|\lambda|)^{-Q-k-\ell}\langle\xi\rangle^{-m(N-Q)}.$$

Por lo tanto, la desigualdad anterior implica

$$\left\| D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k \partial_{\bar\lambda}^\ell e^{\#N} \right\| \le C_{P,Q,N,\alpha,\beta,k,\ell}\langle\xi\rangle^{-P-|\beta|}(1+|\lambda|)^{-Q-k-\ell}. \tag{15.156}$$

En efecto, después de extraer $(1+|\lambda|)^{-Q-k-\ell}$ queda la potencia $\langle\xi\rangle^{N(m-1)-m(N-Q)} = \langle\xi\rangle^{-N+mQ}$, que no excede $\langle\xi\rangle^{-P}$. Esta es la regularización simultánea cuantificada. En particular, $c_k := b_0\#e^{\#k}$ es de tipo resolvente $k$ y, para cada $P, Q$ y cada familia finita de derivadas, existe un entero $J = J(P, Q, \alpha, \beta, k, \ell)$ tal que los términos de índice $j \ge J$ satisfacen la hipótesis filtrada de regularización simultánea. Aplicamos la segunda parte del Lema 15.7.5, con los cortes conjuntos $\chi(\varepsilon_k\widehat{\rho}_m)$, para sumar la serie formal

$$\widetilde{q} \sim b_0\# \sum_{k=0}^{\infty} e^{\#k}$$

y obtener la familia auxiliar no holomorfa $\widetilde{q}$. Si

$$T_N := b_0\# \sum_{k=0}^{N-1} e^{\#k},$$

entonces la identidad geométrica finita da

$$p\#T_N = (I - e)\# \sum_{k=0}^{N-1} e^{\#k} = I - e^{\#N}. \tag{15.157}$$

En el álgebra de símbolos completos, las posibles correcciones de la fórmula de composición pertenecen ya al ideal regularizante con parámetro. Por lo tanto,

$$s_1 := I - p\#\widetilde{q} = e^{\#N} - p\#(\widetilde{q} - T_N).$$

Para $P, Q$ y una familia finita de derivadas dados, elegimos $N$ como en (15.156). La primera parte del último miembro satisface allí la cota requerida, y la elección diagonal de los cortes en el lema da la misma cota para la segunda. Así,

$$\|D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_\lambda^k \partial_{\bar\lambda}^\ell s_1\| \le C_{P,Q,\alpha,\beta,k,\ell}\langle\xi\rangle^{-P}(1+|\lambda|)^{-Q}.$$

La construcción por la izquierda proporciona $\widetilde{q}_{\mathrm{i}}\#p = I - s_2$ con la misma estimación. La identidad

$$\widetilde{q} - \widetilde{q}_{\mathrm{i}} = s_2\#\widetilde{q} - \widetilde{q}_{\mathrm{i}}\#s_1$$

muestra que ambas familias difieren por una familia regularizante con parámetro. Sustituir una por la otra no modifica su expansión y produce una inversa bilateral módulo ese ideal. Al desarrollar $p$ y $\widetilde{q}$ para $\|\xi\|$ grande, la unicidad en cada grado recupera exactamente las componentes $q_{-m-j}$ de (15.149).

Los cortes empleados en esta suma completa dependen de $\widehat{\rho}_m$ y, por ello, no tienen por qué ser holomorfos. No usaremos $\widetilde{q}$ como si lo fuera: las únicas deformaciones de contorno se harán con cada componente recursiva; el resolvente exacto, aunque holomorfo en su conjunto resolvente, se integrará siempre sobre el contorno global fijo.

Al cuantizar $\widetilde{q}$ en cartas, insertar particiones de la unidad y sumar, se obtiene $Q(\lambda)$ con

$$(\lambda I - A)Q(\lambda) = I - S_1(\lambda), \qquad Q(\lambda)(\lambda I - A) = I - S_2(\lambda),$$

donde $S_1$ y $S_2$ son regularizantes. Respecto de la medida $d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$, sus núcleos satisfacen

$$\mathbf{K}_{S_j}(\lambda;\cdot,\cdot) \in C^\infty(M\times M;\operatorname{Hom}(\mathrm{pr}_2^*\,\mathbf{E},\mathrm{pr}_1^*\,\mathbf{E})).$$

Dotamos este haz de la conexión inducida por la conexión hermitiana de $\mathbf{E}$ y de las normas tensoriales inducidas por $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Para todos $Q,k,\ell,a,b \in \mathbb{N}_0$ existe $C_{Q,k,\ell,a,b} > 0$ tal que

$$\sup_{x,y\in M} \left\| \nabla_x^a \nabla_y^b \partial_\lambda^k \partial_{\bar\lambda}^\ell \mathbf{K}_{S_j}(\lambda;x,y) \right\|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le C_{Q,k,\ell,a,b}(1+|\lambda|)^{-Q}. \tag{15.158}$$

Sea $V = \mathrm{vol}_{\mathbf{g}}(M)$. La Proposición B.8.3, aplicada fibra a fibra con $X = Y = M$ y $\mu = \nu = \lambda_{\mathbf{g}}$, junto con (15.158) para $\alpha = \beta = k = \ell = 0$, da, para cada $Q \in \mathbb{N}$,

$$\|S_j(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}))} \le V \sup_{x,y\in M} \|\mathbf{K}_{S_j}(\lambda;x,y)\|_{\mathcal{L}((\mathbf{E}_y,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(y)),(\mathbf{E}_x,\mathbf{h}_{\mathbf{E}}(x)))} \le V C_Q (1+|\lambda|)^{-Q}. \tag{15.159}$$

Elegimos $R_1$ de modo que el último miembro sea a lo sumo $\tfrac{1}{2}$ para $j = 1,2$, $\lambda \in \Lambda^{\mathrm{p}}_{\theta,\varepsilon_{\mathrm{p}}}$ y $|\lambda| \ge R_1$. Las series $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} S_j(\lambda)^\nu$ convergen entonces en $\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}))$, su suma tiene norma a lo sumo dos y las dos identidades de parametrix proporcionan, respectivamente, una inversa derecha y una inversa izquierda de $\lambda I - A$. Ambas coinciden y definen el resolvente global. Por lo tanto,

$$\{\lambda \in \Lambda^{\mathrm{p}}_{\theta,\varepsilon_{\mathrm{p}}} \mid |\lambda| \ge R_1\} \subseteq \rho(A). \tag{15.160}$$

Queda ahora justificado estrechar el sector. El conjunto

$$\mathbf{F} := \sigma(A) \cap \{\lambda \mid |\lambda| \le R_1\}$$

es finito: la admisibilidad del corte implica $L_\theta \subseteq \rho(A)$, de modo que la Proposición 15.7.2 es aplicable. Además, $0 \notin \mathbf{F}$ y $\mathbf{F} \cap L_\theta = \varnothing$ por las hipótesis sobre el corte. Por la finitud de $\mathbf{F}$ existe $0 < \varepsilon \le \varepsilon_{\mathrm{p}}$ tal que $\mathbf{F} \cap \Lambda_{\theta,\varepsilon} = \varnothing$. Junto con (15.160), esto prueba $\Lambda_{\theta,\varepsilon} \subseteq \rho(A)$. Fijamos $R_0 \ge \max\{R_1, 1\}$.

Para $|\lambda| \geq R_0$ la identidad algebraica

$$(\lambda I - A)^{-1} = Q(\lambda)(I - S_1(\lambda))^{-1} = (I - S_2(\lambda))^{-1} Q(\lambda)$$

muestra que el resultado es el resolvente exacto; su holomorfía se sigue de la holomorfía de $\lambda \mapsto \lambda I - A$ y de la unicidad de la inversa, no de los cortes usados para sumar. De manera explícita, la identidad resolvente da

$$\frac{(\lambda + h - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{h} = -(\lambda + h - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1},$$

y el miembro derecho converge en norma de operador a $-(\lambda - A)^{-2}$ cuando $h \to 0$. Esto prueba la holomorfía operatorial del resolvente exacto. Las identidades

$$(\lambda I - A)^{-1} - Q(\lambda) = Q(\lambda)\big[(I - S_1(\lambda))^{-1} - I\big]$$

y su versión por la izquierda, junto con (15.158), muestran que la diferencia posee la misma estimación para cada $Q$ y cada familia finita de derivadas del núcleo.

En la parte $|\lambda| \leq R_0$ del sector, el resolvente existe por la elección que acabamos de justificar. Puesto que $0 \in \rho(A)$, la clausura de esa parte tras añadir el vértice es un compacto contenido en $\rho(A)$. Las dos identidades de parametrix dan

$$(\lambda I - A)^{-1} - Q(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} S_1(\lambda) = S_2(\lambda)(\lambda I - A)^{-1}.$$

La regularidad elíptica aplicada en ambos lados muestra que esta diferencia es regularizante; sobre cada compacto del sector, todas sus seminormas de núcleo son uniformes. La diferencia puede dejar de ser holomorfa porque $Q$ contiene cortes dependientes de $|\lambda|$.

En una carta y una cuantización fijas, la extracción del símbolo completo a partir del núcleo es una operación lineal continua. Aplicada directamente al resolvente exacto produce un símbolo $r(x, \xi, \lambda)$ holomorfo en todo el sector. Para parámetros grandes, $r - \widetilde{q}$ es regularizante con parámetro, y en la parte compacta es uniformemente regularizante; por lo tanto, $r$ conserva la expansión de alta frecuencia formada por los $q_{-m-j}$. Las cotas para sus derivadas en $\lambda$ se obtienen por las desigualdades de Cauchy en un sector ligeramente menor. Finalmente, las estimaciones débiles de tipo resolvente 0 dan la primera norma de (15.152); al usar $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I$ se obtiene la segunda. La construcción es matricial desde el primer paso, de modo que no cambia para secciones de un haz. □

## 15.7.2 Construcción de las potencias complejas

La parametrix con parámetro proporciona el comportamiento del resolvente en altas frecuencias, mientras que el resolvente exacto conserva la holomorfía y la información espectral. Integrarlos contra $\lambda^z$ sobre un contorno de corte reunirá ambas propiedades en un operador de orden complejo.

Sea $\Gamma_\theta$ un contorno de ojo de cerradura contenido en $\rho(A)$, con dos ramas infinitas en el sector libre de espectro y un arco pequeño alrededor de cero. Es el límite, al retirar el arco exterior, de contornos cerrados orientados positivamente que rodean el espectro de $A$ en el plano cortado. Con esta orientación y el resolvente $(\lambda I - A)^{-1}$, el residuo escalar en un autovalor $\mu$ es $+\mu^z$. La invertibilidad impide que el arco pequeño choque con el espectro y la estimación

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}))} \leq C_0 |\lambda|^{-1}, \qquad \lambda \in \Lambda_{\theta,\varepsilon}, \quad |\lambda| \geq R_0,$$

hace converger la integral siguiente en norma de operador cuando $\operatorname{Re} z < 0$.

**Definición 15.7.7.** (Potencias complejas) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana; sea $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{E})$ elíptico e invertible, con $m > 0$; y sea $\theta$ un corte espectral admisible. Sea $\Gamma_\theta \subset \rho(A)$ el contorno de ojo de cerradura orientado positivamente descrito arriba, y usemos en $\lambda^z$ la rama $\log_\theta$. Para $\operatorname{Re} z < 0$ definimos

$$A^z := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} \lambda^z (\lambda I - A)^{-1} \, d\lambda. \tag{15.161}$$

Para $z \in \mathbb{C}$ arbitrario elegimos $k \in \mathbb{N}$ con $\operatorname{Re}(z-k) < 0$ y ponemos

$$A^z := A^k A^{z-k} \quad \text{sobre } \Gamma(M, \mathbf{E}). \tag{15.162}$$

La identidad resolvente

$$(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}$$

y dos usos sucesivos de la fórmula de Cauchy prueban primero, para partes reales negativas, que

$$A^z A^w = A^{z+w}.$$

Comprobemos que la integral con $z = -1$ es el inverso usual de $A$. En efecto, el cálculo por contornos para funciones racionales se obtiene directamente de la identidad resolvente y de la fórmula de Cauchy; como $0 \in \rho(A)$, al aplicarlo a $r(\lambda) = \lambda^{-1}$ resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} \lambda^{-1} (\lambda I - A)^{-1} \, d\lambda = A^{-1}. \tag{15.163}$$

Precisemos la justificación analítica de esta identidad. Se trunca el contorno de ojo de cerradura y se aplica Cauchy antes de retirar la truncación. Sobre $\Gamma(M, \mathbf{E})$ se usan

$$A(\lambda I - A)^{-1} = \lambda(\lambda I - A)^{-1} - I, \qquad (\lambda I - A)^{-1} A = \lambda(\lambda I - A)^{-1} - I.$$

Además, para $\mathbf{u} \in \Gamma(M, \mathbf{E})$,

$$(\lambda I - A)^{-1}\mathbf{u} - \lambda^{-1}\mathbf{u} = \lambda^{-1}(\lambda I - A)^{-1} A\mathbf{u}.$$

La estimación del resolvente hace que los términos de borde restantes tiendan a cero al retirar el arco exterior, mientras que el arco interior permanece dentro de $\rho(A)$ porque $0 \in \rho(A)$. La fórmula escalar de Cauchy da entonces, respectivamente,

$$AA^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}, \qquad A^{-1}A\mathbf{u} = \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} \in \Gamma(M, \mathbf{E}),$$

lo cual prueba (15.163) sin identificar de antemano la integral con el inverso.

Puede comprobarse ahora que (15.162) es independiente de $k$. Si $\operatorname{Re}\zeta < -1$, las integrales convergen después de multiplicar por $A$, y las identidades anteriores dan

$$AA^\zeta = A^\zeta A = A^{\zeta+1};$$

el término adicional $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_\theta} \lambda^\zeta \, d\lambda$ es cero por Cauchy y por el decaimiento en el infinito. Si $k$ es admisible y

$\zeta := z-k-1$, entonces $\operatorname{Re}\zeta < -1$ y

$$A^{k+1}A^{z-k-1} = A^k(AA^{\zeta}) = A^kA^{z-k}.$$

Por inducción, cualesquiera dos elecciones admisibles producen el mismo operador. La identidad (15.163) da $A^0 = I$ y muestra que las potencias enteras son las usuales.

Finalmente, para $z, w \in \mathbb{C}$ elegimos $k, \ell \in \mathbb{N}$ con $\operatorname{Re}(z-k) < 0$ y $\operatorname{Re}(w-\ell) < 0$. Los resolventes conmutan con $A$ sobre $\Gamma(M,\mathbf{E})$, de modo que las potencias negativas conmutan con las potencias enteras. Usando la ley ya demostrada en el semiplano negativo,

$$A^zA^w = A^{k+\ell}A^{z-k}A^{w-\ell} = A^{k+\ell}A^{z+w-k-\ell} = A^{z+w}.$$

La invertibilidad es precisamente lo que permite esta ley de grupo para todo $z \in \mathbb{C}$; sin ella, las potencias negativas requieren una convención separada sobre el núcleo.

Para $\mu \in \mathbb{C}$, la notación $\Psi^{\mu}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ significará que el símbolo posee componentes homogéneas de grados $\mu - j$ y satisface estimaciones de orden $\operatorname{Re}\mu$. Para $t > 0$ se interpreta $t^{\mu} = e^{\mu \log t}$ con el logaritmo real.

**Definición 15.7.8.** (Holomorfía para una familia de orden variable) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana, sea $m > 0$ y sea $G \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Una familia $B(z) \in \Psi^{mz}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ es **holomorfa de orden variable** $mz$ si se cumplen los tres niveles siguientes.

*Componentes homogéneas.* En cada carta y para $\xi \neq 0$, las componentes $b_{mz-j}(x,\xi;z)$ son holomorfas en $G$ (enteras cuando $G = \mathbb{C}$) y, para cada $K \Subset G$, compacto $K_x$ de la carta, $h \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha, \beta$, existe $C > 0$ tal que

$$\|D_x^{\alpha}D_{\xi}^{\beta}\partial_z^h b_{mz-j}(x,\xi;z)\| \leq C\|\xi\|^{m\operatorname{Re}z-j-|\beta|}(1+|\log\|\xi\||)^h, \quad \|\xi\| \geq 1, \quad z \in K. \tag{15.164}$$

*Símbolo completo.* Con un corte homogéneo fijo $\chi(\xi)$, el símbolo completo $b(x,\xi;z)$ es holomorfo en $z$ y, para cada $N, h \in \mathbb{N}_0$, $\delta > 0$, $K \Subset G$ y $\alpha, \beta$, existe $C > 0$ tal que

$$\left\| D_x^{\alpha}D_{\xi}^{\beta}\partial_z^h \left( b - \sum_{j=0}^{N-1} \chi\, b_{mz-j} \right)(x,\xi;z) \right\| \leq C\langle\xi\rangle^{m\operatorname{Re}z-N-|\beta|+\delta}, \qquad z \in K. \tag{15.165}$$

La pérdida arbitraria $\delta$ absorbe las potencias de $\log\langle\xi\rangle$ que aparecen al derivar respecto de $z$. Respecto de $d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$, el residuo regularizante posee un núcleo

$$\mathbf{K}_R(z;\cdot,\cdot) \in C^{\infty}(M \times M; \operatorname{Hom}(\mathrm{pr}_2^*\mathbf{E}, \mathrm{pr}_1^*\mathbf{E}))$$

holomorfo en $z$. Con la conexión y la norma tensorial inducidas, para todos $h, a, b \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$\sup_{\substack{z\in K\\ x,y\in M}} \left| \partial_z^h \nabla_x^a \nabla_y^b \mathbf{K}_R(z;x,y) \right|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \leq C_{K,h,a,b}.$$

*Nivel operatorial.* El mapeo $z \mapsto B(z)$ es holomorfo de $G$ en $\mathcal{L}_b(\Gamma(M,\mathbf{E}),\Gamma(M,\mathbf{E}))$, donde $\Gamma(M,\mathbf{E})$ lleva su topología de Fréchet y el subíndice $b$ indica la topología de convergencia uniforme sobre subconjuntos acotados. En presencia de los dos niveles simbólicos anteriores, esto equivale a la formulación Sobolev fija

siguiente. Si $\tau_K := m \max_{z\in K} \operatorname{Re} z$, entonces, para todo $r \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{N}_0$ y $\delta > 0$,

$$\sup_{z\in K} \|\partial_z^h B(z)\|_{\mathcal{L}(H^r(M,\mathbf{E}),H^{r-\tau_K-\delta}(M,\mathbf{E}))} \le C_{K,r,h,\delta}, \tag{15.166}$$

y $z \mapsto B(z)$ es holomorfo, en una vecindad abierta de $K$ contenida en $G$, con valores en ese espacio de operadores acotados. Se elige esa vecindad de modo que $m \operatorname{Re} z < \tau_K + \delta/2$; el margen restante absorbe las potencias logarítmicas de las derivadas. No se exige que toda la familia sobre $G$ tome valores en una única pareja de Sobolev. El uso del orden fijo $\tau_K + \delta$ permite comparar en un mismo espacio de Banach los operadores cuyos órdenes reales varían con $z$.

**Teorema 15.7.9.** (Potencias complejas de un operador elíptico) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ y una conexión compatible $\nabla^\mathbf{E}$; sea $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ elíptico e invertible, con $m > 0$ y símbolo principal de Fourier $a_m$; y fijemos un corte espectral admisible $\theta$. Para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$A^z \in \Psi^{mz}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}).$$

La familia es holomorfa en el sentido de la Definición 15.7.8 y satisface

$$A^z A^w = A^{z+w}, \qquad \sigma^{\Psi}_{mz}(A^z)(x,\xi) = a_m(x,\xi)^z, \tag{15.167}$$

donde la potencia matricial del miembro derecho usa el mismo corte espectral. Además,

$$A^z \colon H^r(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^{r-m\operatorname{Re} z}(M,\mathbf{E})$$

es continuo para todo $r \in \mathbb{R}$ cuando se considera inicialmente sobre las secciones suaves.

*Demostración.* Comenzamos con $\operatorname{Re} z < 0$. Por la Proposición 15.7.6, el símbolo del resolvente es

$$r(x,\xi,\lambda) \underset{\|\xi\|\to\infty}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} q_{-m-j}(x,\xi,\lambda).$$

La extracción del símbolo completo es lineal y continua, de modo que conmuta con la integral convergente que define $A^z$. Por lo tanto, un símbolo de $A^z$ es

$$b(x,\xi;z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} \lambda^z r(x,\xi,\lambda)\, d\lambda.$$

La deformación que sigue se hará exclusivamente para las componentes homogéneas, no para $r$. En efecto, por la compacidad del haz de coesferas, la invertibilidad de $a_m$ y el ángulo principal existe un contorno normalizado que evita uniformemente $\operatorname{spec} a_m(x,\omega)$ para toda $\|\omega\| = 1$. Denotemos por $\Gamma_{\theta,\xi}$ su imagen mediante $\lambda = \|\xi\|^m \mu$. Sus ramas están en el sector principal y el radio de su parte curva es $c\|\xi\|^m$, con $c > 0$ menor que el módulo de todo autovalor de $a_m(x,\omega)$. Para $\|\xi\|$ grande, el contorno fijo $\Gamma_\theta$ y $\Gamma_{\theta,\xi}$ son homotópicos en el conjunto donde $\lambda I - a_m(x,\xi)$ es invertible. Esta homotopía puede cruzar autovalores globales de $A$ y por eso no se aplica al símbolo exacto $r$; sí puede aplicarse a cada $q_{-m-j}$, cuyas únicas singularidades en $\lambda$ proceden

del resolvente principal. Definimos, para $\xi \neq 0$,

$$b_{mz-j}(x,\xi;z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\theta,\xi}} \lambda^z q_{-m-j}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda. \tag{15.168}$$

Las estimaciones con parámetro permiten derivar bajo la integral. En efecto, si $K \Subset \{z \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ y $\eta := -\max_{z\in K} \operatorname{Re} z > 0$, entonces, sobre las ramas donde $|\lambda| \geq 1$,

$$\left\| \partial_z^h \left( \lambda^z D_x^\alpha D_\xi^\beta q_{-m-j} \right) \right\| \leq C_{K,h,\alpha,\beta,j} (1+\log|\lambda|)^h |\lambda|^{-1-\eta} \langle \xi \rangle^{-j-|\beta|}. \tag{15.169}$$

La función $(1+\log r)^h r^{-1-\eta}$ es integrable en $[1,\infty)$; tras normalizar por $\lambda = \|\xi\|^m \mu$, el arco pertenece a un compacto que evita uniformemente el espectro principal. Así se justifican en la topología de símbolos tanto la integral como todas sus derivadas respecto de $z, x$ y $\xi$. Si sustituimos $\xi$ por $t\xi$ y hacemos el cambio $\lambda = t^m \mu$, la homogeneidad del resolvente simbólico da

$$\begin{aligned} b_{mz-j}(x,t\xi;z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\theta,\xi}} (t^m\mu)^z t^{-m-j} q_{-m-j}(x,\xi,\mu) t^m\,d\mu \\ &= t^{mz-j} b_{mz-j}(x,\xi;z). \end{aligned}$$

Así, los términos de (15.168) tienen exactamente los grados requeridos.

Falta controlar el resto sin mover el contorno del resolvente global. Fijemos un corte $\chi_0(\xi)$ nulo cerca de cero e igual a uno desde una frecuencia para la cual la homotopía principal anterior es válida. Para $L \in \mathbb{N}$ ponemos, sobre el contorno fijo,

$$R_L(x,\xi,\lambda) := r(x,\xi,\lambda) - \sum_{j=0}^{L-1} \chi_0(\xi) q_{-m-j}(x,\xi,\lambda).$$

La expansión con parámetro de la Proposición 15.7.6 y la regularización uniforme de $r - \widetilde{q}$ dan, en las dos ramas infinitas,

$$\|D_x^\alpha D_\xi^\beta R_L(x,\xi,\lambda)\| \leq C_{\alpha,\beta,L} \langle \xi \rangle^{-L-|\beta|} \Omega_m(\xi,\lambda)^{-1}. \tag{15.170}$$

En la parte curva fija del contorno, la misma desigualdad para $\|\xi\|$ grande es la estimación ordinaria de orden $-m-L$; la región de $\xi$ acotado sólo aporta un símbolo regularizante. Como cada $q_{-m-j}$ puede deformarse por la homotopía principal, pero $r$ permanece sobre $\Gamma_\theta$, se tiene exactamente para $\|\xi\|$ grande

$$b - \sum_{j=0}^{L-1} \chi_0 b_{mz-j} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta} \lambda^z R_L(x,\xi,\lambda)\,d\lambda. \tag{15.171}$$

Escribamos $X = \langle \xi \rangle^m$ y sea $r_* > 0$ el radio de la parte curva fija. Si $K \Subset \{\operatorname{Re} z < 0\}$, entonces, después de $\partial_z^h$, (15.170) y la separación de cada rama en $r_* \leq |\lambda| \leq X$ y $|\lambda| \geq X$ dan

$$\begin{aligned} &\left\| D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_z^h \left( b - \sum_{j=0}^{L-1} \chi_0 b_{mz-j} \right) \right\| \\ &\quad \leq C_{K,\alpha,\beta,L,h} \langle \xi \rangle^{-L-|\beta|} \left[ X^{-1} \int_{r_*}^{X} r^{\operatorname{Re} z} (1+|\log r|)^h\,dr + \int_X^\infty r^{\operatorname{Re} z - 1} (1+\log r)^h\,dr \right]. \end{aligned} \tag{15.172}$$

Si $X < r_*$ se absorbe esa región en la constante. Para $X \geq r_*$, la primera integral se acota separando los casos $\operatorname{Re} z > -1$, $= -1$ y $< -1$; la segunda se integra en $[X, \infty)$. Uniformemente para $z \in K$ y para todo $\delta > 0$, el resultado es

$$\left\| D_x^\alpha D_\xi^\beta \partial_z^h \left( b - \sum_{j=0}^{L-1} \chi_0 b_{mz-j} \right) \right\| \leq C_{K,\alpha,\beta,L,h,\delta} \left( \langle \xi \rangle^{m \operatorname{Re} z - L - |\beta| + \delta} + \langle \xi \rangle^{-m-L-|\beta|+\delta} \right). \tag{15.173}$$

Aquí se usó $(1 + |\log\langle\xi\rangle|)^h \leq C_{h,\delta}\langle\xi\rangle^\delta$; esta desigualdad cubre también el caso fronterizo $\operatorname{Re} z = -1$.
Dados ahora $N, h, \delta$ y $K$, elegimos $L \geq N$ tan grande que

$$-m - L + \frac{\delta}{2} \leq m \min_{z \in K} \operatorname{Re} z - N.$$

Aplicamos (15.173) con $\frac{\delta}{2}$. Sus dos términos quedan acotados por $C\langle\xi\rangle^{m \operatorname{Re} z - N - |\beta| + \delta}$. Los términos finitos $\sum_{j=N}^{L-1} \chi_0 b_{mz-j}$ satisfacen la misma cota por (15.164). La identidad

$$b - \sum_{j=0}^{N-1} \chi_0 b_{mz-j} = \left( b - \sum_{j=0}^{L-1} \chi_0 b_{mz-j} \right) + \sum_{j=N}^{L-1} \chi_0 b_{mz-j}$$

prueba (15.165). El cambio de escala en (15.168) y la dominante (15.169) prueban a su vez (15.164). Por lo tanto,

$$b(x, \xi; z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_{mz-j}(x, \xi; z)$$

es un símbolo clásico de orden complejo $mz$ y es holomorfo en los dos primeros niveles de la Definición 15.7.8.
La diferencia entre el resolvente exacto y la parametrix satisface, para cada $Q$ y cada número finito de derivadas de su núcleo, la cota (15.158). Elegido $Q > \max_{z \in K} \operatorname{Re} z + 1$, su producto con $|\lambda^z|(1 + |\log\lambda|)^h$ es integrable en las ramas infinitas. La integral posee así un núcleo suave holomorfo con todas sus seminormas uniformes en $K$ y no altera el símbolo clásico obtenido. Las estimaciones simbólicas, el teorema de mapeo y la diferenciación bajo la integral dan la cota (15.166). Para verificar la holomorfía en esa norma, si el segmento $[z, z+h]$ permanece en una vecindad compacta usamos la identidad de Taylor con resto integral

$$b(z+h) - b(z) - h\partial_z b(z) = h^2 \int_0^1 (1-t)\partial_z^2 b(z + th)\, dt.$$

Cada seminorma de símbolos del miembro derecho no excede $C|h|^2$ por las cotas anteriores. La cuantización es continua desde esas seminormas hacia $\mathcal{L}(H^r(M, \mathbf{E}), H^{r - \tau_K - \delta}(M, \mathbf{E}))$, de modo que el cociente incremental converge allí a $\partial_z A^z$. La misma identidad aplicada a cada seminorma de $\Gamma(\mathbf{E})$ prueba la holomorfía de $\Gamma(\mathbf{E})$ en sí mismo. Esto establece los tres niveles cuando $\operatorname{Re} z < 0$.
Para $z$ arbitrario elegimos $k$ como en (15.162). El cálculo de composición da

$$A^k A^{z-k} \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{mk + m(z-k)} = \Psi_{\mathrm{cl}}^{mz}.$$

Para un compacto $K \Subset \mathbb{C}$ elegimos un solo entero $k$ tal que $\operatorname{Re}(z-k) \leq -\eta < 0$ para todo $z \in K$. La composición

por el operador fijo $A^k$ es continua en las topologías de símbolos y en los espacios de operadores de (15.166); por ello transporta a $A^z$ todas las cotas uniformes ya demostradas. La ley de grupo prueba que la definición no depende de $k$. Si $w = z - k$ tiene parte real negativa, al tomar $j = 0$ en (15.168), el cálculo funcional holomorfo de la matriz $a_m(x,\xi)$ da

$$b_{mw}(x,\xi;w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\theta,\xi}} \lambda^w (\lambda I - a_m(x,\xi))^{-1}\, d\lambda = a_m(x,\xi)^w.$$

La multiplicatividad del símbolo principal en la composición produce entonces $\sigma^{\Psi}_{mz}(A^z) = a_m^k a_m^w = a_m^z$ para todo $z$. La propiedad de mapeo es la correspondiente a un pseudodiferencial de orden real $m\operatorname{Re} z$. □

**Proposición 15.7.10.** (Realizaciones cerradas de las potencias) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana; sea $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ elíptico e invertible, con $m > 0$ y un corte espectral admisible fijado; y sea $z \in \mathbb{C}$. Sea $d = m\operatorname{Re} z$. Si $d > 0$, la clausura en $L^2(M,\mathbf{E})$ de $A^z|_{\Gamma(M,\mathbf{E})}$ tiene dominio $H^d(M,\mathbf{E})$ y existen $c_z, C_z > 0$ tales que

$$c_z\|\mathbf{u}\|_{H^d(M,\mathbf{E})} \le \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|A^z\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \le C_z\|\mathbf{u}\|_{H^d(M,\mathbf{E})}, \qquad \mathbf{u} \in \Gamma(M,\mathbf{E}). \tag{15.174}$$

Esta realización es cerrada y $\Gamma(M,\mathbf{E})$ es un núcleo esencial. Si $d \le 0$, $A^z|_{\Gamma(M,\mathbf{E})}$ se prolonga de manera única a un operador acotado en $L^2(M,\mathbf{E})$; ésta es su realización, su dominio es todo $L^2(M,\mathbf{E})$ y $\Gamma(M,\mathbf{E})$ también es un núcleo esencial.

*Demostración.* Supongamos $d > 0$. El teorema anterior da $A^z : H^d(M,\mathbf{E}) \to L^2(M,\mathbf{E})$ y $A^{-z} : L^2(M,\mathbf{E}) \to H^d(M,\mathbf{E})$ continuos. La ley de grupo, primero sobre $\Gamma(\mathbf{E})$, proporciona la identidad exacta $\mathbf{u} = A^{-z}A^z\mathbf{u}$. Por ello

$$\|\mathbf{u}\|_{H^d(M,\mathbf{E})} \le \|A^{-z}\|_{\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}),H^d(M,\mathbf{E}))}\|A^z\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}, \qquad \|A^z\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \le \|A^z\|_{\mathcal{L}(H^d(M,\mathbf{E}),L^2(M,\mathbf{E}))}\|\mathbf{u}\|_{H^d(M,\mathbf{E})},$$

y se obtiene (15.174). Si $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ y $A^z\mathbf{u}_j \to \mathbf{f}$ en $L^2(M,\mathbf{E})$, la primera desigualdad aplicada a $\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k$ prueba que $(\mathbf{u}_j)$ converge en $H^d(M,\mathbf{E})$; la continuidad $A^z : H^d(M,\mathbf{E}) \to L^2(M,\mathbf{E})$ da $A^z\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Así, la realización con dominio $H^d(M,\mathbf{E})$ es cerrada. Para $\mathbf{u} \in H^d(M,\mathbf{E})$, una sucesión de secciones suaves que converge a $\mathbf{u}$ en $H^d(M,\mathbf{E})$ converge también en la norma de gráfica por la segunda desigualdad. En consecuencia, la clausura de la restricción a $\Gamma(\mathbf{E})$ es precisamente esa realización y $\Gamma(\mathbf{E})$ es un núcleo esencial.
Si $d \le 0$, la propiedad de mapeo da $A^z : L^2(M,\mathbf{E}) \to H^{-d}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow L^2(M,\mathbf{E})$ cuando $d < 0$, y $A^z : L^2(M,\mathbf{E}) \to L^2(M,\mathbf{E})$ cuando $d = 0$. La densidad de $\Gamma(\mathbf{E})$ en $L^2(M,\mathbf{E})$ prueba la unicidad de la prolongación. Si $\mathbf{u}_j \in \Gamma(\mathbf{E})$ converge a $\mathbf{u}$ en $L^2(M,\mathbf{E})$, la continuidad implica $A^z\mathbf{u}_j \to A^z\mathbf{u}$ en $L^2(M,\mathbf{E})$, de modo que las secciones suaves son densas también en la norma de gráfica. □

La estructura de esta demostración sigue las clases y sumas con parámetro, el resolvente y las familias holomorfas expuestos en [135, Capítulo II, §§9.1, 9.4 y 11.1–11.4]. Históricamente, el resultado y el método de integrar la parametrix del resolvente se deben a Seeley [132].

### 15.7.3 Coincidencia con el cálculo espectral

La construcción por contornos se aplica también a operadores no autoadjuntos. Cuando $A$ es autoadjunto y positivo, cada proyección espectral reduce el contorno a la fórmula escalar de Cauchy. Esto permite identificar las potencias de Seeley con el cálculo espectral utilizado en el Capítulo 12.

**Proposición 15.7.11.** (Cálculo por contornos, cálculo espectral y semigrupo) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana; y sea $A\in\Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$ elíptico y autoadjunto en $L^2(M,\mathbf{E})$, con $m>0$ y $A\geq cI$ para algún $c>0$. Tomemos como corte el eje real negativo. Entonces las potencias de la Definición 15.7.7 coinciden con las potencias del teorema espectral. Como operadores cerrados,

$$A^z=\int_{[c,\infty)}\lambda^z\,dE_A(\lambda). \tag{15.175}$$

Además, para $\operatorname{Re}s>0$,

$$A^{-s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-tA}\,dt, \tag{15.176}$$

donde la integral de Bochner converge en $\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}),L^2(M,\mathbf{E}))$.

*Demostración.* La Proposición 15.7.2 proporciona una base ortonormal $(\boldsymbol{\varphi}_j)$ de eigensecciones suaves, con $A\boldsymbol{\varphi}_j=\lambda_j\boldsymbol{\varphi}_j$ y $\lambda_j\to\infty$. Para $\operatorname{Re}z<0$, la fórmula de Cauchy aplicada a cada autovalor da

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\pi}\lambda^z(\lambda I-A)^{-1}\boldsymbol{\varphi}_j\,d\lambda=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\pi}\frac{\lambda^z}{\lambda-\lambda_j}\,d\lambda\right)\boldsymbol{\varphi}_j=\lambda_j^z\boldsymbol{\varphi}_j.$$

Para $z$ arbitrario elegimos $k\in\mathbb{N}$ con $\operatorname{Re}(z-k)<0$ y usamos $A^z=A^kA^{z-k}$; como $A^k\boldsymbol{\varphi}_j=\lambda_j^k\boldsymbol{\varphi}_j$, resulta $A^z\boldsymbol{\varphi}_j=\lambda_j^z\boldsymbol{\varphi}_j$. Por linealidad, ambas construcciones coinciden sobre el espacio $\mathcal{F}$ de sumas espectrales finitas.
La potencia espectral tiene dominio

$$\mathcal{D}(A^z_{\mathrm{esp}})=\left\{\mathbf{u}=\sum_{j=1}^\infty u_j\boldsymbol{\varphi}_j\in L^2(M,\mathbf{E})\;\middle|\;\sum_{j=1}^\infty\lambda_j^{2\operatorname{Re}z}|u_j|^2<\infty\right\}. \tag{15.177}$$

Si $\mathbf{u}$ pertenece a este dominio y

$$\mathbf{u}_N:=\sum_{\lambda_j\leq N}u_j\boldsymbol{\varphi}_j,$$

entonces $\mathbf{u}_N\in\mathcal{F}\subseteq\Gamma(M,\mathbf{E})$ y

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_N\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})}+\|A^z_{\mathrm{esp}}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_N)\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})}=\sum_{\lambda_j>N}(1+|\lambda_j^z|^2)|u_j|^2\longrightarrow 0.$$

Así, $\mathcal{F}$ es un núcleo esencial de la potencia espectral.
Probemos que también lo es para la potencia pseudodiferencial. Si $d=m\operatorname{Re}z\leq 0$, esta potencia es acotada en $L^2(M,\mathbf{E})$ por la Proposición 15.7.10; la densidad de $\mathcal{F}$ en $L^2(M,\mathbf{E})$ implica entonces su densidad en la

norma de gráfica. Supongamos $d > 0$ y elijamos

$$N_0 := \max\left\{1, \left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil\right\}, \qquad mN_0 \geq d.$$

Si $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{\infty} v_j \boldsymbol{\varphi}_j \in \Gamma(M,\mathbf{E})$ y $\mathbf{v}_N = \sum_{\lambda_j \leq N} v_j \boldsymbol{\varphi}_j$, entonces $A^{N_0}\mathbf{v} \in L^2(M,\mathbf{E})$. Como $\mathbf{v}$ pertenece al dominio de $A^{N_0}$ y $A$ es autoadjunto, el coeficiente de $A^{N_0}\mathbf{v}$ en $\boldsymbol{\varphi}_j$ es

$$(A^{N_0}\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}_j)_{L^2(M,\mathbf{E})} = (\mathbf{v}, A^{N_0}\boldsymbol{\varphi}_j)_{L^2(M,\mathbf{E})} = \lambda_j^{N_0} v_j.$$

Por Parseval,

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_N\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} + \|A^{N_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_N)\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} = \sum_{\lambda_j > N} (1 + \lambda_j^{2N_0})|v_j|^2 \longrightarrow 0.$$

La equivalencia de norma de gráfica (15.174), aplicada al exponente $N_0$, da $\mathbf{v}_N \to \mathbf{v}$ en $H^{mN_0}(M,\mathbf{E})$ y, por la inclusión continua, en $H^d(M,\mathbf{E})$.

Sea ahora $\mathbf{u} \in H^d(M,\mathbf{E})$ y sea $\varepsilon > 0$. Por la densidad de $\Gamma(M,\mathbf{E})$ en $H^d(M,\mathbf{E})$, elegimos $\mathbf{v} \in \Gamma(M,\mathbf{E})$ tal que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{H^d(M,\mathbf{E})} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para este $\mathbf{v}$, la convergencia recién demostrada permite elegir $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_N\|_{H^d(M,\mathbf{E})} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\mathbf{v}_N \in \mathcal{F}$, la desigualdad triangular da

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_N\|_{H^d(M,\mathbf{E})} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es denso en $H^d(M,\mathbf{E})$. La equivalencia (15.174) para $z$ prueba que esa densidad es también densidad en la norma de gráfica de la potencia pseudodiferencial. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un núcleo esencial para ambas realizaciones cerradas. Puesto que coinciden en $\mathcal{F}$, sus clausuras son iguales, lo que prueba (15.175) sin presuponer la igualdad sobre toda $\Gamma(\mathbf{E})$.

La identidad escalar

$$\lambda^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t\lambda}\, dt, \qquad \lambda \geq c,$$

se transporta mediante el teorema espectral. Cerca de cero domina $t^{\operatorname{Re} s - 1}$ y en infinito domina $t^{\operatorname{Re} s - 1} e^{-ct}$. Más precisamente,

$$\|t^{s-1}e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}))} \leq t^{\operatorname{Re} s - 1} \quad (0 < t \leq 1), \qquad \|t^{s-1}e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}))} \leq t^{\operatorname{Re} s - 1} e^{-ct} \quad (t \geq 1).$$

La primera función es integrable en $(0,1]$ porque $\operatorname{Re} s > 0$, y la segunda lo es en $[1,\infty)$. La integral de Bochner converge así en $\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}))$. Aplicar ambas expresiones a cada proyección espectral y usar estas mismas dominantes permite intercambiar la integral con el cálculo espectral, lo que prueba (15.176). □

### 15.7.4 Bessel, el laplaciano fraccionario y el calor

La identificación anterior permite volver a los operadores que motivaron el capítulo. Las potencias del laplaciano de conexión, definidas antes por el teorema espectral y por el semigrupo, poseen ahora símbolos clásicos y pueden estudiarse dentro del mismo cálculo microlocal.

Sea ahora $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada y sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Denotemos por $L_{\mathbf{E}}=(\nabla^{\mathbf{E}})^*_h\nabla^{\mathbf{E}}$ su realización no negativa y autoadjunta. Aunque el símbolo diferencial intrínseco de $L_{\mathbf{E}}$ es $-\|\xi\|^2_{\mathbf{g}}I$, su símbolo principal de Fourier es $\|\xi\|^2_{\mathbf{g}}I$. Por lo tanto, el operador

$$B_{\mathbf{E}}:=I+L_{\mathbf{E}}$$

es elíptico, autoadjunto, satisface $B_{\mathbf{E}}\geq I$ y admite el eje negativo como corte espectral.

**Corolario 15.7.12.** (Potencias de Bessel y laplaciano fraccionario) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada y sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sean $L_{\mathbf{E}}=(\nabla^{\mathbf{E}})^*_h\nabla^{\mathbf{E}}$ y $B_{\mathbf{E}}=I+L_{\mathbf{E}}$. Para todo $z\in\mathbb{C}$,

$$B_{\mathbf{E}}^z\in\Psi^{2z}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}),\qquad \sigma^{\Psi}_{2z}(B_{\mathbf{E}}^z)(x,\xi)=\|\xi\|^{2z}_{\mathbf{g}}I_{\mathbf{E}_x}.$$

Si $s>0$, el potencial de Bessel construido mediante el semigrupo satisface

$$J^{\mathbf{E}}_{s,2}=(I+L_{\mathbf{E}})^{-\frac{s}{2}}=B_{\mathbf{E}}^{-\frac{s}{2}}\in\Psi^{-s}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}). \tag{15.178}$$

En particular, para todo $r\in\mathbb{R}$,

$$B_{\mathbf{E}}^{-\frac{s}{2}}:H^r(M,\mathbf{E})\longrightarrow H^{r+s}(M,\mathbf{E})$$

es un isomorfismo con inversa $B_{\mathbf{E}}^{\frac{s}{2}}$. Más precisamente, para todo $s\in\mathbb{R}$ existen constantes $c_s,C_s>0$ tales que, para $\mathbf{u}\in\Gamma(M,\mathbf{E})$,

$$c_s\|\mathbf{u}\|_{H^s(M,\mathbf{E})}\leq\|B_{\mathbf{E}}^{\frac{s}{2}}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\leq C_s\|\mathbf{u}\|_{H^s(M,\mathbf{E})}. \tag{15.179}$$

Las constantes dependen de $s$, de la métrica $\mathbf{g}$, de la métrica hermitiana y la conexión de $\mathbf{E}$, y de la cubierta finita, las trivializaciones y la partición de la unidad elegidas para la norma Sobolev localizada; una vez fijados esos datos, son uniformes en $\mathbf{u}$.

Sea $\Pi_0$ la proyección ortogonal sobre $\ker L_{\mathbf{E}}$. Para $s>0$,

$$L_{\mathbf{E}}^{\frac{s}{2}}=(L_{\mathbf{E}}+\Pi_0)^{\frac{s}{2}}-\Pi_0\in\Psi^s_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}), \tag{15.180}$$

y la potencia negativa reducida en $(\ker L_{\mathbf{E}})^\perp$ es

$$L_{\mathbf{E},\perp}^{-\frac{s}{2}}=(L_{\mathbf{E}}+\Pi_0)^{-\frac{s}{2}}-\Pi_0\in\Psi^{-s}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}). \tag{15.181}$$

Ambas tienen símbolo principal $\|\xi\|^{\pm s}_{\mathbf{g}}I_{\mathbf{E}_x}$.

*Demostración.* El Teorema 15.7.9 aplicado a $B_{\mathbf{E}}$ da la primera afirmación. La Proposición 15.7.11 y la caracterización espectral del Teorema 12.4.10 prueban (15.178). Las propiedades de mapeo de $B_{\mathbf{E}}^{\pm\frac{s}{2}}$ y la ley de

grupo dan el isomorfismo Sobolev. La identidad espectral

$$\|B_{\mathbf{E}}^{\frac{s}{2}}\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} = \sum_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j)^s|u_j|^2$$

es la norma de la escala espectral del capítulo anterior. La equivalencia de esa escala con la construida por localización, aplicada en ambos sentidos, da exactamente (15.179) y las dependencias allí indicadas. El Teorema 15.7.9 añade la descripción pseudodiferencial de la misma escala.

El núcleo de $L_{\mathbf{E}}$ es finito–dimensional y está formado por secciones suaves. En consecuencia, $\Pi_0$ tiene núcleo suave y pertenece a $\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$. El operador $L_{\mathbf{E}}+\Pi_0$ es estrictamente positivo, invertible y posee el mismo símbolo principal que $L_{\mathbf{E}}$. En $\ker L_{\mathbf{E}}$ su autovalor es uno, mientras que en el complemento coincide con $L_{\mathbf{E}}$. El cálculo espectral da entonces las identidades (15.180) y (15.181). Restar $\Pi_0$ no altera el símbolo principal. □

En una variedad completa de geometría acotada, los Teoremas 13.3.25 y 13.3.28 ya identifican, bajo las hipótesis allí fijadas, la escala espectral de $I+L_{\mathbf{E}}$ con la escala definida por localización uniforme. Las dos desigualdades de (15.179) conservan entonces la misma forma, con constantes dependientes de $s$ y de las cotas cuantitativas de la geometría acotada, pero no de la carta. El Teorema 15.6.14 explica el mapeo de los operadores uniformes que resulten. No afirmamos, sin embargo, que toda potencia compleja sea automáticamente un elemento de $\Psi_{\mathrm{u}}^{2z}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$: esa conclusión requiere un cálculo con parámetro uniforme y estimaciones globales del resolvente en el infinito, hipótesis que no se deducen de la construcción local. Sobre una variedad cerrada, la finitud del atlas y la compacidad del resolvente eliminan precisamente esta dificultad y dan el resultado completo demostrado arriba.

Para el haz trivial sobre $\mathbb{R}^n$ y $s>0$, las mismas identidades se leen directamente en Fourier. Con la normalización unitaria fijada en este capítulo, el laplaciano fraccionario se define exactamente como el multiplicador

$$\widehat{(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u}(\xi) = \|\xi\|^s\,\widehat{u}(\xi), \qquad u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

con dominio cerrado dado por

$$\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^n)\;\middle|\;\|\xi\|^s\widehat{u}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

En cambio,

$$(I-\Delta)^{\frac{s}{2}} = \mathrm{Op}\big((1+\|\xi\|^2)^{\frac{s}{2}}\big)$$

sí pertenece directamente al cálculo inhomogéneo global. Para expresar la parte pseudodiferencial del primer operador elegimos $\chi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, nula cerca de cero e igual a uno para $\|\xi\|$ grande, y reservamos la notación de cuantización para el símbolo suave

$$\mathrm{Op}\big(\chi(\xi)\|\xi\|^s\big)\in\Psi^s_{\mathrm{cl,loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C},\mathbb{C}).$$

El símbolo es clásico, pero el corte en frecuencia no implica soporte propio del operador. Por eso se mantiene el subíndice loc. Si se requiere un representante propiamente soportado, se multiplica su núcleo por un corte igual a uno cerca de la diagonal y propiamente soportado. La diferencia tiene núcleo suave, por la suavidad del núcleo original fuera de la diagonal; el representante así obtenido no es, en general, el multiplicador exacto de Fourier. La diferencia entre el laplaciano fraccionario exacto y su parte de altas frecuencias está soportada en un conjunto compacto de frecuencias y lleva continuamente $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $H^N(\mathbb{R}^n)$ para todo $N$, sin identificar $\|\xi\|^s$ con un símbolo suave en el origen. Sobre una variedad cerrada, la dificultad de frecuencia cero se concentra en el

espacio finito–dimensional $\ker L_{\mathbf{E}}$ y las fórmulas con $\Pi_0$ la aíslan exactamente. En altas frecuencias, en cambio, los símbolos principales de $L_{\mathbf{E}}^{\frac{s}{2}}$ y $(I+L_{\mathbf{E}})^{\frac{s}{2}}$ coinciden. Salvo en los exponentes que producen un operador diferencial, estas potencias son no locales: su núcleo de Schwartz no está soportado en la diagonal. Para $0<s<2$ esta no localidad también se ve en la representación, válida para $\mathbf{u}\in\Gamma(\mathbf{E})$,

$$L_{\mathbf{E}}^{\frac{s}{2}}\mathbf{u}=\frac{s}{2\Gamma(1-\frac{s}{2})}\int_0^\infty \frac{\mathbf{u}-e^{-tL_{\mathbf{E}}}\mathbf{u}}{t^{1+\frac{s}{2}}}\,dt.$$

La integral converge como integral de Bochner en $L^2(M,\mathbf{E})$. Para $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(L_{\mathbf{E}})$, la ecuación del semigrupo y el teorema fundamental del cálculo en $L^2(M,\mathbf{E})$ dan la identidad exacta

$$\mathbf{u}-e^{-tL_{\mathbf{E}}}\mathbf{u}=\int_0^t L_{\mathbf{E}}e^{-\tau L_{\mathbf{E}}}\mathbf{u}\,d\tau. \tag{15.182}$$

Como el semigrupo es contractivo y conmuta con $L_{\mathbf{E}}$ sobre $\mathcal{D}(L_{\mathbf{E}})$,

$$\|\mathbf{u}-e^{-tL_{\mathbf{E}}}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\le\int_0^t\|e^{-\tau L_{\mathbf{E}}}L_{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\,d\tau\le t\|L_{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}. \tag{15.183}$$

Por lo tanto, para $0<t\le 1$ la norma del integrando no excede $\|L_{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}t^{-\frac{s}{2}}$, función integrable porque $s<2$. Para $t\ge 1$, la contractividad proporciona

$$\left\|\frac{\mathbf{u}-e^{-tL_{\mathbf{E}}}\mathbf{u}}{t^{1+\frac{s}{2}}}\right\|_{L^2(M,\mathbf{E})}\le 2\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})}t^{-1-\frac{s}{2}},$$

y esta dominante es integrable porque $s>0$. La componente de $\ker L_{\mathbf{E}}$ se anula exactamente en el numerador.

Las potencias negativas y el calor son dos presentaciones del mismo cálculo funcional. La primera integra el resolvente contra $\lambda^{-s}$; la segunda integra el espectro contra $e^{-t\lambda}$. La transformada de Mellin en (15.176) las identifica.

**Proposición 15.7.13.** (Regularización y traza del calor) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada y sea $\mathbf{E}\longrightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango finito provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Sea $A\ge 0$ un operador pseudodiferencial clásico elíptico autoadjunto de orden $m>0$ sobre $\mathbf{E}$. Para cada $t>0$,

$$e^{-tA}\in\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E}).$$

Su núcleo $\mathbf{K}_A(t,x,y)$ es suave en $(0,\infty)\times M\times M$. Además, $e^{-tA}$ es de clase traza y

$$\operatorname{Tr}(e^{-tA})=\int_{M_x}\operatorname{tr}_{\mathbf{E}_x}\mathbf{K}_A(t,x,x)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(x). \tag{15.184}$$

*Demostración.* El cálculo espectral da, para cada $N\in\mathbb{N}$,

$$\|A^Ne^{-tA}\|_{\mathcal{L}(L^2(M,\mathbf{E}),L^2(M,\mathbf{E}))}\le\sup_{\lambda\ge 0}\lambda^Ne^{-t\lambda}<\infty.$$

Así, $e^{-tA}$ lleva $L^2(M,\mathbf{E})$ en $\mathcal{D}(A^N)$. La regularidad elíptica identifica este dominio, localmente y con normas equivalentes, con $H^{mN}(M,\mathbf{E})$. Como $N$ es arbitrario, el operador gana cualquier número de derivadas. El

mismo argumento para el adjunto muestra que su núcleo es suave; por lo tanto, pertenece a $\Psi^{-\infty}(M;\mathbf{E},\mathbf{E})$. Para $t$ en un compacto de $(0,\infty)$, las identidades $\partial_t^k e^{-tA} = (-A)^k e^{-tA}$ y las mismas estimaciones, con $N$ arbitrario, dan suavidad conjunta respecto de $(t,x,y)$. En una variedad compacta un núcleo suave define un operador de clase traza y vale la fórmula diagonal (15.184). □

Para el argumento de McKean–Singer bastan la regularización, la suavidad del núcleo y la fórmula diagonal de la traza; la expansión asintótica fina del calor sólo será necesaria al estudiar posteriormente la densidad local del índice. Para $B_{\mathbf{E}} = I + L_{\mathbf{E}}$ obtenemos

$$e^{-tB_{\mathbf{E}}} = e^{-t} e^{-tL_{\mathbf{E}}}$$

y

$$B_{\mathbf{E}}^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} e^{-tL_{\mathbf{E}}}\, dt,$$

que es exactamente la fórmula de Bochner usada para definir los potenciales de Bessel.

### 15.7.5 Del calor al índice

El último paso del capítulo muestra cómo la teoría anterior entra en el problema del índice. La parametrix proporciona la propiedad de Fredholm y el calor convierte la diferencia entre núcleo y conúcleo en una diferencia de trazas. Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sean $\mathbf{E}^+, \mathbf{E}^- \longrightarrow M$ haces vectoriales complejos de rango finito provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones hermitianas; y sea

$$P \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E}^+,\mathbf{E}^-), \qquad P\colon \Gamma(M,\mathbf{E}^+) \longrightarrow \Gamma(M,\mathbf{E}^-), \qquad m>0,$$

un operador elíptico clásico. Su parametrix implica que su realización cerrada

$$P\colon H^m(M,\mathbf{E}^+) \subset L^2(M,\mathbf{E}^+) \longrightarrow L^2(M,\mathbf{E}^-)$$

es Fredholm. Su adjunto hilbertiano $P^\dagger$ tiene dominio $H^m(M,\mathbf{E}^-)$ y coincide con la realización cerrada del adjunto formal $P_h^*$. Por lo tanto,

$$\operatorname{ind} P = \dim\ker P - \dim\ker P^\dagger.$$

Esta parte funcional del índice es la consecuencia de Atkinson y de la compacidad de los residuos en una variedad cerrada; véase también [21, Capítulos 3 y 9].

**Proposición 15.7.14.** (Fórmula de McKean–Singer) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada; sean $\mathbf{E}^+, \mathbf{E}^- \longrightarrow M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas; y sea $P \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E}^+,\mathbf{E}^-)$ elíptico, con $m>0$. Para todo $t>0$,

$$\operatorname{ind} P = \operatorname{Tr}(e^{-tP^\dagger P}) - \operatorname{Tr}(e^{-tPP^\dagger}). \tag{15.185}$$

La demostración espectral corresponde a [66, Lema 1.6.5].

*Demostración.* Los operadores $P^\dagger P$ y $PP^\dagger$ son no negativos, autoadjuntos y elípticos. Sus semigrupos son regularizantes y de clase traza. Para $\lambda>0$, el mapeo

$$P : \ker(P^\dagger P - \lambda I) \longrightarrow \ker(PP^\dagger - \lambda I)$$

es un isomorfismo, con inversa $\lambda^{-1}P^{\dagger}$. Por lo tanto, las contribuciones $e^{-t\lambda}$ de todos los autovalores positivos se cancelan en la diferencia de trazas. En el autovalor cero quedan

$$\ker(P^{\dagger}P) = \ker P, \qquad \ker(PP^{\dagger}) = \ker P^{\dagger},$$

y la diferencia de multiplicidades es precisamente $\operatorname{ind} P$. Esto prueba la fórmula espectral. □

El miembro derecho de (15.185) no depende de $t$. La fórmula diagonal (15.184) interpreta ambas trazas y la cancelación espectral; su límite local se expresa mediante la asintótica fina del núcleo del calor.

La conclusión analítica depende únicamente de la clase del símbolo principal. Para verlo, precisemos qué dato permanece invariante bajo las operaciones anteriores. Si $\pi : T^{*}M \setminus 0_M \to M$ es la proyección y $P$ tiene orden $m$, la elipticidad afirma que

$$\sigma_m^{\Psi}(P) : \pi^{*}\mathbf{E}^{+} \longrightarrow \pi^{*}\mathbf{E}^{-}$$

es un isomorfismo de haces sobre $T^{*}M \setminus 0_M$. Si $R \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{m-1}(M;\mathbf{E}^{+},\mathbf{E}^{-})$, la familia $P_t = P + tR$ conserva este símbolo principal y, por lo tanto, es elíptica para todo $t \in [0,1]$. Vista entre los espacios Sobolev adecuados, es una familia norm–continua de operadores Fredholm; la constancia local del índice sobre el conjunto Fredholm da $\operatorname{ind}(P+R) = \operatorname{ind} P$. Si $R$ es regularizante, la misma conclusión se obtiene directamente de Atkinson, pues $R$ es compacto. Finalmente, fijadas métricas fibradas $h_{+}$ y $h_{-}$ en $\mathbf{E}^{+}$ y $\mathbf{E}^{-}$, la compacidad de $S^{*}M$ da

$$\delta := \inf_{(x,\xi)\in S^{*}M} \left\| \sigma_m^{\Psi}(P)(x,\xi)^{-1} \right\|^{-1}_{\mathcal{L}((\mathbf{E}^{-}_x,h_{-}(x)),(\mathbf{E}^{+}_x,h_{+}(x)))} > 0.$$

Si otro símbolo principal homogéneo $b_m$ satisface

$$\sup_{(x,\xi)\in S^{*}M} \| b_m(x,\xi) - \sigma_m^{\Psi}(P)(x,\xi) \|_{\mathcal{L}((\mathbf{E}^{+}_x,h_{+}(x)),(\mathbf{E}^{-}_x,h_{-}(x)))} < \delta,$$

el segmento rectilíneo entre ambos permanece invertible por la serie de Neumann. Al cuantizarlo se obtiene de nuevo una familia norm–continua de operadores elípticos, que no cambia el índice. El problema analítico queda así reducido a la clase topológica del símbolo principal. Los capítulos siguientes construirán esa clase y explicarán cómo se calcula el índice a partir de ella.

# 16

# Operadores de Fredholm e índice analítico

El cálculo pseudodiferencial del Capítulo 15 asocia a cada operador elíptico sobre una variedad cerrada una parametrix cuyos defectos son regularizantes. La tarea ahora es aislar las consecuencias funcionales de esa construcción y fijar las propiedades del índice que se usarán al pasar del símbolo principal a la $K$–teoría. La primera parte se formula para operadores acotados entre espacios de Banach. La segunda vuelve a los espacios de Sobolev de secciones y muestra que el entero obtenido no depende de la completación elegida, sino de la clase de homotopía del símbolo elíptico.

La exposición funcional sigue los Capítulos 1–3 de [21, pp. 3–88]; la aplicación a operadores elípticos corresponde al Teorema 9.10 y al Corolario 9.18 de [21, pp. 240–242]. Daremos las demostraciones que hacen efectivo el paso entre ambas partes.

**Fredholm y la persistencia de una dimensión finita**

Ivar Fredholm descubrió que ciertas ecuaciones integrales infinitodimensionales conservan una alternativa gobernada por núcleos y obstrucciones de dimensión finita. La teoría moderna abstrae esa situación en los operadores de Fredholm. Su índice no cuenta todas las soluciones, sino el desequilibrio estable entre soluciones y compatibilidades. Esta estabilidad es la razón por la que un entero analítico puede sobrevivir a deformaciones del operador y terminar dependiendo únicamente de su símbolo principal.

## 16.1 Operadores de Fredholm y parametrices módulo compactos

Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Recordemos la Definición B.2.40: un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es Fredholm cuando $\ker T$ es finito–dimensional, $\operatorname{Ran} T$ es cerrado y el conúcleo

$$\operatorname{coker} T := Y / \operatorname{Ran} T$$

es finito–dimensional. En tal caso,

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T.$$

Incluimos explícitamente la cerradura del rango por su función analítica: permite que el conúcleo lleve la estructura de espacio de Banach y que la inversa inducida por $T$ sobre un complemento cerrado de su núcleo sea

continua. Sin embargo, para un operador acotado entre espacios de Banach, esta cerradura también se deduce de la dimensión finita del conúcleo algebraico.

En efecto, supongamos que $Y/\operatorname{Ran} T$ tiene dimensión finita y pongamos $K := \ker T$. El subespacio $K$ es cerrado por la continuidad de $T$, de modo que $X/K$ es Banach por la Proposición B.2.20. Elegimos representantes de una base de $Y/\operatorname{Ran} T$ y denotamos por $C$ su espacio generado. Entonces $C$ es finito–dimensional y $Y = \operatorname{Ran} T \oplus C$ como suma algebraica. Consideremos

$$S\colon (X/K)\times C \longrightarrow Y, \qquad S([x],c) := Tx + c.$$

Este operador está bien definido porque $T$ se anula sobre $K$, y la suma algebraica muestra que es lineal y biyectivo. Además, para todo $k \in K$, $\|Tx\|_Y = \|T(x-k)\|_Y \le \|T\|\|x-k\|_X$; al tomar el ínfimo,

$$\|S([x],c)\|_Y \le \|T\|\|[x]\|_{X/K} + \|c\|_Y.$$

Por lo tanto, $S$ es continuo cuando el producto se equipa con la norma suma. Ambos espacios son Banach, así que el Corolario B.2.17 implica que $S^{-1}$ es continuo. En consecuencia,

$$\operatorname{Ran} T = S\big((X/K)\times\{0\}\big)$$

es cerrado, pues un homeomorfismo lleva cerrados en cerrados. Esta conclusión no requiere que $\ker T$ tenga dimensión finita.

**Lema 16.1.1.** (Complementos asociados a un operador de Fredholm) Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ Fredholm. Existen subespacios cerrados $X_0 \subseteq X$ y $C \subseteq Y$ tales que

$$X = \ker T \oplus X_0, \qquad Y = \operatorname{Ran} T \oplus C,$$

y la restricción

$$T_0 := T\restriction_{X_0}\colon X_0 \longrightarrow \operatorname{Ran} T$$

es un isomorfismo de espacios de Banach. Además, $\dim C = \dim \operatorname{coker} T$.

*Demostración.* Todo subespacio finito–dimensional de un espacio normado es complementado. En efecto, si $(e_1,\dots,e_r)$ es una base de $\ker T$, los funcionales coordenados sobre $\ker T$ son continuos y el Corolario B.2.29 permite extenderlos a $\ell_1,\dots,\ell_r \in X'$. El operador

$$P_N x := \sum_{j=1}^{r} \ell_j(x) e_j$$

es una proyección continua sobre $\ker T$; por lo tanto, $X_0 := \ker P_N$ es cerrado y $X = \ker T \oplus X_0$.
Puesto que $\operatorname{Ran} T$ es cerrado y de codimensión finita, elegimos $c_1,\dots,c_q \in Y$ cuyas clases formen una base de $Y/\operatorname{Ran} T$ y ponemos $C := \operatorname{span}\{c_1,\dots,c_q\}$. Cada $y \in Y$ se escribe de manera única como $y = r + c$, con $r \in \operatorname{Ran} T$ y $c \in C$. La proyección sobre $C$ tiene gráfica cerrada: si $y_\nu \to y$ y sus componentes $c_\nu \to c$, entonces $y - c \in \operatorname{Ran} T$. El Teorema B.2.22 muestra que la proyección es continua. Así, $Y = \operatorname{Ran} T \oplus C$ es una suma topológica y $\dim C = q = \dim \operatorname{coker} T$.
La restricción $T_0$ es lineal, continua e inyectiva. También es suprayectiva: si $Tx \in \operatorname{Ran} T$ y $x = n + x_0$ es la

primera descomposición, entonces $Tx = Tx_0$. El Teorema B.2.16 muestra que $T_0^{-1}$ es continuo. □

La caracterización central identifica la propiedad de Fredholm con la invertibilidad salvo errores compactos. Esta equivalencia es el teorema de Atkinson.

**Teorema 16.1.2.** (Atkinson) Para $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ son equivalentes las afirmaciones siguientes.

(i) El operador $T$ es Fredholm.

(ii) Existe $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que

$$ST = I_X - K_X, \qquad TS = I_Y - K_Y, \tag{16.1}$$

con $K_X \in \mathcal{K}(X)$ y $K_Y \in \mathcal{K}(Y)$.

Si $X = Y$, la equivalencia afirma que la clase de $T$ en el álgebra de Calkin

$$\mathcal{C}(X) := \mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$$

es invertible.

*Demostración.* Supongamos primero que $T$ es Fredholm y usemos las descomposiciones del Lema 16.1.1. Definimos $S\colon Y \to X$ mediante

$$S(r+c) := T_0^{-1} r, \qquad r \in \operatorname{Ran} T, \quad c \in C.$$

Las proyecciones de las dos sumas y $T_0^{-1}$ son continuas, de modo que $S \in \mathcal{L}(Y,X)$. Si $P_N$ y $P_C$ son las proyecciones sobre $\ker T$ y $C$, respectivamente, entonces

$$ST = I_X - P_N, \qquad TS = I_Y - P_C.$$

Ambas proyecciones tienen rango finito y, por ello, son compactas. Esto prueba (ii).
Supongamos ahora (ii). Para $x \in \ker T$, la primera identidad de (16.1) da $x = K_X x$. La bola unidad de $\ker T$ es, por lo tanto, la imagen por $K_X$ de un conjunto acotado y es relativamente compacta. La bola unidad de un espacio normado infinito–dimensional no puede ser relativamente compacta; se concluye que $\ker T$ es finito–dimensional.
Elegimos un complemento cerrado $X_0$ de $\ker T$ como en la primera parte del Lema 16.1.1. Afirmamos que existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X, \qquad x \in X_0. \tag{16.2}$$

Si esta estimación fuera falsa, existiría una sucesión $(x_\nu) \subseteq X_0$ con $\|x_\nu\|_X = 1$ y $Tx_\nu \to 0$. Por compacidad, una subsucesión de $(K_X x_\nu)$ convergería. La identidad

$$x_\nu = STx_\nu + K_X x_\nu$$

mostraría que la misma subsucesión de $(x_\nu)$ converge a cierto $x \in X_0$. Entonces $\|x\|_X = 1$ y $Tx = 0$, en contradicción con $X_0 \cap \ker T = \{0\}$. Queda probada (16.2).
La estimación implica que el rango es cerrado. En efecto, si $Tx_\nu \to y$, escribimos $x_\nu = n_\nu + x_\nu^0$ con $n_\nu \in \ker T$

y $x_\nu^0 \in X_0$. Entonces $Tx_\nu^0 = Tx_\nu$ y

$$\|x_\nu^0 - x_\mu^0\|_X \le \frac{1}{c}\|Tx_\nu - Tx_\mu\|_Y.$$

La sucesión $(x_\nu^0)$ converge a un elemento $x^0 \in X_0$, y la continuidad de $T$ da $y = Tx^0$.
Sea $Q\colon Y \to Y/\operatorname{Ran} T$ el cociente. Como el rango es cerrado, el codominio de $Q$ es Banach. Pongamos $K_Y = I_Y - TS$. Si $y = Tx$, entonces

$$K_Y y = Tx - TSTx = T(I_X - ST)x = TK_X x \in \operatorname{Ran} T.$$

Por consiguiente, $K_Y$ induce un operador compacto

$$\overline{K}_Y\colon Y/\operatorname{Ran} T \longrightarrow Y/\operatorname{Ran} T, \qquad \overline{K}_Y[y] := [K_Y y].$$

Para comprobar la compacidad, observemos que cada clase de norma menor que uno admite un representante de norma menor que dos. La imagen de esos representantes por $K_Y$ es relativamente compacta en $Y$, y su proyección por $Q$ sigue siéndolo en el cociente. La segunda identidad de (16.1) implica

$$\overline{K}_Y[y] = [y - TSy] = [y],$$

de modo que la identidad del conúcleo es compacta. Su bola unidad es relativamente compacta, y el conúcleo es finito–dimensional. Por ello, $T$ es Fredholm.
Cuando $X = Y$, las dos identidades de (16.1) equivalen a $[S][T] = [I_X] = [T][S]$ en $\mathcal{C}(X)$, que es precisamente la invertibilidad de $[T]$. □

El teorema anterior aparece en la forma del álgebra de Calkin en [21, Teorema 3.2, pp. 63–65]. La demostración muestra un punto que será decisivo en geometría: no hace falta construir una inversa exacta; una parametrix con residuos compactos contiene toda la información de Fredholm.

**Ejemplo 16.1.3.** (Desplazamientos unilaterales) Sea $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ el espacio de sucesiones cuadrado–sumables y definamos

$$S_+(a_0, a_1, a_2, \ldots) := (0, a_0, a_1, \ldots), \qquad S_-(a_0, a_1, a_2, \ldots) := (a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Ambos operadores tienen norma uno y

$$S_- S_+ = I, \qquad S_+ S_- = I - \Pi_0,$$

donde $\Pi_0(a_0, a_1, \ldots) = (a_0, 0, 0, \ldots)$ tiene rango uno. Así, cada uno es una parametrix del otro módulo operadores compactos. Además,

$$\ker S_+ = \{0\}, \qquad \operatorname{Ran} S_+ = \{(a_j) \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \mid a_0 = 0\},$$

mientras que $\ker S_- = \operatorname{span}\{(1, 0, 0, \ldots)\}$ y $S_-$ es suprayectivo. Por lo tanto,

$$\operatorname{ind} S_+ = -1, \qquad \operatorname{ind} S_- = 1.$$

El ejemplo muestra que el índice no es la diferencia formal entre dos dimensiones infinitas: registra el

defecto finito que queda después de invertir el operador módulo compactos.

## 16.2 Estabilidad y cálculo del índice

La definición del índice utiliza dos dimensiones que pueden cambiar por separado. Su diferencia, en cambio, permanece fija bajo perturbaciones que no destruyen la propiedad de Fredholm.

**Teorema 16.2.1.** (Estabilidad del índice de Fredholm) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach.

(a) El conjunto

$$\operatorname{Fred}(X,Y) := \{T \in \mathcal{L}(X,Y) \mid T \text{ es Fredholm}\}$$

es abierto en la norma de operadores, y $T \mapsto \operatorname{ind} T$ es localmente constante.

(b) Si $T \in \operatorname{Fred}(X,Y)$ y $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, entonces $T+K$ es Fredholm y

$$\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} T.$$

(c) Si $Z$ es un espacio topológico conexo y $z \mapsto T_z \in \operatorname{Fred}(X,Y)$ es continuo en norma, entonces $\operatorname{ind} T_z$ es independiente de $z$.

*Demostración.* Fijemos $T \in \operatorname{Fred}(X,Y)$ y las descomposiciones

$$X = X_0 \oplus N, \qquad Y = R \oplus C, \qquad N = \ker T, \quad R = \operatorname{Ran} T,$$

del Lema 16.1.1. Respecto de ellas, $T$ tiene la matriz

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_0 \colon X_0 \longrightarrow R \text{ invertible.}$$

Para $A$ suficientemente próximo a $T$, escribimos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

El bloque $a \colon X_0 \to R$ es invertible porque $\|a - T_0\| < \|T_0^{-1}\|^{-1}$ implica que $a = T_0(I_{X_0} + T_0^{-1}(a - T_0))$ se invierte mediante la serie de Neumann. Multiplicando $A$ a izquierda y derecha por operadores invertibles obtenemos

$$\begin{pmatrix} I_R & 0 \\ -ca^{-1} & I_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{X_0} & -a^{-1}b \\ 0 & I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix}.$$

El segundo bloque actúa entre los espacios finito–dimensionales $N$ y $C$. La composición a izquierda o a derecha con un isomorfismo identifica los núcleos y los conúcleos correspondientes y no cambia el índice. Si $D := d - ca^{-1}b$, el teorema rango–nulidad da

$$\dim \ker D - \dim(C/\operatorname{Ran} D) = (\dim N - \dim \operatorname{Ran} D) - (\dim C - \dim \operatorname{Ran} D) = \dim N - \dim C.$$

Por lo tanto, $A$ es Fredholm y

$$\operatorname{ind} A = \dim N - \dim C = \operatorname{ind} T.$$

Esto prueba simultáneamente la apertura y la constancia local.
Si $K$ es compacto y $S$ es una parametrix de $T$, entonces

$$S(T+K) - I_X = (ST - I_X) + SK, \qquad (T+K)S - I_Y = (TS - I_Y) + KS$$

son compactos. El Teorema 16.1.2 muestra que $T + tK$ es Fredholm para cada $t \in [0,1]$. Como $t \mapsto T + tK$ es continuo y $[0,1]$ es conexo, la constancia local ya probada da $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} T$. El mismo argumento, aplicado a la imagen continua de cualquier espacio conexo $Z$, prueba (c). □

La constancia local también puede consultarse en [21, Teorema 3.11, pp. 68–71]. El argumento por bloques explica por qué no es necesario que las dimensiones del núcleo y del conúcleo sean constantes: toda su variación queda confinada al operador finito–dimensional $d - ca^{-1}b$, cuyo índice siempre es $\dim N - \dim C$.

**Proposición 16.2.2.** (Reglas de cálculo del índice) Sean $T\colon X \to Y$ y $U\colon Y \to Z$ operadores de Fredholm entre espacios de Banach, y sea $V\colon X_1 \to Y_1$ otro operador de Fredholm. Entonces

$$\operatorname{ind}(T \oplus V) = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} V, \tag{16.3}$$

$$\operatorname{ind}(UT) = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} U. \tag{16.4}$$

Si $X$ y $Y$ son espacios de Hilbert y $T^*\colon Y \to X$ es el adjunto, entonces $T^*$ es Fredholm y

$$\operatorname{ind} T^* = -\operatorname{ind} T. \tag{16.5}$$

*Demostración.* La suma directa satisface

$$\ker(T \oplus V) = \ker T \oplus \ker V, \qquad \operatorname{coker}(T \oplus V) \cong \operatorname{coker} T \oplus \operatorname{coker} V,$$

lo que prueba (16.3).
Sean $S_T\colon Y \to X$ y $S_U\colon Z \to Y$ parametrices de $T$ y $U$. Como los operadores compactos forman un ideal bilateral, $S_T S_U$ es una parametrix de $UT$ módulo compactos. Por el Teorema 16.1.2, $UT$ es Fredholm. Consideremos la sucesión

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \ker T \longrightarrow \ker(UT) &\xrightarrow{T} \ker U \xrightarrow{q_T} \operatorname{coker} T \\ &\xrightarrow{\overline{U}} \operatorname{coker}(UT) \xrightarrow{q_U} \operatorname{coker} U \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{16.6}$$

donde $q_T(y) = [y]$, $\overline{U}([y]) = [Uy]$ y $q_U([z]) = [z]$. Estos mapeos están bien definidos: $U(\operatorname{Ran} T) = \operatorname{Ran}(UT)$, y el cociente por $\operatorname{Ran}(UT)$ se proyecta naturalmente sobre el cociente por $\operatorname{Ran} U$. Verifiquemos la exactitud en los puntos que no son tautológicos. Si $y \in \ker U$ y $q_T(y) = 0$, entonces $y = Tx$ y $x \in \ker(UT)$, de modo que $y$ está en la imagen del tercer mapeo. Si $[y] \in \operatorname{coker} T$ y $[Uy] = 0$ en $\operatorname{coker}(UT)$, existe $x \in X$ tal que $Uy = UTx$; por lo tanto, $y - Tx \in \ker U$ y $[y] = q_T(y - Tx)$. Finalmente, si $[z] \in \operatorname{coker}(UT)$ se anula en $\operatorname{coker} U$, entonces $z = Uy$ y $[z] = \overline{U}([y])$. La sucesión es exacta.
Todos sus términos son finito–dimensionales. La suma alternada de las dimensiones en una sucesión exacta

finita es cero; aplicada a (16.6) da

$$\dim\ker T - \dim\ker(UT) + \dim\ker U - \dim\operatorname{coker} T + \dim\operatorname{coker}(UT) - \dim\operatorname{coker} U = 0,$$

que equivale a (16.4).
Supongamos ahora que $X$ y $Y$ son de Hilbert. Las descomposiciones ortogonales son

$$X = \ker T \oplus (\ker T)^{\perp}, \qquad Y = \operatorname{Ran} T \oplus (\operatorname{Ran} T)^{\perp}.$$

La restricción $T_0\colon (\ker T)^{\perp} \to \operatorname{Ran} T$ es un isomorfismo. Su adjunto $T_0^*\colon \operatorname{Ran} T \to (\ker T)^{\perp}$ también es un isomorfismo. Además,

$$\ker T^* = (\operatorname{Ran} T)^{\perp}, \qquad \operatorname{Ran} T^* = (\ker T)^{\perp}.$$

La primera igualdad se sigue directamente de la definición del adjunto; la segunda resulta de la invertibilidad de $T_0^*$ y de que $T^*$ se anula sobre $(\operatorname{Ran} T)^{\perp}$. En particular, $T^*$ tiene rango cerrado,

$$\dim\ker T^* = \dim\operatorname{coker} T, \qquad \dim\operatorname{coker} T^* = \dim\ker T,$$

y se obtiene (16.5). □

## 16.3 Familias continuas y estabilización finita

Para una familia continua en norma de operadores de Fredholm, el índice numérico es constante en cada componente conexa del espacio de parámetros. Cuando el parámetro recorre un compacto, puede elegirse una única corrección finito–dimensional que haga suprayectivos simultáneamente todos los operadores. Ésta será la forma adecuada para construir una clase de $K$–teoría en el capítulo siguiente.

**Proposición 16.3.1.** (Estabilización de una familia de Fredholm) Sea $B$ un espacio compacto Hausdorff y sea

$$T\colon B \longrightarrow \operatorname{Fred}(X,Y), \qquad b \longmapsto T_b,$$

continua en la norma de operadores. Existe un subespacio finito–dimensional $V \subseteq Y$ tal que

$$\operatorname{Ran} T_b + V = Y, \qquad b \in B. \tag{16.7}$$

Los operadores suprayectivos

$$\widetilde{T}_b\colon X \oplus V \longrightarrow Y, \qquad \widetilde{T}_b(x,v) := T_b x + v,$$

tienen núcleos que forman un haz vectorial de rango localmente constante sobre $B$. Si $V \subseteq V'$ son dos estabilizaciones que satisfacen (16.7), entonces

$$[\ker \widetilde{T}^{V'}] - [B \times V'] = [\ker \widetilde{T}^{V}] - [B \times V] \tag{16.8}$$

como diferencias estables de haces vectoriales.

*Demostración.* Fijemos $b_0 \in B$ y elijamos un complemento finito–dimensional $C_{b_0}$ de $\operatorname{Ran} T_{b_0}$. El operador

$$A_{b_0}\colon X \oplus C_{b_0} \longrightarrow Y, \qquad A_{b_0}(x,c) = T_{b_0}x + c,$$

es suprayectivo. Como $C_{b_0} \cap \operatorname{Ran} T_{b_0} = \{0\}$, su núcleo es $\ker T_{b_0} \oplus \{0\}$ y, por lo tanto, es finito–dimensional. Por lo tanto, el núcleo de $A_{b_0}$ admite un complemento cerrado $W_{b_0}$ y $A_{b_0}\restriction_{W_{b_0}}\colon W_{b_0} \to Y$ es un isomorfismo. Para $b$ suficientemente próximo a $b_0$, la restricción $A_b\restriction_{W_{b_0}}$ sigue siendo invertible por la serie de Neumann; en particular, $\operatorname{Ran} T_b + C_{b_0} = Y$.
Estas vecindades cubren $B$. Elegimos una subcubierta finita, asociada a $b_1,\dots,b_N$, y ponemos

$$V := C_{b_1} + \cdots + C_{b_N}.$$

El espacio $V$ es finito–dimensional y satisface (16.7).
Para probar la estructura de haz, fijemos de nuevo $b_0$ y elijamos un complemento cerrado $W$ de $N_0 := \ker \widetilde{T}_{b_0}$ en $X \oplus V$. La restricción

$$\widetilde{T}_{b_0}\restriction_W\colon W \longrightarrow Y$$

es un isomorfismo y continúa siéndolo para $b$ cercano a $b_0$. Para $n \in N_0$ definimos

$$\Phi_b(n) := n - \bigl(\widetilde{T}_b\restriction_W\bigr)^{-1}\widetilde{T}_b n.$$

Entonces $\Phi_b(n) \in \ker \widetilde{T}_b$. Si $z = n + w \in N_0 \oplus W$ pertenece a $\ker \widetilde{T}_b$, la ecuación $\widetilde{T}_b z = 0$ obliga a $w = -(\widetilde{T}_b\restriction_W)^{-1}\widetilde{T}_b n$; por lo tanto, $z = \Phi_b(n)$. Así, $\Phi_b\colon N_0 \to \ker \widetilde{T}_b$ es un isomorfismo que depende continuamente de $b$. Estos mapeos son trivializaciones locales del conjunto de núcleos.
Supongamos finalmente $V \subseteq V'$. La proyección $V' \to V'/V$ induce una sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow \ker \widetilde{T}^{\,V} \longrightarrow \ker \widetilde{T}^{\,V'} \longrightarrow B \times (V'/V) \longrightarrow 0.$$

La suprayectividad de la última flecha se comprueba fibra a fibra. Dado $w \in V'$, la suprayectividad de $\widetilde{T}_b^{\,V}$ proporciona $(x,v) \in X \oplus V$ tal que $T_b x + v = -w$; entonces $(x, v+w)$ pertenece a $\ker \widetilde{T}_b^{\,V'}$ y se proyecta sobre $[w] \in V'/V$. Una métrica fibrada en el haz central, euclidiana si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y hermitiana si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, separa ortogonalmente la sucesión, de modo que

$$\ker \widetilde{T}^{\,V'} \cong \ker \widetilde{T}^{\,V} \oplus B \times (V'/V).$$

Al sustraer los haces triviales $B \times V'$ y $B \times V$ se obtiene (16.8).
Queda comparar dos estabilizaciones arbitrarias $V_0, V_1 \subseteq Y$. El subespacio $W := V_0 + V_1$ es finito–dimensional y también satisface (16.7). Aplicando la igualdad recién demostrada a las inclusiones $V_0 \subseteq W$ y $V_1 \subseteq W$, se obtiene

$$[\ker \widetilde{T}^{\,V_0}] - [B \times V_0] = [\ker \widetilde{T}^{\,W}] - [B \times W] = [\ker \widetilde{T}^{\,V_1}] - [B \times V_1].$$

Por lo tanto, la diferencia estable no depende de ninguna de las elecciones empleadas para construirla. □

La estabilización sustituye una familia cuyos núcleos pueden cambiar de dimensión por una diferencia de haces finito–dimensionales bien definida. El grupo de Grothendieck del capítulo siguiente permitirá considerar

esa diferencia sin conservar el subespacio auxiliar $V$. Ésta es la construcción del haz índice desarrollada en [21, Teorema 3.30, pp. 82–85].

## 16.4 Operadores elípticos sobre variedades cerradas

Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\longrightarrow M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y conexiones hermitianas. Para $m,s\in\mathbb{R}$ y

$$P\in\Psi^{m}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F}),$$

el Corolario 15.6.6 proporciona una extensión continua única

$$P_s\colon H^{s+m}(M,\mathbf{E})\longrightarrow H^{s}(M,\mathbf{F}).$$

En lo que sigue, $P$ será elíptico. El Capítulo 15 construyó una parametrix $Q\in\Psi^{-m}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{F},\mathbf{E})$ con

$$QP=I_{\mathbf{E}}-R_{\mathbf{E}},\qquad PQ=I_{\mathbf{F}}-R_{\mathbf{F}},\qquad R_{\mathbf{E}},R_{\mathbf{F}}\in\Psi^{-\infty}. \tag{16.9}$$

**Teorema 16.4.1.** (Fredholm elíptico e índice analítico) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y sea $P\in\Psi^{m}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ elíptico. Para todo $s\in\mathbb{R}$, el operador

$$P_s\colon H^{s+m}(M,\mathbf{E})\longrightarrow H^{s}(M,\mathbf{F})$$

es Fredholm. Su núcleo está formado por las soluciones suaves de $P\mathbf{u}=0$, y su conúcleo se identifica, mediante la proyección ortogonal extendida por dualidad, con el espacio de soluciones suaves de $P^{*}\mathbf{v}=0$, donde $P^{*}$ es el adjunto formal hermitiano. En particular,

$$\operatorname{ind}P_s=\dim\ker\bigl(P\colon\Gamma(M,\mathbf{E})\to\Gamma(M,\mathbf{F})\bigr)-\dim\ker\bigl(P^{*}\colon\Gamma(M,\mathbf{F})\to\Gamma(M,\mathbf{E})\bigr). \tag{16.10}$$

El miembro derecho no depende de $s$.

*Demostración.* La parametrix de (16.9) induce

$$Q_s\colon H^{s}(M,\mathbf{F})\longrightarrow H^{s+m}(M,\mathbf{E}).$$

Por la Proposición 15.6.18, $R_{\mathbf{E}}$ y $R_{\mathbf{F}}$ actúan compactamente en los espacios de Sobolev que aparecen en las dos identidades. El Teorema 16.1.2 aplicado a $P_s$ y $Q_s$ prueba que $P_s$ es Fredholm.
Si $\mathbf{u}\in H^{s+m}(M,\mathbf{E})$ y $P_s\mathbf{u}=0$, la primera identidad de la parametrix da $\mathbf{u}=R_{\mathbf{E}}\mathbf{u}$. Un operador regularizante lleva cualquier distribución a una sección suave, de modo que $\mathbf{u}\in\Gamma(M,\mathbf{E})$. Recíprocamente, toda solución suave pertenece a $H^{s+m}(M,\mathbf{E})$ porque $M$ es compacta. Así,

$$\ker P_s=\{\mathbf{u}\in\Gamma(M,\mathbf{E})\mid P\mathbf{u}=0\}, \tag{16.11}$$

independientemente de $s$.

El adjunto formal $P^* \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{F},\mathbf{E})$ se caracteriza por

$$\int_M \mathbf{h}_{\mathbf{F}}(P\mathbf{u},\mathbf{v})\,d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(\mathbf{u},P^*\mathbf{v})\,d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \mathbf{u}\in\Gamma(M,\mathbf{E}),\quad \mathbf{v}\in\Gamma(M,\mathbf{F}). \tag{16.12}$$

El símbolo principal de $P^*$ es el adjunto del símbolo principal de $P$ por el Teorema 15.2.8; por lo tanto, $P^*$ es elíptico. La Proposición 14.5.5, aplicada a la variedad cerrada, identifica el anulador continuo de $\operatorname{Ran} P_s \subseteq H^s(M,\mathbf{F})$ con

$$\ker\left(P^*\colon H^{-s}(M,\mathbf{F}) \longrightarrow H^{-s-m}(M,\mathbf{E})\right),$$

mediante una identificación antilineal, pues el producto hermitiano es lineal en la primera variable. La regularidad elíptica del Corolario 15.6.5 muestra que este núcleo consta de secciones suaves. Denotémoslo por $K$ y elijamos una base ortonormal $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_q$ de $K$ para el producto $L^2(M,\mathbf{F})$. Para $\mathbf{f}\in H^s(M,\mathbf{F})$ definimos

$$\Pi_K\mathbf{f} := \sum_{j=1}^{q} \langle \mathbf{f},\mathbf{v}_j\rangle \mathbf{v}_j.$$

Cada emparejamiento es continuo en $H^s$, porque $\mathbf{v}_j$ es suave y pertenece a $H^{-s}$. Por tanto, $\Pi_K : H^s(M,\mathbf{F}) \to K$ es lineal y continuo, coincide con la proyección ortogonal cuando $\mathbf{f}\in L^2\cap H^s$, y es la identidad sobre $K$. Su núcleo es $\operatorname{Ran} P_s$: la inclusión del rango se obtiene del adjunto formal; recíprocamente, si todos los emparejamientos se anulan, todos los funcionales continuos que anulan $\operatorname{Ran} P_s$ se anulan en $\mathbf{f}$. Hahn–Banach y la cerradura del rango implican $\mathbf{f}\in\operatorname{Ran} P_s$. Así, $\Pi_K$ induce un isomorfismo complejo lineal $\operatorname{coker} P_s \cong K$, independiente de la base ortonormal elegida.

Como $\operatorname{Ran} P_s$ es cerrado, el dual del conúcleo es ese anulador. Ambos son finito–dimensionales y, por lo tanto, tienen la misma dimensión. Junto con (16.11), esto da (16.10) y prueba la independencia de $s$. □

**Definición 16.4.2.** (Índice analítico) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales complejos de rango finito, provistos de métricas fibradas hermitianas y sea $P\in\Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ elíptico. El **índice analítico** de un operador elíptico clásico $P$ es el entero

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P) := \operatorname{ind}\left(P_s\colon H^{s+m}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^s(M,\mathbf{F})\right),$$

donde $s\in\mathbb{R}$ es arbitrario. El Teorema 16.4.1 garantiza que la definición no depende de $s$.

La fórmula (16.10) puede escribirse

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P) = \dim\ker P - \dim\ker P^*.$$

Aquí ambos núcleos se toman en secciones suaves. Si se usa el adjunto hilbertiano de $P_s$ para productos de Sobolev concretos, se obtiene un operador diferente de $P^*$; el isomorfismo de Riesz identifica sus núcleos y produce la misma dimensión. El adjunto formal es el que conserva el contenido geométrico y el símbolo principal.

**Corolario 16.4.3.** (Propiedades del índice analítico) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{E}_0,\mathbf{F}_0,\mathbf{G}\to M$ haces vectoriales complejos suaves de rango finito y sean $P\in\Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$, $P_0\in$

$\Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E}_0,\mathbf{F}_0)$ y $Q\in\Psi^\ell_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{F},\mathbf{G})$ elípticos. Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P\oplus P_0)&=\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P)+\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P_0),\\ \operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(QP)&=\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P)+\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(Q),\\ \operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P^*)&=-\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P).\end{aligned}$$

Si $P$ es invertible, o si $P=P^*$, entonces $\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P)=0$.

*Demostración.* Elegimos exponentes de Sobolev que hagan continuas todas las composiciones. Las dos primeras identidades son, respectivamente, (16.3), (16.4); la independencia del exponente permite cambiar de escala sin alterar el entero. Un operador invertible tiene núcleo y conúcleo nulos. Para la tercera se aplica (16.10) a $P$ y a $P^*$: como $(P^*)^*=P$, las dos dimensiones intercambian sus lugares. Si $P=P^*$, esta identidad da $\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P)=-\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P)$, y como el índice es entero se concluye que vale cero. □

## 16.5 Dependencia respecto del símbolo principal

Sea $\pi\colon T^*M\to M$ la proyección. El símbolo principal de $P$ es un homomorfismo homogéneo

$$\sigma^{\Psi}_m(P)\colon \pi^*\mathbf{E}\longrightarrow\pi^*\mathbf{F}$$

que es invertible sobre $T^*M\setminus 0_M$. La restricción al cosferado unitario $S^*M$ contiene la misma información, pues la homogeneidad reconstruye el símbolo en cada rayo no nulo.

**Proposición 16.5.1.** (Cuantización continua de una homotopía de símbolos) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales complejos suaves de rango finito y sean $a_t\colon\pi^*\mathbf{E}\to\pi^*\mathbf{F}$, $t\in[0,1]$, símbolos principales clásicos de orden $m$, dependientes continuamente de $t$ en la topología $C^\infty$ sobre $S^*M$. Existe una familia

$$P_t\in\Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$$

continua como mapeo

$$[0,1]\longrightarrow\mathcal{L}\big(H^{s+m}(M,\mathbf{E}),H^s(M,\mathbf{F})\big)$$

para todo $s\in\mathbb{R}$, tal que $\sigma^{\Psi}_m(P_t)=a_t$. Si cada $a_t$ es invertible, cada $P_t$ es elíptico.

*Demostración.* Elegimos un atlas finito, marcos de los haces, una partición de la unidad y cortes en las variables de posición y frecuencia como en la construcción global del Capítulo 15. Extendemos cada restricción homogéneamente desde $S^*M$ para $\|\xi\|_{\mathbf{g}}\geq 1$ y la multiplicamos por un corte que se anula cerca de la sección cero. La suma localizada de las cuantizaciones tiene símbolo principal $a_t$; los términos producidos por los cambios de carta y los cortes son de orden a lo más $m-1$ y no alteran ese símbolo.

En un atlas finito, cada seminorma simbólica del símbolo completo de $P_t-P_{t_0}$ queda acotada por una suma finita de seminormas $C^N$ de $a_t-a_{t_0}$ sobre $S^*M$. El Teorema 15.6.2, seguido de la localización finita usada en el Corolario 15.6.6, muestra que

$$\|P_t-P_{t_0}\|_{\mathcal{L}(H^{s+m}(M,\mathbf{E}),H^s(M,\mathbf{F}))}\longrightarrow 0\qquad(t\longrightarrow t_0).$$

La última afirmación es la definición de elipticidad. □

**Corolario 16.5.2.** (El índice sólo depende del símbolo) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ haces vectoriales complejos suaves de rango finito. Sean $P_0,P_1\in\Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ elípticos.

(a) Si $\sigma^\Psi_m(P_0)=\sigma^\Psi_m(P_1)$, entonces
$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P_0)=\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P_1).$$

(b) Si las restricciones de $\sigma^\Psi_m(P_0)$ y $\sigma^\Psi_m(P_1)$ a $S^*M$ están unidas por una homotopía de isomorfismos de haces que es continua en la topología $C^\infty$ de las secciones, entonces se cumple la misma igualdad.

*Demostración.* En (a), la sucesión exacta del Teorema 15.3.7 muestra que la diferencia $P_1-P_0$ tiene orden a lo más $m-1$. Para cualquier $s\in\mathbb{R}$ se factoriza como
$$H^{s+m}(M,\mathbf{E})\xrightarrow{P_1-P_0}H^{s+1}(M,\mathbf{F})\hookrightarrow H^s(M,\mathbf{F}).$$
La primera flecha es continua por el teorema de mapeo pseudodiferencial y la segunda es compacta por Rellich–Kondrashov. Por lo tanto, $P_1-P_0$ es compacto entre los espacios que definen el índice, y el Teorema 16.2.1 prueba la igualdad.
En (b), la Proposición 16.5.1 produce una familia continua en norma $(\widehat{P}_t)_{t\in[0,1]}$ de operadores elípticos con los símbolos prescritos. Es una familia de Fredholm por el Teorema 16.4.1, de modo que la parte (c) del Teorema 16.2.1 da
$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(\widehat{P}_0)=\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(\widehat{P}_1).$$
Como $\widehat{P}_j$ y $P_j$ tienen el mismo símbolo principal para $j=0,1$, la parte (a) completa la prueba. □

Para ver directamente que las homotopías pequeñas permanecen elípticas, fijemos métricas $\mathbf{h_E}$ y $\mathbf{h_F}$ en los haces. La compacidad de $S^*M$ da
$$\delta:=\inf_{(x,\xi)\in S^*M}\left\|\sigma^\Psi_m(P)(x,\xi)^{-1}\right\|^{-1}_{\mathcal{L}((\mathbf{F}_x,\mathbf{h_F}),(\mathbf{E}_x,\mathbf{h_E}))}>0.$$
Si otro símbolo $b_m$ satisface
$$\sup_{(x,\xi)\in S^*M}\|b_m(x,\xi)-\sigma^\Psi_m(P)(x,\xi)\|_{\mathcal{L}((\mathbf{E}_x,\mathbf{h_E}),(\mathbf{F}_x,\mathbf{h_F}))}<\delta,$$
entonces
$$b_m(x,\xi)=\sigma^\Psi_m(P)(x,\xi)\left[I+\sigma^\Psi_m(P)(x,\xi)^{-1}\left(b_m(x,\xi)-\sigma^\Psi_m(P)(x,\xi)\right)\right]$$
es invertible en cada punto, porque el segundo factor se invierte por la serie de Neumann. El mismo cálculo se aplica al segmento que une ambos símbolos.

El Corolario 16.5.2 reduce así el problema analítico a uno topológico: convertir el isomorfismo $\sigma^\Psi_m(P)$ sobre $T^*M\setminus 0_M$ en una clase estable y demostrar que el índice define un homomorfismo sobre esas clases. Ésa será la construcción del Capítulo 17.

# 17

# K-teoría de haces vectoriales y clase del símbolo

Sea $X$ un espacio compacto y Hausdorff. La suma directa de haces vectoriales complejos sobre $X$ produce un monoide conmutativo, pero no permite restar haces. La construcción de Grothendieck corrige precisamente esta deficiencia: añade inversos formales sin identificar más elementos de los que exige la suma directa. En este sentido la construcción es algebraica. El grupo obtenido, sin embargo, depende del espacio base y de la homotopía de sus mapeos; por ello se denomina *K–teoría topológica*. No se trata de la $K$–teoría algebraica de anillos.

La utilidad de esta construcción para un operador elíptico aparece ya en su símbolo principal. Si $M$ es cerrada y

$$P \in \Psi^{m}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$$

es elíptico, entonces

$$\sigma^{\Psi}_{m}(P)\colon \pi^{*}\mathbf{E} \longrightarrow \pi^{*}\mathbf{F}$$

es un isomorfismo fuera de la sección nula de $T^{*}M$. El par de haces y ese isomorfismo determinan una clase con soporte compacto en $T^{*}M$. En este capítulo se construye dicha clase y se prueban las operaciones que se usarán al definir los índices topológico y analítico. La construcción sigue [21, Capítulo 10, en particular pp. 262–269].

Todos los haces considerados serán complejos, de rango finito y localmente triviales. Sobre una variedad suave serán, además, suaves. La $K$–teoría real requiere grupos distintos y no intervendrá en la demostración del teorema del índice complejo.

### Grothendieck y Atiyah: restar haces

La completación de Grothendieck convierte un monoide de objetos geométricos en un grupo de diferencias formales. Aplicada a haces vectoriales, esta idea permite expresar de manera estable la diferencia entre el dominio y el codominio de un símbolo elíptico. Atiyah desarrolló la $K$–teoría topológica como el lenguaje natural para estas clases y, junto con Singer, la convirtió en el lado topológico del teorema del índice. La estabilización no borra la geometría: conserva precisamente la información que permanece al añadir haces triviales.

## 17.1 Completación de Grothendieck

Denotemos por $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ el conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos sobre $X$. La operación

$$[\mathbf{E}] + [\mathbf{F}] := [\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}]$$

lo convierte en un monoide conmutativo cuyo elemento neutro es la clase del haz de rango cero. En general no vale la cancelación: de $\mathbf{E} \oplus \mathbf{G} \cong \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$ no se sigue necesariamente que $\mathbf{E} \cong \mathbf{F}$. Esta es la razón por la cual no se debe definir la diferencia de haces imponiendo primero una cancelación inexistente.

**Teorema 17.1.1.** (Grupo de Grothendieck) Sea $(A, +, 0)$ un monoide conmutativo. En $A \times A$ definimos

$$(a, b) \sim (c, d) \iff \text{existe } e \in A \text{ tal que } a + d + e = c + b + e. \tag{17.1}$$

Entonces

$$G(A) := (A \times A)/\!\sim$$

es un grupo abeliano con

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)], \qquad -[(a, b)] = [(b, a)].$$

El mapeo

$$\iota_A \colon A \longrightarrow G(A), \qquad \iota_A(a) = [(a, 0)],$$

es un homomorfismo de monoides y satisface la siguiente propiedad universal: si $H$ es un grupo abeliano y $h \colon A \to H$ es un homomorfismo de monoides, existe un único homomorfismo de grupos $\widetilde{h} \colon G(A) \to H$ tal que $\widetilde{h} \circ \iota_A = h$.

*Demostración.* Probemos que la relación es de equivalencia. La reflexividad se obtiene con $e = 0$ y la simetría intercambiando los dos miembros. Si

$$a + d + e = c + b + e \quad \text{y} \quad c + f + e' = g + d + e',$$

entonces, al sumar las igualdades y reagrupar,

$$a + f + (c + d + e + e') = g + b + (c + d + e + e'),$$

de modo que $(a, b) \sim (g, f)$. Por lo tanto, la relación es transitiva.
Si se sustituyen $(a, b)$ y $(c, d)$ por representantes equivalentes, la suma de los testigos de las dos equivalencias prueba que $(a + c, b + d)$ no cambia de clase. Así, la suma en $G(A)$ está bien definida. Además,

$$[(a, b)] + [(b, a)] = [(a + b, a + b)] = [(0, 0)],$$

por lo que cada elemento posee el inverso indicado.
Para la propiedad universal definimos

$$\widetilde{h}([(a, b)]) := h(a) - h(b).$$

Si $(a,b)\sim(c,d)$, existe $e\in A$ con $a+d+e=c+b+e$; al aplicar $h$ y cancelar en el grupo $H$ resulta $h(a)-h(b)=h(c)-h(d)$. Por consiguiente, $\widetilde{h}$ está bien definido. Es un homomorfismo, factoriza a $h$ y es único porque cada clase se escribe como

$$[(a,b)]=\iota_A(a)-\iota_A(b).$$

□

**Observación 17.1.2.** Es frecuente definir la relación mediante

$$(a,b)\sim(c,d)\quad\Longleftrightarrow\quad\text{existen } u,v\in A \text{ con } (a+u,b+u)=(c+v,d+v).$$

Esta forma y (17.1) son equivalentes: en una dirección se toma $e=u+v$, y en la otra se toman $u=d+e$ y $v=b+e$. La segunda forma coincide con la usada en [21, Teorema 10.5, pp. 262–263].

**Definición 17.1.3.** ($K^0$ de un espacio compacto) Sea $X$ compacto y Hausdorff. Su grupo de $K$–teoría compleja es

$$K^0(X):=G\big(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)\big).$$

La clase del par $(\mathbf{E},\mathbf{F})$ se denota por

$$[\mathbf{E}]-[\mathbf{F}]\in K^0(X).$$

Si $\underline{\mathbb{C}}^r_X=X\times\mathbb{C}^r$ es el haz trivial, abreviaremos su clase por $r$ cuando el espacio base sea inequívoco.

La igualdad entre diferencias tiene una descripción estable que se usará repetidamente.

**Proposición 17.1.4.** (Criterio de igualdad estable) Sean $\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{E}',\mathbf{F}'$ haces vectoriales complejos sobre un espacio compacto y Hausdorff $X$. Entonces

$$[\mathbf{E}]-[\mathbf{F}]=[\mathbf{E}']-[\mathbf{F}'] \tag{17.2}$$

si y sólo si existe un haz $\mathbf{G}\to X$ tal que

$$\mathbf{E}\oplus\mathbf{F}'\oplus\mathbf{G}\cong\mathbf{E}'\oplus\mathbf{F}\oplus\mathbf{G}. \tag{17.3}$$

También es equivalente a la existencia de $N\in\mathbb{N}_0$ para el cual

$$\mathbf{E}\oplus\mathbf{F}'\oplus\underline{\mathbb{C}}^N_X\cong\mathbf{E}'\oplus\mathbf{F}\oplus\underline{\mathbb{C}}^N_X. \tag{17.4}$$

Además, toda clase de $K^0(X)$ puede escribirse como

$$[\mathbf{V}]-[\underline{\mathbb{C}}^N_X] \tag{17.5}$$

para algún haz $\mathbf{V}\to X$ y algún $N\in\mathbb{N}_0$.

*Demostración.* La equivalencia entre (17.2) y (17.3) es exactamente (17.1) aplicada al monoide de clases de haces.
Por el teorema del complemento para haces sobre bases compactas, formulado en el Apéndice A, existe un

haz $\mathbf{G}^{\perp}$ y un entero $N$ tales que

$$\mathbf{G} \oplus \mathbf{G}^{\perp} \cong \underline{\mathbb{C}}_X^N.$$

Al sumar $\mathbf{G}^{\perp}$ a ambos miembros de (17.3) se obtiene (17.4). La implicación recíproca es inmediata tomando $\mathbf{G}$ trivial.

Finalmente, dada $[\mathbf{E}]-[\mathbf{F}]$, elegimos un complemento $\mathbf{F}^{\perp}$ con $\mathbf{F}\oplus\mathbf{F}^{\perp}\cong\underline{\mathbb{C}}_X^N$. Entonces

$$[\mathbf{E}]-[\mathbf{F}] = [\mathbf{E}\oplus\mathbf{F}^{\perp}]-[\underline{\mathbb{C}}_X^N],$$

que tiene la forma (17.5). □

El teorema del complemento no es una propiedad formal de los monoides. Su demostración usa una cubierta finita trivializante, una partición de la unidad y una inclusión del haz en un haz trivial; los enunciados topológicos necesarios se reúnen en el Apéndice A. La consecuencia algebraica se obtiene aplicando ese teorema en la proposición anterior.

### 17.1.1 Producto, pullback y homotopía

El producto tensorial distribuye respecto de la suma directa. Por la propiedad universal del grupo de Grothendieck induce un producto bilineal

$$\begin{aligned} K^0(X)\times K^0(X) &\longrightarrow K^0(X),\\ \big([\mathbf{E}]-[\mathbf{F}],[\mathbf{G}]-[\mathbf{H}]\big) &\longmapsto [\mathbf{E}\otimes\mathbf{G}]+[\mathbf{F}\otimes\mathbf{H}]-[\mathbf{E}\otimes\mathbf{H}]-[\mathbf{F}\otimes\mathbf{G}]. \end{aligned} \tag{17.6}$$

La asociatividad, la conmutatividad y la distributividad se deducen de los isomorfismos canónicos correspondientes para haces. La clase del haz trivial de rango uno es la unidad. En consecuencia, $K^0(X)$ es un anillo conmutativo.

Si $f\colon Y\to X$ es continuo entre espacios compactos y Hausdorff, el pullback satisface

$$f^*(\mathbf{E}\oplus\mathbf{F})\cong f^*\mathbf{E}\oplus f^*\mathbf{F}, \qquad f^*(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F})\cong f^*\mathbf{E}\otimes f^*\mathbf{F}.$$

Por lo tanto define un homomorfismo de anillos

$$f^*\colon K^0(X)\longrightarrow K^0(Y), \qquad f^*([\mathbf{E}]-[\mathbf{F}])=[f^*\mathbf{E}]-[f^*\mathbf{F}].$$

Las identidades

$$(f\circ g)^* = g^*\circ f^*, \qquad \mathrm{Id}_X^* = \mathrm{Id}_{K^0(X)}$$

se verifican primero en haces y luego en diferencias. Así, $K^0$ es un funtor contravariante.

**Proposición 17.1.5.** (Invariancia por homotopía) Si $f_0, f_1\colon Y\to X$ son mapeos homotópicos entre espacios compactos y Hausdorff, entonces

$$f_0^* = f_1^*\colon K^0(X)\longrightarrow K^0(Y).$$

En particular, una equivalencia homotópica induce un isomorfismo en $K^0$.

*Demostración.* Sea $H\colon Y\times[0,1]\to X$ una homotopía de $f_0$ a $f_1$. El teorema de invariancia homotópica de los haces vectoriales del Apéndice A da

$$(H^*\mathbf{E})|_{Y\times\{0\}}\cong(H^*\mathbf{E})|_{Y\times\{1\}}$$

para todo haz $\mathbf{E}\to X$. Por consiguiente, $f_0^*[\mathbf{E}]=f_1^*[\mathbf{E}]$. Como las clases de haces generan $K^0(X)$, los dos homomorfismos coinciden en todo el grupo. □

## 17.2 Grupos reducidos, pares y soporte compacto

Sea $(X,x_0)$ un espacio compacto y Hausdorff con punto base. La inclusión $i\colon\{x_0\}\hookrightarrow X$ induce el homomorfismo rango en el punto base

$$i^*\colon K^0(X)\longrightarrow K^0(\{x_0\})\cong\mathbb{Z}.$$

**Definición 17.2.1.** ($K$–teoría reducida) Se define

$$\widetilde{K}^0(X):=\ker\bigl(i^*\colon K^0(X)\to\mathbb{Z}\bigr).$$

Como el mapeo constante $r\colon X\to\{x_0\}$ satisface $i^*r^*=I$, se obtiene la descomposición natural

$$K^0(X)\cong\widetilde{K}^0(X)\oplus\mathbb{Z}.$$

Sea ahora $A\subseteq X$ un subespacio cerrado no vacío y sea $X/A$ el espacio apuntado que se obtiene al colapsar $A$ a un punto.

**Definición 17.2.2.** ($K$–teoría relativa) El grupo relativo del par $(X,A)$ es

$$K^0(X,A):=\widetilde{K}^0(X/A).$$

Si $A=\varnothing$, se adopta la convención $K^0(X,\varnothing)=K^0(X)$.

La descripción por triples hace visible el símbolo de un operador y es válida para un cerrado de un espacio compacto Hausdorff. En particular, cubre los pares formados por un haz de discos y su haz de esferas, así como sus productos con espacios de parámetros compactos Hausdorff.

**Definición 17.2.3.** (Triple relativo) Un triple sobre $(X,A)$ consta de dos haces complejos $\mathbf{E},\mathbf{F}\to X$ y un isomorfismo

$$\alpha\colon\mathbf{E}|_A\longrightarrow\mathbf{F}|_A.$$

Escribiremos $(\mathbf{E},\mathbf{F},\alpha)$. La suma directa se define por

$$(\mathbf{E},\mathbf{F},\alpha)\oplus(\mathbf{E}',\mathbf{F}',\alpha'):=(\mathbf{E}\oplus\mathbf{E}',\mathbf{F}\oplus\mathbf{F}',\alpha\oplus\alpha').$$

El grupo de triples se obtiene imponiendo las relaciones siguientes:

(i) triples isomorfos representan la misma clase;

(ii) una homotopía de $\alpha$ a $\alpha'$ a través de isomorfismos sobre $A$ no cambia la clase;

(iii) si $\alpha$ se extiende a un isomorfismo $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ sobre $X$, entonces $(\mathbf{E}, \mathbf{F}, \alpha)$ representa cero;

(iv) si $\alpha : \mathbf{E}|_A \to \mathbf{F}|_A$ y $\beta : \mathbf{F}|_A \to \mathbf{G}|_A$, entonces

$$[(\mathbf{E}, \mathbf{F}, \alpha)] + [(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \beta)] = [(\mathbf{E}, \mathbf{G}, \beta \circ \alpha)]. \tag{17.7}$$

La última relación contiene tanto la existencia de inversos como la cancelación correcta de un haz intermedio. En efecto,

$$-[(\mathbf{E}, \mathbf{F}, \alpha)] = [(\mathbf{F}, \mathbf{E}, \alpha^{-1})]$$

porque la suma de ambas clases es $[(\mathbf{E}, \mathbf{E}, I_{\mathbf{E}|_A})] = 0$. La suma es conmutativa: el isomorfismo que permuta los sumandos se extiende sobre todo $X$, de modo que la permutación no altera la clase. Por lo tanto, las relaciones anteriores producen un grupo abeliano.

**Teorema 17.2.4.** (Modelo por triples) Sea $X$ un espacio compacto Hausdorff y sea $A \subseteq X$ cerrado. El grupo de triples de la Definición 17.2.3 es naturalmente isomorfo a $K^0(X, A)$. Si $A \neq \varnothing$, la suma de triples corresponde, bajo este isomorfismo, a la suma en $\widetilde{K}^0(X/A)$.

*Demostración.* Si $A = \varnothing$, un triple sólo contiene los dos haces y las relaciones son las de la completación de Grothendieck. Supongamos, pues, que $A \neq \varnothing$. Usaremos el complemento estable, el pegado, la invariancia homotópica y la exactitud de $K$–teoría del Apéndice A, todos ellos en la categoría de espacios compactos Hausdorff.

Recordemos primero por qué se puede pegar sobre un cerrado sin suponer que el par sea CW. Un isomorfismo $\alpha : \mathbf{E}|_A \to \mathbf{F}|_A$ se extiende a un isomorfismo en alguna vecindad de $A$. En efecto, el haz $\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ es un sumando de un haz trivial finito por el Teorema A.3.1. Vemos $\alpha$ como una sección de ese haz trivial sobre $A$, extendemos sus componentes a $X$ por el teorema de Tietze y proyectamos sobre el sumando $\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Obtenemos un homomorfismo que coincide con $\alpha$ en $A$. La igualdad de los rangos vale en una vecindad de $A$, y la invertibilidad es abierta en las matrices de ese rango, de modo que el homomorfismo es invertible después de reducir la vecindad. Este argumento, aplicado a una trivialización, es también el que permite descender un haz al cociente; véase [76, Proposición 2.9, pp. 51–52].

Formemos el doble

$$D := X_+ \cup_A X_-,$$

donde $X_+$ y $X_-$ son dos copias de $X$ y se identifican sus copias de $A$ punto a punto. Es compacto y Hausdorff: la relación de equivalencia es cerrada en el compacto Hausdorff $X_+ \coprod X_-$. Denotemos por $r : D \to X$ el mapeo que es la identidad en ambas copias, y por $i_- : X \to D$ la inclusión de la segunda copia. Se tiene $r \circ i_- = \mathrm{Id}_X$ y un homeomorfismo natural $D/X_- \cong X/A$. Sea $q : D \to X/A$ el cociente correspondiente.

La sucesión exacta del Teorema A.4.2, aplicada a $(D, X_-)$, contiene

$$K^1(D) \xrightarrow{i_-^*} K^1(X) \xrightarrow{\partial} \widetilde{K}^0(X/A) \xrightarrow{q^*} K^0(D) \xrightarrow{i_-^*} K^0(X).$$

El primer mapeo es sobreyectivo porque $i_-^* r^* = I$ también en grado uno. Por exactitud, $\partial = 0$, el mapeo $q^*$ es inyectivo y

$$q^* : \widetilde{K}^0(X/A) \xrightarrow{\cong} \ker\bigl(i_-^* : K^0(D) \to K^0(X)\bigr).$$

Así, basta identificar el grupo de triples con este último núcleo.

Dado $(\mathbf{E},\mathbf{F},\alpha)$, peguemos $\mathbf{E}$ sobre $X_+$ y $\mathbf{F}$ sobre $X_-$ mediante $\alpha$ y llamemos $\mathbf{H}_\alpha$ al haz resultante. Su trivialidad local en los puntos del pegado se obtiene extendiendo $\alpha$ a una vecindad de $A$, como acabamos de justificar. Definimos

$$d(\mathbf{E},\mathbf{F},\alpha) := [\mathbf{H}_\alpha] - [r^*\mathbf{F}] \in K^0(D).$$

Esta clase pertenece al núcleo de $i_-^*$, porque ambos haces se restringen a $\mathbf{F}$ en $X_-$. La construcción respeta sumas directas e isomorfismos de triples. Si $\alpha$ se extiende a un isomorfismo $\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ en $X$, éste en $X_+$ y la identidad en $X_-$ dan $\mathbf{H}_\alpha \cong r^*\mathbf{F}$; por tanto, un triple elemental tiene imagen cero.

Una homotopía $(\alpha_t)_{t\in[0,1]}$ de isomorfismos sobre $A$ permite pegar los haces sobre $D\times[0,1]$. El producto es compacto Hausdorff y la extensión desde $A\times[0,1]$ se justifica por el mismo argumento. El Teorema A.3.2 identifica las restricciones del haz pegado en los extremos. Por ello, $d$ no cambia bajo la relación de homotopía.

Verifiquemos también la relación de composición. Sean $\alpha : \mathbf{E}|_A \to \mathbf{F}|_A$ y $\beta : \mathbf{F}|_A \to \mathbf{G}|_A$. Para $0 \le t \le \pi/2$ consideremos los isomorfismos

$$h_t(u,v) := \big(\cos t\,\alpha(u) + \sin t\, v, -\sin t\,\beta\alpha(u) + \cos t\,\beta(v)\big)$$

de $(\mathbf{E}\oplus\mathbf{F})|_A$ a $(\mathbf{F}\oplus\mathbf{G})|_A$. Son invertibles porque se obtienen componiendo $\alpha\oplus I$, la rotación de $\mathbf{F}|_A\oplus\mathbf{F}|_A$ de ángulo $t$, e $I\oplus\beta$. En $t=0$ se tiene $h_0=\alpha\oplus\beta$; en $t=\pi/2$, la composición con el isomorfismo global $(v,w)\mapsto(-w,v)$ de $\mathbf{F}\oplus\mathbf{G}$ a $\mathbf{G}\oplus\mathbf{F}$ convierte $h_{\pi/2}$ en $(\beta\alpha)\oplus I_{\mathbf{F}}$. El pegado y la homotopía dan

$$\mathbf{H}_\alpha \oplus \mathbf{H}_\beta \cong \mathbf{H}_{\beta\alpha}\oplus r^*\mathbf{F}.$$

Al restar las clases de $r^*\mathbf{F}$ y $r^*\mathbf{G}$, obtenemos

$$d(\mathbf{E},\mathbf{F},\alpha) + d(\mathbf{F},\mathbf{G},\beta) = d(\mathbf{E},\mathbf{G},\beta\alpha).$$

En consecuencia, $d$ está bien definido sobre el grupo de triples.

Probemos su sobreyectividad sobre el núcleo de $i_-^*$. Sea $c\in K^0(D)$ con $i_-^*c=0$. Por la Proposición 17.1.4, podemos escribir $c=[\mathbf{V}]-[\underline{\mathbb{C}}_D^N]$. La igualdad $i_-^*c=0$ permite, después de sumar un mismo haz trivial a los dos miembros, elegir una trivialización

$$\tau : \mathbf{V}|_{X_-} \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbb{C}}_{X_-}^N,$$

donde hemos conservado las letras $\mathbf{V}$ y $N$ para los datos estabilizados. Tomemos $\mathbf{E} := \mathbf{V}|_{X_+}$, $\mathbf{F} := \underline{\mathbb{C}}_X^N$ y $\alpha := \tau|_A$. El haz $\mathbf{H}_\alpha$ es isomorfo a $\mathbf{V}$: en $X_+$ se usa la identidad y en $X_-$ se usa $\tau^{-1}$, que coinciden en el pegado. Por tanto, $d(\mathbf{E},\mathbf{F},\alpha)=c$.

Finalmente, supongamos que $d(\mathbf{E},\mathbf{F},\alpha)=0$. La misma proposición proporciona un entero $N$ y un isomorfismo

$$\mathbf{H}_\alpha\oplus\underline{\mathbb{C}}_D^N \cong r^*\mathbf{F}\oplus\underline{\mathbb{C}}_D^N.$$

Sus restricciones a $X_+$ y $X_-$ son isomorfismos

$$a : \mathbf{E}\oplus\underline{\mathbb{C}}_X^N \longrightarrow \mathbf{F}\oplus\underline{\mathbb{C}}_X^N, \qquad b : \mathbf{F}\oplus\underline{\mathbb{C}}_X^N \longrightarrow \mathbf{F}\oplus\underline{\mathbb{C}}_X^N$$

que satisfacen $a|_A = b|_A\circ(\alpha\oplus I)$. Así, $b^{-1}a$ extiende $\alpha\oplus I$ a todo $X$. El triple original, estabilizado por un triple identidad, es elemental y representa cero. Todo elemento del grupo es representable por un triple,

pues la suma es la suma directa y el inverso intercambia los haces. Esto prueba la inyectividad de $d$.
La composición $(q^*)^{-1}d$ es el isomorfismo anunciado. La verificación anterior muestra, además, que las relaciones pueden realizarse mediante estabilizaciones por triples elementales, isomorfismos y homotopías: la relación de composición es precisamente la rotación que acabamos de construir. Para comparar dos triples se aplica el criterio de núcleo cero a la suma del primero con el inverso del segundo.
Todas las construcciones son compatibles con pullbacks. En efecto, un mapeo de pares induce un mapeo de sus dobles que conmuta con las retracciones y los cocientes, y el pullback conmuta con el pegado. La unicidad de la preimagen por $q^*$ da la naturalidad. Para un compacto Hausdorff $\Lambda$, el mismo argumento se aplica a $(X\times\Lambda, A\times\Lambda)$ y a su producto con $[0,1]$; no se requiere una estructura CW en $\Lambda$. □

Pasemos al caso no compacto. Sea $Y$ un espacio localmente compacto, Hausdorff y no compacto. Su compactificación por un punto es

$$Y^+ := Y \cup \{\infty\},$$

donde los entornos de $\infty$ son los complementos de subconjuntos compactos de $Y$. Si $Y$ ya es compacto, se toma la unión disjunta con un punto base.

**Definición 17.2.5.** ($K$–teoría con soporte compacto) Se define

$$K_c^0(Y) := \widetilde{K}^0(Y^+).$$

Cuando $Y$ es el interior de un par compacto de CW, y en particular cuando $Y$ es el espacio total de un haz vectorial sobre una variedad cerrada, una clase puede representarse equivalentemente por un complejo $(\mathbf{E},\mathbf{F},a)$ en el cual $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ son haces sobre $Y$ y

$$a\colon \mathbf{E}\longrightarrow \mathbf{F}$$

es un homomorfismo de haces que resulta invertible fuera de algún compacto $C\subseteq Y$. Se aplican las mismas relaciones que en la Definición 17.2.3, después de agrandar el compacto cuando sea necesario.

La palabra soporte se refiere a la región donde el complejo de dos términos

$$0\longrightarrow \mathbf{E}\xrightarrow{a}\mathbf{F}\longrightarrow 0$$

deja de ser exacto. No se elige una sección con soporte compacto. Si $Y$ es el interior de un espacio compacto $X$ con frontera $A = X\setminus Y$ y el colapso $X/A\to Y^+$ es un homeomorfismo, entonces

$$K_c^0(Y)\cong K^0(X,A). \tag{17.8}$$

Si $f\colon Y\to Z$ es propio, se extiende continuamente a $f^+\colon Y^+\to Z^+$ enviando $\infty$ en $\infty$. El pullback define

$$f^*\colon K_c^0(Z)\longrightarrow K_c^0(Y).$$

La propiedad de ser propio es necesaria: sin ella, la preimagen del soporte compacto de un representante puede no ser compacta.

### 17.2.1 Suspensión y la sucesión exacta

Para un espacio apuntado $X$, su suspensión reducida es

$$\Sigma X := S^1 \wedge X,$$

donde $\wedge$ denota el producto smash. Sólo necesitaremos el grupo impar para escribir la sucesión exacta de un par.

**Definición 17.2.6.** (Grupo $K^1$) Para $X$ compacto y apuntado se define

$$\widetilde{K}^1(X) := \widetilde{K}^0(\Sigma X).$$

Para un espacio compacto no apuntado se fija un punto base disjunto y se pone $K^1(X) := \widetilde{K}^1(X_+)$. Para un espacio localmente compacto,

$$K_c^1(Y) := \widetilde{K}^1(Y^+).$$

Para un par compacto se pone

$$K^1(X,A) := \widetilde{K}^1(X/A).$$

La definición mediante suspensión es compatible con la descripción que se usará al aplicar la periodicidad. En efecto, la Proposición A.4.1 proporciona un isomorfismo natural

$$K_c^1(Y) \cong K_c^0(\mathbb{R} \times Y). \tag{17.9}$$

No se trata de una segunda definición: el homeomorfismo apuntado $(\mathbb{R} \times Y)^+ \cong S^1 \wedge Y^+$ identifica el miembro derecho con la suspensión que aparece en la Definición 17.2.6.

**Teorema 17.2.7.** (Exactitud para un par) Sea $(X,A)$ un par compacto de CW. Existen homomorfismos de conexión para los cuales la sucesión cíclica

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X,A) & \longrightarrow & K^0(X) & \longrightarrow & K^0(A) \\ \uparrow{\scriptstyle \partial} & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ K^1(A) & \longleftarrow & K^1(X) & \longleftarrow & K^1(X,A) \end{array}$$

es exacta. En particular,

$$\operatorname{im}\big(K^0(X,A) \to K^0(X)\big) = \ker\big(K^0(X) \to K^0(A)\big). \tag{17.10}$$

La demostración pertenece a la topología algebraica: identifica los mapeos de conexión con suspensiones de mapeos cociente y usa la periodicidad de Bott para cerrar la sucesión. El enunciado, las hipótesis de cofibración y las referencias de la demostración se incluyen en el Teorema A.4.2 del Apéndice A. Para la construcción elemental del tramo (17.10), véase [21, Ejercicio 10.12(c), pp. 264–265]; para la formulación con soporte compacto, véase [21, §10.4, pp. 266–269].

## 17.3 Producto externo

Sean $X$ y $Y$ compactos y sean $p_X\colon X\times Y\to X$ y $p_Y\colon X\times Y\to Y$ las proyecciones. Para haces $\mathbf{E}\to X$ y $\mathbf{G}\to Y$ definimos

$$\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{G} := p_X^*\mathbf{E}\otimes p_Y^*\mathbf{G}.$$

La fibra sobre $(x,y)$ es $\mathbf{E}_x\otimes\mathbf{G}_y$. La distributividad del producto tensorial da un mapeo bilineal en los monoides de haces y, por la propiedad universal de Grothendieck, un producto externo

$$\boxtimes\colon K^0(X)\otimes_{\mathbb{Z}} K^0(Y)\longrightarrow K^0(X\times Y).$$

En representantes,

$$\begin{aligned}\big([\mathbf{E}]-[\mathbf{F}]\big)\boxtimes\big([\mathbf{G}]-[\mathbf{H}]\big) = {}& [\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{G}]+[\mathbf{F}\boxtimes\mathbf{H}]\\ & -[\mathbf{E}\boxtimes\mathbf{H}]-[\mathbf{F}\boxtimes\mathbf{G}].\end{aligned}\tag{17.11}$$

La fórmula prueba directamente que cambiar cualquiera de los dos representantes por uno establemente equivalente no altera el resultado: un sumando añadido a la parte positiva y a la negativa aparece dos veces con signos opuestos. También prueba la asociatividad. El isomorfismo de intercambio $\mathbf{E}_x\otimes\mathbf{G}_y\to\mathbf{G}_y\otimes\mathbf{E}_x$ da la conmutatividad después de permutar los factores $X$ y $Y$.

**Proposición 17.3.1.** (Producto externo con soporte compacto) Sean $X$ y $Y$ espacios localmente compactos, Hausdorff y paracompactos. Existe un producto bilineal natural

$$\boxtimes\colon K_c^0(X)\otimes_{\mathbb{Z}} K_c^0(Y)\longrightarrow K_c^0(X\times Y).$$

Si $a$ y $b$ admiten representantes cuyos soportes están contenidos en los compactos $C\subseteq X$ y $D\subseteq Y$, respectivamente, entonces $a\boxtimes b$ admite un representante con soporte contenido en $C\times D$.

*Demostración.* La existencia, la bilinealidad y la naturalidad son las propiedades topológicas del producto con soporte compacto formuladas en el Teorema A.4.2. En el modelo por compactificaciones, el producto reducido sobre $X^+\times Y^+$ se anula en los dos ejes y desciende al producto smash $X^+\wedge Y^+\cong (X\times Y)^+$.
En el modelo por complejos, cada factor es exacto fuera de $C$ o de $D$. El producto graduado de los dos complejos es contráctil si al menos uno de ellos es exacto; por lo tanto sólo puede dejar de ser exacto sobre $C\times D$. Esto prueba la afirmación acerca del soporte. □

Esta construcción coincide con la de [21, Teorema 10.16, pp. 267–268]. En particular, la clase de Bott sobre $\mathbb{R}^2$ podrá multiplicarse externamente por una clase sobre cualquier espacio localmente compacto.

## 17.4 La clase de un símbolo elíptico

Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave cerrada. Denotemos por $\pi\colon T^*M\to M$ la proyección y por

$$B^*M := \{(x,\xi)\in T^*M \mid \|\xi\|_{\mathbf{g}}\le 1\},\qquad S^*M := \{(x,\xi)\in T^*M \mid \|\xi\|_{\mathbf{g}} = 1\}$$

los haces cotangentes de discos y esferas. El mapeo radial

$$\rho\colon T^*M \longrightarrow \operatorname{int}(B^*M),$$
$$(x,\xi) \longmapsto \left(x, \frac{\xi}{\sqrt{1+\|\xi\|_{\mathbf{g}}^2}}\right)$$

es un difeomorfismo. En consecuencia,

$$K_c^0(T^*M) \cong K^0(B^*M, S^*M). \tag{17.12}$$

Sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces complejos y

$$P \in \Psi_{\mathrm{cl}}^m(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$$

un operador elíptico clásico. Por la Definición 15.3.4,

$$\sigma_m^{\Psi}(P)(x,t\xi) = t^m \sigma_m^{\Psi}(P)(x,\xi), \qquad t>0,$$

y la elipticidad afirma que este homomorfismo de haces es invertible cuando $\xi \neq 0$. En particular, su restricción a $S^*M$ es un isomorfismo.

**Definición 17.4.1.** (Clase del símbolo) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos suaves de rango finito y sea $P \in \Psi_{\mathrm{cl}}^m(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ elíptico. La **clase $K$–teórica del símbolo** de $P$ es

$$[\sigma(P)] := \left[\pi^*\mathbf{E}, \pi^*\mathbf{F}, \sigma_m^{\Psi}(P)|_{S^*M}\right] \in K^0(B^*M,S^*M) \cong K_c^0(T^*M). \tag{17.13}$$

La notación no conserva el orden $m$: la clase sólo registra el isomorfismo sobre las direcciones cotangentes no nulas. Para un operador diferencial, la identidad

$$\sigma_m^{\Psi}(P) = i^m \sigma_m(P)$$

de (15.8) no cambia la clase. En efecto, $i^m \in \mathbb{C}^\times$ se une con 1 por un camino dentro de $\mathbb{C}^\times$, y la invariancia por homotopía de los triples aplica.

**Proposición 17.4.2.** (Independencia de las elecciones) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos suaves de rango finito y sea $P \in \Psi_{\mathrm{cl}}^m(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ un operador elíptico clásico. La clase (17.13) no depende de la métrica usada para definir $B^*M$ y $S^*M$, después de efectuar la identificación canónica con $K_c^0(T^*M)$. Tampoco cambia al sustituir el símbolo por otro símbolo elíptico homotópico a través de símbolos elípticos.

*Demostración.* Sean $\mathbf{g}_0$ y $\mathbf{g}_1$ dos métricas. Para cada $(x,\xi) \neq 0$, el rayo positivo $\{(x,t\xi) \mid t>0\}$ corta una sola vez cada esfera unitaria. El mapeo radial

$$(x,\xi) \in S_{\mathbf{g}_0}^*M \longmapsto \left(x, \frac{\xi}{\|\xi\|_{\mathbf{g}_1}}\right) \in S_{\mathbf{g}_1}^*M$$

se extiende a un homeomorfismo de los haces de discos, conserva la sección nula y es isotópico, a través de reescalamientos radiales positivos, a la identificación inducida por la identidad de $T^*M$. La homogeneidad

del símbolo hace compatibles los dos isomorfismos de frontera. Los triples resultantes determinan, por lo tanto, la misma clase en $K_c^0(T^*M)$.
Si $a_t$ es una familia continua de símbolos invertibles sobre $S^*M$, el triple sobre $(B^*M\times[0,1], S^*M\times[0,1])$ restringe en los extremos a los triples definidos por $a_0$ y $a_1$. La invariancia homotópica de la $K$–teoría relativa identifica sus clases. □

El soporte compacto también puede describirse mediante un símbolo sobre todo el haz cotangente. El símbolo normalizado

$$a(x,\xi) := \|\xi\|_{\mathbf{g}}^{-m}\sigma_m^{\Psi}(P)(x,\xi), \qquad \xi\neq 0,$$

es homogéneo de grado cero, pero todavía no define un homomorfismo de haces sobre la sección nula. Elegimos $\chi\in C^\infty([0,\infty))$ con $\chi=0$ para $r\le\varepsilon$ y $\chi=1$ para $r\ge 2\varepsilon$, y ponemos

$$\widetilde{a}(x,\xi)=\begin{cases}\chi(\|\xi\|_{\mathbf{g}})\|\xi\|_{\mathbf{g}}^{-m}\sigma_m^{\Psi}(P)(x,\xi), & \xi\neq 0,\\ 0, & \xi=0.\end{cases}$$

Como $\widetilde{a}$ se anula en una vecindad de la sección nula, es suave en todo $T^*M$; fuera del disco de radio $2\varepsilon$ coincide con $a$ y es invertible. El complejo $(\pi^*\mathbf{E},\pi^*\mathbf{F},\widetilde{a})$ representa la clase del símbolo. Dos cortes o dos radios se unen mediante una homotopía de cortes, sin perder la invertibilidad fuera de un disco común.

**Teorema 17.4.3.** (Realización por símbolos elípticos) Sea $M$ una variedad suave cerrada. Para toda clase

$$\kappa\in K_c^0(T^*M)$$

existen haces complejos suaves $\mathbf{E},\mathbf{F}\to M$ y un operador

$$P\in\Psi_{\mathrm{cl}}^0(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$$

elíptico tal que $[\sigma(P)]=\kappa$.

*Demostración.* Mediante (17.12), representamos $\kappa$ por un triple $(\mathbf{V},\mathbf{W},\alpha)$ sobre $(B^*M,S^*M)$. La proyección $\pi\colon B^*M\to M$ y la sección nula $\mathbf{s}\colon M\to B^*M$ son inversas por homotopía, pues

$$H_t(x,\xi)=(x,t\xi),\qquad 0\le t\le 1,$$

contrae cada disco sobre su centro. La invariancia homotópica de los haces da isomorfismos

$$\mathbf{V}\cong\pi^*\mathbf{E},\qquad \mathbf{W}\cong\pi^*\mathbf{F},\qquad \mathbf{E}:=\mathbf{s}^*\mathbf{V},\quad \mathbf{F}:=\mathbf{s}^*\mathbf{W}.$$

El teorema de suavización de haces sobre variedades permite elegir estructuras suaves en $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ y tomar suaves los dos isomorfismos anteriores. Este resultado se formula en el Apéndice A. Fijamos métricas hermitianas $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$ y usamos en $\operatorname{Hom}(\pi^*\mathbf{E},\pi^*\mathbf{F})$ la norma operatorial inducida. Tras transportar $\alpha$, obtenemos un isomorfismo continuo

$$\alpha\colon \pi^*\mathbf{E}|_{S^*M}\longrightarrow\pi^*\mathbf{F}|_{S^*M}.$$

Como $S^*M$ es compacto,

$$\delta := \inf_{(x,\xi)\in S^*M} \|\alpha(x,\xi)^{-1}\|^{-1}_{\mathrm{Hom}(\mathbf{F}_x,\mathbf{E}_x)} > 0.$$

Elegimos una aproximación suave $\alpha_1$ tal que

$$\sup_{(x,\xi)\in S^*M} \|\alpha_1(x,\xi) - \alpha(x,\xi)\|_{\mathrm{Hom}(\mathbf{E}_x,\mathbf{F}_x)} < \delta.$$

Para $\alpha_t := \alpha + t(\alpha_1 - \alpha)$ se tiene

$$\|\alpha(x,\xi)^{-1}(\alpha_t(x,\xi) - \alpha(x,\xi))\|_{\mathrm{End}(\mathbf{E}_x)} < 1.$$

La serie de Neumann muestra que $\alpha_t$ es invertible. Por lo tanto, $\alpha$ y $\alpha_1$ definen triples homotópicos; reemplazamos $\alpha$ por $\alpha_1$.
Extendemos $\alpha$ a $T^*M \setminus 0_M$ por homogeneidad de grado cero:

$$a_0(x,\xi) := \alpha\left(x, \frac{\xi}{\|\xi\|_{\mathbf{g}}}\right).$$

Esta sección es suave e invertible. La suprayectividad de la sucesión exacta del símbolo principal, Teorema 15.3.7, proporciona un operador clásico $P \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F})$ con $\sigma^{\Psi}_0(P) = a_0$. Como $a_0$ es invertible en toda dirección no nula, $P$ es elíptico y su triple de símbolo es el triple que representa $\kappa$. □

La suavización usada en la prueba es un resultado de aproximación de mapeos continuos entre haces sobre una variedad compacta. Su formulación y su referencia topológica se incluyen en el Apéndice A. El paso analítico, la cuantización de $a_0$, ya fue demostrado en el Capítulo 15. La reducción topológica que permite representar los dos haces del triple como pullbacks y la realización posterior se formulan también en [21, Ejercicio 11.4, pp. 279–280].

## 17.5 Operaciones con clases de símbolos

Las reglas del cálculo simbólico se traducen en identidades exactas en $K^0_c(T^*M)$. Las probaremos en el modelo por triples, siguiendo los haces y los homomorfismos de cada construcción.

**Proposición 17.5.1.** (Suma y estabilización) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{E}',\mathbf{F}',\mathbf{G} \to M$ haces vectoriales complejos suaves de rango finito. Sean

$$P \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E},\mathbf{F}), \qquad Q \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E}',\mathbf{F}')$$

operadores elípticos del mismo orden. Entonces

$$[\sigma(P \oplus Q)] = [\sigma(P)] + [\sigma(Q)].$$

Para un operador elíptico de orden arbitrario y un haz $\mathbf{G} \to M$, la estabilización por el triple identidad satisface

$$[\sigma(P)] + [(\pi^*\mathbf{G}, \pi^*\mathbf{G}, I_{\pi^*\mathbf{G}})] = [\sigma(P)].$$

Después de reducir $P$ al orden cero, esta igualdad está realizada por la suma directa con el operador $I_{\mathbf{G}}$.

*Demostración.* La primera igualdad es la definición de la suma de triples:

$$(\pi^*\mathbf{E}, \pi^*\mathbf{F}, \sigma_m^\Psi(P)|_{S^*M}) \oplus (\pi^*\mathbf{E}', \pi^*\mathbf{F}', \sigma_m^\Psi(Q)|_{S^*M}) = (\pi^*(\mathbf{E}\oplus\mathbf{E}'), \pi^*(\mathbf{F}\oplus\mathbf{F}'), \sigma_m^\Psi(P)|_{S^*M} \oplus \sigma_m^\Psi(Q)|_{S^*M}).$$

El triple $(\pi^*\mathbf{G}, \pi^*\mathbf{G}, I)$ se extiende como un isomorfismo sobre todo $B^*M$ y, por ello, representa cero. Para justificar la última afirmación a nivel de operadores, fijemos un laplaciano covariante no negativo $L_{\mathbf{E}}$. El Teorema 15.7.9 muestra que

$$\Lambda_{\mathbf{E}}^{-m} := (I + L_{\mathbf{E}})^{-\frac{m}{2}} \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{-m}(M; \mathbf{E}, \mathbf{E})$$

es elíptico y que su símbolo principal sobre $S^*M$ es la identidad. Así,

$$P^{(0)} := P\Lambda_{\mathbf{E}}^{-m} \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{0}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$$

tiene la misma clase de símbolo que $P$, y $P^{(0)} \oplus I_{\mathbf{G}}$ realiza la estabilización indicada. □

**Proposición 17.5.2.** (Composición) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \to M$ haces vectoriales complejos suaves de rango finito. Sean

$$P \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{m}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F}), \qquad Q \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{\ell}(M; \mathbf{F}, \mathbf{G})$$

operadores elípticos. Entonces

$$[\sigma(QP)] = [\sigma(P)] + [\sigma(Q)]. \tag{17.14}$$

*Demostración.* El Teorema 15.3.7 da

$$\sigma_{m+\ell}^\Psi(QP) = \sigma_\ell^\Psi(Q) \circ \sigma_m^\Psi(P).$$

Aplicando la relación de composición (17.7) con

$$\alpha = \sigma_m^\Psi(P)|_{S^*M}, \qquad \beta = \sigma_\ell^\Psi(Q)|_{S^*M},$$

se obtiene exactamente (17.14). □

**Proposición 17.5.3.** (Adjunto) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos suaves de rango finito, fijemos métricas hermitianas en ellos y una densidad positiva sobre $M$. Si $P \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{m}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$ es elíptico, entonces

$$[\sigma(P^*)] = -[\sigma(P)].$$

*Demostración.* Escribamos

$$a := \sigma_m^\Psi(P)|_{S^*M} \colon \pi^*\mathbf{E} \longrightarrow \pi^*\mathbf{F}.$$

Por la regla del adjunto simbólico, $\sigma_m^\Psi(P^*)|_{S^*M} = a^*$. La inversa de la clase del triple $(\pi^*\mathbf{E}, \pi^*\mathbf{F}, a)$ está representada por $(\pi^*\mathbf{F}, \pi^*\mathbf{E}, a^{-1})$. Basta comparar $a^*$ con $a^{-1}$.

El endomorfismo $a^*a$ de $\pi^*\mathbf{E}$ es positivo definido. El cálculo funcional matricial depende suavemente del punto de $S^*M$, por lo que

$$h_t := (a^*a)^{-t}a^*, \qquad 0 \le t \le 1,$$

es una homotopía suave a través de isomorfismos $\pi^*\mathbf{F} \to \pi^*\mathbf{E}$. En los extremos,

$$h_0 = a^*, \qquad h_1 = (a^*a)^{-1}a^* = a^{-1}.$$

La invariancia homotópica de los triples concluye la prueba. □

**Proposición 17.5.4.** (Homotopía y términos de orden inferior) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to M$ haces vectoriales complejos suaves de rango finito y sea $P_t \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$, $0 \le t \le 1$, una familia continua cuyos símbolos principales forman una familia de isomorfismos sobre $S^*M$. Entonces

$$[\sigma(P_0)] = [\sigma(P_1)].$$

En particular, si $R \in \Psi^{m-1}_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}, \mathbf{F})$ y $P$ es elíptico, entonces

$$[\sigma(P + R)] = [\sigma(P)].$$

*Demostración.* La primera afirmación es la invariancia por homotopía del triple de símbolos. Para la segunda,

$$\sigma^{\Psi}_m(P + R) = \sigma^{\Psi}_m(P),$$

por la exactitud del símbolo principal; en realidad, los dos triples son idénticos. □

La combinación de la realización y de estas identidades muestra por qué $K^0_c(T^*M)$ es el dominio natural de cualquier invariante aditivo de operadores elípticos que sea estable por homotopía.

**Lema 17.5.5.** (Suavización relativa de homotopías invertibles) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \longrightarrow M$ haces suaves de rango finito y sea

$$a\colon S^*M \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{Iso}(\pi^*\mathbf{E}, \pi^*\mathbf{F})$$

una homotopía continua cuyos extremos son suaves. Existe una homotopía suave $\widetilde{a}$, con los mismos extremos, formada enteramente por isomorfismos. Además, $a$ y $\widetilde{a}$ están unidas, relativamente a los extremos, por una homotopía de isomorfismos.

La versión relativa de esta suavización aparece también en [21, Ejercicio 12.13, pp. 291–292].

*Demostración.* Reparametrizamos primero el intervalo mediante una función que es constante cerca de 0 y de 1. La homotopía resultante es suave en un entorno de los extremos. El teorema de aproximación de Whitney relativo, aplicado a la sección continua del haz de homomorfismos sobre la variedad compacta $S^*M \times [0,1]$, produce un mapeo suave $\widetilde{a}$, igual a $a$ cerca de los extremos y uniformemente tan próxima a ella como se desee.
Fijadas métricas en los haces, la compacidad da

$$\mu := \min_{(x,\xi,t) \in S^*M \times [0,1]} \|a(x,\xi,t)^{-1}\|^{-1}_{\mathrm{op}(\mathbf{F}_x, \mathbf{E}_x)} > 0.$$

Escogemos la aproximación con $\|\widetilde{a}-a\|_{C^0(S^*M\times[0,1],\mathrm{Hom}(\pi^*\mathbf{E},\pi^*\mathbf{F}))}<\frac{\mu}{2}$. Entonces

$$(1-\theta)a+\theta\widetilde{a}=a\left[I+\theta a^{-1}(\widetilde{a}-a)\right],\qquad 0\le\theta\le 1,$$

es invertible por la serie de Neumann. Este segmento es fijo cerca de los extremos y prueba todas las afirmaciones. □

**Teorema 17.5.6.** (Índice analítico sobre la clase del símbolo) Sea $M$ una variedad suave cerrada. Existe un único homomorfismo

$$\mathrm{ind_a}\colon K_c^0(T^*M)\longrightarrow\mathbb{Z} \tag{17.15}$$

tal que, para todo operador pseudodiferencial clásico elíptico $P$,

$$\mathrm{ind_a}([\sigma(P)])=\mathrm{ind}\,P.$$

*Demostración.* Por el Teorema 17.4.3, cada clase es el símbolo de algún operador elíptico. Para un triple suave $(\pi^*\mathbf{E},\pi^*\mathbf{F},a)$ sobre $(B^*M,S^*M)$ definimos

$$I(\mathbf{E},\mathbf{F},a):=\mathrm{ind}\,\mathrm{Op}(a),$$

donde $\mathrm{Op}(a)$ es cualquier cuantización elíptica de orden cero con símbolo principal $a$. Dos cuantizaciones difieren por un operador de orden $-1$, que es compacto entre los espacios $L^2$ correspondientes por Rellich; el Corolario 16.5.2 muestra que $I$ no depende de la cuantización. Debemos comprobar que este entero respeta las relaciones del modelo por triples.

Consideremos primero dos triples isomorfos, después de las estabilizaciones que formen parte del isomorfismo. Escribámoslos como

$$(\pi^*\mathbf{E},\pi^*\mathbf{F},a),\qquad(\pi^*\mathbf{E}',\pi^*\mathbf{F}',a')$$

sobre $(B^*M,S^*M)$. Existen isomorfismos $U\colon\pi^*\mathbf{E}\to\pi^*\mathbf{E}'$ y $V\colon\pi^*\mathbf{F}\to\pi^*\mathbf{F}'$ sobre $B^*M$ tales que $a'U=Va$ sobre $S^*M$. Aunque $U$ y $V$ pueden depender de la covariable, la contracción radial define

$$U_t(x,\xi)=U(x,t\xi),\qquad V_t(x,\xi)=V(x,t\xi),\qquad 0\le t\le 1.$$

Por lo tanto,

$$a_t:=V_t^{-1}a'U_t$$

es una homotopía de símbolos invertibles sobre $S^*M$ que une $a$ con $V_0^{-1}a'U_0$. En el segundo extremo $U_0$ y $V_0$ son pullbacks de isomorfismos continuos de haces sobre $M$. El Teorema A.4.4 permite aproximarlos uniformemente por isomorfismos suaves $\widehat{U_0}$ y $\widehat{V_0}$; una aproximación menor que el mínimo de sus valores singulares conserva la invertibilidad y los segmentos rectos dan homotopías de isomorfismos. Concatenamos estos segmentos con $(a_t)$. Los dos extremos de la homotopía resultante son ahora suaves, así que el Lema 17.5.5 permite sustituirla por una homotopía suave de símbolos. Una realización del extremo $\widehat{V_0}^{-1}a'\widehat{U_0}$ se obtiene de una realización de $a'$ componiéndola a izquierda y derecha con los isomorfismos de haces; estas composiciones son operadores invertibles de orden cero y no cambian el índice. Así, un isomorfismo de triples conserva el entero asociado, incluso cuando sus isomorfismos iniciales dependen de $\xi$.

Una homotopía continua del isomorfismo de frontera se suaviza relativamente a sus extremos mediante el

Lema 17.5.5 y se cuantiza, por la suprayectividad del símbolo principal, como una familia de operadores elípticos: se fijan una sola cubierta, una sola partición de la unidad y los mismos cortes en la construcción del Teorema 15.3.7; la fórmula de cuantización es lineal en el símbolo y conserva la continuidad respecto del parámetro. El Corolario 16.5.2 da la constancia de su índice. Tras reducir todos los operadores al orden cero como en la Proposición 17.5.1, la suma directa de triples corresponde a la suma directa de operadores. La Proposición 16.2.2 prueba la aditividad.

Supongamos que el isomorfismo de frontera $\alpha\colon \pi^*\mathbf{E}|_{S^*M} \to \pi^*\mathbf{F}|_{S^*M}$ se extiende a un isomorfismo $A\colon \pi^*\mathbf{E} \to \pi^*\mathbf{F}$ sobre $B^*M$. La contracción radial muestra que $A|_{S^*M}$ es homotópico, a través de isomorfismos, al pullback de $A|_{0_M}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$. Este isomorfismo puede ser sólo continuo. Lo aproximamos uniformemente por un isomorfismo suave $\widehat{A}_0\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$; si el error es menor que el mínimo de los valores singulares de $A|_{0_M}$, el segmento entre ambos permanece invertible. Concatenamos ese segmento con la contracción radial y aplicamos el Lema 17.5.5. El extremo suave $\pi^*\widehat{A}_0$ es el símbolo constante de la multiplicación por $\widehat{A}_0$, cuyo índice es cero. Por la invariancia homotópica, cualquier realización de ese triple tiene índice cero. Así se respeta la tercera relación de la Definición 17.2.3.

Finalmente, la relación de composición se respeta porque, para $P\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ y $Q\colon \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ elípticos,

$$\operatorname{ind}(QP) = \operatorname{ind} Q + \operatorname{ind} P$$

por la Proposición 16.2.2, mientras que sus símbolos satisfacen (17.14). Por consiguiente, el índice desciende al cociente definido por los triples y determina el homomorfismo (17.15). La realización de todas las clases también prueba la unicidad. □

La periodicidad de Bott y el isomorfismo de Thom permitirán construir, sobre el mismo grupo, el homomorfismo topológico.

# 18

# Periodicidad de Bott, isomorfismo de Thom e índice euclidiano

La clase del símbolo construida en el Capítulo 17 pertenece a un grupo con soporte compacto,

$$[\sigma(P)] \in K_c^0(T^*M).$$

Para convertirla en un entero hacen falta dos operaciones. La periodicidad de Bott identifica la $K$–teoría de un espacio con la de su producto por $\mathbb{R}^2$, y el isomorfismo de Thom permite efectuar esa identificación fibra a fibra en un haz vectorial complejo. Ambas operaciones son topológicas; el trabajo analítico consiste en probar que la cuantización de una clase y el índice de Fredholm se comportan de la misma manera.

El recorrido comienza con las convenciones de orientación que determinan los signos. Después se construyen los isomorfismos de Thom y los morfismos directos asociados a encajes, se calcula el índice de dos operadores modelo y se demuestra la fórmula euclidiana. El resultado final será

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P) = (-1)^n \alpha_n\big([\sigma(P)]\big), \qquad P \in \operatorname{Ell}_c^0(\mathbb{R}^n),$$

donde $\alpha_n : K_c^0(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es la iteración del isomorfismo de Bott con la normalización que se precisará a continuación. Esta es la forma de [21, Teorema 11.5, pp. 281–282] compatible con las convenciones de Fourier del Capítulo 15.

**Bott y Thom: transportar información topológica**

La periodicidad descubierta por Raoul Bott reveló una repetición profunda en los grupos de homotopía de los grupos clásicos y dio a la $K$–teoría una estructura extraordinariamente rígida. El isomorfismo de Thom permite aplicar esa periodicidad fibra a fibra en un haz vectorial orientado en el sentido adecuado. En la prueba del índice, ambas ideas sirven para empujar una clase localizada desde el cotangente de una variedad hasta un espacio euclidiano, donde el índice puede calcularse con operadores modelo.

## 18.1 La clase de Bott y las convenciones de orientación

Identificamos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ mediante

$$(x,\xi)\longmapsto x+i\xi$$

y orientamos $\mathbb{R}^2$ por la base ordenada $(\partial_x,\partial_\xi)$. Su compactificación por un punto es $(\mathbb{R}^2)^+\cong S^2$. Escribimos

$$S^2=D_0\cup_{S^1}D_\infty$$

como unión de dos discos cerrados. Si $m\in\mathbb{Z}$, denotamos por $\mathbf{E}_m\longrightarrow S^2$ el haz lineal obtenido al identificar las fibras triviales sobre el ecuador mediante

$$(z,v)_0\sim(z,z^m v)_\infty,\qquad z\in S^1,\quad v\in\mathbb{C}.$$

La fibra de $\mathbf{E}_m$ sobre el punto añadido al infinito se identifica con $\mathbb{C}$. Por lo tanto, la diferencia de dos haces de rango uno define una clase reducida.

**Definición 18.1.1.** (Clase de Bott) La **clase de Bott** empleada en este libro es

$$b:=[\mathbf{E}_{-1}]-[\underline{\mathbb{C}}]\in\widetilde{K}^0(S^2)=K_c^0(\mathbb{R}^2).$$

Si $X$ es localmente compacto, se escribe

$$b\boxtimes a\in K_c^0(\mathbb{R}^2\times X),\qquad a\in K_c^0(X),$$

para el producto externo de la Proposición 17.3.1.

La elección de $\mathbf{E}_{-1}$, y no de $\mathbf{E}_1$, es esencial para el signo del índice. En efecto, $\mathbf{E}_1\otimes\mathbf{E}_{-1}$ es trivial y el cálculo del anillo de la esfera da $b^2=0$; véase [76, Teorema 2.2, pp. 41–50]. Como $[\mathbf{E}_{-1}]=1+b$, se obtiene

$$[\mathbf{E}_1]=[\mathbf{E}_{-1}]^{-1}=(1+b)^{-1}=1-b.$$

Por lo tanto, la clase opuesta $-b=[\mathbf{E}_1]-[\underline{\mathbb{C}}]$ es también un generador de $K_c^0(\mathbb{R}^2)$, pero intercambiar ambos generadores cambia todos los signos impares que aparecerán más adelante.

Conviene reunir las convenciones que se mantendrán en todo el argumento:

$$(x,\xi)\longmapsto x+i\xi,\qquad J(u,v)=(-v,u),\qquad b=[\mathbf{E}_{-1}]-[\underline{\mathbb{C}}],\qquad \lambda_{\mathbb{C}}=-b. \tag{18.1}$$

Con esta elección, el operador localizado que representa $b$ tendrá índice $-1$, mientras que el oscilador normal que representa $\lambda_{\mathbb{C}}$ tendrá índice $+1$. Esta diferencia no es una corrección posterior de signo, sino la consecuencia de que ambos operadores representan generadores opuestos.

El resultado topológico profundo que se usará está formulado, con sus hipótesis de local compacidad y naturalidad, en el Teorema A.5.1. Una demostración completa se encuentra en [21, Teoremas 10.20 y 10.22, pp. 270–272].

**Teorema 18.1.2.** (Periodicidad compleja de Bott) Para todo espacio localmente compacto $X$ existe un iso-

morfismo natural

$$\alpha_X : K_c^0(\mathbb{R}^2 \times X) \longrightarrow K_c^0(X)$$

cuya inversa es

$$\beta_X : K_c^0(X) \longrightarrow K_c^0(\mathbb{R}^2 \times X), \qquad \beta_X(a) = b \boxtimes a.$$

En particular,

$$\alpha_{\{*\}}(b) = 1 \in K^0(\{*\}) = \mathbb{Z}.$$

Los isomorfismos son compatibles con productos externos: si $Y$ es otro espacio localmente compacto, $u \in K_c^0(\mathbb{R}^2 \times X)$ y $v \in K_c^0(Y)$, entonces

$$\alpha_{X\times Y}(u \boxtimes v) = \alpha_X(u) \boxtimes v. \tag{18.2}$$

No se reproduce aquí la demostración topológica de la periodicidad. Lo que sí se necesitará de ella puede obtenerse inmediatamente y conviene registrarlo.

**Corolario 18.1.3.** (Iteración de Bott) Para $n \in \mathbb{N}$ existe un isomorfismo

$$\alpha_{n,X} : K_c^0(\mathbb{R}^{2n} \times X) \longrightarrow K_c^0(X)$$

obtenido al aplicar $\alpha$ sucesivamente a los $n$ factores $\mathbb{R}^2$. Su inversa es

$$a \longmapsto b^{\boxtimes n} \boxtimes a, \qquad b^{\boxtimes n} := \underbrace{b \boxtimes \cdots \boxtimes b}_{n \text{ factores}}.$$

En particular,

$$K_c^0(\mathbb{R}^{2n}) = \mathbb{Z}\, b^{\boxtimes n}, \qquad \alpha_n(b^{\boxtimes n}) = 1,$$

donde $\alpha_n := \alpha_{n,\{*\}}$.

*Demostración.* La afirmación se obtiene por inducción. Para pasar de $n$ a $n+1$ se usa

$$\mathbb{R}^{2(n+1)} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n}$$

y se aplica primero $\alpha_{\mathbb{R}^{2n}\times X}$ y después $\alpha_{n,X}$. La fórmula para la inversa resulta de (18.2) y de la asociatividad del producto externo. □

La periodicidad también determina los grupos de $K$–teoría con soporte compacto en dimensión impar. Mediante el isomorfismo natural (17.9), la definición por suspensión del capítulo anterior puede escribirse como

$$K_c^1(X) \cong K_c^0(\mathbb{R} \times X).$$

La periodicidad afirma entonces que $K_c^{j+2}(X) \cong K_c^j(X)$. En particular,

$$K_c^0(\mathbb{R}^{2n+1}) = 0, \qquad K_c^1(\mathbb{R}^{2n+1}) \cong \mathbb{Z}.$$

Sólo se utilizará explícitamente el grado par, porque $T^*\mathbb{R}^n$ tiene dimensión real $2n$.

## 18.2 La clase de Thom

Sea $\pi : \mathbf{V} \longrightarrow X$ un haz vectorial complejo de rango $r$ sobre un espacio compacto y Hausdorff $X$, provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h}_{\mathbf{V}}$. La construcción siguiente es fibra a fibra. Si la base sólo es localmente compacta, la misma construcción define una orientación de Thom que actúa sobre clases de soporte compacto; la clase de orientación por sí sola puede tener soporte no compacto porque su soporte es toda la sección cero.

Para $v \in \mathbf{V}_x$, sea

$$\varepsilon_v : \Lambda^k \mathbf{V}_x \longrightarrow \Lambda^{k+1} \mathbf{V}_x, \qquad \varepsilon_v(\omega) = v \wedge \omega,$$

y sea $\iota_v := \varepsilon_v^*$ su adjunto respecto del producto hermitiano inducido en el álgebra exterior. Las identidades de creación y aniquilación son

$$\varepsilon_v^2 = 0, \qquad \iota_v^2 = 0, \qquad \varepsilon_v \iota_v + \iota_v \varepsilon_v = \|v\|^2 I. \tag{18.3}$$

Definimos

$$c_{\mathbf{V}}(v) := \varepsilon_v - \iota_v : \Lambda^{\mathrm{ev}} \mathbf{V}_x \longrightarrow \Lambda^{\mathrm{odd}} \mathbf{V}_x.$$

Por (18.3),

$$c_{\mathbf{V}}(v)^* c_{\mathbf{V}}(v) = \|v\|^2 I, \qquad c_{\mathbf{V}}(v) c_{\mathbf{V}}(v)^* = \|v\|^2 I. \tag{18.4}$$

En consecuencia, $c_{\mathbf{V}}(v)$ es un isomorfismo si $v \neq 0$ y su inversa es $\|v\|^{-2} c_{\mathbf{V}}(v)^*$.

**Definición 18.2.1.** (Clase de Thom compleja) La **clase de Thom** de $\mathbf{V}$ es la clase con soporte en la sección cero representada por

$$\lambda_{\mathbf{V}} := [\pi^* \Lambda^{\mathrm{ev}} \mathbf{V}, \pi^* \Lambda^{\mathrm{odd}} \mathbf{V}, c_{\mathbf{V}}] \in K_c^0(\mathbf{V}).$$

Equivalentemente, si $B(\mathbf{V})$ y $S(\mathbf{V})$ son los haces de bolas y esferas unitarias, entonces

$$\lambda_{\mathbf{V}} = \chi\big(\pi^* \Lambda^{\mathrm{ev}} \mathbf{V}, \pi^* \Lambda^{\mathrm{odd}} \mathbf{V}; c_{\mathbf{V}}|_{S(\mathbf{V})}\big) \in K^0(B(\mathbf{V}), S(\mathbf{V})).$$

La igualdad (18.4) prueba todos los hechos analíticos y algebraicos necesarios para que la clase esté definida. La afirmación de que esta clase genera la $K$–teoría de cada fibra de manera compatible al variar la base es el contenido topológico del isomorfismo de Thom. Se formula en el Teorema A.5.3; véase también [21, Teorema 12.8, pp. 289–290].

**Teorema 18.2.2.** (Isomorfismo de Thom en $K$–teoría) Sea $\pi : \mathbf{V} \longrightarrow X$ un haz vectorial complejo de rango finito sobre un espacio localmente compacto. El mapeo

$$\mathrm{Th}_{\mathbf{V}} : K_c^0(X) \longrightarrow K_c^0(\mathbf{V}), \qquad \mathrm{Th}_{\mathbf{V}}(a) = \pi^* a \cdot \lambda_{\mathbf{V}},$$

es un isomorfismo. Si $f : Y \longrightarrow X$ es continuo y $f^{-1}(\operatorname{supp} a)$ es compacto, entonces

$$(f_{\mathbf{V}})^* \mathrm{Th}_{\mathbf{V}}(a) = \mathrm{Th}_{f^*\mathbf{V}}(f^* a), \tag{18.5}$$

donde $f_{\mathbf{V}} : f^*\mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ es el mapeo inducido. Si $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ son haces complejos sobre $X$, entonces, bajo la

identificación natural del haz total de $\mathbf{V}\oplus\mathbf{W}$ con el haz $\pi_{\mathbf{V}}^{*}\mathbf{W}$ sobre $\mathbf{V}$,

$$\lambda_{\mathbf{V}\oplus\mathbf{W}} = \lambda_{\mathbf{V}} \boxtimes_X \lambda_{\mathbf{W}}, \qquad \mathrm{Th}_{\mathbf{V}\oplus\mathbf{W}} = \mathrm{Th}_{\pi_{\mathbf{V}}^{*}\mathbf{W}} \circ \mathrm{Th}_{\mathbf{V}}. \tag{18.6}$$

En la base no compacta, la notación $\pi^{*}a\cdot\lambda_{\mathbf{V}}$ significa que se restringe el complejo de Thom a la preimagen de un compacto que contiene $\operatorname{supp} a$. Su soporte queda contenido en la sección cero sobre ese compacto y, por lo tanto, define un elemento de $K_c^0(\mathbf{V})$.

La multiplicatividad de las clases puede verse directamente antes de usar que los mapeos de Thom son isomorfismos. En efecto,

$$\Lambda^{*}(\mathbf{V}\oplus\mathbf{W}) \cong \Lambda^{*}\mathbf{V}\widehat{\otimes}\Lambda^{*}\mathbf{W}$$

como haces $\mathbb{Z}_2$–graduados, y el operador impar correspondiente es

$$c_{\mathbf{V}\oplus\mathbf{W}}(v,w) = c_{\mathbf{V}}(v)\widehat{\otimes}I + \Gamma_{\mathbf{V}}\widehat{\otimes}c_{\mathbf{W}}(w),$$

donde $\Gamma_{\mathbf{V}}$ vale 1 en grado par y $-1$ en grado impar. Los dos sumandos anticonmutan; por ello el cuadrado del adjunto por el operador es

$$\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big)I.$$

Éste es precisamente el complejo producto que representa el miembro derecho de (18.6).

Comprobemos la relación entre las convenciones de Bott y Thom. En una línea compleja trivial usamos la estructura compleja

$$J(u_1,u_2) = (-u_2,u_1).$$

El mapeo $c_{\mathbb{C}}(u_1+iu_2)$ es multiplicación por $u_1+iu_2$ de grado par a grado impar. Con la convención de pegado de la Definición 18.1.1, esta clase es

$$\lambda_{\mathbb{C}} = -b. \tag{18.7}$$

En efecto, al trivializar sobre los discos interior y exterior, el mapeo de transición de la diferencia anterior es $z$, mientras que $b$ fue definido por $z^{-1}$. En consecuencia,

$$\lambda_{\mathbb{C}^r} = (-1)^r b^{\boxtimes r}. \tag{18.8}$$

Esta normalización hará que el operador oscilador asociado a la clase de Thom tenga índice 1 y que el operador asociado a $b$ tenga índice $-1$.

No todo haz vectorial real posee una clase de Thom canónica en $K$–teoría compleja. Para un haz real de rango par se necesita una orientación Spin$^c$; elegida ésta, los haces de espinores $\mathbf{S}^{+}$ y $\mathbf{S}^{-}$ y la multiplicación de Clifford producen una clase

$$[\pi^{*}\mathbf{S}^{+}, \pi^{*}\mathbf{S}^{-}, c(v)] \in K_c^0(\mathbf{V}).$$

Un haz complejo tiene una orientación Spin$^c$ canónica y la clase resultante coincide con la clase exterior anterior. No se aplicará el isomorfismo de Thom directamente a un haz real arbitrario. En el encaje que se usará para el teorema del índice aparecerá, en cambio, la suma de dos copias de un haz real; esa suma posee una estructura compleja canónica y no requiere elegir una estructura Spin$^c$ adicional.

## 18.3 Encajes y extensión por cero

Sea $U \subseteq Z$ un abierto de un espacio localmente compacto. Usaremos la descripción por soportes

$$K_c^0(U) = \varinjlim_{K \Subset U} \mathcal{K}_K^0(U), \tag{18.9}$$

con la notación por complejos invertibles fuera de $K$ introducida en el Apéndice A. Para cada compacto $K \Subset U$, la excisión afirma que la restricción a $U$ y la extensión a $Z$ son isomorfismos inversos. Usaremos el segundo mapeo, que se escribe

$$\mathcal{K}_K^0(U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}_K^0(Z). \tag{18.10}$$

Estas identificaciones conmutan con los morfismos producidos por inclusiones de compactos. Al pasar al límite dirigido definen la extensión por cero

$$e_U : K_c^0(U) \longrightarrow K_c^0(Z). \tag{18.11}$$

Si una clase se representa por un complejo que es elemental fuera de un compacto $K \Subset U$, la imagen es la clase relativa determinada por el mismo soporte $K$ mediante (18.10). Esta descripción evita exigir que los haces del representante se prolonguen de manera individual a todo $Z$. La compatibilidad de excisión con inclusiones da

$$e_V \circ e_U = e_U$$

para abiertos $U \subseteq V \subseteq Z$, entendiendo en el miembro izquierdo la primera extensión de $U$ a $V$ y la segunda de $V$ a $Z$.

Consideremos ahora un encaje suave propio

$$j : X \hookrightarrow Y$$

entre variedades sin frontera. Elegimos métricas y usamos sus isomorfismos musicales para identificar los fibrados cotangentes con los tangentes. El diferencial induce un encaje

$$Tj : TX \hookrightarrow TY.$$

Sea $\nu \longrightarrow X$ el haz normal de $j$, obtenido mediante la métrica elegida en $Y$. Identificamos $X$ con su imagen y escribimos $T_xY = T_xX \oplus \nu_x$. Fijemos una conexión $\nabla^Y$ en $TY$. La proyección tangencial de $\nabla^Y$ induce una conexión $\nabla^X$ en $TX$, y su componente normal define el tensor

$$B_x(w, v) := \left(\nabla^Y_w V\right)^{\perp}, \qquad w, v \in T_xX,$$

donde $V$ es cualquier campo tangente a $X$ con $V(x) = v$. La expresión no depende de $V$: al escribir en un marco tangente un campo que se anula en $x$, los términos que contienen derivadas de sus coeficientes son tangentes y desaparecen al proyectar sobre $\nu_x$. Si $\nabla^Y$ es la conexión de Levi–Civita, $B$ es la segunda forma fundamental.

La Proposición 2.7.26, aplicada a estas dos conexiones, proporciona descomposiciones

$$T_v(TY) \cong T_xY \oplus T_xY, \qquad T_v(TX) \cong T_xX \oplus T_xX, \qquad (x, v) \in TX.$$

La inclusión tangente no es, en general, la inclusión directa de ambos sumandos. Para calcularla, representemos un

vector de $T_v(TX)$ por una curva $v(t) \in T_{x(t)}X$ y pongamos $w = x'(0)$, $z = \nabla^X_{\partial t} v(0)$. La descomposición de la conexión a lo largo de la curva da $\nabla^Y_{\partial t} v(0) = z + B_x(w, v)$. Por tanto, en las coordenadas horizontal–vertical, el diferencial de $Tj$ es

$$T_v(Tj)(w, z) = \big(w, z + B_x(w, v)\big).$$

Consideremos ahora el mapeo lineal

$$F_v : T_xY \oplus T_xY \longrightarrow \nu_x \oplus \nu_x, \qquad F_v(a, b) := \big(a^\perp, b^\perp - B_x(a^\top, v)\big).$$

Es sobreyectivo, pues $F_v(u_1, u_2) = (u_1, u_2)$ para $u_1, u_2 \in \nu_x$. Si $F_v(a, b) = 0$, entonces $a \in T_xX$ y $b = b^\top + B_x(a, v)$, de modo que $(a, b) = T_v(Tj)(a, b^\top)$. Recíprocamente, la fórmula de $T_v(Tj)$ muestra que toda su imagen pertenece al núcleo de $F_v$. Así, $F_v$ induce un isomorfismo del cociente por la imagen de $T_v(Tj)$ con $\nu_x \oplus \nu_x$.

Estos mapeos dependen suavemente de $(x, v)$ y tienen como inversa en el cociente la clase de $(u_1, u_2)$. Identificando el haz normal con ese cociente mediante un complemento ortogonal, obtenemos

$$N(Tj) \cong \pi^*_{TX}(\nu \oplus \nu). \tag{18.12}$$

La identificación depende de la conexión. Si dos conexiones se unen por su segmento afín, las conexiones inducidas, los tensores $B$ y los mapeos $F_v$ dependen suavemente del parámetro y cada $F_v$ induce el isomorfismo anterior. Se obtiene así una homotopía de identificaciones. En el miembro derecho de (18.12) fijamos la estructura compleja

$$J(u_1, u_2) = (-u_2, u_1). \tag{18.13}$$

El primer sumando corresponde a la dirección horizontal y el segundo a la dirección vertical. Fijamos esta estructura $J$ y un entorno tubular $\Phi_J$ de $Tj$; la orientación compleja, el isomorfismo de Thom y la extensión por cero se toman siempre respecto del mismo par $(J, \Phi_J)$. Así, aunque $\nu$ sea un haz real sin orientación Spin$^c$, el haz normal de $TX$ en $TY$ es un haz complejo.

Un entorno tubular proporciona un difeomorfismo

$$\Phi_J : \mathcal{U} \subseteq N(Tj) \longrightarrow \mathcal{V} \subseteq TY$$

entre entornos de las secciones cero. Por excisión, toda clase con soporte compacto en $N(Tj)$ puede representarse dentro de $\mathcal{U}$ después de una dilatación radial. Se compone entonces el isomorfismo de Thom con $\Phi_J$ y con la extensión por cero desde $\mathcal{V}$.

**Definición 18.3.1.** (Morfismo directo de un encaje) El **morfismo directo** asociado a $j$ es

$$j_! : K^0_c(T^*X) \longrightarrow K^0_c(T^*Y), \qquad j_! := e_{\mathcal{V}} \circ (\Phi_J^{-1})^* \circ \mathrm{Th}_{N(Tj)}, \tag{18.14}$$

donde se han usado las métricas para identificar tangentes y cotangentes y $N(Tj)$ lleva la estructura compleja (18.13).

La independencia de las métricas, la conexión y el entorno tubular se sigue de la invariancia homotópica, la naturalidad de Thom y la isotopía de los entornos tubulares. La functorialidad completa es el resultado topológico

registrado en el Teorema A.6.1; en la notación anterior afirma

$$(k \circ j)_! = k_! \circ j_! \tag{18.15}$$

para encajes propios composables $X \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{k} Z$. La construcción en la forma usada aquí se describe en [21, pp. 289–294]; la independencia de las elecciones y la functorialidad se demuestran en [92, Apéndice C, Teorema C.8; Capítulo III, §§12–13].

Para la inclusión $i : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, el haz normal de $T\{0\}$ en $T\mathbb{R}^N$ es

$$\mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N \cong \mathbb{C}^N$$

con la estructura compleja de (18.13). Por (18.8),

$$i_!(1) = (-1)^N b^{\boxtimes N}. \tag{18.16}$$

Como $\alpha_N(b^{\boxtimes N}) = 1$, se obtiene

$$i_!^{-1} = (-1)^N \alpha_N : K_c^0(T\mathbb{R}^N) = K_c^0(\mathbb{R}^{2N}) \longrightarrow \mathbb{Z}. \tag{18.17}$$

La fórmula explica de antemano el signo que aparecerá en el índice euclidiano.

## 18.4 Operadores euclidianos iguales a la identidad en el infinito

La expresión “en el infinito” designará una condición de soporte fuerte. Después de estabilizar los haces por sumandos triviales, todos los operadores actuarán sobre funciones con valores en un mismo espacio $\mathbb{C}^q$.

**Definición 18.4.1.** (La clase $\mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^n)$) Un operador $P$ pertenece a $\mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^q)$ si es un operador pseudodiferencial clásico, propiamente soportado, de orden cero y elíptico, y existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$P = I + Q, \qquad \operatorname{supp}(\mathbf{K}_Q) \subseteq K \times K,$$

donde $\mathbf{K}_Q$ es el núcleo de Schwartz de $Q$. Se permite la suma directa con operadores identidad y se escribe simplemente $\mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^n)$ para la unión estable de estas clases.

La condición sobre el núcleo de Schwartz equivale a las dos afirmaciones

$$(P - I)u = 0, \qquad (P^* - I)u = 0$$

para toda $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^q)$ cuyo soporte no corta $K$. Una implicación es inmediata. Para la recíproca, la primera igualdad muestra, en sentido distribucional, que el núcleo de $P - I$ se anula cuando la segunda variable está fuera de $K$; la igualdad para el adjunto muestra que se anula cuando la primera variable está fuera de $K$. También se sigue que el símbolo principal es la identidad si $x \notin K$.

La sola igualdad del símbolo principal con $I$ fuera de un compacto es una condición más débil: no afirma que el operador sea exactamente la identidad allí. Para comparar realizaciones de ese símbolo, efectuamos primero la cuantización sobre $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Un símbolo principal matricial $a_0$ que es $I$ fuera de un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ se prolonga por $I$ al cotangente de $S^n$. Sea $I + A \in \Psi_{\mathrm{cl}}^0(S^n;\mathbb{C}^q)$ una cuantización de esa prolongación. Elegimos

$\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que vale 1 en una vecindad de $K$, la prolongamos por cero a $S^n$ y consideramos

$$I + \chi A \chi.$$

Su símbolo principal es $I + \chi^2(a_0 - I) = a_0$. En consecuencia, $A - \chi A \chi \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{-1}(S^n)$ y es compacto en $L^2(S^n)$: envía continuamente $L^2(S^n)$ en $H^1(S^n)$, cuya inclusión en $L^2(S^n)$ es compacta. Por el Teorema 15.6.24, los dos operadores sobre $S^n$ tienen el mismo índice. Además, el núcleo de $\chi A \chi$ tiene soporte en $\operatorname{supp}\chi \times \operatorname{supp}\chi$, por lo que su restricción euclidiana cumple la condición fuerte de la Definición 18.4.1. Esta construcción permite usar realizaciones con soporte fuerte en la teoría estable descrita en [21, p. 275]. La comparación por compacidad se ha hecho sobre $S^n$; la igualdad de símbolos principales, por sí sola, no permite aplicarla a una cuantización arbitraria en $\mathbb{R}^n$.

En esta compactificación, si $P \in \mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^n)$, la identidad cerca del infinito permite prolongarlo por $I$ a un operador pseudodiferencial elíptico

$$\overline{P} \in \Psi_{\mathrm{cl}}^0(S^n).$$

La igualdad es exacta en un entorno de $\infty$, de modo que la restricción y la prolongación identifican los núcleos de $P$ y $\overline{P}$, y también los de sus adjuntos. El Teorema 15.6.22 da entonces

$$\operatorname{ind} P = \operatorname{ind} \overline{P}. \tag{18.18}$$

En particular, $P$ es Fredholm en $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^q)$.

El símbolo principal de $P$ produce, por la Definición 17.4.1, una clase

$$[\sigma(P)] \in K_c^0(T^*\mathbb{R}^n) = K_c^0(\mathbb{R}^{2n}).$$

El soporte es compacto porque el símbolo es la identidad fuera de $K$ en la variable base y es invertible en toda dirección cotangente no nula. En el modelo relativo se representa por

$$[\underline{\mathbb{C}}^q, \underline{\mathbb{C}}^q, \boldsymbol{\sigma}_0^{\Psi}(P)|_{S^*\mathbb{R}^n}].$$

**Proposición 18.4.2.** (Realización euclidiana y descenso del índice) Toda clase $a \in K_c^0(T^*\mathbb{R}^n)$ es la clase del símbolo de algún $P \in \mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^n)$ después de una estabilización. Además, existe un único homomorfismo

$$I_n : K_c^0(T^*\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{18.19}$$

tal que

$$I_n([\sigma(P)]) = \operatorname{ind} P.$$

*Demostración.* Representemos $a$ por un triple con soporte compacto

$$(\mathbf{E}, \mathbf{F}, \theta)$$

sobre $T^*\mathbb{R}^n$. Como $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ es contráctil, después de sumar un triple elemental podemos suponer que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ son haces triviales del mismo rango.

Extendemos $a$ por cero al cotangente de $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. En el modelo relativo elegimos un representante sobre $(B^*S^n, S^*S^n)$ que sea elemental sobre $T^*U$ para un entorno $U$ de $\infty$. La prueba relativa del Teore-

ma 17.4.3 permite suavizarlo sin modificar ese entorno. Después de estabilizar y de fijar allí la trivialización elemental, obtenemos un símbolo elíptico de orden cero que es exactamente la identidad sobre $T^*U$.
Construyamos el operador que representa esta clase. Sea $a_0(x,\xi)$ el símbolo homogéneo obtenido, igual a $I$ cuando $x$ está cerca de $\infty$. El Teorema 15.3.7 da una cuantización $A$ con símbolo principal $a_0$. Elegimos $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ igual a 1 sobre la proyección a la base de $\operatorname{supp}(a_0 - I)$ y definimos

$$P := I + \chi(A - I)\chi.$$

Su símbolo principal es

$$I + \chi(x)^2(a_0(x,\xi) - I) = a_0(x,\xi),$$

porque $a_0 - I$ se anula donde $\chi \neq 1$. Sin imponer una condición adicional a la cuantización, las dos multiplicaciones por $\chi$ muestran directamente que el núcleo de Schwartz de $P - I$ está contenido en $K \times K$, con $K = \operatorname{supp}\chi$. Por lo tanto, $P \in \mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y $[\sigma(P)] = a$.
Para probar que el índice desciende a $K$–teoría hay que conservar toda la información relativa del triple; un isomorfismo de triples puede depender de $\xi$ y no se convierte sin más en una conjugación de operadores. Sean $a_0$ y $a_1$ dos representantes de la misma clase. Tras sumar triples elementales, las relaciones del modelo relativo proporcionan un triple parametrizado sobre

$$B^*S^n \times [0,1]$$

cuyas restricciones en los extremos son los representantes dados y que es elemental sobre $B^*U \times [0,1]$ para un mismo entorno $U$ de $\infty$. La suavización relativa mantiene fijo ese entorno. La contracción radial en las fibras de $B^*S^n$ convierte los isomorfismos estabilizados en isomorfismos de haces sobre la base, exactamente como en la prueba del Teorema 17.5.6. La extensión homogénea en la covariable produce una familia de símbolos elípticos de orden cero que es la identidad sobre $T^*U$.
Usando una sola cubierta, una sola partición de la unidad y un único corte $\chi$, la cuantización es continua en la topología de símbolos de orden cero y, por Calderón–Vaillancourt, continua en la norma de

$$\mathcal{L}\big(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^q)\big).$$

Cada operador se prolonga a un operador elíptico sobre $S^n$. La estabilidad del índice de Fredholm da

$$\operatorname{ind} P_0 = \operatorname{ind} P_1.$$

Si el triple es elemental, la contracción radial lo lleva a un isomorfismo de haces sobre la base; su cuantización es un isomorfismo de orden cero más un operador de orden $-1$ y tiene índice cero. Finalmente, la suma directa de triples se cuantiza por suma directa de operadores y

$$\operatorname{ind}(P \oplus Q) = \operatorname{ind} P + \operatorname{ind} Q.$$

Así, el índice respeta las relaciones de estabilización, homotopía, isomorfismo y suma que definen $K_c^0(T^*\mathbb{R}^n)$. Esto determina $I_n$, y la realización de todas las clases prueba su unicidad. □

La misma construcción funciona para familias. Si $\Lambda$ es compacto Hausdorff y $P_\lambda$ es una familia continua en la topología de símbolos clásicos de orden cero, con un compacto de soporte común, entonces la familia es continua

en norma y sus símbolos principales dependen conjuntamente de $(x,\xi,\lambda)$. En estas hipótesis los símbolos definen

$$[\sigma(P_\Lambda)] \in K_c^0(T^*\mathbb{R}^n \times \Lambda). \tag{18.20}$$

La realización de toda clase y el descenso del haz índice se demostrarán en la Proposición 18.7.2. La variable $\lambda$ no se incorpora a las variables cotangentes: parametriza continuamente los haces y el isomorfismo del símbolo.

## 18.5 Dos operadores modelo

La periodicidad determina el grupo $K_c^0(T^*\mathbb{R}^n)$, pero no determina el homomorfismo analítico $I_n$ hasta fijar su valor sobre un generador. Ese valor se calculará primero para la clase $b$ mediante un operador de Toeplitz localizado. Después se calculará el operador oscilador que representa la clase opuesta $-b$ y que será el modelo analítico del isomorfismo de Thom.

### 18.5.1 El operador localizado que representa a $b$

Sea $S^1 \subset \mathbb{C}$ y sea

$$e_k(z) = z^k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

la base ortonormal de Fourier de $L^2(S^1)$. Definimos

$$H_+ := \overline{\operatorname{span}}\{e_k \mid k \geq 0\}, \qquad H_- := \overline{\operatorname{span}}\{e_k \mid k < 0\},$$

y denotamos por $\Pi_+$ y $\Pi_-$ las proyecciones ortogonales correspondientes. La proyección $\Pi_+$ es pseudodiferencial de orden cero: módulo la proyección finito–dimensional sobre las constantes,

$$\Pi_+ = \frac{1}{2}\big(I + \operatorname{sgn} D\big), \qquad D = -i\frac{d}{d\theta},$$

y su símbolo principal vale 1 en $\xi > 0$ y 0 en $\xi < 0$.

Sea $g : S^1 \longrightarrow S^1$ una función suave de grado uno que vale 1 en un entorno de un punto $p \in S^1$. Puede obtenerse deformando $z \mapsto z$ dentro de las funciones de grado uno y concentrando toda la variación angular en un arco disjunto de $p$. Sea $M_g$ la multiplicación por $g$ y consideremos

$$A_g := \Pi_+ M_g \Pi_+ + \Pi_- : L^2(S^1) = H_+ \oplus H_- \longrightarrow L^2(S^1). \tag{18.21}$$

Su símbolo principal es

$$\sigma_0^\Psi(A_g)(z,\xi) = \begin{cases} g(z), & \xi > 0, \\ 1, & \xi < 0. \end{cases} \tag{18.22}$$

Es invertible y vale 1 sobre $T^*U \setminus 0$ para algún entorno $U$ de $p$. Por lo tanto, $A_g$ es elíptico.

**Lema 18.5.1.** (Índice y clase del modelo de Bott) Existe $T_b \in \operatorname{Ell}_c^0(\mathbb{R})$ tal que

$$[\sigma(T_b)] = b, \qquad \operatorname{ind} T_b = -1.$$

*Demostración.* Comenzamos por el índice de (18.21). Una homotopía suave $g_t$ entre $g_0(z) = z$ y $g_1 = g$ produce, mediante (18.21), una familia continua en norma de operadores elípticos. Su índice es constante. Para $g_0(z) = z$ se tiene

$$A_{g_0} e_k = \begin{cases} e_{k+1}, & k \geq 0, \\ e_k, & k < 0. \end{cases}$$

Así,

$$\ker A_{g_0} = \{0\}, \qquad \operatorname{Ran} A_{g_0} = \{e_0\}^{\perp},$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{ind} A_g = \operatorname{ind} A_{g_0} = -1. \tag{18.23}$$

Elegimos $\chi \in C^\infty(S^1)$ con soporte disjunto de $p$, igual a 1 en el soporte de $g - 1$, y definimos

$$\widetilde{T}_b := I + \chi(A_g - I)\chi.$$

Por (18.22), $\widetilde{T}_b$ y $A_g$ tienen el mismo símbolo principal. Su diferencia es de orden $-1$ sobre la variedad cerrada $S^1$, luego es compacta en $L^2(S^1)$. En virtud del Teorema 15.6.24,

$$\operatorname{ind} \widetilde{T}_b = -1.$$

Además, el núcleo de $\widetilde{T}_b - I$ está contenido en $\operatorname{supp}\chi \times \operatorname{supp}\chi$. Al quitar el punto $p$ e identificar $S^1 \setminus \{p\}$ con $\mathbb{R}$, obtenemos un operador $T_b \in \mathrm{Ell}^0_c(\mathbb{R})$ con el mismo índice.
Resta identificar su clase. Compactificamos el plano de fases $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ mediante un rectángulo grande. Sobre el lado inferior, sobre los dos lados verticales y fuera del soporte de $g - 1$, el símbolo es 1. En el lado superior es $g(x)$. La orientación positiva de la frontera recorre el lado superior desde $x = +R$ hasta $x = -R$. Como $g$ tiene grado uno cuando $x$ se recorre de $-R$ a $+R$, el pegado a lo largo de la frontera tiene grado $-1$. Por la Definición 18.1.1, el haz pegado es $\mathbf{E}_{-1}$ y

$$[\sigma(T_b)] = [\mathbf{E}_{-1}] - [\underline{\mathbb{C}}] = b.$$

□

La prueba anterior no invoca una fórmula general para el índice de Toeplitz: el único índice calculado se reduce al desplazamiento unilateral. El argumento coincide, con las convenciones ya explicitadas, con la normalización de [21, prueba del Teorema 11.5, pp. 281–282].

### 18.5.2 El oscilador y la clase de Thom

En $L^2(\mathbb{R})$ consideremos los operadores cerrados

$$B^+ u = \frac{du}{dx} + xu, \qquad B^- v = -\frac{dv}{dx} + xv, \tag{18.24}$$

con dominio común

$$\mathcal{D} := \{u \in H^1(\mathbb{R}) \mid xu \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

El espacio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathcal{D}$ para la norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}} := \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Para justificar la densidad fijemos $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \chi \le 1$, igual a uno en $[-1,1]$, y pongamos $\chi_R(x) = \chi(x/R)$. Para $v \in \mathcal{D}$, $\chi_R v \to v$ en $L^2(\mathbb{R})$ y $x\chi_R v \to xv$ en $L^2(\mathbb{R})$ por convergencia dominada. Además,

$$(\chi_R v)' - v' = (\chi_R - 1)v' + \chi_R' v, \qquad \|\chi_R' v\|_{L^2(\mathbb{R})} \le R^{-1}\|\chi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|v\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

de modo que $\chi_R v \to v$ en $\mathcal{D}$. Para $R$ fijo, la regularización por convolución de $\chi_R v$ converge en $H^1(\mathbb{R})$ y sus soportes permanecen en un intervalo compacto fijo. En ese intervalo la multiplicación por $x$ es acotada en $L^2(\mathbb{R})$, por lo que también converge en $\mathcal{D}$. Elegir sucesivamente $R \to \infty$ y radios de convolución que produzcan errores menores que $1/R$ da una sucesión de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ convergente en $\mathcal{D}$.

**Proposición 18.5.2.** (Índice del oscilador de Thom) El operador $B^+ : \mathcal{D} \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ es Fredholm y

$$\ker B^+ = \operatorname{span}\{e^{-\frac{x^2}{2}}\}, \qquad \ker B^- = \{0\}, \qquad \operatorname{ind} B^+ = 1.$$

Su símbolo total elíptico en el plano de fases es $x + i\xi$ y representa

$$[\sigma(B^+)] = -b = \lambda_{\mathbb{C}}.$$

*Demostración.* Probemos primero que

$$\operatorname{Dom}\big((B^+)^*\big) = \mathcal{D}, \qquad (B^+)^* = B^-. \tag{18.25}$$

Sea $v \in \operatorname{Dom}((B^+)^*)$. Existe entonces $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{du}{dx} + xu\right)\overline{v}\,dx = \int_{\mathbb{R}} u\overline{f}\,dx, \qquad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

En el sentido de distribuciones,

$$-\frac{dv}{dx} + xv = f. \tag{18.26}$$

Como $xv \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, esta identidad implica $v \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.
Fijemos $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $0 \le \chi \le 1$, $\chi = 1$ en $[-1,1]$ y $\operatorname{supp}\chi \subset [-2,2]$, y pongamos $\chi_R(x) = \chi\left(\frac{x}{R}\right)$ para $R \ge 1$.
La función $w_R := \chi_R v$ pertenece a $\mathcal{D}$ y

$$B^- w_R = \chi_R f - \chi_R' v. \tag{18.27}$$

Para toda $w \in \mathcal{D}$ de soporte compacto, la integración por partes da

$$\|B^- w\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\frac{dw}{dx}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|xw\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|w\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{18.28}$$

Aplicada a $w_R$ y combinada con (18.27), esta igualdad produce la cota uniforme

$$\|x\chi_R v\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le 2\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{2\|\chi'\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}}{R^2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{18.29}$$

El lema de Fatou, aplicado cuando $R \to \infty$, muestra que $xv \in L^2(\mathbb{R})$. La ecuación (18.26) da entonces

$$\frac{dv}{dx} = xv - f \in L^2(\mathbb{R}),$$

de modo que $v \in \mathcal{D}$. La inclusión recíproca se obtiene integrando por partes, ahora con ambos miembros en $L^2(\mathbb{R})$, y prueba (18.25).

El mismo argumento muestra que $(B^-)^* = B^+$ con dominio $\mathcal{D}$. En efecto, si $B^+u = g$ distribucionalmente, entonces

$$\left\|\frac{dw}{dx}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|xw\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|B^+w\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|w\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

para $w = \chi_R u$; el mismo paso al límite da $xu \in L^2(\mathbb{R})$ y $\frac{du}{dx} = g - xu \in L^2(\mathbb{R})$. En particular, $B^+$ y $B^-$ son operadores cerrados y mutuamente adjuntos.

Las ecuaciones homogéneas se integran directamente:

$$B^+u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}},$$

mientras que

$$B^-v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

Sólo la primera solución pertenece a $L^2(\mathbb{R})$.

Para $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, la identidad (18.28) se escribe

$$\|B^-v\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left|-\frac{dv}{dx} + xv\right|^2 dx \tag{18.30}$$

$$= \left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|xv\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{18.31}$$

La aproximación en la norma de $\mathcal{D}$ construida antes de la proposición conserva simultáneamente $v$, $v'$ y $xv$ en $L^2(\mathbb{R})$. Como $B^-v = -v' + xv$, todos los términos de (18.31) convergen y la identidad vale en $\mathcal{D}$. En particular, $B^-$ está acotado inferiormente por 1 y su rango es cerrado. El teorema del rango cerrado aplicado al par adjunto $B^+, B^-$ implica que $\operatorname{Ran} B^+$ es cerrado. Además,

$$(\operatorname{Ran} B^+)^\perp = \ker B^- = \{0\},$$

de modo que $B^+$ es suprayectivo. Su núcleo tiene dimensión uno y su conúcleo es nulo; esto prueba que su índice es 1.

Con la normalización de Fourier $\widehat{\frac{du}{dx}}(\xi) = i\xi\,\hat{u}(\xi)$, el símbolo total es $x + i\xi$. Su restricción a una circunferencia grande tiene grado uno. Por el mismo cálculo de pegado de la prueba anterior, ahora con la orientación usual de la circunferencia, representa $[E_1] - [\underline{\mathbb{C}}] = -b$. La igualdad con $\lambda_{\mathbb{C}}$ es (18.7). □

El oscilador no pertenece a $\mathrm{Ell}^0_c(\mathbb{R})$: es un operador no acotado. No tiene resolvente compacto; de hecho,

$e^{\lambda x - \frac{x^2}{2}} \in \mathcal{D}$ y, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$B^+ e^{\lambda x - \frac{x^2}{2}} = \lambda e^{\lambda x - \frac{x^2}{2}}.$$

El operador supersimétrico autoadjunto

$$\mathscr{B} = \begin{pmatrix} 0 & B^- \\ B^+ & 0 \end{pmatrix}$$

sí tiene resolvente compacto, pues $\mathscr{B}^2$ es la suma de los dos osciladores armónicos escalares. El papel de $B^+$ no es sustituir al modelo $T_b$, sino realizar analíticamente la clase de Thom. La comparación

$$\operatorname{ind} T_b = -1, \qquad \operatorname{ind} B^+ = 1$$

confirma que $T_b$ representa $b$ y $B^+$ representa $-b$.

## 18.6 Producto de operadores e índice multiplicativo

La reducción de la dimensión $n$ al caso unidimensional exige comprobar que el producto externo de clases se corresponde con un producto de operadores y que sus índices se multiplican. Hay una sutileza que no puede omitirse: aunque los operadores que actúan por separado en cada variable están bien definidos en el tensor producto hilbertiano, en general no son pseudodiferenciales clásicos sobre la variedad producto. Este fenómeno se explica en [21, Ejercicio 9.20, pp. 243–244]. Primero calcularemos el índice de la matriz en espacios de Hilbert y después la regularizaremos mediante cortes angulares.

Sean

$$P : H_E^+ \longrightarrow H_E^-, \qquad Q : H_F^+ \longrightarrow H_F^-$$

operadores de Fredholm acotados entre espacios de Hilbert complejos. Sobre los productos tensoriales hilbertianos definimos

$$P\#Q := \begin{pmatrix} P \otimes I & -I \otimes Q^* \\ I \otimes Q & P^* \otimes I \end{pmatrix}, \tag{18.32}$$

con dominio y codominio

$$H^{\mathrm{ev}} := (H_E^+ \widehat{\otimes} H_F^+) \oplus (H_E^- \widehat{\otimes} H_F^-),$$
$$H^{\mathrm{odd}} := (H_E^- \widehat{\otimes} H_F^+) \oplus (H_E^+ \widehat{\otimes} H_F^-).$$

**Proposición 18.6.1.** (Producto de operadores de Fredholm) El operador $P\#Q : H^{\mathrm{ev}} \longrightarrow H^{\mathrm{odd}}$ es Fredholm y

$$\operatorname{ind}(P\#Q) = \operatorname{ind} P \operatorname{ind} Q. \tag{18.33}$$

*Demostración.* Multiplicando las matrices de (18.32) y usando que los operadores que actúan en factores distintos conmutan, se obtiene

$$(P\#Q)^*(P\#Q) = \begin{pmatrix} P^*P \otimes I + I \otimes Q^*Q & 0 \\ 0 & PP^* \otimes I + I \otimes QQ^* \end{pmatrix}, \tag{18.34}$$

$$(P\#Q)(P\#Q)^* = \begin{pmatrix} PP^*\otimes I + I\otimes Q^*Q & 0 \\ 0 & P^*P\otimes I + I\otimes QQ^* \end{pmatrix}. \tag{18.35}$$

Cada sumando es no negativo. Si $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ son espacios de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ son no negativos, entonces, en $\mathcal{H}_A\widehat{\otimes}\mathcal{H}_B$,

$$\ker(A\otimes I + I\otimes B) = \ker A\widehat{\otimes}\ker B;$$

en efecto, para $u \in \mathcal{H}_A\widehat{\otimes}\mathcal{H}_B$,

$$\begin{aligned}&\langle (A\otimes I + I\otimes B)u, u\rangle_{\mathcal{H}_A\widehat{\otimes}\mathcal{H}_B} \\ &\qquad = \|(A^{\frac12}\otimes I)u\|^2_{\mathcal{H}_A\widehat{\otimes}\mathcal{H}_B} + \|(I\otimes B^{\frac12})u\|^2_{\mathcal{H}_A\widehat{\otimes}\mathcal{H}_B}.\end{aligned}$$

Como $P$ y $Q$ son Fredholm, sus restricciones a los complementos ortogonales de sus núcleos están acotadas inferiormente. Las sumas de (18.34) y (18.35) están, por lo tanto, acotadas inferiormente en los complementos de sus núcleos finito–dimensionales. Esto prueba que $P\#Q$ tiene rango cerrado y núcleos de dimensión finita.
Las fórmulas de los núcleos son

$$\begin{aligned}\ker(P\#Q) &\cong (\ker P\widehat{\otimes}\ker Q)\oplus(\ker P^*\widehat{\otimes}\ker Q^*),\\ \ker(P\#Q)^* &\cong (\ker P^*\widehat{\otimes}\ker Q)\oplus(\ker P\widehat{\otimes}\ker Q^*).\end{aligned}$$

Si

$$a = \dim\ker P,\quad b_0 = \dim\ker P^*,\quad c = \dim\ker Q,\quad d = \dim\ker Q^*,$$

entonces

$$\operatorname{ind}(P\#Q) = (ac + b_0 d) - (b_0 c + ad) = (a - b_0)(c - d),$$

lo que prueba (18.33). □

La matriz anterior no se puede declarar pseudodiferencial clásica sobre un producto. Para obtener una matriz clásica conservando su índice elevaremos primero el orden. Sean $(X, g_X)$ y $(Y, g_Y)$ variedades riemannianas cerradas y sean

$$P \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(X;\mathbb{C}^q), \qquad Q \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(Y;\mathbb{C}^r)$$

elípticos. Elegimos laplacianos escalares no negativos $\Delta_X$ y $\Delta_Y$ y ponemos

$$\Lambda_{X,q} = (I + \Delta_X)^{\frac12}\otimes I_{\mathbb{C}^q}, \qquad \Lambda_{Y,r} = (I + \Delta_Y)^{\frac12}\otimes I_{\mathbb{C}^r}.$$

Por el Teorema 15.7.9, son operadores clásicos positivos de orden uno y definen isomorfismos

$$\Lambda_{X,q} : H^1(X;\mathbb{C}^q) \longrightarrow L^2(X;\mathbb{C}^q), \qquad \Lambda_{Y,r} : H^1(Y;\mathbb{C}^r) \longrightarrow L^2(Y;\mathbb{C}^r).$$

Los operadores

$$A := P\Lambda_{X,q} \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(X;\mathbb{C}^q), \qquad B := Q\Lambda_{Y,r} \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(Y;\mathbb{C}^r) \tag{18.36}$$

son elípticos de orden uno y

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} P, \qquad \operatorname{ind} B = \operatorname{ind} Q. \tag{18.37}$$

Definimos

$$\mathcal{D}\colon C^\infty(X\times Y;\mathbb{C}^{qr})^{\oplus 2}\longrightarrow C^\infty(X\times Y;\mathbb{C}^{qr})^{\oplus 2},\qquad \mathcal{D}:=A\#B=\begin{pmatrix}A\otimes I_{\mathbb{C}^r} & -I_{\mathbb{C}^q}\otimes B^*\\ I_{\mathbb{C}^q}\otimes B & A^*\otimes I_{\mathbb{C}^r}\end{pmatrix}. \tag{18.38}$$

Su cierre, como operador en $L^2(X\times Y;\mathbb{C}^{qr})^{\oplus 2}$, tiene dominio $H^1(X\times Y;\mathbb{C}^{qr})^{\oplus 2}$. En efecto, si $\mathcal{L}_X:=\Lambda_{X,q}\otimes I_{\mathbb{C}^r}$ y $\mathcal{L}_Y:=I_{\mathbb{C}^q}\otimes\Lambda_{Y,r}$, entonces

$$\mathcal{L}:=(\mathcal{L}_X^2+\mathcal{L}_Y^2)^{\frac12}\colon H^1(X\times Y;\mathbb{C}^{qr})\longrightarrow L^2(X\times Y;\mathbb{C}^{qr}) \tag{18.39}$$

es un isomorfismo, y lo mismo vale para $\mathcal{L}^{\oplus 2}$. Las estimaciones elípticas para $A$ y $B$ muestran que la norma de gráfica de $\mathcal{D}$ es equivalente a la de $H^1(X\times Y;\mathbb{C}^{qr})^{\oplus 2}$.

El cálculo de la Proposición 18.6.1 continúa siendo válido para estos operadores cerrados. Ahora los cuadrados $A^*A$, $AA^*$, $B^*B$ y $BB^*$ tienen resolvente compacto. El teorema espectral aplicado a

$$\mathcal{D}^*\mathcal{D}=\begin{pmatrix}A^*A\otimes I+I\otimes B^*B & 0\\ 0 & AA^*\otimes I+I\otimes BB^*\end{pmatrix}, \tag{18.40}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^*=\begin{pmatrix}AA^*\otimes I+I\otimes B^*B & 0\\ 0 & A^*A\otimes I+I\otimes BB^*\end{pmatrix} \tag{18.41}$$

da las mismas cuatro fórmulas de núcleos que en la prueba anterior. En particular,

$$\operatorname{ind}\mathcal{D}=\operatorname{ind}A\operatorname{ind}B=\operatorname{ind}P\operatorname{ind}Q. \tag{18.42}$$

La aproximación que necesitamos se construye dentro del cálculo pseudodiferencial ordinario sobre el producto. De este modo no se presupone que un operador definido por un cálculo espectral en las dos variables sea automáticamente un pseudodiferencial isotrópico.

**Lema 18.6.2.** (Cortes microlocales angulares) Fijemos atlas finitos $\{U_i\}_{i\in I}$ de $X$ y $\{V_j\}_{j\in J}$ de $Y$, junto con funciones reales

$$\alpha_i\in C_c^\infty(U_i),\qquad \beta_j\in C_c^\infty(V_j),\qquad \sum_{i\in I}\alpha_i^2=1,\qquad \sum_{j\in J}\beta_j^2=1.$$

Existe una elección, dependiente sólo de estos datos, de operadores escalares

$$Q_R^X,Q_R^Y\in\Psi^0_{\mathrm{cl}}(X\times Y),\qquad R>2,$$

con la siguiente propiedad. Si $T\in\Psi^1_{\mathrm{cl}}(X;\mathbb{C}^d)$ y $S\in\Psi^1_{\mathrm{cl}}(Y;\mathbb{C}^e)$, extendemos $Q_R^X,Q_R^Y$ diagonalmente a $\mathbb{C}^{de}$ y ponemos

$$\mathfrak{K}_R^X(T):=(T\otimes I_{\mathbb{C}^e})Q_R^X,\qquad \mathfrak{K}_R^Y(S):=(I_{\mathbb{C}^d}\otimes S)Q_R^Y \tag{18.43}$$

pertenecen a $\Psi^1_{\mathrm{cl}}(X\times Y;\mathbb{C}^{de})$ y satisfacen

$$\left\|\mathfrak{K}_R^X(T)-T\otimes I_{\mathbb{C}^e}\right\|_{\mathcal{L}(H^1(X\times Y;\mathbb{C}^{de}),L^2(X\times Y;\mathbb{C}^{de}))}\le\frac{C_T}{R}, \tag{18.44}$$

$$\left\|\mathfrak{K}_R^Y(S)-I_{\mathbb{C}^d}\otimes S\right\|_{\mathcal{L}(H^1(X\times Y;\mathbb{C}^{de}),L^2(X\times Y;\mathbb{C}^{de}))}\le\frac{C_S}{R}. \tag{18.45}$$

Sea $|\xi|_i$ la norma euclidiana de las componentes de $\xi\in T_x^*X$ en la carta $U_i$, y defínase $|\eta|_j$ de manera análoga.

En cada sumando de las fórmulas siguientes sólo se usan estas normas sobre $\operatorname{supp}\alpha_i \times \operatorname{supp}\beta_j$. Los símbolos principales de $T$ y $S$ se denotan, respectivamente, por

$$t_1(x,\xi) := \sigma_1^{\Psi}(T)(x,\xi), \qquad s_1(y,\eta) := \sigma_1^{\Psi}(S)(y,\eta),$$

y se entienden levantados a $T^*(X \times Y)$ en la región donde su covariable propia no se anula. Los símbolos principales de los dos operadores de corte son

$$\Phi_R(x,y,\xi,\eta) := \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_i(x)^2\beta_j(y)^2 \chi\left(\frac{|\eta|_j}{R|\xi|_i}\right), \tag{18.46}$$

$$\Psi_R(x,y,\xi,\eta) := \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_i(x)^2\beta_j(y)^2 \chi\left(\frac{|\xi|_i}{R|\eta|_j}\right). \tag{18.47}$$

Aquí $\chi \in C^\infty([0,\infty),[0,1])$ vale 1 en $[0,1]$, es positiva en $[0,2)$ y vale 0 en $[2,\infty)$. En el eje $\xi = 0$ el sumando de (18.46) se define como 0, y en el eje $\eta = 0$ como 1; para (18.47) se usa la convención opuesta. En particular,

$$\sigma_1^{\Psi}\big(\mathfrak{K}_R^X(T)\big) = \Phi_R t_1, \qquad \sigma_1^{\Psi}\big(\mathfrak{K}_R^Y(S)\big) = \Psi_R s_1. \tag{18.48}$$

Los productos de (18.48) se prolongan suavemente por cero al eje de la covariable correspondiente: el factor $\Phi_R$ es idénticamente cero en un entorno cónico de $\xi = 0$ cuando $\eta \neq 0$, y $\Psi_R$ tiene la propiedad simétrica.

*Demostración.* Pongamos $\lambda_{ij}(x,y) := \alpha_i(x)\beta_j(y)$. Identificamos $U_i \times V_j$ con un abierto de $\mathbb{R}^{m+k}$ y escribimos

$$\langle \xi\rangle_i = (1+|\xi|_i^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \langle \eta\rangle_j = (1+|\eta|_j^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Sean $M_{ij,R}^X$ y $M_{ij,R}^Y$ los multiplicadores de Fourier, en esa carta producto, cuyos símbolos completos son

$$\vartheta_{ij,R}^X(\xi,\eta) := \chi\left(\frac{\langle\eta\rangle_j}{R\langle\xi\rangle_i}\right), \tag{18.49}$$

$$\vartheta_{ij,R}^Y(\xi,\eta) := \chi\left(\frac{\langle\xi\rangle_i}{R\langle\eta\rangle_j}\right). \tag{18.50}$$

La multiplicación por $\lambda_{ij}$ antes y después del multiplicador hace que su prolongación por cero fuera de la carta esté bien definida. Tomamos

$$Q_R^X := \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij} M_{ij,R}^X \lambda_{ij}, \qquad Q_R^Y := \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij} M_{ij,R}^Y \lambda_{ij}. \tag{18.51}$$

Si en (18.51) se reemplazan todos los multiplicadores por la identidad, se obtiene exactamente la identidad, pues

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij}^2 = \left(\sum_{i\in I}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{j\in J}\beta_j^2\right) = 1. \tag{18.52}$$

Para $R$ fijo, los símbolos de (18.49) y (18.50) son clásicos de orden cero. Lo comprobamos para el primero.

Si $\xi \neq 0$ y $\eta \neq 0$, entonces

$$\frac{\langle t\eta\rangle_j}{R\langle t\xi\rangle_i} \sim \frac{|\eta|_j}{R|\xi|_i}\left(1+\sum_{\ell=1}^{\infty} c_{\ell,ij}(\xi,\eta)t^{-2\ell}\right), \qquad t\longrightarrow\infty. \tag{18.53}$$

La fórmula de Taylor para $\chi$ da una expansión homogénea de grados $0,-2,-4,\ldots$. Sus coeficientes se prolongan suavemente a los ejes: cerca de $\{\xi=0,\ \eta\neq 0\}$ el corte es idénticamente cero, y cerca de $\{\eta=0,\ \xi\neq 0\}$ es idénticamente uno. El término homogéneo de grado cero es

$$\chi\left(\frac{|\eta|_j}{R|\xi|_i}\right).$$

La misma prueba, con las variables intercambiadas, se aplica al segundo símbolo. Por lo tanto, $Q_R^X$ y $Q_R^Y$ son operadores clásicos de orden cero, y sus símbolos principales son respectivamente $\Phi_R$ y $\Psi_R$.

Debemos comprobar que las composiciones de (18.43) pertenecen al cálculo isotrópico; esto no se sigue sólo de que $Q_R^X$ y $Q_R^Y$ sean operadores pseudodiferenciales. Consideremos $Q_R^X$. En una carta, el símbolo de cada sumando de (18.51), módulo $S^{-\infty}$, posee una expansión cuyos términos contienen una derivada de $\vartheta_{ij,R}^X$. Todos esos términos están soportados en

$$\langle\eta\rangle_j \leq 2R\langle\xi\rangle_i, \qquad \langle(\xi,\eta)\rangle \leq C_R\langle\xi\rangle_i. \tag{18.54}$$

La sumación asintótica puede hacerse después de multiplicar por un corte que vale 1 en este cono; así conserva el soporte en un cono ligeramente mayor, salvo un resto de $S^{-\infty}$.

Descomponemos el núcleo de $T$ mediante una partición finita en una parte próxima a la diagonal y otra suave. En la primera, la fórmula de composición contiene términos

$$\frac{1}{\gamma!}\partial_\xi^\gamma t(x,\xi)D_x^\gamma q_{ij,R}(x,y,\xi,\eta), \tag{18.55}$$

donde $q_{ij,R}$ es un símbolo completo del sumando correspondiente de $Q_R^X$. En el cono (18.54), las estimaciones de $t$ respecto de $\xi$ se convierten en las estimaciones isotrópicas de orden uno respecto de $(\xi,\eta)$. La fórmula del resto, integrada por partes en las variables de la carta, da las mismas estimaciones. La parte suave del núcleo de $T$ tiene transformada rápidamente decreciente en $\xi$; como $|\eta|_j \leq C_R\langle\xi\rangle_i$ sobre el soporte del corte, su composición es rápidamente decreciente en $(\xi,\eta)$. Esto demuestra que $(T\otimes I_{\mathbb{C}^e})Q_R^X$ es clásico de orden uno. Además, el primer término de (18.55) prueba la primera igualdad de (18.48). La demostración para $(I_{\mathbb{C}^d}\otimes S)Q_R^Y$ es simétrica.

Resta la estimación en norma. De (18.52) se deduce la identidad exacta

$$Q_R^X - I = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij}(M_{ij,R}^X - I)\lambda_{ij}. \tag{18.56}$$

Sea $u\in H^1(X\times Y;\mathbb{C}^{de})$ y sea $v$ la expresión en coordenadas, con valores en $\mathbb{C}^{de}$, de $\lambda_{ij}u$. El factor $1-\vartheta_{ij,R}^X$ sólo puede ser distinto de cero cuando $\langle\eta\rangle_j > R\langle\xi\rangle_i$. Por Plancherel,

$$\left\|(M_{ij,R}^X - I)v\right\|^2_{H^1(\mathbb{R}_x^m;L^2(\mathbb{R}_y^k;\mathbb{C}^{de}))}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^m} \langle\xi\rangle_i^2 |1-\vartheta_{ij,R}^X(\xi,\eta)|^2 |\widehat{v}(\xi,\eta)|^2_{\mathbb{C}^{de}}\, d\xi\, d\eta$$
$$\le \frac{1}{R^2}\int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^m} \langle\eta\rangle_j^2 |\widehat{v}(\xi,\eta)|^2_{\mathbb{C}^{de}}\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{R^2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m_x;H^1(\mathbb{R}^k_y;\mathbb{C}^{de}))}. \tag{18.57}$$

Suprimiendo en la notación las identificaciones con las cartas, tenemos

$$(T\otimes I_{\mathbb{C}^e})(Q_R^X - I)u = \sum_{(i,j)\in I\times J} (T\alpha_i \otimes \beta_j I_{\mathbb{C}^e})(M_{ij,R}^X - I)(\lambda_{ij}u). \tag{18.58}$$

El operador $T\alpha_i : H^1(X;\mathbb{C}^d)\to L^2(X;\mathbb{C}^d)$ es acotado. Las multiplicaciones por $\alpha_i$ y $\beta_j$, los cambios de coordenadas y sus inversos son acotados en los espacios de Sobolev que aparecen en (18.57). Aplicando $T\alpha_i$ para cada valor de $y$ y usando Fubini obtenemos

$$\|(T\alpha_i\otimes\beta_j I_{\mathbb{C}^e})w\|_{L^2(X\times Y;\mathbb{C}^{de})} \le C_{ij}\|w\|_{H^1(\mathbb{R}^m_x;L^2(\mathbb{R}^k_y;\mathbb{C}^{de}))}.$$

Como las cubiertas son finitas, (18.56) y (18.57) dan (18.44), con una constante independiente de $R$. El intercambio de $X$ con $Y$ da (18.45). □

Los dos símbolos principales construidos con el mismo atlas no se anulan simultáneamente. En efecto, todos los sumandos de $\Phi_R$ y $\Psi_R$ son no negativos y los pesos $\alpha_i^2\beta_j^2$ suman 1. Supongamos primero que $\xi\neq 0$ y $\eta\neq 0$. Si $\Phi_R = 0$, para cada par activo se tiene

$$\frac{|\eta|_j}{R|\xi|_i} \ge 2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{|\xi|_i}{R|\eta|_j} \le \frac{1}{2R^2} < 1$$

para cada par activo. Todos los cortes que intervienen en $\Psi_R$ valen 1, de donde $\Psi_R = 1$. El mismo razonamiento con las variables intercambiadas muestra que $\Psi_R = 0$ implica $\Phi_R = 1$. En los ejes la conclusión se sigue directamente de las convenciones de (18.46) y (18.47).

Aplicamos el lema a $A$, $A^*$, $B$ y $B^*$ y definimos

$$\mathcal{D}_R := \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_R^X(A) & -\mathfrak{K}_R^Y(B^*) \\ \mathfrak{K}_R^Y(B) & \mathfrak{K}_R^X(A^*)\end{pmatrix}. \tag{18.59}$$

Es un operador

$$\mathcal{D}_R \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(X\times Y;\mathbb{C}^{2qr}).$$

Las cuatro estimaciones del lema dan

$$\|\mathcal{D}_R - \mathcal{D}\|_{\mathcal{L}(H^1(X\times Y;\mathbb{C}^{qr})^{\oplus 2},L^2(X\times Y;\mathbb{C}^{qr})^{\oplus 2})} \le \frac{C}{R}. \tag{18.60}$$

Como $\mathcal{D}$ es Fredholm, la apertura del conjunto de operadores de Fredholm implica que, para $R$ suficientemente grande,

$$\operatorname{ind}\mathcal{D}_R = \operatorname{ind}\mathcal{D} = \operatorname{ind}P\operatorname{ind}Q. \tag{18.61}$$

Falta comprobar que el símbolo de $\mathcal{D}_R$ es el complejo producto. Sean $a_1(x,\xi)$ y $b_1(y,\eta)$ los símbolos principales

de $A$ y $B$. El símbolo principal completo es

$$c_R(x,y,\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \Phi_R a_1 \otimes I & -\Psi_R I \otimes b_1^* \\ \Psi_R I \otimes b_1 & \Phi_R a_1^* \otimes I \end{pmatrix}. \tag{18.62}$$

La multiplicación de las matrices da

$$c_R^* c_R = \begin{pmatrix} \Phi_R^2 a_1^* a_1 \otimes I + \Psi_R^2 I \otimes b_1^* b_1 & 0 \\ 0 & \Psi_R^2 I \otimes b_1 b_1^* + \Phi_R^2 a_1 a_1^* \otimes I \end{pmatrix}. \tag{18.63}$$

Sea $(\xi,\eta) \neq (0,0)$. Si $\xi \neq 0$ y $\Phi_R > 0$, la elipticidad de $a_1$ hace positiva definida la contribución que contiene $a_1^* a_1$ en la primera entrada diagonal y la que contiene $a_1 a_1^*$ en la segunda. Si $\xi = 0$ o $\Phi_R = 0$, entonces $\eta \neq 0$ y $\Psi_R = 1$ por la propiedad anterior; la elipticidad de $b_1$ hace positivas definidas las contribuciones restantes. Así, las dos entradas diagonales de (18.63) son positivas definidas en todo el haz cotangente punteado. La compacidad del haz cosférico de $X \times Y$ da una cota inferior uniforme, de modo que $c_R$ es elíptico.

Para identificar la clase basta una homotopía continua de complejos exactos sobre el haz cosférico, que es una de las relaciones que definen $K_c^0$; no se afirma que sus términos intermedios sean símbolos clásicos. Prolongamos continuamente $a_1$ y $b_1$ por cero en los ejes de sus covariables. Para $t < 1$ estas prolongaciones pueden ser sólo continuas en los ejes, lo cual es suficiente para esta homotopía topológica. Pongamos

$$\Phi_{R,t} := (1-t) + t\Phi_R, \qquad \Psi_{R,t} := (1-t) + t\Psi_R, \qquad 0 \le t \le 1,$$

y sustituyamos $\Phi_R, \Psi_R$ por $\Phi_{R,t}, \Psi_{R,t}$ en (18.62). Para $t < 1$ ambos coeficientes son positivos. Para $t = 1$ no se anulan simultáneamente. El cálculo de (18.63) prueba que toda la familia continua de complejos es invertible fuera de la sección nula. En $t = 0$ se obtiene

$$a_1 \# b_1 = \begin{pmatrix} a_1 \otimes I & -I \otimes b_1^* \\ I \otimes b_1 & a_1^* \otimes I \end{pmatrix}, \tag{18.64}$$

que es el complejo tensor producto de los dos complejos de longitud uno. Esta matriz es la regla de signos del producto de complejos descrita en [21, Observación 11.3, pp. 278–279]. La Proposición 17.3.1 y la invariancia homotópica dan, por consiguiente,

$$[c_R] = [\sigma(P)] \boxtimes [\sigma(Q)]. \tag{18.65}$$

La multiplicación por los símbolos positivos de $\Lambda_X$ y $\Lambda_Y$ no cambia las clases de $P$ y $Q$. Este argumento es la versión euclidiana de los cortes $c_{r_0}$ usados en la demostración de la propiedad multiplicativa de [21, pp. 294–301]; la elevación previa al orden uno es lo que permite además la comparación en norma (18.60).

Finalmente,

$$C_R := \mathcal{D}_R(\mathcal{L}^{-1})^{\oplus 2} \in \Psi_{\mathrm{cl}}^0(X \times Y; \mathbb{C}^{2qr}) \tag{18.66}$$

tiene el mismo índice que $\mathcal{D}_R$. Su símbolo se obtiene dividiendo $c_R$ por la función positiva $\sqrt{|\xi|_{\mathbf{g}_X}^2 + |\eta|_{\mathbf{g}_Y}^2}$; esta división tampoco cambia la clase (18.65).

Apliquemos la construcción a $P \in \mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^m)$ y $Q \in \mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^k)$. Los prolongamos por la identidad a $X = S^m$ y $Y = S^k$. La clase del miembro derecho de (18.65) tiene soporte compacto dentro de

$$T^*(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k) = T^*\mathbb{R}^{m+k}.$$

La realización relativa de la Proposición 18.4.2 permite estabilizar el complejo, deformarlo de manera fija sobre

un compacto a la identidad cerca del divisor

$$(\{\infty\}\times S^k)\cup(S^m\times\{\infty\})$$

y cuantizar la homotopía. Si $\rho$ vale 1 sobre la proyección del soporte del símbolo, la sustitución final

$$\widetilde{C}\longmapsto I+\rho(\widetilde{C}-I)\rho$$

produce un operador de $\mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^{m+k})$ con la misma clase de símbolo. Los operadores intermedios son elípticos sobre la variedad cerrada $S^m\times S^k$; por el Teorema 17.5.6, su índice sólo depende de esa clase. En combinación con (18.61), esto prueba

$$I_{m+k}(a\boxtimes c)=I_m(a)I_k(c),\qquad a\in K_c^0(T^*\mathbb{R}^m),\quad c\in K_c^0(T^*\mathbb{R}^k). \tag{18.67}$$

## 18.7 El teorema del índice en el espacio euclidiano

Definimos el índice topológico euclidiano por

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{t}}^{\mathbb{R}^n}:=(-1)^n\alpha_n : K_c^0(T^*\mathbb{R}^n)=K_c^0(\mathbb{R}^{2n})\longrightarrow\mathbb{Z}. \tag{18.68}$$

La igualdad (18.17) muestra que también puede escribirse como

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{t}}^{\mathbb{R}^n}=i_!^{-1},\qquad i:\{0\}\hookrightarrow\mathbb{R}^n.$$

**Teorema 18.7.1.** (Índice euclidiano) Sea $P\in\mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{a}}(P)=\mathrm{ind}_{\mathrm{t}}^{\mathbb{R}^n}[\sigma(P)]=(-1)^n\alpha_n([\sigma(P)]). \tag{18.69}$$

*Demostración.* Por el Corolario 18.1.3, cada clase de $K_c^0(T^*\mathbb{R}^n)$ tiene una única forma

$$[\sigma(P)]=\ell\, b^{\boxtimes n},\qquad \ell\in\mathbb{Z},$$

y

$$\ell=\alpha_n([\sigma(P)]).$$

El Lema 18.5.1 y la multiplicatividad (18.67) implican

$$I_n(b^{\boxtimes n})=I_1(b)^n=(-1)^n.$$

Como $I_n$ es un homomorfismo,

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{a}}(P)=I_n([\sigma(P)])=\ell I_n(b^{\boxtimes n})=(-1)^n\alpha_n([\sigma(P)]).$$

Por (18.68), el último miembro es el índice topológico. □

La demostración usa la periodicidad de Bott para identificar el generador y calcula su índice mediante el desplazamiento unilateral y la regularización angular; por ello no presupone el teorema del índice en variedades

cerradas.

### 18.7.1 Una extensión: el índice de familias

Sea $\Lambda$ un espacio compacto Hausdorff y sea $P = (P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de operadores euclidianos elípticos de orden cero, continua en la topología de símbolos clásicos y con un compacto de soporte común. En particular, tanto los operadores como sus símbolos principales forman familias continuas. Su índice analítico es una clase de $K^0(\Lambda)$. Recordemos su construcción. Se elige un subespacio finito–dimensional $V \subset L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^q)$ tal que

$$\operatorname{Ran} P_\lambda + V = L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^q) \qquad \text{para todo } \lambda \in \Lambda.$$

La existencia de un mismo $V$ para todos los parámetros se obtiene primero localmente por la apertura de la sobreyectividad y después tomando la suma de los espacios correspondientes a una subcubierta finita de $\Lambda$. Los núcleos de los mapeos sobreyectivos

$$\mathcal{P}_\lambda : L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^q)\oplus V \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^q), \qquad \mathcal{P}_\lambda(u,v) = P_\lambda u + v,$$

forman un haz vectorial finito–dimensional $\mathbf{K} := \ker\mathcal{P} \longrightarrow \Lambda$. En efecto, fijado $\lambda_0$, sea $R_0$ una inversa por la derecha de $\mathcal{P}_{\lambda_0}$. Para $\lambda$ próximo a $\lambda_0$, el operador $\mathcal{P}_\lambda R_0$ es invertible por la serie de Neumann, y

$$R_\lambda := R_0(\mathcal{P}_\lambda R_0)^{-1}$$

es una inversa por la derecha que depende continuamente de $\lambda$. Las proyecciones

$$\Pi_\lambda := I - R_\lambda\mathcal{P}_\lambda$$

tienen imagen $\ker\mathcal{P}_\lambda$, dependen continuamente del parámetro y proporcionan trivializaciones locales de esos núcleos. Se define

$$\operatorname{Ind}_a(P) := [\mathbf{K}] - [\underline{V}] \in K^0(\Lambda). \tag{18.70}$$

La clase es independiente de $V$. En efecto, si $V \subseteq W$ y ambos espacios hacen sobreyectivos los mapeos estabilizados, pongamos $\mathbf{K}_V := \ker\mathcal{P}_V$ y $\mathbf{K}_W := \ker\mathcal{P}_W$. Existe una sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathbf{K}_V \longrightarrow \mathbf{K}_W \longrightarrow \underline{W/V} \longrightarrow 0.$$

La última flecha envía $(u,w)$ a la clase de $w$ módulo $V$. Es sobreyectiva porque $\operatorname{Ran} P_\lambda + V = L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^q)$, y su núcleo es $\mathbf{K}_V$. Por lo tanto,

$$[\mathbf{K}_W] - [\underline{W}] = [\mathbf{K}_V] + [\underline{W/V}] - [\underline{V}] - [\underline{W/V}] = [\mathbf{K}_V] - [\underline{V}].$$

Dos elecciones arbitrarias se comparan pasando a su suma.

**Proposición 18.7.2.** (Realización y descenso para familias) Sea $\Lambda$ un espacio compacto Hausdorff. Toda clase

$$\kappa \in K_c^0(T^*\mathbb{R}^n \times \Lambda)$$

es la clase de símbolos de una familia de operadores de $\operatorname{Ell}_c^0(\mathbb{R}^n)$ continua en la topología de símbolos, después de una estabilización fija. El haz índice de una familia depende sólo de su clase de símbolos. En

consecuencia, existe un homomorfismo bien definido

$$I_{n,\Lambda} : K_c^0(\mathbb{R}^{2n} \times \Lambda) \longrightarrow K^0(\Lambda) \tag{18.71}$$

que envía una clase realizada por $P$ a $\mathrm{Ind}_{\mathrm{a}}(P)$.

*Demostración.* Extendemos $\kappa$ por cero a $T^*S^n \times \Lambda$. La proyección de su soporte compacto sobre $T^*\mathbb{R}^n$ es compacta. Podemos elegir un mismo entorno $U$ de $\infty$ cuya cerradura no corte la proyección de ese soporte a $S^n$. Mediante la identificación radial de $T^*S^n$ con el interior de $B^*S^n$, el soporte queda en el complemento del cerrado

$$\big(S^*S^n \times \Lambda\big) \cup \big(B^*\overline{U} \times \Lambda\big). \tag{18.72}$$

La descripción por soportes y la excisión del Teorema A.4.2 permiten representar la clase en el grupo relativo de ese par. Como el espacio total y el subespacio cerrado son compactos Hausdorff, el Teorema 17.2.4 proporciona haces y un isomorfismo sobre ese cerrado, elemental en el segundo conjunto. No se necesita una estructura CW en $\Lambda$. El isomorfismo relativo se extiende a una vecindad del cerrado, por el argumento de extensión de la demostración de ese teorema. En particular, la trivialización relativa está disponible cerca de $B^*\overline{U} \times \Lambda$. La contracción radial de $B^*S^n$ reduce los haces, después de estabilizarlos, a pullbacks de haces sobre $S^n \times \Lambda$. Al restringir a $\mathbb{R}^n \times \Lambda$, esos haces son pullbacks de haces $G$ y $H$ sobre $\Lambda$. La trivialización elemental cerca de $\infty$ identifica $G$ con $H$. Elegimos un complemento $G'$ tal que $G \oplus G' \cong \underline{\mathbb{C}}^N$ y añadimos el triple elemental definido por $G'$. Así, sobre $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ los operadores actúan en un haz trivial de rango fijo y son la identidad en los sumandos añadidos.

La suavización debe hacerse uniformemente. Tomamos un atlas finito de $S^n$, una partición de la unidad independiente de $\lambda$ y regularizamos por convolución sólo en las variables de $S^n$ y de sus covariables. Reducimos $U$ una vez y usamos una función de corte que se anula cerca de su cerradura para mantener intacta la trivialización relativa; seguimos denotando el entorno menor por $U$. El isomorfismo original sobre el compacto $S^*S^n \times \Lambda$ satisface

$$\delta := \inf_{(x,\xi,\lambda)\in S^*S^n\times\Lambda} \big\|\theta(x,\xi,\lambda)^{-1}\big\|_{\mathrm{op}(\mathbb{C}^N)}^{-1} > 0.$$

Denotamos la aproximación por $\widetilde{\theta}$ y la elegimos de modo que

$$\|\widetilde{\theta} - \theta\|_{C^0(S^*S^n\times\Lambda,\,\mathrm{End}(\mathbb{C}^N))} < \frac{\delta}{2}.$$

El segmento entre ambos mapeos permanece invertible, de modo que la clase relativa no cambia. El símbolo suavizado es $C^\infty$ en $(x,\xi)$, continuo en $\lambda$ junto con cada seminorma de símbolo y exactamente igual a la identidad sobre $T^*U \times \Lambda$.

La extensión homogénea y la cuantización se efectúan con una sola cubierta, una sola partición y los mismos cortes para todos los parámetros. En cada carta la diferencia de dos operadores cuantizados se estima, mediante Calderón–Vaillancourt, por un número finito de seminormas de la diferencia de sus símbolos. Por lo tanto,

$$\lambda \longmapsto P_\lambda \quad \text{es continua en} \quad \mathcal{L}\big(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)\big). \tag{18.73}$$

Elegimos una sola $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que vale 1 sobre la proyección del soporte común y sustituimos la familia cuantizada $A_\lambda$ por

$$P_\lambda := I + \chi(A_\lambda - I)\chi. \tag{18.74}$$

El núcleo de Schwartz de $P_\lambda - I$ está contenido en $\operatorname{supp}\chi \times \operatorname{supp}\chi$, de manera uniforme en $\lambda$. Esto prueba la realización.

Probemos ahora el descenso. El mismo modelo por triples se aplica al producto del par compacto Hausdorff anterior con $[0,1]$. Por tanto, una homotopía relativa de clases se representa, después de una estabilización, sobre

$$B^*S^n \times \Lambda \times [0,1]$$

y es elemental sobre $B^*U \times \Lambda \times [0,1]$. Repetimos la suavización anterior sobre el compacto $\Lambda \times [0,1]$ y cuantizamos con el mismo corte $\chi$. Se obtiene una familia continua en norma de operadores de Fredholm. Existe un subespacio finito–dimensional $V$ común que hace sobreyectivas todas las estabilizaciones, pues $\Lambda \times [0,1]$ es compacto. Sus núcleos forman un haz $\mathcal{K} \to \Lambda \times [0,1]$, y el índice de la familia es

$$[\mathcal{K}] - [\underline{V}] \in K^0(\Lambda \times [0,1]).$$

Las inclusiones $i_0, i_1 : \Lambda \longrightarrow \Lambda \times [0,1]$ son homotópicas; por consiguiente,

$$i_0^*\big([\mathcal{K}] - [\underline{V}]\big) = i_1^*\big([\mathcal{K}] - [\underline{V}]\big).$$

Así, el haz índice es invariante por homotopías relativas.

Un isomorfismo de triples que depende de la covariable se reduce, mediante $(x,\xi,\lambda,t) \mapsto (x,t\xi,\lambda)$, a isomorfismos de haces sobre la base; el procedimiento es uniforme porque $\Lambda$ es compacto. Un triple elemental se contrae de la misma manera a una familia de isomorfismos y tiene haz índice nulo. La suma directa de triples corresponde a la suma directa de las familias estabilizadas. El índice respeta, por lo tanto, equivalencias, homotopías, triples elementales y sumas, que son todas las relaciones del modelo relativo. Esto prueba que (18.71) está bien definido. □

El isomorfismo de Bott con parámetros es

$$\alpha_{n,\Lambda} : K_c^0(\mathbb{R}^{2n} \times \Lambda) \longrightarrow K^0(\Lambda).$$

**Teorema 18.7.3.** (Índice euclidiano para familias) Con las hipótesis anteriores,

$$\operatorname{Ind}_{\mathrm{a}}(P) = (-1)^n \alpha_{n,\Lambda}\big([\sigma(P_\Lambda)]\big) \in K^0(\Lambda). \tag{18.75}$$

*Demostración.* La Proposición 18.7.2 construye el homomorfismo $I_{n,\Lambda}$ y prueba que no depende del representante relativo ni de la cuantización. Este homomorfismo es $K^0(\Lambda)$–lineal. En efecto, si $\mathbf{G} \longrightarrow \Lambda$ es un haz vectorial, la estabilización que define el índice de $P \otimes \mathbf{G}$ es la estabilización anterior tensorizada con $\mathbf{G}$; por consiguiente,

$$\operatorname{Ind}_{\mathrm{a}}(P \otimes \mathbf{G}) = \operatorname{Ind}_{\mathrm{a}}(P)\,[\mathbf{G}].$$

Por el Teorema 18.1.2, cada clase del dominio se escribe de manera única como

$$b^{\boxtimes n} \boxtimes a, \qquad a \in K^0(\Lambda).$$

Al iterar la regularización angular de (18.59) y la realización relativa, obtenemos un operador

$$R_n \in \mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^n)$$

tal que

$$[\sigma(R_n)] = b^{\boxtimes n}, \qquad \operatorname{ind} R_n = (-1)^n.$$

Escribamos $a = [G] - [H]$ y representemos $G$ y $H$, después de añadir haces triviales si hace falta, por proyecciones continuas

$$p_G : \Lambda \longrightarrow M_N(\mathbb{C}), \qquad p_H : \Lambda \longrightarrow M_N(\mathbb{C}).$$

La familia

$$\mathcal{R}_G(\lambda) := R_n \otimes p_G(\lambda) + I \otimes \big(I - p_G(\lambda)\big) \tag{18.76}$$

es la identidad sobre el complemento de $G_\lambda$. Su clase de símbolo y su índice son

$$[\sigma(\mathcal{R}_G)] = b^{\boxtimes n} \boxtimes [G], \qquad \mathrm{Ind}_{\mathrm{a}}(\mathcal{R}_G) = (-1)^n [G].$$

Para el término negativo usamos

$$\mathcal{R}_H^-(\lambda) := R_n^* \otimes p_H(\lambda) + I \otimes \big(I - p_H(\lambda)\big). \tag{18.77}$$

La Proposición 17.5.3 y la igualdad $\operatorname{ind} R_n^* = -\operatorname{ind} R_n$ dan

$$[\sigma(\mathcal{R}_H^-)] = -b^{\boxtimes n} \boxtimes [H], \qquad \mathrm{Ind}_{\mathrm{a}}(\mathcal{R}_H^-) = -(-1)^n [H].$$

La suma directa de (18.76) y (18.77) realiza $b^{\boxtimes n} \boxtimes a$ y tiene índice $(-1)^n a$. Por lo tanto,

$$I_{n,\Lambda}(b^{\boxtimes n} \boxtimes a) = (-1)^n a.$$

Como

$$\alpha_{n,\Lambda}(b^{\boxtimes n} \boxtimes a) = a,$$

se obtiene (18.75). □

## 18.8 Compatibilidad con encajes en variedades cerradas

Las construcciones anteriores dejan preparados los tres mapeos del argumento por encaje. Si $j : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ es un encaje de una variedad cerrada y $a \in K_c^0(T^*X)$, se dispone de

$$K_c^0(T^*X) \xrightarrow{\mathrm{Th}_{N(Tj)}} K_c^0(N(Tj)) \xrightarrow{e} K_c^0(T^*\mathbb{R}^N) \xrightarrow{(-1)^N \alpha_N} \mathbb{Z}.$$

La composición de las dos primeras flechas es $j_!$ y la última es el índice euclidiano. Por lo tanto, la expresión topológica asociada a $a$ es

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{t}}(a) := (-1)^N \alpha_N(j_! a). \tag{18.78}$$

La naturalidad de Thom, la functorialidad (18.15) y (18.17) muestran que (18.78) no depende del espacio

euclidiano en el que se estabilice el encaje. La independencia completa del encaje y la igualdad con el índice analítico se demostrarán en el Capítulo 19. Analíticamente, el paso que falta consiste en realizar la clase de Thom mediante el oscilador normal y en probar que la extensión desde un entorno tubular no cambia núcleo ni conúcleo. Topológicamente, todos los ingredientes ya están contenidos en los Teoremas 18.1.2 y 18.2.2 y en la functorialidad del morfismo directo.

# 19
# El teorema del índice en variedades cerradas

Sea $M$ una variedad suave cerrada, de dimensión real $n$, y sean $\mathbf{E}^+, \mathbf{E}^- \longrightarrow M$ haces vectoriales complejos. Si

$$P\colon \Gamma(M, \mathbf{E}^+) \longrightarrow \Gamma(M, \mathbf{E}^-)$$

es un operador pseudodiferencial clásico elíptico, el Teorema 15.6.22 y el Corolario 15.6.23 muestran que

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P) = \dim_{\mathbb{C}} \ker P - \dim_{\mathbb{C}} \ker P^*$$

está bien definido y no depende del exponente de Sobolev empleado para realizar $P$ como operador acotado. La Definición 17.4.1 asocia a su símbolo principal una clase

$$[\sigma(P)] \in K_c^0(T^*M).$$

El Teorema 17.5.6, apoyado en la estabilidad del Teorema 15.6.24, prueba que el índice sólo depende de esta clase. Falta identificar el homomorfismo $K_c^0(T^*M) \longrightarrow \mathbb{Z}$ que así se obtiene.

La identificación se hará mediante un encaje de $M$ en un espacio euclidiano. La prueba conserva separados dos argumentos. El primero es topológico: el isomorfismo de Thom y la extensión por cero producen un entero a partir de una clase con soporte compacto en $T^*M$. El segundo es analítico: un operador de Bott en las direcciones normales permite trasladar un operador elíptico de $M$ a una vecindad tubular sin cambiar su índice. La fórmula euclidiana del Capítulo 18 concluye entonces la comparación. Éste es el argumento por encaje de Atiyah y Singer; la exposición de referencia es [21, Capítulo 12, pp. 284–301].

### Atiyah y Singer: dos maneras de contar

El teorema anunciado por Michael Atiyah e Isadore Singer en la década de 1960 afirma que dos construcciones de naturaleza muy distinta producen el mismo entero. El índice analítico cuenta soluciones y obstrucciones de una ecuación elíptica; el índice topológico combina la clase del símbolo con operaciones de $K$–teoría. La igualdad no es sólo una fórmula de cálculo: explica por qué datos globales de una ecuación

permanecen invariantes bajo deformaciones y por qué operadores geométricos recuperan invariantes como la característica de Euler o géneros característicos [11].

## 19.1 El índice topológico

Fijemos una métrica riemanniana en $M$. El isomorfismo musical

$$\sharp_g \colon T^*M \longrightarrow TM, \qquad \xi \longmapsto \xi^{\sharp_g},$$

induce un isomorfismo $K_c^0(T^*M) \cong K_c^0(TM)$. Aunque se utilizará para escribir la construcción, la respuesta final no depende de la métrica: dos métricas están unidas por el segmento convexo $g_t = (1-t)g_0 + tg_1$, y los isomorfismos musicales correspondientes forman una homotopía propia de haces.

Por el teorema de encaje de Whitney, en la forma [21, Teorema 6.7(c), pp. 162–163], existe un encaje suave

$$j \colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$$

para algún $N$. Sea $\nu \longrightarrow M$ su haz normal, de rango $r = N - n$. El Teorema 2.12.3 proporciona abiertos $V \subseteq \nu$ y $U \subseteq \mathbb{R}^N$, que contienen respectivamente la sección cero y $j(M)$, y un difeomorfismo

$$\Theta \colon V \longrightarrow U, \qquad \Theta(x, 0) = j(x).$$

El diferencial $Tj \colon TM \hookrightarrow T\mathbb{R}^N$ también es un encaje. El diferencial de la proyección de $\nu$ define un haz vectorial real

$$T\pi_\nu \colon T\nu \longrightarrow TM$$

de rango $2r$: la fibra sobre $X \in T_xM$ está formada por los vectores tangentes a $\nu$ que se proyectan en $X$. Una conexión normal separa las direcciones horizontal y vertical y da una identificación

$$T\nu \cong \pi_{TM}^*(\nu \oplus \nu)$$

como haces sobre $TM$. Éste es el haz normal de $Tj(TM)$ en $T\mathbb{R}^N$ bajo el diferencial de una identificación tubular; en la notación de la Definición 18.3.1, $N(Tj) \cong (T\nu, T\pi_\nu)$. La identificación no es canónica, pero dos conexiones producen identificaciones homotópicas. En cambio, la estructura compleja

$$J(u, v) = (-v, u), \qquad (u, v) \in \nu_x \oplus \nu_x, \tag{19.1}$$

sí determina una orientación compleja canónica hasta homotopía. Por el Teorema 18.2.2, se obtiene el isomorfismo de Thom

$$\mathrm{Th}_{T\nu} \colon K_c^0(TM) \longrightarrow K_c^0(T\nu).$$

La vecindad tubular identifica un entorno de $TM$ en $T\mathbb{R}^N$ con un entorno de la sección cero de $T\nu$. La extensión por cero define entonces

$$\mathrm{ext} \colon K_c^0(T\nu) \longrightarrow K_c^0(T\mathbb{R}^N).$$

Para la estructura (19.1), la coordenada compleja es $u + iv$ y la clase de Thom de una recta es $\lambda_{\mathbb{C}} = -b$ con la

normalización de la Definición 18.1.1. Por ello, en rango $s$ aparecen simultáneamente

$$\lambda_{\mathbb{C}^s} = (-1)^s b^{\boxtimes s}, \qquad \mathrm{ch}_c(\lambda_{\mathbf{W}}) = (-1)^s \Phi_{\mathbf{W}}\left(\mathrm{Td}(\overline{\mathbf{W}})^{-1}\right). \tag{19.2}$$

La orientación compleja y la clase de Thom quedan fijadas por (19.2).

De acuerdo con la Definición 18.3.1, y usando la métrica euclidiana para identificar el último tangente con el cotangente, el *morfismo directo* del encaje es

$$j_! := \mathrm{ext} \circ \mathrm{Th}_{T\nu} \circ (\sharp_g)_* \colon K_c^0(T^*M) \longrightarrow K_c^0(T^*\mathbb{R}^N). \tag{19.3}$$

Sea $i_N \colon \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ la inclusión. Con las convenciones del Capítulo 18, si $b \in K_c^0(\mathbb{R}^2)$ es la clase de Bott y $\alpha_N \colon K_c^0(\mathbb{R}^{2N}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es el isomorfismo de periodicidad, entonces

$$(i_N)_!(1) = (-1)^N b^{\boxtimes N}, \qquad (i_N)_!^{-1} = (-1)^N \alpha_N. \tag{19.4}$$

Estas son precisamente las identidades (18.16) y (18.17). El signo procede de la estructura compleja (19.1): en rango uno, el homomorfismo de haces de Thom es $z = v + i\eta$, mientras que $b$ se normalizó mediante la función de pegado $z^{-1}$.

**Definición 19.1.1.** (Índice topológico) Sea $M$ una variedad suave cerrada y fijemos un encaje suave $j \colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. Para $a \in K_c^0(T^*M)$ definimos

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{t}}(a) := (i_N)_!^{-1}(j_! a) \in \mathbb{Z}. \tag{19.5}$$

La definición parece depender de la métrica, del encaje y de la vecindad tubular. La dependencia es sólo aparente.

**Proposición 19.1.2.** (Independencia de las elecciones) Sea $M$ una variedad suave cerrada. El entero de (19.5) no depende de la métrica, de la conexión normal, de la vecindad tubular ni del encaje $j \colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. Además,

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{t}} \colon K_c^0(T^*M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

es un homomorfismo.

La independencia por estabilización se formula en [21, Definición 12.11 y Ejercicio 12.10, p. 290]; una demostración desarrollada aparece en [92, Capítulo III, §13, Definición 13.1].

*Demostración.* La independencia de la métrica ya se obtuvo mediante la homotopía $g_t$. El espacio de conexiones en un haz fijo es afín; por lo tanto, dos conexiones normales están unidas por un segmento y dan clases de Thom homotópicas. Dos vecindades tubulares poseen, después de restringir sus dominios, una isotopía que fija la sección cero. La invariancia homotópica y la excisión de $K$–teoría con soporte compacto muestran que las extensiones por cero coinciden. Estos resultados topológicos se formulan en el Teorema A.6.1 del Apéndice A.

Queda comparar dos encajes $j_0 \colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^{N_0}$ y $j_1 \colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^{N_1}$. Sus estabilizaciones en $\mathbb{R}^{N_0+N_1}$ están unidas por la familia

$$j_\theta(x) = \big((\cos\theta) j_0(x), (\sin\theta) j_1(x)\big), \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Cada $j_\theta$ es un encaje. En los extremos esto es inmediato; si ambas componentes son no nulas, la inyectividad

de cualquiera de ellas prueba la inyectividad, y la misma observación aplicada a los diferenciales prueba que es una inmersión. Como $M$ es compacta, una inmersión inyectiva en un espacio Hausdorff es un encaje. La invariancia por isotopía da la igualdad de los morfismos directos estabilizados. Por la functorialidad del isomorfismo de Thom,

$$(\iota \circ j)_! = \iota_! \circ j_!$$

para una inclusión lineal $\iota$ entre espacios euclidianos. La misma identidad vale para las inclusiones de los puntos; por ello, los factores de Bott introducidos al estabilizar se cancelan al aplicar $(i_N)_!^{-1}$. Esto prueba la independencia del encaje. La aditividad se sigue de la aditividad del isomorfismo de Thom, de la extensión por cero y de $(i_N)_!^{-1}$. □

## 19.2 Excisión y producto del índice analítico

El paso de $M$ a una vecindad tubular requiere dos propiedades analíticas. La primera permite trasladar un símbolo soportado en un abierto sin alterar el índice; la segunda calcula el índice de un producto exterior.

**Proposición 19.2.1.** (Excisión analítica) Sean $X_0$ y $X_1$ variedades sin frontera y sea $U$ un abierto identificado con abiertos de ambas. Para $i = 0, 1$, sean $\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i \to X_i$ haces vectoriales complejos provistos de métricas fibradas hermitianas que se identifican sobre $U$, y sea $R_i \colon \mathbf{E}_i \to \mathbf{F}_i$ un homomorfismo de haces que induce un operador de multiplicación acotado y que, sobre $U$, corresponde a un mismo homomorfismo $R$. Supongamos que existe $L \Subset U$ tal que $R_i$ es invertible fuera de $L$ y un operador acotado

$$B \colon L^2(U, \mathbf{E}|_U) \longrightarrow L^2(U, \mathbf{F}|_U)$$

cuyo núcleo de Schwartz está soportado en $L \times L$ y es común bajo las identificaciones. Si

$$P_i := R_i + \operatorname{ext}_i B \colon L^2(X_i, \mathbf{E}_i) \longrightarrow L^2(X_i, \mathbf{F}_i)$$

es Fredholm para $i = 0, 1$, entonces

$$\operatorname{ind} P_0 = \operatorname{ind} P_1. \tag{19.6}$$

En particular, el índice analítico de una clase de $K_c^0(T^*U)$ extendida por cero sólo depende de una vecindad de la proyección de su soporte.

*Demostración.* Elijamos en $U$ una métrica riemanniana, su medida asociada y métricas hermitianas en los haces, y prolonguemos las métricas a $X_0$ y $X_1$. Así las identificaciones sobre $U$ preservan los productos internos $L^2$ y los adjuntos. Si $P_i u = 0$, entonces $R_i u = 0$ fuera de $L$; la invertibilidad de $R_i$ allí implica $\operatorname{supp} u \subseteq L$. El mismo argumento para $P_i^*$ muestra $\operatorname{supp} v \subseteq L$ para todo $v \in \ker P_i^*$.
Sobre $U$, los operadores $P_0$ y $P_1$ son el mismo operador $R+B$, y lo mismo vale para sus adjuntos. La restricción identifica por lo tanto $\ker P_0$ con $\ker P_1$ y $\ker P_0^*$ con $\ker P_1^*$. Restar sus dimensiones prueba (19.6).
Para una clase $a \in K_c^0(T^*U)$, la construcción de la extensión por cero permite, tras estabilizar, elegir un representante localizado de esta forma: si $A$ es una cuantización y $R$ su parte invertible fuera de un compacto, se toma $Q := R + \chi(A - R)\chi$ con $\chi \in C_c^\infty(U)$ igual a uno cerca del soporte. El operador $B := Q - R$ tiene núcleo soportado en un compacto de $U \times U$, y el argumento anterior se aplica a sus dos extensiones. □

Para formular la segunda propiedad conviene usar operadores graduados. Si $P\colon H_P^+ \longrightarrow H_P^-$ y $Q\colon H_Q^+ \longrightarrow H_Q^-$ son operadores cerrados densamente definidos, escribimos

$$D_P = \begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_Q = \begin{pmatrix} 0 & Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

El operador impar

$$D_P \widehat{\otimes} I + \Gamma_P \widehat{\otimes} D_Q \tag{19.7}$$

actúa en el producto tensorial graduado. Su componente de grado par a grado impar es

$$P\#Q = \begin{pmatrix} P\otimes I & -I\otimes Q^* \\ I\otimes Q & P^*\otimes I \end{pmatrix}. \tag{19.8}$$

**Teorema 19.2.2.** (Multiplicatividad analítica) Sean $P \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E}^+,\mathbf{E}^-)$ y $Q \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(N;\mathbf{F}^+,\mathbf{F}^-)$ operadores elípticos sobre variedades suaves cerradas $M$ y $N$, respectivamente. El cierre del operador $P\#Q$ de (19.8) es Fredholm y

$$\mathrm{ind_a}(P\#Q) = \mathrm{ind_a}(P)\,\mathrm{ind_a}(Q). \tag{19.9}$$

*Demostración.* Pongamos

$$\mathcal{H}_P := L^2(M,\mathbf{E}^+)\oplus L^2(M,\mathbf{E}^-), \qquad \mathcal{H}_Q := L^2(N,\mathbf{F}^+)\oplus L^2(N,\mathbf{F}^-), \qquad \mathcal{H} := \mathcal{H}_P \widehat{\otimes} \mathcal{H}_Q,$$

con sus sumas ortogonales y gradaciones naturales. La anticomutación $D_P\Gamma_P + \Gamma_P D_P = 0$ implica

$$\left(D_P\widehat{\otimes} I + \Gamma_P \widehat{\otimes} D_Q\right)^2 = D_P^2 \widehat{\otimes} I + I \widehat{\otimes} D_Q^2. \tag{19.10}$$

Para todo vector $u$ del producto tensorial algebraico de secciones suaves,

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(D_P^2\widehat{\otimes} I + I\widehat{\otimes} D_Q^2\right) u, u\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\qquad = \left\|(D_P\widehat{\otimes} I)u\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|(I\widehat{\otimes} D_Q)u\right\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Precisemos la clausura utilizada en estas identidades. La regularidad elíptica y Rellich implican que $D_P$ y $D_Q$, con dominio $H^1$ en sus respectivas bases, son autoadjuntos con resolvente compacto. Sean $(\lambda_j)_{j\in I}$ y $(\mu_k)_{k\in J}$ los valores propios distintos de $D_P^2$ y $D_Q^2$, respectivamente, y sean $V_j$ y $W_k$ sus espacios propios. Los conjuntos de índices $I, J$ son finitos o numerables. Cada espacio propio tiene dimensión finita y es estable por el operador correspondiente y por su graduación. En $V_j\widehat{\otimes}W_k$, el operador de (19.7) es una matriz autoadjunta cuyo cuadrado es $(\lambda_j+\mu_k)I$.
La suma ortogonal de estas matrices es autoadjunta en el dominio

$$\left\{ \mathbf{u} = \sum_{(j,k)\in I\times J} \mathbf{u}_{jk} \;\middle|\; \sum_{(j,k)\in I\times J} (\lambda_j+\mu_k)\|\mathbf{u}_{jk}\|^2 < \infty \right\},$$

donde la primera suma converge en $\mathcal{H}$. Los vectores con un número finito de componentes forman un núcleo para la norma gráfica, por truncamiento de la segunda suma. Esto prueba que la suma ortogonal es

la clausura del producto inicialmente definido en el producto tensorial algebraico de secciones suaves. Para cada $R > 0$ sólo hay un número finito de pares $(j,k)$ con $\lambda_j + \mu_k \le R$, porque ambas sucesiones espectrales tienen esa propiedad. El cero tiene, por tanto, multiplicidad finita y está separado del resto del espectro. El producto es Fredholm. Los únicos bloques que contribuyen a su núcleo son los que satisfacen $\lambda_j = \mu_k = 0$. Por ello,

$$\ker\left(D_P \widehat{\otimes} I + \Gamma_P \widehat{\otimes} D_Q\right) = \ker D_P \widehat{\otimes} \ker D_Q \subset \mathcal{H}.$$

Separando las componentes pares e impares obtenemos

$$\ker(P\#Q) \cong (\ker P \otimes \ker Q) \oplus (\ker P^* \otimes \ker Q^*),$$
$$\ker(P\#Q)^* \cong (\ker P^* \otimes \ker Q) \oplus (\ker P \otimes \ker Q^*).$$

Al restar dimensiones resulta

$$\left(\dim\ker P - \dim\ker P^*\right)\left(\dim\ker Q - \dim\ker Q^*\right),$$

que es (19.9). □

## 19.3 El operador normal de Bott

La multiplicatividad anterior debe aplicarse de manera uniforme en las fibras del haz normal. Comenzamos con el modelo en $\mathbb{R}^r$. En $\Lambda^*\mathbb{C}^r$ sean $\varepsilon_j$ la multiplicación exterior por el $j$–ésimo vector de la base e $\iota_j = \varepsilon_j^*$ la contracción. Sobre la clase de Schwartz definimos

$$\mathcal{B}_r = \sum_{j=1}^{r} \left( \varepsilon_j \left( \frac{\partial}{\partial v_j} + v_j \right) + \iota_j \left( -\frac{\partial}{\partial v_j} + v_j \right) \right). \tag{19.11}$$

Es un operador impar y simétrico. Denotamos por $\mathcal{B}_r^+$ su componente de formas pares a formas impares.

**Lema 19.3.1.** (Núcleo e índice del operador de Bott) La clausura de $\mathcal{B}_r$ es autoadjunta, tiene resolvente compacto y

$$\ker \mathcal{B}_r = \mathbb{C} e^{-\frac{|v|^2}{2}} \otimes \Lambda^0 \mathbb{C}^r.$$

En particular,

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(\mathcal{B}_r^+) = 1.$$

Su símbolo total en las variables $(v,\eta) \in \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^r$ es

$$\beta_r(v,\eta) = \varepsilon(v + i\eta) + \varepsilon(v + i\eta)^*, \tag{19.12}$$

donde $\varepsilon(z) = \sum_{j=1}^{r} z_j \varepsilon_j$ y $\varepsilon(z)^* = \sum_{j=1}^{r} \overline{z_j} \iota_j$. Su componente de grado par a grado impar representa la clase de Thom de $\mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^r$ con la estructura compleja $J(v,\eta) = (-\eta, v)$.

*Demostración.* Las relaciones

$$\varepsilon_i\varepsilon_j+\varepsilon_j\varepsilon_i=0,\qquad \iota_i\iota_j+\iota_j\iota_i=0,\qquad \varepsilon_i\iota_j+\iota_j\varepsilon_i=\delta_{ij}I$$

dan, en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^r,\Lambda^*\mathbb{C}^r)$,

$$\mathcal{B}_r^2=-\Delta_v+|v|^2-r+2\mathcal{N},\qquad \mathcal{N}=\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_j\iota_j. \tag{19.13}$$

El operador $\mathcal{N}$ actúa por multiplicación por $q$ en $\Lambda^q\mathbb{C}^r$. El oscilador escalar $-\Delta_v+|v|^2$ tiene autovalores $r+2|\alpha|$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^r$, y su estado fundamental es $e^{-\frac{|v|^2}{2}}$. Por lo tanto, los autovalores de (19.13) son $2|\alpha|+2q$. El cero aparece una sola vez, para $\alpha=0$ y $q=0$. La base de funciones de Hermite prueba a la vez la esencial autoadjunción y la compacidad del resolvente.

La parte de orden uno junto con el potencial lineal da (19.12). Como

$$\beta_r(v,\eta)^2=(|v|^2+|\eta|^2)I,$$

su restricción a la esfera es un isomorfismo entre las partes pares e impares. Para compararla con el signo de la Definición 18.2.1, ponemos $z=v+i\eta$ y consideramos $c_t(z)=\varepsilon(z)+e^{i\pi t}\varepsilon(z)^*$, $0\le t\le 1$. Las relaciones de creación y aniquilación dan $c_t(z)^2=e^{i\pi t}|z|^2I$. Por ello las componentes pares a impares son invertibles cuando $z\neq 0$ y unen el símbolo anterior con $\varepsilon(z)-\varepsilon(z)^*$, que define la clase de Thom. La normalización concuerda con (19.4): para $r=1$, el homomorfismo de haces es $v+i\eta$ y representa $-b$. □

La fórmula (19.11) es invariante por la acción natural de $O(r)$. En efecto, la derivada, la multiplicación por $v$ y las operaciones exterior e interior se transforman simultáneamente. Esta equivarianza es la que permite pasar del modelo vectorial al haz normal sin escoger marcos globales.

La existencia de un representante global en la compactificación de la fibra usa la normalización equivariante de Bott para la representación estándar de $O(r)$, formulada en el Teorema A.5.2. El resultado proporciona la clase y su índice en $R(O(r))$; el lema siguiente desarrolla la normalización analítica que necesitaremos y la adapta al haz normal. Antes de enunciarlo, precisemos la compactificación empleada en ese paso.

Sea $G=O(r)$ y sea $S^r=\mathbb{R}^r\cup\{\infty\}$, con la acción de $G$ que fija $\infty$. El haz de marcos ortonormales de $\nu$ se denotará por $\mathcal{P}_\nu\longrightarrow M$. La compactificación esférica fibra a fibra es la variedad cerrada

$$\widehat{\nu}:=\mathcal{P}_\nu\times_G S^r,\qquad \widehat{\pi}:\widehat{\nu}\longrightarrow M. \tag{19.14}$$

La sección $\mathbf{s}_\infty=\mathcal{P}_\nu\times_G\{\infty\}$ es el complemento de la copia abierta de $\nu$ en $\widehat{\nu}$.

**Lema 19.3.2.** (Representante normal equivariante) Sea $S^r$ la esfera suave cerrada y sea $G=O(r)$ con la acción descrita arriba. Existen haces complejos $\mathbf{W}^+,\mathbf{W}^-\longrightarrow S^r$ con acción de $G$ y un operador pseudodiferencial clásico elíptico de orden uno y $G$–equivariante

$$B\colon\Gamma(S^r,\mathbf{W}^+)\longrightarrow\Gamma(S^r,\mathbf{W}^-)$$

tal que su clase de símbolo es la extensión por cero desde $T^*\mathbb{R}^r$ de la clase de (19.12). La igualdad vale en $K$–teoría equivariante. Además, después de modificar $B$ por un operador suavizante $G$–equivariante, puede

suponerse que

$$\ker B = \mathbb{C}, \qquad \ker B^* = 0, \tag{19.15}$$

donde $G$ actúa trivialmente en $\mathbb{C}$.

*Demostración.* El transformado acotado

$$F_r^+ = \mathcal{B}_r^+ \left(I + \mathcal{B}_r^- \mathcal{B}_r^+\right)^{-\frac{1}{2}}$$

es Fredholm y $G$–equivariante. El cálculo del Lema 19.3.1 muestra, no sólo después de tomar dimensiones sino como representaciones de $G$, que

$$[\ker F_r^+] - [\ker (F_r^+)^*] = [\mathbb{C}] \quad \text{en } R(G). \tag{19.16}$$

Para pasar al compactificado aplicamos el Teorema A.5.2 del Apéndice A. Si $i : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^r$, ese resultado proporciona un representante elíptico $G$–equivariante de $\beta_r = i_!(1)$ sobre $S^r$, elemental cerca de $\infty$, y establece

$$\mathrm{Ind}_G(\beta_r) = [\mathbb{C}] \quad \text{en } R(G), \tag{19.17}$$

con la representación trivial en el miembro derecho.

La normalización en (19.17) coincide con la adoptada aquí. En efecto, el representante local es (19.12), y (19.16) calcula su índice como representación, no sólo su dimensión: la gaussiana es fija por $O(r)$ y el conúcleo es cero. Así se descarta la representación determinante y se fija el miembro derecho de (19.17).

Sea $B_0$ una cuantización de orden cero del símbolo proporcionado por ese teorema. Podemos hacerla $G$–equivariante promediando sus conjugados respecto de la medida de Haar normalizada de $G$: el símbolo principal permanece igual porque es equivariante. Entonces

$$[\ker B_0] - [\ker B_0^*] = [\mathbb{C}] \quad \text{en } R(G).$$

Como $G$ es compacto, sus representaciones finito–dimensionales son semisimples. La igualdad anterior proporciona una descomposición $G$–equivariante

$$\ker B_0 \cong \mathbb{C} \oplus \ker B_0^*.$$

Sea $K$ el operador que identifica el segundo sumando con $\ker B_0^*$ y es cero en su complemento ortogonal. Es de rango finito y $G$–equivariante. La regularidad elíptica de ambos núcleos muestra que su núcleo integral es suave. El operador $B_1 := B_0 + K$ es sobreyectivo: $B_0$ identifica $(\ker B_0)^\perp$ con su imagen cerrada y $K$ cubre el complemento ortogonal de esa imagen. Su núcleo es la primera copia de $\mathbb{C}$. Finalmente se compone a la derecha con el operador positivo, invertible y $G$–equivariante

$$\Lambda := \left(I + (\nabla^{\mathbf{W}^+})^* \nabla^{\mathbf{W}^+}\right)^{1/2},$$

de orden uno, donde se usan la métrica redonda y una métrica hermitiana y una conexión $G$–invariantes en $\mathbf{W}^+$. El mapeo $\Lambda : H^1(S^r, \mathbf{W}^+) \to L^2(S^r, \mathbf{W}^+)$ es un isomorfismo por el cálculo de potencias del Capítulo 15. Por ello, $B := B_1 \Lambda$ tiene la misma imagen que $B_1$ y $\ker B = \Lambda^{-1}(\ker B_1)$. Esta identificación es $G$–equivariante y conserva el núcleo trivial unidimensional. El símbolo principal positivo de $\Lambda$ no cambia la clase del

símbolo después de normalizar el orden. Así se obtiene el operador $B$ del enunciado. □

Fijemos una métrica $h_\nu$ en $\nu$. Una conexión métrica en $\nu$ divide el cotangente de $\widehat{\nu}$ en las partes horizontal y vertical,

$$T^*\widehat{\nu} = \mathbf{H}^* \oplus \mathbf{V}^*, \qquad \mathbf{H}^* \cong \widehat{\pi}^* T^*M, \qquad \mathbf{V}^* \cong \boldsymbol{\mathcal{P}}_\nu \times_G T^*S^r. \tag{19.18}$$

Denotamos por $|\cdot|_{\mathbf{H}}$ y $|\cdot|_{\mathbf{V}}$ las normas inducidas en $\mathbf{H}^*$ y $\mathbf{V}^*$, y por $|\cdot|_{\widehat{g}}$ la norma de la suma ortogonal. El operador $B$ induce un operador vertical $B_\nu$ en $\widehat{\nu}$, entre los haces asociados

$$\mathbf{W}^{\pm}_\nu := \boldsymbol{\mathcal{P}}_\nu \times_G \mathbf{W}^{\pm} \longrightarrow \widehat{\nu}.$$

Su núcleo es la recta trivial sobre $M$ y su conúcleo es cero, por (19.15).

La construcción del producto utilizará cortes que dependen del operador vertical. Estos cortes tienen dos propiedades que necesitaremos a la vez: conservan sus subespacios espectrales y convierten los productos locales en operadores clásicos sobre la variedad total. Comenzamos precisando el dominio que corresponde a estos últimos.

**Lema 19.3.3.** (Dominio de un operador clásico elíptico) Sea $X$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to X$ haces vectoriales complejos provistos de métricas fibradas hermitianas. Si $A \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(X; \mathbf{E}, \mathbf{F})$ es elíptico, su cierre en $L^2$ tiene dominio $H^1(X, \mathbf{E})$ y el dominio de su adjunto hilbertiano es $H^1(X, \mathbf{F})$. Existen constantes $C_0, C_1 > 0$ tales que, para toda $\mathbf{u} \in H^1(X, \mathbf{E})$,

$$\|A\mathbf{u}\|_{L^2(X,\mathbf{F})} \leq C_0 \|\mathbf{u}\|_{H^1(X,\mathbf{E})}, \tag{19.19}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(X,\mathbf{E})} \leq C_1 \left( \|A\mathbf{u}\|_{L^2(X,\mathbf{F})} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(X,\mathbf{E})} \right). \tag{19.20}$$

Las afirmaciones correspondientes valen para el adjunto formal. En particular, un operador clásico elíptico de orden uno que sea formalmente autoadjunto es autoadjunto con dominio $H^1$.

*Demostración.* La primera desigualdad es el Corolario 15.6.6. Una parametrix $Q \in \Psi^{-1}_{\mathrm{cl}}(X; \mathbf{F}, \mathbf{E})$ satisface $QA = I - K$, donde $K$ es regularizante. Aplicando la identidad $\mathbf{u} = QA\mathbf{u} + K\mathbf{u}$ y el mismo corolario obtenemos (19.20). Si $\mathbf{u}_j \in \Gamma(\mathbf{E})$ converge a $\mathbf{u}$ en $H^1(X, \mathbf{E})$, la primera cota da $A\mathbf{u}_j \to A\mathbf{u}$ en $L^2(X, \mathbf{F})$; por tanto, $\mathbf{u}$ pertenece al dominio del cierre. Recíprocamente, si $(\mathbf{u}_j, A\mathbf{u}_j)$ converge en $L^2(X, \mathbf{E}) \times L^2(X, \mathbf{F})$ a $(\mathbf{u}, \mathbf{f})$, la segunda cota aplicada a $\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k$ prueba que $(\mathbf{u}_j)$ es de Cauchy en $H^1(X, \mathbf{E})$. Su límite en ese espacio coincide con $\mathbf{u}$ por la inclusión continua en $L^2(X, \mathbf{E})$; la primera cota identifica $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Esto prueba las dos inclusiones del dominio.

Si $\mathbf{v}$ pertenece al dominio del adjunto hilbertiano, la identidad que define ese adjunto dice que $A_h^*\mathbf{v}$ pertenece a $L^2$ en sentido distribucional. La parametrix del operador clásico elíptico $A_h^*$ da entonces $\mathbf{v} \in H^1(X, \mathbf{F})$. Recíprocamente, sea $\mathbf{v} \in H^1(X, \mathbf{F})$ y tomemos $\mathbf{v}_j \in \Gamma(\mathbf{F})$ con $\mathbf{v}_j \to \mathbf{v}$ en $H^1(X, \mathbf{F})$. La cota de mapeo para $A_h^*$ da $A_h^*\mathbf{v}_j \to A_h^*\mathbf{v}$ en $L^2(X, \mathbf{E})$. Para cada $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$, Cauchy–Schwarz permite tomar límites en

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle_{L^2(X,\mathbf{F})} = \langle \mathbf{u}, A_h^*\mathbf{v}_j \rangle_{L^2(X,\mathbf{E})}.$$

La identidad resultante y $|\langle \mathbf{u}, A_h^*\mathbf{v} \rangle_{L^2(X,\mathbf{E})}| \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(X,\mathbf{E})} \|A_h^*\mathbf{v}\|_{L^2(X,\mathbf{E})}$ son precisamente la definición del dominio del adjunto hilbertiano. Ambos operadores coinciden allí. Si $A_h^* = A$, sus dominios y acciones coinciden, que es la autoadjunción afirmada. □

**Lema 19.3.4.** (Compacidad desde el dominio de primer orden) Sean $X$ una variedad suave cerrada y $\mathbf{E}, \mathbf{F} \to X$ haces vectoriales complejos provistos de métricas fibradas hermitianas. Si $T : L^2(X, \mathbf{E}) \to L^2(X, \mathbf{F})$ es acotado, su restricción es compacta como mapeo

$$T : H^1(X, \mathbf{E}) \longrightarrow L^2(X, \mathbf{F}).$$

Esto se aplica, en particular, a los operadores clásicos de orden cero.

*Demostración.* La restricción es la composición de la inclusión compacta $H^1(X, \mathbf{E}) \hookrightarrow L^2(X, \mathbf{E})$, dada por el Teorema 9.2.2, con el operador acotado $T$. Para operadores clásicos de orden cero, la acotación en $L^2$ es el Corolario 15.6.6. □

**Lema 19.3.5.** (Cortes espectrales en un producto local) Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $Z$ una variedad suave cerrada y sea $\mathbf{W} \to Z$ un haz vectorial complejo provisto de una métrica fibrada hermitiana. Supongamos que $D \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(Z; \mathbf{W}, \mathbf{W})$ es elíptico y autoadjunto con dominio $H^1(Z, \mathbf{W})$. Pongamos $L = I + D^2$ y denotemos por $b_1(z, \eta)$ el símbolo principal de $D$. Fijemos $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$0 \le h \le 1, \qquad h(t) = 1 \quad (-1 \le t \le 1), \qquad h(t) = 0 \quad (t \ge 4).$$

Para $R \ge 1$ definamos $\Phi_R$ mediante la transformada de Fourier parcial en $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\widehat{\Phi_R \mathbf{u}}(\xi) = h\left(\frac{R^2 L}{1 + |\xi|^2}\right) \widehat{\mathbf{u}}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{19.21}$$

Es un operador autoadjunto y $0 \le \Phi_R \le I$ en $L^2(\mathbb{R}^n \times Z, \mathbf{W})$. Después de multiplicar a izquierda y derecha por funciones suaves de soporte compacto en $x$, los operadores

$$\Phi_R, \qquad (P \otimes I)\Phi_R, \qquad \Phi_R(P \otimes I), \qquad (I \otimes D)(I - \Phi_R)$$

son clásicos en las variables conjuntas $(x, z)$, de órdenes $0, 1, 1, 1$, respectivamente, para todo operador clásico $P$ de orden uno en $\mathbb{R}^n$ entre haces triviales de rango finito. En las fórmulas se entienden las identidades en los factores adicionales.
El símbolo principal del corte es

$$f_R(z; \xi, \eta) = h\left(\frac{R^2 b_1(z, \eta)^2}{|\xi|^2}\right) \quad (\xi \neq 0), \tag{19.22}$$

prolongado por cero cuando $\xi = 0$ y $\eta \neq 0$. Cerca del eje $\eta = 0$, con $\xi \neq 0$, es la identidad. Los otros tres símbolos principales son $p_1 f_R$, $f_R p_1$ y $b_1(I - f_R)$.
Todo operador acotado en la variable vertical que conmute con el resolvente de $D$ conmuta con $\Phi_R$. También conmuta con $\Phi_R$ cualquier graduación que anticomute con $D$. Si un grupo compacto actúa unitariamente en $\mathbf{W}$ y $D$ es equivariante, los cortes son equivariantes.

*Demostración.* Por el teorema espectral, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ el operador $h(R^2 L/(1 + |\xi|^2))$ es una contracción positiva y autoadjunta. Plancherel en la variable $x$ prueba las mismas propiedades para $\Phi_R$. Las conmuta-

ciones se siguen del cálculo funcional; si $\Gamma D = -D\Gamma$, entonces $\Gamma$ conmuta con $L$ y con todas sus funciones espectrales.

Probemos la afirmación sobre símbolos conjuntos. Usaremos la construcción de la parametrix del resolvente de la Proposición 15.7.6, conservando la dependencia de las cotas en la distancia al eje real. Escribamos

$$\tau = R^{-1}(1+|\xi|^2)^{1/2}, \qquad h\left(\frac{R^2 L}{1+|\xi|^2}\right) = h(\tau^{-2}L).$$

En una carta de $Z$ el símbolo de $L$ tiene una expansión $\ell \sim \sum_{j=0}^{\infty} \ell_{2-j}$, cuyo primer término es $\ell_2 = b_1^2$. Es una matriz hermitiana positiva para $\eta \neq 0$. Por compacidad y elipticidad hay constantes $c_Z, C_Z > 0$ tales que

$$c_Z|\eta|^2 I \leq \ell_2(z,\eta) \leq C_Z|\eta|^2 I. \tag{19.23}$$

Para integrar el resolvente con una función suave, fijemos $N \in \mathbb{N}$ y un corte $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ igual a uno cerca de cero. Con $w = a + it$ pongamos

$$\widetilde{h}_N(a+it) = \vartheta(t) \sum_{j=0}^{N} \frac{(it)^j}{j!} h^{(j)}(a).$$

El operador $\partial_{\overline{w}} = \frac{1}{2}(\partial_a + i\partial_t)$ satisface $|\partial_{\overline{w}} \widetilde{h}_N(a+it)| \leq C_N |t|^N$ para $|t|$ suficientemente pequeño. La fórmula de Cauchy–Green, primero para un número real y después integrada respecto de la resolución espectral de $L$, da

$$h(\tau^{-2}L) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{\overline{w}} \widetilde{h}_N(w)\, \tau^2 (L - \tau^2 w)^{-1}\, da\, dt. \tag{19.24}$$

El integrando se considera para $t \neq 0$; el conjunto $t = 0$ tiene medida cero. La cota espectral

$$\|\tau^2 (L - \tau^2 w)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(Z,\mathbf{W}))} \leq |t|^{-1}$$

justifica la integral en norma de operadores cuando $N \geq 1$.

La recurrencia simbólica del Capítulo 15 se aplica ahora a $L - \tau^2 w$. En la región $\eta \neq 0$ comienza con

$$r_{-2} = (\ell_2 - \tau^2 w)^{-1}$$

y, para $j \in \mathbb{N}$, continúa mediante

$$r_{-2-j} = -r_{-2} \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{N}_0,\ \gamma \in \mathbb{N}_0^{\dim Z} \\ a+b+|\gamma| = j,\ b<j}} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} (\partial_\eta^\gamma \ell_{2-a})(\partial_z^\gamma r_{-2-b}). \tag{19.25}$$

En un anillo donde $|\eta|$ y $\tau$ son comparables, todas las derivadas de $r_{-2-j}$ satisfacen las estimaciones con parámetro de orden $-2-j$. Sus constantes están acotadas por una potencia de $|t|^{-1}$: esto se ve primero para $r_{-2}$ a partir de (19.23) y, al derivar la inversa, cada nueva derivada añade un número finito de factores $r_{-2}$. La suma finita de (19.25) conserva esa propiedad. En concreto, para cada conjunto finito de derivadas existe un entero $m_N$ que acota la potencia de $|t|^{-1}$ necesaria tanto en la parametrix finita como en su resto.

Elegimos en (19.24) una extensión de orden mayor que $m_N + 2$. Podemos entonces integrar cada término y su resto. Las identidades de parametrix a izquierda y derecha, seguidas de la cota del resolvente exacto,

controlan la diferencia entre ambos resolventes: si $(L-\tau^2 w)Q_N = I - S_N$, entonces

$$(L-\tau^2 w)^{-1} - Q_N = (L-\tau^2 w)^{-1} S_N.$$

Se elige la longitud de la expansión de modo que $S_N$ tenga el orden negativo requerido antes de integrar. Esto produce, en el anillo $|\eta| \asymp \tau$, una expansión clásica cuyo primer término es $h(\ell_2/\tau^2)$.

Veamos también qué sucede fuera de ese anillo. Cada término de la recurrencia es una función racional de $w$; sus polos están en el espectro de $\ell_2/\tau^2$. Si $|\eta|/\tau$ es suficientemente pequeño, ese espectro está en un intervalo donde $h = 1$. La integral del primer término es entonces $I$. Las de los términos siguientes se anulan: son integrales de productos de resolventes cuyo desarrollo en $w$ comienza con $w^{-2}$, y la integral de una función constante alrededor de todos sus polos es cero. Este argumento sigue siendo válido para matrices que no conmutan, pues se aplica entrada por entrada a la función racional completa. Si $|\eta|/\tau$ es suficientemente grande, $h$ es cero cerca de todos los polos y todas las integrales se anulan. Al introducir cortes en estas tres regiones, los términos que derivan los cortes quedan en los anillos de transición.

Para controlar también los restos junto al eje $\eta = 0$, separamos las frecuencias $|\eta| \le 2\tau^{1/2}$, suponiendo primero $\tau \ge 1$. Sea $Q_\tau$ una localización vertical cuyo símbolo sea uno para $|\eta| \le \tau^{1/2}$ y cero para $|\eta| \ge 2\tau^{1/2}$, con los cortes espaciales de la carta. Para $N \in \mathbb{N}$ definamos

$$g_N(t) = \frac{h(t)-1}{t^N} \quad (t>0), \qquad g_N(0) = 0.$$

Esta función es suave y acotada en $[0,+\infty)$, pues su numerador se anula cerca de cero. El cálculo espectral da la identidad exacta

$$\big(h(\tau^{-2}L) - I\big)Q_\tau = \tau^{-2N} g_N(\tau^{-2}L) L^N Q_\tau.$$

Las normas de Sobolev verticales pueden expresarse mediante potencias de $L$, por la Proposición 15.7.10. Por tanto, $g_N(\tau^{-2}L)$ es uniformemente acotado en cada uno de esos espacios. Para $s \in \mathbb{N}_0$, el cálculo de símbolos y la cota $\langle\eta\rangle \le C\tau^{1/2}$ en el soporte del corte dan

$$\|L^N Q_\tau\|_{\mathcal{L}(H^{-s}(Z,\mathbf{W}),H^s(Z,\mathbf{W}))} \le C_{N,s}\tau^{N+s}.$$

En efecto, al conjugar por las potencias de $L$ que definen ambas normas aparece un símbolo de orden $2N+2s$ con ese soporte; dividirlo por $\tau^{N+s}$ deja acotadas las seminormas de orden cero necesarias para la estimación en $L^2$. Se obtiene así

$$\|\big(h(\tau^{-2}L) - I\big)Q_\tau\|_{\mathcal{L}(H^{-s}(Z,\mathbf{W}),H^s(Z,\mathbf{W}))} \le C_{N,s}\tau^{-N+s}.$$

El entero $N$ es arbitrario. Al derivar en $\tau$, aparecen derivadas del corte y funciones obtenidas de $g_N$ aplicando $t\partial_t$; estas últimas siguen siendo acotadas. La misma elección de $N$ controla, por consiguiente, cualquier número prefijado de derivadas del parámetro.

En la región complementaria $|\eta| \ge \tau^{1/2}$ se usan las estimaciones débiles del resolvente del capítulo de operadores pseudodiferenciales. Para cada conjunto prefijado de derivadas, los restos son acotados por una potencia fija de $1+\tau$, multiplicada por una potencia negativa de $\langle\eta\rangle$ que se hace tan grande como se quiera aumentando la longitud de la parametrix. La conversión en una cota conjunta se ve en la desigualdad

$$(1+\tau)^a\langle\eta\rangle^{-J} \le C_{a,K}\langle(\tau,\eta)\rangle^{-K}, \qquad |\eta| \ge \tau^{1/2}, \quad \tau \ge 1, \quad J \ge 2(a+K),$$

donde $a, K \geq 0$. Si $|\eta| \leq \tau$, se usa $\langle \eta \rangle^{-J} \leq \tau^{-J/2}$; si $|\eta| \geq \tau$, se absorbe $(1+\tau)^a$ en $\langle \eta \rangle^a$. El orden de la extensión casi analítica se aumenta después de fijar $J$, para integrar las potencias de $|t|^{-1}$ que hayan aparecido. Los derivados de $Q_\tau$ están en esta misma región, por lo que las dos localizaciones se recomponen con las cotas indicadas. Finalmente, para $R^{-1} \leq \tau \leq 1$ el parámetro horizontal permanece acotado; el cálculo espectral suavizante en la variable vertical y la localización horizontal dan residuos suaves conjuntos. Esto justifica, también para los restos, que en los conos extremos el símbolo sea respectivamente $I$ y $0$ módulo orden arbitrariamente negativo.

Más precisamente, después de localizar en $x$ y en una carta de $Z$, obtenemos un símbolo $f$ con componentes homogéneas $f_{-j}$, prolongadas mediante un corte común cerca del origen. Para $J \in \mathbb{N}$ y multiíndices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^{\dim Z}$ y $\delta \in \mathbb{N}_0^n$ se cumple

$$\left\| \partial_z^\alpha \partial_\eta^\beta \partial_\xi^\delta \left( f - \sum_{j=0}^{J-1} f_{-j} \right) \right\|_{\mathrm{op}} \leq C_{J,\alpha,\beta,\delta,R} \langle (\xi, \eta) \rangle^{-J-|\beta|-|\delta|}. \tag{19.26}$$

La misma estimación permite derivadas en $x$ después de insertar los cortes. Los residuos de núcleo suave satisfacen estas cotas con cualquier $J$: se usa la identidad con $S_N$ entre espacios de Sobolev verticales de órdenes arbitrarios y se aplica la regularidad del núcleo establecida en el Capítulo 15. Las derivadas en $\xi$ se obtienen derivando el resolvente y $\tau$ antes de integrar. El término principal, al reemplazar $1 + |\xi|^2$ por su parte homogénea, es (19.22). Sus prolongaciones en los ejes son suaves porque $h$ es constante en los intervalos indicados.

En la cuantización de Kohn–Nirenberg, $P$ actúa sólo en $x$ y el símbolo del corte no depende de $x$ antes de localizar. El símbolo de $(P \otimes I)\Phi_R$ es por tanto el producto $p(x,\xi) f(z,\eta,\xi)$. En el cono donde $|\eta|$ domina a $|\xi|$, el segundo factor tiene orden arbitrariamente negativo; en su complemento, $|\xi|$ controla la frecuencia conjunta. Las estimaciones de símbolos de $p$ y (19.26) prueban que el producto tiene orden conjunto uno y es clásico. La afirmación para $\Phi_R(P \otimes I)$ se obtiene tomando adjuntos.

Para $D(I - \Phi_R)$ se utiliza la composición vertical con parámetro. En el cono donde $|\xi|$ domina a $|\eta|$, el símbolo de $I - \Phi_R$ tiene orden arbitrariamente negativo. En el cono restante, $|\eta|$ controla la frecuencia conjunta y se aplican las estimaciones del símbolo de $D$. Resulta un símbolo clásico conjunto de orden uno, con parte principal $b_1(I - f_R)$. Las localizaciones y los cambios de coordenadas son los del cálculo clásico ya construido, lo cual concluye la prueba. □

**Lema 19.3.6.** (Símbolo del producto y clase normal de Thom) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sea $a = [\mathbf{E}^+, \mathbf{E}^-, p] \in K_c^0(T^*M)$, donde $\mathbf{E}^+, \mathbf{E}^- \to M$ son haces vectoriales complejos suaves. Usemos la conexión normal, las métricas y la compactificación $\nu \subset \widehat{\nu}$ fijadas arriba. Denotemos por $q : T^*\nu \to M$ la proyección y pongamos

$$\mathbf{\Lambda}_\nu^+ = q^* \left( \bigoplus_{\substack{j \in \{0,\dots,r\} \\ j \text{ par}}} \Lambda^j(\nu \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \right), \qquad \mathbf{\Lambda}_\nu^- = q^* \left( \bigoplus_{\substack{j \in \{0,\dots,r\} \\ j \text{ impar}}} \Lambda^j(\nu \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \right).$$

La componente de grado par a impar del homomorfismo normal de Koszul es

$$\beta^+(v,\eta) = \big( \varepsilon(v + i\eta^\sharp) + \iota(v - i\eta^\sharp) \big) \Big|_{\mathbf{\Lambda}_\nu^+}.$$

En $T^*\nu$, la matriz graduada

$$\mathbf{c}(x,v;\xi,\eta)=\begin{pmatrix} p(x,\xi)\otimes I & -I\otimes\beta^+(v,\eta)^* \\ I\otimes\beta^+(v,\eta) & p(x,\xi)^*\otimes I\end{pmatrix}, \tag{19.27}$$

es invertible fuera de un compacto. Su clase, extendida desde ese abierto, satisface

$$\operatorname{ext}^{T^*\widehat{\nu}}_{T^*\nu}[\mathbf{c}]=\operatorname{ext}^{T^*\widehat{\nu}}_{T^*\nu}\operatorname{Th}_{T\nu}\big((\sharp_g)_*a\big)\quad\text{en } K^0_c(T^*\widehat{\nu}). \tag{19.28}$$

*Demostración.* La conexión identifica, sobre $TM$, el haz normal $T\nu$ con $\pi^*_{TM}(\nu\oplus\nu)$. La métrica identifica la segunda copia de $\nu$ con las covariables verticales y la estructura compleja de (19.1) escribe su coordenada como

$$z=v+i\eta^\sharp,\qquad J(v,\eta^\sharp)=(-\eta^\sharp,v).$$

El homomorfismo normal de Koszul en el haz exterior completo es $\beta(v,\eta)=\varepsilon(z)+\iota(\overline{z})$. Es autoadjunto e impar y satisface

$$\beta^2=(|v|^2+|\eta|^2)I,\qquad(\beta^+)^*\beta^+=(|v|^2+|\eta|^2)I\quad\text{en }\mathbf{\Lambda}^+_\nu.$$

La identidad correspondiente vale en el grado impar. Así, $\beta^+$ es invertible fuera de la sección cero. Estas fórmulas se conservan bajo los cambios de marco de $O(r)$ y definen homomorfismos globales de los haces indicados. El producto graduado del complejo horizontal $(\mathbf{E}^+,\mathbf{E}^-,p)$ con este complejo normal tiene como partes par e impar, respectivamente,

$$(q^*\mathbf{E}^+\otimes\mathbf{\Lambda}^+_\nu)\oplus(q^*\mathbf{E}^-\otimes\mathbf{\Lambda}^-_\nu),\qquad(q^*\mathbf{E}^-\otimes\mathbf{\Lambda}^+_\nu)\oplus(q^*\mathbf{E}^+\otimes\mathbf{\Lambda}^-_\nu),$$

y su diferencial impar de grado par a impar es exactamente la matriz (19.27). Por la definición del producto de complejos y del isomorfismo de Thom, su clase es $\operatorname{Th}_{T\nu}((\sharp_g)_*a)$, identificando $T\nu$ con $T^*\nu$ mediante las métricas fijadas. Para comprobar el soporte, el producto de la matriz con su adjunta tiene bloques diagonales

$$p^*p\otimes I+(|v|^2+|\eta|^2)I,\qquad pp^*\otimes I+(|v|^2+|\eta|^2)I.$$

Por tanto, la matriz sólo puede fallar en ser invertible cuando $v=\eta=0$ y $p(x,\xi)$ no es invertible. Este último conjunto es compacto porque $a$ es una clase con soporte compacto.

El orden de los factores es horizontal primero y normal después; el signo del bloque superior derecho es el signo de Koszul correspondiente y no introduce un signo adicional en la clase. En rango complejo uno, la coordenada anterior da la convención $\lambda_{\mathbb{C}}=-b$ de (18.7); por multiplicatividad fija a la vez la orientación y el signo en todo rango. Finalmente, la clase de la matriz tiene soporte compacto en $T^*\nu$. El morfismo de extensión por cero para el abierto $T^*\nu\subset T^*\widehat{\nu}$ produce, por definición, exactamente el miembro derecho de (19.28). □

Los cortes espectrales permiten efectuar el producto sin abandonar el cálculo clásico sobre $\widehat{\nu}$. El núcleo vertical proporciona una copia de las secciones sobre $M$. En su complemento, una simetría que intercambia los grados hará que las contribuciones al índice se cancelen.

**Lema 19.3.7.** (Producto horizontal y vertical) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sean $\mathbf{E}^+, \mathbf{E}^- \to M$ haces vectoriales complejos suaves. Sea $P \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(M; \mathbf{E}^+, \mathbf{E}^-)$ elíptico y sea $B$ el operador del Lema 19.3.2. Existen un operador clásico elíptico de orden uno

$$C : \Gamma(\widehat{\nu}, \boldsymbol{\mathcal{E}}^+) \longrightarrow \Gamma(\widehat{\nu}, \boldsymbol{\mathcal{E}}^-)$$

y haces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ &= (\widehat{\pi}^*\mathbf{E}^+ \otimes \mathbf{W}^+_\nu) \oplus (\widehat{\pi}^*\mathbf{E}^- \otimes \mathbf{W}^-_\nu), \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}^- &= (\widehat{\pi}^*\mathbf{E}^- \otimes \mathbf{W}^+_\nu) \oplus (\widehat{\pi}^*\mathbf{E}^+ \otimes \mathbf{W}^-_\nu) \end{aligned}$$

tales que, si $a = [\sigma(P)]$, entonces

$$[\sigma(C)] = \mathrm{ext}^{T^*\widehat{\nu}}_{T^*\nu} \mathrm{Th}_{T\nu}\big((\sharp_{\mathbf{g}})_* a\big) \quad \text{en } K^0_c(T^*\widehat{\nu}) \tag{19.29}$$

y

$$\mathrm{ind_a}(C) = \mathrm{ind_a}(P). \tag{19.30}$$

El dominio del cierre de $C$ es $H^1(\widehat{\nu}, \boldsymbol{\mathcal{E}}^+)$ y el de su adjunto hilbertiano es $H^1(\widehat{\nu}, \boldsymbol{\mathcal{E}}^-)$.

*Demostración.* Pongamos $\mathbf{W} = \mathbf{W}^+ \oplus \mathbf{W}^-$ y consideremos en la fibra el operador y la graduación

$$D_B = \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Por el Lema 19.3.3, $D_B$ es autoadjunto con dominio $H^1(S^r, \mathbf{W})$. Denotemos por $\Pi_0$ la proyección ortogonal sobre su núcleo. La regularidad elíptica muestra que $\Pi_0$ es suavizante. Por (19.15), su imagen es una recta de grado par y la acción de $G$ sobre ella es trivial. Elegimos un generador $\mathbf{e}_0$ con norma $L^2$ igual a uno. Tanto $D_B$ como $\Pi_0$ son $G$–equivariantes, por lo que inducen operadores verticales sobre $\widehat{\nu}$; mantendremos las mismas letras para ellos.

Equipamos $\widehat{\nu}$ con la métrica de conexión que hace ortogonales las direcciones horizontales y verticales, usando la métrica redonda en las fibras. En una trivialización asociada, su medida es $d\lambda_{\mathbf{g}}(x)\, d\lambda_{S^r}(z)$. Los cambios de trivialización son isometrías en la fibra. Así,

$$(\mathcal{I}\mathbf{u})(x, z) = \mathbf{u}(x) \otimes \mathbf{e}_0(z) \tag{19.31}$$

define una isometría global de $L^2(M, \mathbf{E}^+ \oplus \mathbf{E}^-)$ sobre $\Pi_0 L^2(\widehat{\nu}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$, donde $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \oplus \boldsymbol{\mathcal{E}}^-$. También identifica los correspondientes espacios $H^1$: en una carta producto, las derivadas en $x$ actúan sobre $\mathbf{u}$ y las derivadas verticales sobre la sección suave fija $\mathbf{e}_0$; la identidad de normas en $L^2$ da el control inverso. Un número finito de cartas proporciona la equivalencia global.

Supongamos primero que $n = \dim M \geq 1$. Elegimos una cubierta finita $(U_\ell)_{\ell=1}^J$ que trivialice $\nu$ y $\mathbf{E}^\pm$, y funciones reales $\chi_\ell \in C^\infty_c(U_\ell)$ tales que

$$\sum_{\ell=1}^{J} \chi_\ell^2 = 1 \quad \text{en } M.$$

Usamos marcos ortonormales para $\nu$ y marcos unitarios para los haces complejos. Al pasar a coordenadas

euclidianas en $U_\ell$, incorporamos la raíz cuadrada del jacobiano de la medida en el isomorfismo entre los espacios $L^2$. De este modo, los adjuntos en las coordenadas son los adjuntos hilbertianos de los operadores transportados.

Sea $P_\ell$ la expresión local de $\zeta_\ell P \zeta_\ell$, extendida a $\mathbb{R}^n$, donde $\zeta_\ell \in C_c^\infty(U_\ell)$ es igual a uno cerca de $\operatorname{supp}\chi_\ell$. Pongamos

$$A_\ell = \begin{pmatrix} 0 & P_\ell^* \\ P_\ell & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

en el factor $\mathbf{E}^+ \oplus \mathbf{E}^-$. En la carta producto $U_\ell \times S^r$ aplicamos el Lema 19.3.5 a $D_B$ y escribimos $\Phi_{\ell,R}$ para el corte allí construido. Antes de multiplicar por $\chi_\ell$, la cuantización horizontal se hace en todo $\mathbb{R}^n$. Definimos el operador impar

$$\mathscr{C}_R = \sum_{\ell=1}^{J} \chi_\ell \left[ \frac{1}{2}\left( A_\ell \Phi_{\ell,R} + \Phi_{\ell,R} A_\ell \right) + R \Gamma_P D_B (I - \Phi_{\ell,R}) \right] \chi_\ell. \tag{19.32}$$

Cada sumando se transporta a $\widehat{\pi}^{-1}(U_\ell)$ y se extiende por cero en la variable base. Las funciones exteriores hacen que esa extensión esté definida globalmente. El lema de cortes prueba que $\mathscr{C}_R \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(\widehat{\nu}; \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$. La simetrización del término horizontal y las conmutaciones de $D_B$ con los cortes muestran que es formalmente autoadjunto.

Verifiquemos su elipticidad y fijemos el tamaño de $R$. Denotemos por $a_1(x,\xi)$ la matriz principal impar de $P$ y por $b_1(y,\eta)$ la de $D_B$, donde $y \in \widehat{\nu}$, $x = \widehat{\pi}(y)$ y $(\xi,\eta) \in \mathbf{H}^*_y \oplus \mathbf{V}^*_y$. Extendemos ambos símbolos por cero en su respectivo origen. Son continuos y homogéneos de grado uno. Existen constantes $c_P, c_B, C_B > 0$ tales que

$$a_1(x,\xi)^2 \geq c_P^2 |\xi|^2 I, \qquad c_B^2 |\eta|^2 I \leq b_1(y,\eta)^2 \leq C_B^2 |\eta|^2 I. \tag{19.33}$$

La homogeneidad también da una constante $L_P > 0$ para la cual

$$\| a_1(x,\xi') - a_1(x,\xi) \|_{\mathrm{op}} \leq L_P |\xi' - \xi|.$$

En efecto, las primeras derivadas en la covariable son homogéneas de grado cero y están acotadas en un atlas finito. Se integra esa cota a lo largo del segmento entre $\xi$ y $\xi'$; si pasa por el origen, se aplica en los dos subsegmentos y se usa la continuidad allí.

Las coordenadas producto de la trivialización y la descomposición horizontal fijada no son necesariamente la misma descomposición. En la trivialización $\ell$, la covariable horizontal coordenada corresponde a

$$\xi_\ell = \xi + T_\ell(y)\eta \in T^*_x M, \qquad \| T_\ell(y) \|_{\mathrm{op}} \leq A_0.$$

La constante $A_0$ existe porque sólo usamos un número finito de trivializaciones sobre compactos. Si $|\cdot|_\ell$ es la norma euclidiana de las componentes en esa carta, fijamos $c_x, C_x > 0$ tales que

$$c_x |\omega| \leq |\omega|_\ell \leq C_x |\omega|, \qquad \omega \in T^*_x M, \quad x \in \operatorname{supp}\chi_\ell, \quad \ell \in \{1,\dots,J\}.$$

El símbolo del corte, transportado a la fibra correspondiente, es

$$f_{\ell,R}(y;\xi,\eta) = h\left( \frac{R^2 b_1(y,\eta)^2}{|\xi_\ell|_\ell^2} \right).$$

En los ejes se usan las prolongaciones del lema. Estos endomorfismos son positivos, están acotados por $I$ y conmutan entre sí y con $b_1$, pues son funciones de la misma matriz $b_1^2$. Pongamos

$$F_R = \sum_{\ell=1}^{J} \chi_\ell(x)^2 f_{\ell,R},$$

extendiendo cada término por cero fuera de su trivialización. El símbolo principal de (19.32) es

$$c_R = \sum_{\ell=1}^{J} \chi_\ell^2 a_1(x,\xi_\ell) f_{\ell,R} + R\Gamma_P b_1(y,\eta)(I - F_R). \tag{19.34}$$

Los factores identidad en $\mathbf{E}$ y $\mathbf{W}$ se mantienen implícitos en esta fórmula; los dos operadores actúan en factores tensoriales distintos.

Comparemos $c_R$ con

$$m_R = a_1(x,\xi)F_R + R\Gamma_P b_1(y,\eta)(I - F_R).$$

De las cotas anteriores se deduce

$$\|c_R - m_R\|_{\mathrm{op}} \le L_P A_0 |\eta|. \tag{19.35}$$

Como $a_1\Gamma_P = -\Gamma_P a_1$, y $F_R$ conmuta con los factores verticales, los términos cruzados del cuadrado se cancelan exactamente:

$$m_R^2 = a_1(x,\xi)^2 F_R^2 + R^2 b_1(y,\eta)^2 (I - F_R)^2. \tag{19.36}$$

Elijamos

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{c_x}{4C_B}, \frac{c_B}{8C_x}\right\}, \qquad R \ge \max\{1, A_0/\delta\}.$$

Si $R|\eta| \le \delta|\xi|$, entonces $|\xi_\ell| \ge (1-\delta^2)|\xi| \ge \tfrac{3}{4}|\xi|$. Todas las matrices $R^2 b_1^2/|\xi_\ell|_\ell^2$ tienen espectro en $[0,1]$ para los índices $\ell \in \{1,\dots,J\}$ con $\chi_\ell(x) \neq 0$. Así, $f_{\ell,R} = I$ en los términos que intervienen en la suma y $F_R = I$. Si $|\xi| \le \delta R|\eta|$, se tiene $|\xi_\ell|_\ell \le 2C_x\delta R|\eta|$. Los espectros correspondientes están entonces en $[4,+\infty)$; por ello $F_R = 0$. En la región restante se cumplen simultáneamente

$$|\xi| > \delta R|\eta|, \qquad R|\eta| > \delta|\xi|.$$

Así, cada uno de $|\xi|^2$ y $R^2|\eta|^2$ es al menos $\frac{\delta^2}{2}(|\xi|^2 + R^2|\eta|^2)$. Además,

$$F_R^2 + (I - F_R)^2 = 2(F_R - \tfrac{1}{2}I)^2 + \tfrac{1}{2}I \ge \tfrac{1}{2}I.$$

Aplicando (19.36) en las tres regiones obtenemos, con $c_* = \min\{c_P, c_B\}$,

$$\|m_R \mathbf{v}\| \ge \frac{\delta c_*}{2}(|\xi|^2 + R^2|\eta|^2)^{1/2}\|\mathbf{v}\|$$

para todo vector $\mathbf{v}$ de la fibra. Fijamos finalmente

$$R \ge \max\left\{1, \frac{A_0}{\delta}, \frac{4L_P A_0}{\delta c_*}\right\}.$$

La desigualdad (19.35) implica

$$\|c_R \mathbf{v}\| \geq \frac{\delta c_*}{4}(|\xi|^2 + R^2|\eta|^2)^{1/2}\|\mathbf{v}\|. \tag{19.37}$$

Queda probada la elipticidad de $\mathscr{C}_R$. El Lema 19.3.3 y el Teorema 15.6.22 dan

$$\mathcal{D}(\mathscr{C}_R) = H^1(\widehat{\nu}, \boldsymbol{\mathcal{E}}), \qquad \mathcal{D}(\mathscr{C}_R^{\pm}) = H^1(\widehat{\nu}, \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\pm}). \tag{19.38}$$

El operador $\mathscr{C}_R$ es autoadjunto y su componente $C := \mathscr{C}_R^+$ es Fredholm, con adjunto $\mathscr{C}_R^-$ en el dominio indicado.

Calculemos su índice. El operador $D_B^2 + \Pi_0$ es positivo, invertible y clásico elíptico de orden dos en la fibra. Las potencias complejas del Teorema 15.7.9 permiten definir

$$J_B = D_B(D_B^2 + \Pi_0)^{-1/2} \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(S^r; \mathbf{W}, \mathbf{W}).$$

Es equivariante y satisface

$$J_B^* = J_B, \qquad J_B^2 = I - \Pi_0, \qquad J_B\Gamma_B = -\Gamma_B J_B.$$

Los operadores verticales $\Pi_0$ y $J_B$ son acotados en los espacios $L^2$ y $H^1$ de la variedad total. Para comprobar la segunda afirmación, en una carta producto conmutan con las derivadas en $x$ y son acotados en $H^1$ vertical por el cálculo de orden cero; una partición finita de la unidad da la cota global.

Cada sumando de (19.32) conmuta con $\Pi_0$. En el complemento de su imagen definimos

$$\mathcal{T} = \Gamma_P \Gamma_B J_B.$$

Este operador es unitario, intercambia los grados y satisface $\mathcal{T}^2 = -I$. Los cortes conmutan con $J_B$ y $\Gamma_B$; los operadores $A_\ell$ conmutan con ellos y anticomutan con $\Gamma_P$. Por tanto,

$$\mathcal{T}\mathscr{C}_R = -\mathscr{C}_R\mathcal{T} \quad \text{en } (I - \Pi_0)H^1(\widehat{\nu}, \boldsymbol{\mathcal{E}}). \tag{19.39}$$

La identidad se verifica primero sobre secciones suaves. La acotación de $\mathcal{T}$ en $H^1$ y (19.38) permiten extenderla al dominio. En consecuencia, $\mathcal{T}$ identifica las partes par e impar del núcleo de $\mathscr{C}_R$ que pertenecen a $(I - \Pi_0)L^2$. Sus dimensiones son finitas y sus contribuciones al índice se cancelan.

Sobre $\Pi_0 L^2$, el operador vertical se anula y el corte es el multiplicador escalar horizontal

$$a_{0,R}(\xi) = h\left(\frac{R^2}{1 + |\xi|^2}\right).$$

Esta función es igual a uno fuera de una bola. Mediante (19.31), la componente par a impar de la restricción de $\mathscr{C}_R$ se identifica con el operador

$$P_R = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{J} \chi_\ell \big(P_\ell a_{0,R}(D_x) + a_{0,R}(D_x)P_\ell\big)\chi_\ell$$

sobre $M$, transportando cada sumando desde su carta. Como $a_{0,R} - 1$ tiene soporte compacto en la frecuencia

horizontal,

$$P_R - P = \sum_{\ell=1}^{J} \chi_\ell [P, \chi_\ell] + S_R, \qquad S_R \in \Psi^{-\infty}(M; \mathbf{E}^+, \mathbf{E}^-). \tag{19.40}$$

Los conmutadores son clásicos de orden cero. Por el Lema 19.3.4, $P_R - P$ es compacto de $H^1$ en $L^2$, de modo que $\operatorname{ind} P_R = \operatorname{ind} P$ por el Teorema 16.2.1.

Si $K^\pm$ denota la parte del núcleo de $\mathscr{C}_R$ situada en $(I - \Pi_0)L^2$ y de grado $\pm$, hemos probado las descomposiciones

$$\begin{aligned} \ker C &= \mathcal{I}(\ker P_R) \oplus K^+, \\ \ker C^* &= \mathcal{I}(\ker P_R^*) \oplus K^-, \qquad \mathcal{T} : K^+ \xrightarrow{\cong} K^-. \end{aligned} \tag{19.41}$$

Al restar dimensiones resulta

$$\operatorname{ind} C = \operatorname{ind} P_R = \operatorname{ind} P. \tag{19.42}$$

Falta identificar la clase del símbolo. En (19.34) sustituimos simultáneamente $T_\ell$ por $tT_\ell$, con $t \in [0,1]$, tanto en $a_1(x, \xi_\ell)$ como en $f_{\ell,R}$. Las estimaciones que llevaron a (19.37) siguen siendo válidas, pues $\|tT_\ell\|_{\mathrm{op}} \le A_0$. Así obtenemos una homotopía de símbolos invertibles en el cotangente sin la sección cero. En $t = 0$ su expresión es

$$a_1(x,\xi)F + R\Gamma_P b_1(y,\eta)(I - F),$$

donde $F$ es una suma convexa de funciones de $b_1^2$ y $0 \le F \le I$. Para $s \in [0,1]$ reemplazamos los dos coeficientes por

$$F_s = (1-s)F + sI, \qquad G_s = (1-s)(I-F) + sI.$$

El cuadrado de $a_1 F_s + R\Gamma_P b_1 G_s$ es $a_1^2 F_s^2 + R^2 b_1^2 G_s^2$. Como $F_s \ge F$ y $G_s \ge I - F$, la cota inferior del comienzo de la homotopía se conserva. Al final se obtiene $a_1 + R\Gamma_P b_1$. Una deformación del factor positivo $R$ a uno produce $a_1 + \Gamma_P b_1$.

Estas últimas son homotopías continuas de homomorfismos de haces en el coesferado. No se utilizan para definir operadores en los valores intermedios. La continuidad basta para la invariancia homotópica de la clase en $K$–teoría. La componente par a impar del símbolo final es

$$\begin{pmatrix} p_1(x,\xi) \otimes I & -I \otimes b_1^+(y,\eta)^* \\ I \otimes b_1^+(y,\eta) & p_1(x,\xi)^* \otimes I \end{pmatrix},$$

donde $b_1^+$ es el símbolo de $B$. Es el producto graduado de la clase horizontal con la clase vertical. El Lema 19.3.2 identifica esta última con la extensión de la clase normal de Bott. El Lema 19.3.6 identifica su producto con la clase de Thom, con el orden de los factores y la orientación ya fijados. Resulta (19.29).

Si $\dim M = 0$, $M$ es un conjunto finito. Sobre cada punto se utiliza directamente el operador vertical $\Gamma_P D_B$ en el producto graduado con $\mathbf{E}^+ \oplus \mathbf{E}^-$. Su índice es $\dim \mathbf{E}^+ - \dim \mathbf{E}^-$, que coincide con el índice de cualquier mapeo lineal de $\mathbf{E}^+$ en $\mathbf{E}^-$ sobre ese punto. Su símbolo es el producto de esa clase virtual con la clase de Bott. La suma sobre los puntos de $M$ da las dos identidades del enunciado y completa la prueba. □

**Teorema 19.3.8.** (Compatibilidad analítica con el morfismo directo) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sea $j\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ un encaje suave y sea $a \in K_c^0(T^*M)$. Entonces

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}^{\mathbb{R}^N}(j_! a) = \operatorname{ind}_{\mathrm{a}}^{M}(a). \tag{19.43}$$

*Demostración.* Representemos $a$ por el símbolo de un operador elíptico $P$ en $M$. El Teorema 17.4.3 permite hacerlo después de una estabilización, y la estabilización añade una identidad, de índice cero. Si el representante obtenido tiene orden cero, fijamos un operador positivo invertible

$$\Lambda_+ \in \Psi^1_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E}^+), \qquad \Lambda_+^{-1} \in \Psi^{-1}_{\mathrm{cl}}(M;\mathbf{E}^+),$$

y reemplazamos $P$ por $P\Lambda_+$. La composición con $\Lambda_+$ no cambia el índice. Su símbolo positivo escalar se contrae al símbolo de la identidad después de normalizar el orden, de modo que tampoco cambia la clase $a$. Podemos, por lo tanto, aplicar el Lema 19.3.7. Obtenemos un operador $C$ en $\widehat{\nu}$ con

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{a}}(C) = \mathrm{ind}_{\mathrm{a}}(P) \tag{19.44}$$

y clase de símbolo

$$[\sigma(C)] = \mathrm{ext}^{T^*\widehat{\nu}}_{T^*\nu}\,\mathrm{Th}_{T\nu}\big((\sharp_g)_* a\big) \in K^0_c(T^*\widehat{\nu}), \tag{19.45}$$

donde la métrica y la conexión identifican el representante de Thom en $T\nu$ con el correspondiente complejo en $T^*\nu$, y después se extiende desde el abierto $T^*\nu \subset T^*\widehat{\nu}$. Esta igualdad es precisamente (19.29).

Para pasar desde $\widehat{\nu}$ hasta la vecindad tubular, reduciremos el orden del operador y localizaremos su símbolo. Sea

$$\Lambda_{-1} \in \Psi^{-1}_{\mathrm{cl}}(\widehat{\nu};\boldsymbol{\mathcal{E}}^+)$$

positivo y elíptico, elegido de modo que $\Lambda_{-1} : L^2(\widehat{\nu},\boldsymbol{\mathcal{E}}^+) \longrightarrow H^1(\widehat{\nu},\boldsymbol{\mathcal{E}}^+)$ sea un isomorfismo; su inverso tiene orden uno. El operador

$$C\Lambda_{-1} : L^2(\widehat{\nu},\boldsymbol{\mathcal{E}}^+) \longrightarrow L^2(\widehat{\nu},\boldsymbol{\mathcal{E}}^-)$$

tiene orden cero. Como $\Lambda_{-1}$ es invertible, conserva el núcleo, el conúcleo y el índice de $C$; su símbolo positivo normalizado es homotópico a la identidad y tampoco cambia la clase de símbolo. Denotemos por $A$ una cuantización de orden cero obtenida de esta manera. Por (19.45), su triple de símbolo es elemental en una vecindad de $\mathbf{s}_\infty$. Después de sumar un triple elemental, los haces de entrada y salida se identifican en esa vecindad. La retracción polar

$$s \longmapsto s(s^*s)^{-\frac{1}{2}}$$

se aplica solamente al isomorfismo del símbolo en esa región y lo hace unitario. Que el triple sea elemental significa precisamente que, tras la estabilización elegida, ese unitario posee allí una homotopía a la identidad a través de isomorfismos. Con un único corte soportado en la misma región, la cuantización de esta homotopía es continua en

$$\mathcal{L}\big(L^2(\widehat{\nu},\boldsymbol{\mathcal{E}}^+), L^2(\widehat{\nu},\boldsymbol{\mathcal{E}}^-)\big);$$

todos sus miembros son elípticos y Fredholm, luego el índice permanece constante.

Al final de la homotopía, y reemplazando $A$ por la cuantización final, el símbolo principal es la identidad en un entorno $\mathcal{U}_0$ de $\mathbf{s}_\infty$. Fijamos un entorno menor $\mathcal{U}_\infty$ cuya clausura esté contenida en $\mathcal{U}_0$. La identificación ya elegida entre $\boldsymbol{\mathcal{E}}^+$ y $\boldsymbol{\mathcal{E}}^-$ sobre $\mathcal{U}_0$ determina allí un morfismo identidad $I_\infty$. Elegimos $\zeta \in C^\infty_c(\mathcal{U}_0)$ igual a uno en un entorno de $\overline{\mathcal{U}_\infty}$ y extendemos por cero el morfismo $\zeta I_\infty$. Se obtiene así un morfismo global suave

$$R : \boldsymbol{\mathcal{E}}^+ \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}}^-$$

que coincide con $I_\infty$ cerca de $\overline{\mathcal{U}_\infty}$; no se afirma que $R$ sea invertible fuera de esa región. Si $r = \sigma_0^\Psi(R)$, sea

$$K_A := \operatorname{supp}\bigl(\sigma_0^\Psi(A) - r\bigr) \subset S^*\widehat{v}.$$

Este soporte real es compacto y su proyección a $\widehat{v}$ no corta $\mathcal{U}_\infty$. Elegimos $\chi \in C^\infty(\widehat{v})$ igual a uno en una vecindad de $\pi(K_A)$ y cero en $\mathcal{U}_\infty$, y definimos

$$A_0 := R + \chi(A - R)\chi. \tag{19.46}$$

Los operadores $A$ y $R$ actúan entre el mismo par $\boldsymbol{\mathcal{E}}^+, \boldsymbol{\mathcal{E}}^-$, y $\chi$ actúa por multiplicación escalar; por lo tanto, $A_0$ es un operador global sobre ese haz. Además,

$$\sigma_0^\Psi(A_0) = r + \chi^2\bigl(\sigma_0^\Psi(A) - r\bigr) = \sigma_0^\Psi(A),$$

porque $\chi = 1$ sobre el soporte de la diferencia. Por el cálculo de composición, $A_0 - A$ tiene orden $-1$ en la variedad cerrada $\widehat{v}$ y es compacto como operador

$$L^2(\widehat{v}, \boldsymbol{\mathcal{E}}^+) \longrightarrow L^2(\widehat{v}, \boldsymbol{\mathcal{E}}^-).$$

En $\mathcal{U}_\infty$ se tiene $\chi = 0$ y $R = I_\infty$. Por lo tanto,

$$\operatorname{ind_a}(A_0) = \operatorname{ind_a}(A) = \operatorname{ind_a}(P), \qquad A_0 = I_\infty \text{ en } \mathcal{U}_\infty. \tag{19.47}$$

Esta fórmula proporciona la igualdad exacta cerca del borde que se necesita para extender el operador; no se está extendiendo el oscilador no acotado.

Después de disminuir el dominio tubular, podemos suponer que $V \subset \nu$ es el disco abierto $|v|_{h_\nu} < \rho(x)$ para una función suave positiva $\rho$. La contracción radial propia

$$\kappa\colon \nu \longrightarrow V, \qquad \kappa(x, v) = \left( x, \frac{\rho(x) v}{\sqrt{1 + |v|_{h_\nu}^2}} \right),$$

con una función positiva $\rho$ elegida dentro del radio tubular, envía las regiones $|v|_{h_\nu} \geq R$ a collares cada vez más estrechos del borde de $V$. Conjugamos $A_0$ por el isomorfismo unitario que incorpora el jacobiano de $\kappa$ y después por el difeomorfismo tubular $\Theta\colon V \longrightarrow U$. Como $A_0$ es exactamente la identidad cerca de $\mathbf{s}_\infty$, el operador transportado es la identidad en un collar del borde de $U$, bajo la identificación ya elegida entre los haces de entrada y salida. Denotemos por $d \in K_c^0(T^*U)$ la clase de este símbolo localizado.

La extensión debe hacerse después de estabilizar los haces; no basta la identificación en el collar. Consideremos

$$e := \operatorname{ext}(d) \in K_c^0(T^*\mathbb{R}^N).$$

En el modelo por diferencia, elegimos complementos hermitianos finitos de los dos haces del triple que representa $e$ sobre un par $(B^{2N}, S^{2N-1})$ cuyo interior contiene el soporte. El espacio $B^{2N}$ es contráctil, de modo que esos complementos y los dos haces son triviales. El isomorfismo sobre $S^{2N-1}$ obliga a que los rangos de los haces de entrada y salida sean iguales. Al sumar un mismo triple elemental trivial de rango suficientemente grande, ambos quedan identificados con $\underline{\mathbb{C}}^q$. La estabilización añade el símbolo de una

identidad, por lo que no cambia la clase en $K$–teoría ni el índice.
En el collar, la identificación proveniente de $A_0 = I$ y las trivializaciones anteriores hacen común el haz de entrada y salida. La retracción polar, seguida de la homotopía elemental del triple estabilizado, permite escoger el representante

$$s_e : T^*\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}^q)$$

invertible fuera de un compacto del espacio de fases, igual a $I$ cuando la variable base está fuera de un compacto, y cuya restricción a $T^*U$ representa $d$. Cuantizamos esta homotopía con un único corte y localizamos como en (19.46); se obtiene

$$\widetilde{A} \in \mathrm{Ell}_c^0(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^q), \qquad [\sigma(\widetilde{A})] = e.$$

Todas las homotopías son continuas en norma en $L^2$ y la estabilización sólo añade identidades, así que no alteran el índice. Ahora $A_0$, visto en $\widehat{\nu}$, y $\widetilde{A}$, visto en $\mathbb{R}^N$, son las dos extensiones de la misma clase localizada $d$. La Proposición 19.2.1 y (19.47) dan

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{a}}^{\mathbb{R}^N}(\widetilde{A}) = \mathrm{ind}_{\mathrm{a}}^{M}(P). \tag{19.48}$$

$e$ es la extensión por cero de (19.45); por (19.3), es precisamente $j_! a$. Como el índice analítico depende sólo de la clase de símbolo, (19.48) prueba (19.43). □

La compatibilidad anterior es la propiedad del índice analítico que permite pasar de una variedad cerrada a su vecindad tubular. La construcción por encaje y su relación con el producto de símbolos se desarrollan también en [21, ecuaciones (12.8)–(12.16), pp. 293–301].

## 19.4 El teorema de Atiyah–Singer

Antes del teorema principal, precisemos por qué el índice analítico se puede evaluar directamente en una clase de $K$–teoría. El Teorema 17.4.3 realiza cada $a \in K_c^0(T^*M)$ como símbolo de un operador elíptico, y el Teorema 17.5.6 prueba que dos realizaciones de la misma clase tienen el mismo índice. En efecto, después de sumar identidades quedan unidas por una homotopía de símbolos elípticos; ésta se cuantiza como una familia continua de operadores Fredholm y el Teorema 15.6.24 mantiene constante el índice. Se obtiene así el homomorfismo

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{a}}^{M} : K_c^0(T^*M) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

**Teorema 19.4.1.** (Atiyah–Singer, versión $K$–teórica) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sea $P : \Gamma(M, \mathbf{E}^+) \longrightarrow \Gamma(M, \mathbf{E}^-)$ un operador pseudodiferencial clásico elíptico entre haces vectoriales complejos. Entonces

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{a}}(P) = \mathrm{ind}_{\mathrm{t}}([\sigma(P)]) \tag{19.49}$$

con el índice topológico de la Definición 19.1.1.

*Demostración.* Escribamos $a = [\sigma(P)]$. Por el Teorema 19.3.8,

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{a}}^{M}(a) = \mathrm{ind}_{\mathrm{a}}^{\mathbb{R}^N}(j_! a). \tag{19.50}$$

El Teorema 18.7.1 y (19.4) afirman que, para todo $c \in K_c^0(T^*\mathbb{R}^N)$,

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}^{\mathbb{R}^N}(c) = (i_N)_!^{-1}(c).$$

Al aplicarlo a $c = j_! a$, la igualdad (19.50) se convierte exactamente en

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}^{M}(a) = (i_N)_!^{-1}(j_! a) = \operatorname{ind}_{\mathrm{t}}(a).$$

□

El argumento también demuestra dos propiedades que suelen incorporarse a la formulación del teorema. Si $P_0$ y $P_1$ tienen símbolos homotópicos a través de símbolos elípticos, entonces sus índices coinciden. Si una clase de símbolo está soportada en $T^*U$ para un abierto $U \subseteq M$, su índice puede calcularse en cualquier variedad que contenga a $U$. Ninguna de estas afirmaciones requiere una fórmula local para el núcleo del calor.

## 19.5 Forma cohomológica

La versión $K$–teórica es integral y no exige orientar $M$. Para obtener una integral se aplica el carácter de Chern con soporte compacto

$$\operatorname{ch}_c \colon K_c^0(TM) \longrightarrow H_c^{\mathrm{par}}(TM;\mathbb{Q}).$$

El espacio total $TM$ posee una orientación canónica, aun si $M$ no es orientable: una conexión identifica

$$T(TM) \cong \pi_{TM}^* TM \oplus \pi_{TM}^* TM,$$

y $J(X,Y) = (-Y,X)$ define una estructura casi compleja. Denotamos por $[TM]_{\mathrm{BM}} \in H_{2n}^{\mathrm{BM}}(TM;\mathbb{Z})$ su clase fundamental de Borel–Moore.

Para un haz complejo $\mathbf{W}$ con raíces formales de Chern $x_1,\dots,x_s$, fijamos las normalizaciones

$$\operatorname{ch}(\mathbf{W}) = \sum_{j=1}^{s} e^{x_j}, \qquad \operatorname{Td}(\mathbf{W}) = \prod_{j=1}^{s} \frac{x_j}{1-e^{-x_j}}. \tag{19.51}$$

En particular,

$$\operatorname{Td}(\mathbf{W}) = 1 + \frac{1}{2}c_1(\mathbf{W}) + \frac{1}{12}\bigl(c_1(\mathbf{W})^2 + c_2(\mathbf{W})\bigr) + \cdots.$$

**Teorema 19.5.1.** (Fórmula cohomológica del índice) Sea $M$ una variedad suave cerrada, de dimensión real $n$, sean $\mathbf{E}^+, \mathbf{E}^- \to M$ haces vectoriales complejos suaves y sea $P\colon \Gamma(M,\mathbf{E}^+) \to \Gamma(M,\mathbf{E}^-)$ un operador pseudodiferencial clásico elíptico. Identifiquemos $T^*M$ con $TM$ mediante una métrica y escribamos $a = (\sharp_g)_*[\sigma(P)]$. Entonces

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P) = (-1)^n \bigl\langle \operatorname{ch}_c(a) \smile \pi_{TM}^* \operatorname{Td}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), [TM]_{\mathrm{BM}} \bigr\rangle. \tag{19.52}$$

Si $M$ está orientada y

$$\Phi_{TM} \colon H^*(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_c^{*+n}(TM;\mathbb{Q})$$

es el isomorfismo de Thom cohomológico para esa orientación, entonces

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(P) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_M \left[\Phi_{TM}^{-1}(\operatorname{ch}_c(a)) \smile \operatorname{Td}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})\right]_n. \tag{19.53}$$

Aquí $[\cdot]_n$ denota la componente de grado $n$.

La compatibilidad entre Thom y el carácter de Chern se demuestra también en [21, Teorema 13.1, pp. 313–315].

*Demostración.* La comparación entre los isomorfismos de Thom en $K$–teoría y en cohomología es un resultado puramente topológico. Con las normalizaciones (19.51), si $\mathbf{W} \longrightarrow X$ es un haz complejo de rango $s$, $\lambda_{\mathbf{W}} \in K_c^0(\mathbf{W})$ es su clase de Thom y $\Phi_{\mathbf{W}}$ es el isomorfismo de Thom cohomológico, entonces

$$\Phi_{\mathbf{W}}^{-1}(\operatorname{ch}_c(\lambda_{\mathbf{W}})) = \prod_{j=1}^{s} \frac{1 - e^{x_j}}{x_j} = (-1)^s \operatorname{Td}(\overline{\mathbf{W}})^{-1}. \tag{19.54}$$

La demostración por el principio de separación y la naturalidad del carácter de Chern se recoge en el Apéndice A.
Para el encaje $j\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, la suma compleja estable

$$\pi_{TM}^*(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \oplus T\nu \cong TM \times \mathbb{C}^N$$

es trivial. Por multiplicatividad de la clase de Todd,

$$\operatorname{Td}(T\nu) = \pi_{TM}^* \operatorname{Td}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{-1}. \tag{19.55}$$

Aquí tanto $T\nu$, con la estructura de (19.1), como $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ son isomorfos a sus conjugados; por eso (19.54) produce la clase de Todd que aparece en (19.55). Como $T\nu$ tiene rango complejo $r = N - n$, la fórmula de Thom da de manera explícita

$$\operatorname{ch}_c(j_! a) = (-1)^r \operatorname{ext} \Phi_{T\nu}\big(\operatorname{ch}_c(a) \smile \pi_{TM}^* \operatorname{Td}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})\big). \tag{19.56}$$

Por otra parte, $\alpha_N(b^{\boxtimes N}) = 1$ y la normalización $b = [\mathbf{E}_{-1}] - [1]$ satisface

$$\left\langle \operatorname{ch}_c(b^{\boxtimes N}), [\mathbb{C}^N]_{\mathrm{BM}} \right\rangle = 1.$$

Por lo tanto, (19.4) se traduce en

$$(i_N)_!^{-1}(c) = (-1)^N \left\langle \operatorname{ch}_c(c), [\mathbb{C}^N]_{\mathrm{BM}} \right\rangle. \tag{19.57}$$

La naturalidad del Thom cohomológico y de la extensión por cero identifica el emparejamiento de (19.56) con el emparejamiento sobre $TM$. Los dos factores de signo son

$$(-1)^r (-1)^N = (-1)^{N-n+N} = (-1)^n.$$

En consecuencia,

$$(i_N)_!^{-1}(j_!a) = (-1)^n \left\langle \mathrm{ch}_c(a) \smile \pi_{TM}^* \,\mathrm{Td}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), [TM]_{\mathrm{BM}} \right\rangle.$$

El Teorema 19.4.1 prueba (19.52).

Si $M$ está orientada, la orientación compleja de $TM$ ordena primero cada dirección horizontal y después su dirección vertical. La orientación del haz tangente ordena primero las $n$ direcciones horizontales y luego las $n$ verticales. Pasar de un orden al otro requiere

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

transposiciones. Por lo tanto, para $u \in H_c^{2n}(TM;\mathbb{Q})$,

$$\langle u, [TM]_{\mathrm{BM}} \rangle = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_M \Phi_{TM}^{-1}(u).$$

Multiplicar este signo por $(-1)^n$ da $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ y concluye (19.53). □

## 19.6 Tres operadores geométricos

Los ejemplos siguientes verifican las hipótesis analíticas y muestran cómo la clase de símbolo recupera los invariantes conocidos.

### 19.6.1 El operador de Euler–de Rham

Supongamos primero que $(M, \mathbf{g})$ es una variedad riemanniana cerrada. Definimos el operador impar total

$$D_{\mathrm{dR}} := d + d^* \quad \text{en } \Omega^\bullet(M;\mathbb{C}).$$

Con la graduación par e impar de las formas complejas, su restricción es

$$D_{\mathrm{dR}}^+ \colon \Omega^{\mathrm{par}}(M;\mathbb{C}) \longrightarrow \Omega^{\mathrm{impar}}(M;\mathbb{C}).$$

Para $\xi \in T_x^*M \setminus \{0\}$, sus dos símbolos son

$$\sigma_1(D_{\mathrm{dR}}^+)(x,\xi) = c(\xi), \qquad \sigma_1^{\Psi}(D_{\mathrm{dR}}^+)(x,\xi) = i\,c(\xi), \qquad c(\xi) := \varepsilon(\xi) - \iota(\xi^\sharp), \qquad c(\xi)^2 = -|\xi|_{\mathbf{g}}^2 I.$$

Por consiguiente, $D_{\mathrm{dR}}^+$ es elíptico.

**Proposición 19.6.1.** (Índice de Euler–de Rham) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada, de dimensión $n$, y sea $D_{\mathrm{dR}}^+$ el operador de Euler–de Rham definido arriba. Se tiene

$$\mathrm{ind_a}(D_{\mathrm{dR}}^+) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim_{\mathbb{C}} H_{\mathrm{dR}}^q(M;\mathbb{C}) = \chi(M). \tag{19.58}$$

Si $M$ está orientada, la fórmula cohomológica se reduce a

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{a}}(D^{+}_{\mathrm{dR}}) = \int_M e(TM), \tag{19.59}$$

donde $e(TM)$ es la clase de Euler representada en cohomología de de Rham.

La identidad de clases utilizada en la prueba se encuentra en [21, ecuación (17.148) y Teorema 17.68, pp. 611–612]; su integral se identifica con $\chi(M)$ en [21, Teorema 13.6(d), pp. 320–321].

*Demostración.* El cuadrado de $D_{\mathrm{dR}} = d + d^{*}$ es el laplaciano de Hodge $\Delta = dd^{*} + d^{*}d$. La teoría elíptica ya desarrollada da

$$L^2\Omega^q(M;\mathbb{C}) = \ker\Delta_q \oplus \operatorname{Ran}\Delta_q$$

y un operador de Green $G_q$, definido como $\Delta_q^{-1}$ en $(\ker\Delta_q)^{\perp}$ y como cero en $\ker\Delta_q$, que gana dos derivadas. Si $\omega \in \Omega^q(M;\mathbb{C})$ y $d\omega = 0$, escribimos

$$\omega = h + \Delta G_q \omega, \qquad h \in \ker\Delta_q.$$

Las identidades $d\Delta = \Delta d$ y la unicidad del inverso en $(\ker\Delta)^{\perp}$ implican que $dG_q\omega$ es armónica. Como además es exacta,

$$\|dG_q\omega\|^2_{L^2\Omega^{q+1}(M;\mathbb{C})} = \langle G_q\omega, d^{*}dG_q\omega\rangle_{L^2\Omega^q(M;\mathbb{C})} = 0.$$

Por lo tanto, $dG_q\omega = 0$ y

$$\omega = h + d(d^{*}G_q\omega).$$

Cada clase de cohomología de de Rham tiene así un representante armónico. Si un armónico es exacto, el mismo cálculo muestra que es cero; el representante es único. En consecuencia,

$$\ker\Delta_q \cong H^q_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C}).$$

Los núcleos de $D^{+}_{\mathrm{dR}}$ y de su adjunto son las formas armónicas pares e impares, respectivamente, y esto prueba la primera igualdad de (19.58). El Teorema A.8.1 identifica la suma alternada de esas dimensiones con $\chi(M)$.

Finalmente, el símbolo de Clifford anterior define la *clase de símbolo de Euler* en $K^0_c(T^{*}M)$; no se identifica aquí con una clase de Thom de un haz real. Denotemos por $\sharp_g\colon T^{*}M \to TM$ el isomorfismo métrico y por $(\sharp_g)_{*}$ el isomorfismo inducido en $K$–teoría con soporte compacto. Su identidad característica es

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\Phi^{-1}_{TM}\left(\operatorname{ch}_c\left((\sharp_g)_{*}[\sigma(D^{+}_{\mathrm{dR}})]\right)\right)\operatorname{Td}(TM\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}) = e(TM).$$

Esta es una identidad de la clase de símbolo completa, incluidos el isomorfismo de Thom y sus orientaciones; no se obtiene identificando la diferencia exterior con una sola diferencia de semiespinores. En efecto, para un par de raíces $\pm x$ se tiene

$$\operatorname{ch}(\Lambda^{\mathrm{par}} - \Lambda^{\mathrm{impar}}) = 2 - e^{x} - e^{-x} = -\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right)^2,$$

y los factores restantes proceden precisamente de Thom. Sustituir esta identidad en (19.53) produce (19.59). □

### 19.6.2 El operador de Dolbeault

Sea ahora $M$ una variedad compleja cerrada de dimensión compleja $m$ y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial holomorfo, provisto de una métrica hermitiana. Fijamos también una métrica hermitiana en $M$. La estructura compleja divide los haces complejificados en

$$TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M, \qquad T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{*1,0}M \oplus T^{*0,1}M,$$

y se escribe

$$\Omega^{p,q}(M,\mathbf{E}) = \Gamma\left(M, \Lambda^p T^{*1,0}M \otimes \Lambda^q T^{*0,1}M \otimes \mathbf{E}\right).$$

En una trivialización holomorfa de $\mathbf{E}$ y coordenadas holomorfas $z^1,\dots,z^m$, el operador de Dolbeault torcido es

$$\bar\partial_{\mathbf{E}} = \sum_{j=1}^{m} d\bar z^j \wedge \frac{\partial}{\partial \bar z^j} \colon \Omega^{p,q}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(M,\mathbf{E}). \tag{19.60}$$

Las funciones de transición de $\mathbf{E}$ son holomorfas, de modo que (19.60) es independiente de la trivialización. La conmutación de las derivadas $\partial/\partial\bar z^j$ y la anticomutación de los productos exteriores prueban $\bar\partial_{\mathbf{E}}^2 = 0$.

La métrica hermitiana de $M$ y la de $\mathbf{E}$ definen el adjunto formal $\bar\partial_{\mathbf{E}}^*$. El operador impar total

$$D_{\bar\partial,\mathbf{E}} := \sqrt{2}\,(\bar\partial_{\mathbf{E}} + \bar\partial_{\mathbf{E}}^*) \quad \text{en } \Omega^{0,\bullet}(M,\mathbf{E})$$

tiene como componente de grado par a grado impar la restricción

$$D^+_{\bar\partial,\mathbf{E}} := D_{\bar\partial,\mathbf{E}}\big|_{\Omega^{0,\mathrm{par}}} \colon \Omega^{0,\mathrm{par}}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \Omega^{0,\mathrm{impar}}(M,\mathbf{E})$$

Este operador es elíptico. En efecto, si $\xi$ es una covariable real, la fórmula local anterior y la fórmula del símbolo del adjunto dan, respectivamente,

$$\sigma_1(D^+_{\bar\partial,\mathbf{E}})(x,\xi) = \sqrt{2}\left(\varepsilon(\xi^{0,1}) - \varepsilon(\xi^{0,1})^*\right) \otimes I_{\mathbf{E}_x}, \qquad \sigma_1^{\Psi}(D^+_{\bar\partial,\mathbf{E}})(x,\xi) = i\sqrt{2}\left(\varepsilon(\xi^{0,1}) - \varepsilon(\xi^{0,1})^*\right) \otimes I_{\mathbf{E}_x}. \tag{19.61}$$

Como $2|\xi^{0,1}|_{\mathbf{g}}^2 = |\xi|_{\mathbf{g}}^2$ para una covariable real y $\varepsilon\varepsilon^* + \varepsilon^*\varepsilon = |\xi^{0,1}|_{\mathbf{g}}^2 I$, se obtiene

$$\sigma_1^{\Psi}(D^+_{\bar\partial,\mathbf{E}})(x,\xi)^*\sigma_1^{\Psi}(D^+_{\bar\partial,\mathbf{E}})(x,\xi) = |\xi|_{\mathbf{g}}^2 I.$$

El factor $\sqrt{2}$ no afecta la clase de símbolo. Escribimos

$$H^{0,q}_{\bar\partial}(M,\mathbf{E}) := \frac{\ker(\bar\partial_{\mathbf{E}} \colon \Omega^{0,q}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \Omega^{0,q+1}(M,\mathbf{E}))}{\mathrm{Ran}(\bar\partial_{\mathbf{E}} \colon \Omega^{0,q-1}(M,\mathbf{E}) \longrightarrow \Omega^{0,q}(M,\mathbf{E}))}.$$

**Proposición 19.6.2.** (Hirzebruch–Riemann–Roch analítico) Sea $M$ una variedad compleja cerrada, de dimensión compleja $m$, provista de una métrica hermitiana; sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial holomorfo provisto de una métrica fibrada hermitiana y sea $D^+_{\bar\partial,\mathbf{E}}$ el operador de Dolbeault torcido definido arriba. Entonces

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{a}}(D^+_{\bar\partial,\mathbf{E}}) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q \dim_{\mathbb{C}} H^{0,q}_{\bar\partial}(M,\mathbf{E}) = \int_M \left[\mathrm{ch}(\mathbf{E}) \smile \mathrm{Td}(T^{1,0}M)\right]_{2m}. \tag{19.62}$$

*Demostración.* El cuadrado de $D_{\bar\partial,\mathbf{E}}$ es dos veces el laplaciano de Dolbeault,

$$\Delta_{\bar\partial,\mathbf{E}} = \bar\partial_{\mathbf{E}}\bar\partial_{\mathbf{E}}^{*} + \bar\partial_{\mathbf{E}}^{*}\bar\partial_{\mathbf{E}}.$$

Es elíptico y autoadjunto, de modo que su rango es cerrado y posee un operador de Green $G_{\bar\partial,\mathbf{E}}$, igual al inverso en el complemento ortogonal de su núcleo y a cero sobre el núcleo. Si $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^{0,q}(M,\mathbf{E})$ satisface $\bar\partial_{\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha} = 0$, escribimos

$$\boldsymbol{\alpha} = h + \Delta_{\bar\partial,\mathbf{E}} G_{\bar\partial,\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha}, \qquad h \in \ker \Delta_{\bar\partial,\mathbf{E}}.$$

La identidad $\bar\partial_{\mathbf{E}}\Delta_{\bar\partial,\mathbf{E}} = \Delta_{\bar\partial,\mathbf{E}}\bar\partial_{\mathbf{E}}$ muestra que $\bar\partial_E G_{\bar\partial,\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha}$ es armónica. Al ser exacta, su norma al cuadrado es

$$\left\|\bar\partial_E G_{\bar\partial,\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha}\right\|^2_{L^2\Omega^{0,q+1}(M,\mathbf{E})} = \left\langle G_{\bar\partial,\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha}, \bar\partial_{\mathbf{E}}^{*}\bar\partial_E G_{\bar\partial,\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha}\right\rangle_{L^2\Omega^{0,q}(M,\mathbf{E})} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\alpha} = h + \bar\partial_{\mathbf{E}}\left(\bar\partial_{\mathbf{E}}^{*} G_{\bar\partial,\mathbf{E}}\boldsymbol{\alpha}\right).$$

La misma identidad prueba que un armónico exacto es cero. Se obtiene así, sin perder ni añadir clases,

$$\ker \Delta^{0,q}_{\bar\partial,\mathbf{E}} \cong H^{0,q}_{\bar\partial}(M,\mathbf{E}).$$

De ahí se obtiene la primera igualdad de (19.62).
El módulo de Clifford

$$\mathbf{S}_{\mathbb{C}} = \Lambda^{0,*}T^*M = \Lambda^{0,\mathrm{par}}T^*M \oplus \Lambda^{0,\mathrm{impar}}T^*M$$

define la estructura Spin$^c$ canónica de una variedad compleja y su orientación correspondiente. La fórmula (19.61) muestra que la clase del símbolo es la clase de Thom Spin$^c$ de este módulo, multiplicada por $\pi^*[\mathbf{E}]$; no depende de escoger aisladamente el sumando $T^{0,1}M$. Si $x_1,\dots,x_m$ son las raíces formales de Chern de $T^{1,0}M$, la identidad (19.54) cancela, raíz por raíz, el factor procedente de $TM\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ y deja

$$\prod_{j=1}^{m}\frac{x_j}{1-e^{-x_j}} = \mathrm{Td}(T^{1,0}M).$$

La variedad compleja tiene su orientación canónica. La Fórmula (19.53) da la segunda igualdad de (19.62). □

### 19.6.3 El operador de Dirac torcido

Sea $(M^{2m},\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada, orientada y spin, y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial complejo provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. La geometría de Clifford, la estructura spin, el haz de espinores y su conexión se construyeron en la Sección 2.17. El operador diferencial torcido se definió después, una vez disponible la teoría general de operadores sobre haces, en la Definición 8.3.7. En particular,

$$\mathbf{S} := \Sigma M = \mathbf{S}^+\oplus\mathbf{S}^-, \qquad D_{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & D^-_{\mathbf{E}} \\ D^+_{\mathbf{E}} & 0\end{pmatrix}, \qquad (D^+_{\mathbf{E}})^* = D^-_{\mathbf{E}}.$$

$$D^2_{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} D^-_{\mathbf{E}}D^+_{\mathbf{E}} & 0 \\ 0 & D^+_{\mathbf{E}}D^-_{\mathbf{E}}\end{pmatrix} \quad \text{respecto de } \mathbf{S}^+\oplus\mathbf{S}^-.$$

La fórmula de Weitzenböck correspondiente es (8.35). Para el cálculo del índice se usan, además, las dos convenciones de símbolo introducidas en momentos distintos: por la Proposición 11.2.4 y el Ejemplo 15.3.5, el símbolo diferencial y el símbolo de Fourier son, respectivamente,

$$\sigma_1(D_{\mathbf{E}}^+)(x,\xi) = c(\xi)\otimes I_{\mathbf{E}_x}, \qquad \sigma_1^{\Psi}(D_{\mathbf{E}}^+)(x,\xi) = i\,c(\xi)\otimes I_{\mathbf{E}_x}. \tag{19.63}$$

La relación de Clifford prueba su invertibilidad para $\xi \neq 0$.

La identidad de McKean–Singer expresa el índice de Dirac como la supertraza del semigrupo del calor asociado al cuadrado del operador.

**Corolario 19.6.3.** (McKean–Singer para el operador de Dirac) Sea $(M^{2m},\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada, orientada y spin, y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial complejo provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$ y sea $D_{\mathbf{E}}^+$ el operador de Dirac torcido. Para todo $t>0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{ind_a}(D_{\mathbf{E}}^+) &= \operatorname{Tr}\left(e^{-tD_{\mathbf{E}}^- D_{\mathbf{E}}^+}\right) - \operatorname{Tr}\left(e^{-tD_{\mathbf{E}}^+ D_{\mathbf{E}}^-}\right)\\ &= \operatorname{Str}\left(e^{-tD_{\mathbf{E}}^2}\right) = \int_M \operatorname{str}_{\mathbf{S}_x\otimes\mathbf{E}_x} \mathbf{K}_{D_{\mathbf{E}}^2}(t,x,x)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(x),\end{aligned} \tag{19.64}$$

donde $\mathbf{K}_{D_{\mathbf{E}}^2}$ es el núcleo del calor de $D_{\mathbf{E}}^2$ y $\operatorname{str}(A) = \operatorname{tr}(A|_{\mathbf{S}^+\otimes\mathbf{E}}) - \operatorname{tr}(A|_{\mathbf{S}^-\otimes\mathbf{E}})$.

*Demostración.* Se aplica la Proposición 15.7.14 a $P = D_{\mathbf{E}}^+$. La Fórmula (8.35) muestra que $D_{\mathbf{E}}^2$ es un operador de tipo laplaciano con un potencial de orden cero, pero su núcleo del calor no es el núcleo del laplaciano de conexión construido en el Capítulo 12. La regularidad, la propiedad de clase traza y la fórmula diagonal provienen de la Proposición 15.7.13. No se usa una expansión asintótica cuando $t\to 0^+$. □

Si las raíces formales de Chern de $TM\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ se ordenan como $x_1,-x_1,\dots,x_m,-x_m$, definimos

$$\widehat{A}(TM) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\frac{x_j}{2}}{\sinh\left(\frac{x_j}{2}\right)}. \tag{19.65}$$

**Proposición 19.6.4.** (Índice del operador de Dirac) Sea $(M^{2m},\mathbf{g})$ una variedad riemanniana cerrada, orientada y spin, y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial complejo provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$ y sea $D_{\mathbf{E}}^+$ el operador de Dirac torcido. Entonces

$$\operatorname{ind_a}(D_{\mathbf{E}}^+) = \int_M \left[\widehat{A}(TM)\smile \operatorname{ch}(\mathbf{E})\right]_{2m}. \tag{19.66}$$

En particular, para $\mathbf{E} = M\times\mathbb{C}$ se obtiene el género $\widehat{A}(M)$.

La construcción analítica y la orientación spinorial de Thom se describen en [21, Definiciones 17.22–17.23, pp. 531–532] y [92, Apéndice C, Teorema C.12; Capítulo III, §12, Proposición 12.5].

*Demostración.* La segunda fórmula de (19.63) muestra que la clase de símbolo es el complejo

$$\pi^*(\mathbf{S}^+\otimes\mathbf{E}) \xrightarrow{ic(\xi)\otimes I_{\mathbf{E}}} \pi^*(\mathbf{S}^-\otimes\mathbf{E}), \qquad \xi\in T^*M,$$

exacto fuera de la sección cero. El complejo sin $\mathbf{E}$ es la clase spinorial de Thom y el factor torcido es $\pi^*[\mathbf{E}]$; multiplicar el morfismo por $i$ no altera su clase. El defecto de Chern de la clase de Thom spinorial, formulado en el Teorema A.8.5, es

$$\Phi_{TM}^{-1}\,\mathrm{ch}_c(s(TM)) = (-1)^m \widehat{A}(TM)^{-1}.$$

Además, el principio de separación aplicado a los pares de raíces $x_j, -x_j$ da

$$\mathrm{Td}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \widehat{A}(TM)^2.$$

El factor $\pi^*[\mathbf{E}]$ aporta $\mathrm{ch}(\mathbf{E})$. Como el signo exterior de (19.53) en dimensión $2m$ es $(-1)^m$, los dos signos se cancelan y queda $\widehat{A}(TM)\,\mathrm{ch}(\mathbf{E})$. Esto prueba (19.66). □

**Proposición 19.6.5.** (Índice del operador de Dirac Spin$^c$) Sea $M^{2m}$ una variedad suave cerrada y orientada, provista de una estructura Spin$^c$ con línea determinante $\mathbf{L}$. Sea $A$ una conexión unitaria en $\mathbf{L}$ y sea $\mathbf{E}$ un haz vectorial complejo provisto de una métrica fibrada hermitiana $\mathbf{h_E}$ y una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. El operador $D_{A,\mathbf{E}}$ se obtiene torciendo el operador de la Proposición 8.3.9 por $\nabla^{\mathbf{E}}$, mediante la misma construcción de la conexión producto que en la Definición 8.3.7. Los datos geométricos de la estructura Spin$^c$ son los de la Sección 2.17. Su restricción quiral satisface

$$D^{+}_{A,\mathbf{E}} \colon \Gamma(\Sigma^{c,+}M \otimes \mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\Sigma^{c,-}M \otimes \mathbf{E}).$$

Entonces

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{a}}(D^{+}_{A,\mathbf{E}}) = \int_M \Big[\widehat{A}(TM) \smile e^{c_1(\mathbf{L})/2} \smile \mathrm{ch}(\mathbf{E})\Big]_{2m}. \tag{19.67}$$

Si la estructura procede de una estructura casi compleja, entonces $\mathbf{L} = \det_{\mathbb{C}}(T^{1,0}M)$ y

$$\widehat{A}(TM)e^{c_1(\mathbf{L})/2} = \mathrm{Td}(T^{1,0}M).$$

Si la estructura casi compleja es kähleriana, se toma en $\mathbf{L} = K_M^{-1}$ la conexión inducida por Levi–Civita, y $\mathbf{E}$ es holomorfo con su conexión de Chern, el operador canónico es exactamente $\sqrt{2}(\bar\partial_{\mathbf{E}} + \bar\partial^{*}_{\mathbf{E}})$. En el caso casi complejo general, el Dirac Spin$^c$ y el operador de tipo Dolbeault asociado poseen el mismo símbolo y el mismo índice, aunque pueden diferir por un término de orden cero.

Las identificaciones topológicas canónicas se recogen en [92, Apéndice D, Teorema D.2 y Ejemplos D.5–D.6; Apéndice C, Teorema C.12; Apéndice D, Teorema D.15].

*Demostración.* La clase de Thom Spin$^c$ se obtiene de la clase spinorial formalmente torcida por la raíz de $\mathbf{L}$; en el carácter de Chern esto introduce el factor bien definido $e^{c_1(\mathbf{L})/2}$. El mismo cálculo de Thom y (19.53) usado en la proposición anterior da (19.67). Para la estructura casi compleja, la línea determinante y la identidad característica se obtienen, bajo el principio de separación, de

$$\frac{x/2}{\sinh(x/2)}\,e^{x/2} = \frac{x}{1-e^{-x}}.$$

La identificación kähleriana sigue de la conexión de Chern–Levi–Civita en $\Lambda^{0,\bullet}T^*M$. □

Estos casos ilustran funciones diferentes del mismo teorema. En de Rham, el índice es la característica de

Euler; en Dolbeault, es la característica holomorfa; en el caso spinorial, es un número característico construido con $\widehat{A}(TM)$. La igualdad no depende de las métricas ni de las conexiones auxiliares: una variación suave conserva la clase del símbolo y forma una familia continua de operadores Fredholm.

Parte V

# Ecuaciones de evolución geométrica

# Preámbulo de la Parte V

Hasta este punto, la métrica riemanniana ha sido parte fija de la geometría. En esta parte permitiremos que cambie con el tiempo. La idea es sencilla de enunciar: en lugar de buscar directamente una métrica con propiedades especiales, partimos de una métrica inicial y la hacemos evolucionar según una ecuación determinada por su curvatura. El problema geométrico se transforma así en una ecuación en derivadas parciales no lineal.

Antes de estudiar el flujo de Ricci necesitamos una teoría parabólica que permita justificar existencia, unicidad y regularidad para sistemas sobre variedades. El flujo presenta además una dificultad propia de la geometría: la ecuación es invariante bajo difeomorfismos, y esta simetría aparece analíticamente como una degeneración del símbolo. El procedimiento de DeTurck elimina esa degeneración mediante una elección de calibre y reduce el problema, durante un tiempo corto, a un sistema estrictamente parabólico.

Una vez construida la solución, las ecuaciones de evolución de la curvatura y los principios del máximo permiten obtener estimaciones a priori. Cuando la curvatura crece y aparece una singularidad, el reescalamiento permite observar la geometría en su escala natural. La compactación extrae límites de esas regiones ampliadas, mientras que las cantidades monótonas de Perelman y el no colapso restringen los posibles modelos. En dimensión tres, este análisis llega hasta la cirugía y muestra de manera especialmente clara cómo una ecuación de evolución puede revelar la estructura topológica de una variedad.

**Hamilton, DeTurck y Perelman**

Hamilton introdujo el flujo de Ricci en 1982 con la idea de deformar una métrica utilizando su propia curvatura. Muy pronto quedó claro que la invariancia por difeomorfismos debía tratarse con cuidado; el procedimiento de DeTurck proporcionó el ajuste que permite aplicar la teoría parabólica. Dos décadas más tarde, Perelman introdujo nuevas cantidades monótonas, el teorema de no colapso y un análisis decisivo de las singularidades y de la cirugía. Esta historia resume una característica del análisis geométrico: una intuición sobre la forma del espacio conduce a una ecuación, la ecuación exige herramientas analíticas precisas y, finalmente, esas herramientas regresan a un problema geométrico o topológico.

# 20

# Ecuaciones parabólicas geométricas en variedades cerradas

Una ecuación de evolución geométrica se parece a la ecuación del calor sólo después de haber resuelto varias dificultades. La incógnita suele ser una sección de un haz, los coeficientes de la parte principal dependen de esa misma sección y las simetrías geométricas pueden ocultar la parabolicidad del sistema. Antes de estudiar el flujo de Ricci conviene separar estos problemas y construir una teoría que permita reconocer con precisión qué parte del argumento procede de la difusión y cuál depende de la estructura no lineal.

Trabajaremos sobre una variedad riemanniana cerrada $(M, \mathbf{g}_0)$ de dimensión $m$. Sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial real provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y de una conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$, que abreviaremos por $\nabla$ junto con sus conexiones inducidas. Estas estructuras se utilizan para medir secciones y escribir las ecuaciones; cualquier otra elección suave conduce a normas equivalentes. Denotaremos por $H^r(M, \mathbf{E})$ el espacio de Sobolev de orden entero $r$ construido en el Capítulo 9. El operador $\Delta_\nabla = \nabla^*\nabla$ que define la escala espectral es no negativo, mientras que la traza covariante $\operatorname{tr}_{\mathbf{g}_0}(\nabla^2)$ usada en los principios del máximo tiene el signo opuesto.

Fijamos durante todo el capítulo un entero

$$s > \frac{m}{2} + 2. \tag{20.1}$$

Pongamos $\Lambda = (I + \Delta_\nabla)^{1/2}$. Por el Teorema 12.4.10, la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{H^r(M,\mathbf{E})} := \|\Lambda^r \mathbf{u}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \tag{20.2}$$

es equivalente a la norma covariante cuando $r \geq 0$ es entero; para $r < 0$ se interpreta por completación. Utilizaremos esta elección porque las identidades de energía en la escala de Sobolev se vuelven exactas. Las estimaciones obtenidas con ella permanecen válidas para las normas covariantes por equivalencia. En particular, $H^{s-2}(M)$, $H^{s-1}(M)$ y $H^s(M)$ son álgebras y la inclusión $H^{s-1}(M, \mathbf{E}) \hookrightarrow C^0(M, \mathbf{E})$ es continua.

La estimación lineal debe controlar tanto la solución como su derivada temporal y mantener sus constantes cuando varían los coeficientes dentro de cotas fijas. Esa uniformidad permite resolver la ecuación cuasilineal: cada aproximación determina los coeficientes de la siguiente, mientras una energía común controla toda la sucesión. Los principios del máximo aportarán después información puntual que las normas integrales, por sí solas, no proporcionan.

**De la ecuación del calor a los flujos geométricos**

La teoría parabólica nació del estudio de la difusión: el calor atenúa las irregularidades y produce suavidad para tiempos positivos. En un flujo geométrico la incógnita puede ser una métrica, una conexión o una sección, y los coeficientes de la ecuación cambian con ella. Las estimaciones de energía, los principios del máximo y las desigualdades de producto permiten conservar el mecanismo regularizante del calor dentro de este régimen no lineal. Los resultados de este capítulo preparan ese paso antes de aplicarlo al flujo de Ricci.

## 20.1 Estimaciones de producto y espacios de energía

Las estimaciones no lineales que necesitaremos son consecuencias precisas de la regla de Leibniz y de la desigualdad de Gagliardo–Nirenberg del Teorema 9.3.1. Las reunimos primero para dejar explícito dónde se usa la condición (20.1).

**Lema 20.1.1.** (Producto de Sobolev con órdenes distribuidos) Sean $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3 \to M$ haces vectoriales con métricas y conexiones fijas, y sea $\beta\colon \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}_3$ un homomorfismo suave. Si $a, b \in \mathbb{N}_0$ y $a + b > m/2$, existe una constante $C$ tal que

$$\|\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|_{L^2(M,\mathbf{V}_3)} \le C \|\mathbf{u}\|_{H^a(M,\mathbf{V}_1)} \|\mathbf{v}\|_{H^b(M,\mathbf{V}_2)}. \tag{20.3}$$

La misma estimación vale si uno de los factores es una derivada covariante de una sección y los órdenes $a, b$ representan la regularidad que permanece después de tomar esa derivada.

*Demostración.* Por una partición finita de la unidad y la equivalencia local de las normas de Sobolev, basta probar la afirmación para funciones vectoriales con soporte en un abierto euclidiano relativamente compacto. Como $a + b > m/2$, pueden elegirse $p, q \in [2, \infty]$ de modo que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}, \qquad H^a \hookrightarrow L^p, \qquad H^b \hookrightarrow L^q.$$

Precisemos la elección en los casos críticos. Si $a > m/2$, tomamos $p = \infty$ y $q = 2$; si $b > m/2$, procedemos de manera simétrica. Supongamos entonces $a, b \le m/2$. Cuando ambos son menores que $m/2$, la desigualdad $a + b > m/2$ permite escoger un número $\theta$ tal que

$$\frac{1}{2} - \frac{a}{m} < \theta < \frac{b}{m}, \qquad \frac{1}{p} = \theta, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \theta.$$

Las inclusiones de Sobolev correspondientes son continuas. Si $a = m/2$, escogemos $0 < \theta < b/m$; la inclusión $H^{m/2} \hookrightarrow L^p$ vale para todo $p < \infty$. El caso $b = m/2$ es análogo, tomando $1/2 - a/m < \theta < 1/2$. De este modo quedan cubiertos también los órdenes críticos mediante exponentes finitos. La inclusión $H^{m/2} \hookrightarrow L^\infty$ no es válida en general. Hölder y las dos inclusiones dan

$$\|\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|_{L^2(M,\mathbf{V}_3)} \le C \|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{V}_1)} \|\mathbf{v}\|_{L^q(M,\mathbf{V}_2)} \le C \|\mathbf{u}\|_{H^a(M,\mathbf{V}_1)} \|\mathbf{v}\|_{H^b(M,\mathbf{V}_2)}.$$

Los coeficientes de $\beta$, de las conexiones y de los marcos locales son suaves en una familia finita de compactos, por lo que quedan absorbidos en la constante. $\square$

**Lema 20.1.2.** (Estimaciones de Moser) Sea $(M,\mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada, de dimensión $m$. En las estimaciones siguientes $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma $L^\infty$ en el haz correspondiente, con las métricas fijas. Sean $\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2,\mathbf{V}_3 \longrightarrow M$ haces vectoriales con métricas y conexiones fijas, y sea $\beta\colon \mathbf{V}_1\otimes\mathbf{V}_2 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ un homomorfismo suave. Para cada entero $r \geq 0$ existe una constante $C$, dependiente de las estructuras fijas y de $r$, tal que, para $\mathbf{u} \in H^r(M,\mathbf{V}_1)\cap L^\infty(M,\mathbf{V}_1)$ y $\mathbf{v} \in H^r(M,\mathbf{V}_2)\cap L^\infty(M,\mathbf{V}_2)$,

$$\|\beta(\mathbf{u},\mathbf{v})\|_{H^r(M,\mathbf{V}_3)} \leq C\big(\|\mathbf{u}\|_\infty\|\mathbf{v}\|_{H^r(M,\mathbf{V}_2)} + \|\mathbf{u}\|_{H^r(M,\mathbf{V}_1)}\|\mathbf{v}\|_\infty\big), \tag{20.4}$$

$$\|[\nabla^r,\mathbf{a}]\mathbf{v}\|_{L^2(M,T^{(0,r)}(TM)\otimes\mathbf{V}_3)} \leq C\big(\|\nabla\mathbf{a}\|_\infty\|\mathbf{v}\|_{H^{r-1}(M,\mathbf{V}_2)} + \|\mathbf{a}\|_{H^r(M,\mathrm{Hom}(\mathbf{V}_2,\mathbf{V}_3))}\|\mathbf{v}\|_\infty\big) \tag{20.5}$$

En la estimación del conmutador suponemos $r \geq 1$, $\mathbf{v} \in H^{r-1}(M,\mathbf{V}_2)\cap L^\infty(M,\mathbf{V}_2)$ y $\mathbf{a} \in H^r(M,\mathrm{Hom}(\mathbf{V}_2,\mathbf{V}_3))$ con $\nabla\mathbf{a} \in L^\infty(M,T^*M\otimes\mathrm{Hom}(\mathbf{V}_2,\mathbf{V}_3))$. La acción de $\mathbf{a}$ sobre los factores tensoriales es la identidad en $T^{(0,r)}(TM)$, y

$$[\nabla^r,\mathbf{a}]\mathbf{v} := \nabla^r(\mathbf{a}\mathbf{v}) - (I_{T^{(0,r)}(TM)}\otimes\mathbf{a})(\nabla^r\mathbf{v}) \in L^2\big(M,T^{(0,r)}(TM)\otimes\mathbf{V}_3\big).$$

Para secciones no suaves, la diferencia que define el conmutador se toma primero en distribuciones; la estimación afirma que esa distribución está representada por una sección $L^2$. Si $\mathbf{a} \in H^s(M,\mathrm{Hom}(T^*M\otimes\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_3))$ y $\mathbf{u} \in H^r(M,\mathbf{V}_1)$, el mismo conmutador aplicado a $\nabla\mathbf{u}$ satisface

$$\|[\nabla^r,\mathbf{a}](\nabla\mathbf{u})\|_{L^2(M,T^{(0,r)}(TM)\otimes\mathbf{V}_3)} \leq C\|\mathbf{a}\|_{H^s(M,\mathrm{Hom}(T^*M\otimes\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_3))}\|\mathbf{u}\|_{H^r(M,\mathbf{V}_1)}, \qquad 1 \leq r \leq s. \tag{20.6}$$

Sea ahora $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{V}_1$ un abierto fibrado y sea $G\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbf{V}_2$ un mapeo fibrado suave. Si $K \subseteq \mathcal{U}$ es compacto, existe una vecindad $\mathcal{V}$ de $K$ y, para cada $R > 0$, una constante $C_{K,R}$ con las propiedades siguientes. Si $\mathbf{u},\mathbf{v} \in H^r(M,\mathbf{V}_1)$, las imágenes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathcal{V}$ y $\|\mathbf{u}\|_{H^r(M,\mathbf{V}_1)} + \|\mathbf{v}\|_{H^r(M,\mathbf{V}_1)} \leq R$, entonces

$$\|G(\mathbf{u})\|_{H^r(M,\mathbf{V}_2)} \leq C_{K,R}, \tag{20.7}$$

$$\|G(\mathbf{u}) - G(\mathbf{v})\|_{H^r(M,\mathbf{V}_2)} \leq C_{K,R}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{H^r(M,\mathbf{V}_1)}. \tag{20.8}$$

Estas dos últimas estimaciones son válidas siempre que $r > \frac{m}{2}$. Además, para todo entero $r \geq 0$ y toda sección $\mathbf{u}$ con imagen en $\mathcal{V}$, se tiene la estimación de orden alto

$$\|G(\mathbf{u})\|_{H^r(M,\mathbf{V}_2)} \leq C_{K,r}\big(1 + \|\mathbf{u}\|_{H^r(M,\mathbf{V}_1)}\big). \tag{20.9}$$

Aquí la constante depende de una cota uniforme de los valores de $\mathbf{u}$ y de las derivadas de $G$ hasta orden $r$ en una vecindad fija de esos valores; no depende de la norma de orden $r$ de $\mathbf{u}$. También valen para mapeos que dependen suavemente de varios argumentos, con la norma de la diferencia de todos ellos en el miembro derecho.

*Demostración.* Localizamos mediante una partición finita de la unidad y trabajamos en una carta y un marco local. Las normas covariantes y las normas euclidianas de las componentes son equivalentes por el Lema 9.1.28. Su fórmula triangular muestra qué coeficientes de la conexión intervienen en cada orden; sobre los compactos de esta localización todas sus derivadas necesarias están acotadas. Por ello basta justificar las estimaciones para derivadas parciales de funciones vectoriales. Fijamos una bola coordenada regular $(U,\varphi)$ y ponemos $\Omega := \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$. En los cálculos locales siguientes, $u,v,a$ denotan las componentes escalares de las secciones o de los coeficientes en los marcos fijados; sus normas euclidianas se toman sobre $\Omega$.

Sea $1 \le k \le r$ y $|\gamma| = k$. La regla de Leibniz da

$$\partial^\gamma (uv) = \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{N}_0^m \\ \mu \le \gamma}} \binom{\gamma}{\mu} (\partial^\mu u)(\partial^{\gamma-\mu} v).$$

Los términos $\mu = 0$ y $\mu = \gamma$ están acotados, respectivamente, por $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{H^k(\Omega)}$ y $\|u\|_{H^k(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Si $0 < |\mu| < k$, ponemos $\theta = |\mu|/k$ y elegimos $p = 2/\theta$, $q = 2/(1-\theta)$. La desigualdad de Gagliardo–Nirenberg proporciona

$$\|\partial^\mu u\|_{L^p(\Omega)} \le C\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\theta}\|u\|_{H^k(\Omega)}^{\theta},$$
$$\|\partial^{\gamma-\mu} v\|_{L^q(\Omega)} \le C\|v\|_{L^\infty(\Omega)}^{\theta}\|v\|_{H^k(\Omega)}^{1-\theta}.$$

Como $1/p + 1/q = 1/2$, Hölder y la desigualdad ponderada de Young dan

$$\begin{aligned}\|(\partial^\mu u)(\partial^{\gamma-\mu} v)\|_{L^2(\Omega)} &\le C\left(\|u\|_{H^k(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^{\theta}\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{H^k(\Omega)}\right)^{1-\theta} \\ &\le C\left(\|u\|_{H^k(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{H^k(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Sumar sobre $|\gamma| \le r$ prueba (20.4).
Para el conmutador observamos que

$$[\partial^\gamma, a]v = \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{N}_0^m \\ 0 < \mu \le \gamma}} \binom{\gamma}{\mu} (\partial^\mu a)(\partial^{\gamma-\mu} v).$$

Cada sumando distribuye a lo más $k-1$ derivadas entre $\partial a$ y $v$. La estimación de producto recién demostrada, aplicada con orden $k-1$, da

$$\|[\partial^\gamma, a]v\|_{L^2(\Omega)} \le C\left(\|\partial a\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{H^{k-1}(\Omega)} + \|\partial a\|_{H^{k-1}(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)}\right),$$

y la suma en $k \le r$ produce (20.5).
Consideremos ahora el conmutador asimétrico. Para $|\gamma| = k \le r$, sus componentes son sumas de términos

$$(\partial^\mu a)\partial^{\gamma-\mu+1} u, \qquad 1 \le |\mu| \le k.$$

Después de tomar las derivadas indicadas, al primer factor le quedan $s - |\mu|$ derivadas en $L^2$ y al segundo le quedan $|\mu| - 1$. La suma de estos órdenes es $s - 1 > m/2$. El Lema 20.1.1 implica

$$\|(\partial^\mu a)\partial^{\gamma-\mu+1} u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|a\|_{H^s(\Omega)}\|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Al sumar todos los multiíndices obtenemos (20.6).
Para las estimaciones de composición elegimos un abierto $\mathcal{V}$ cuya cerradura sea compacta, contenga a $K$ y esté contenida en $\mathcal{U}$. Una función de corte en el espacio total, igual a uno sobre $\mathcal{V}$ y con soporte en $\mathcal{U}$, permite prolongar $G$ a un mapeo fibrado suave $\widetilde{G}$ definido en todas las fibras. La fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19, incluyendo las derivadas en la variable base, expresa cada derivada de orden $k \le r$ de

$\widetilde{G}(x,u(x))$ mediante términos de la forma

$$(\partial_x^\alpha D_z^j \widetilde{G})(x,u(x))[\partial^{\mu_1}u,\dots,\partial^{\mu_j}u], \qquad \begin{aligned} &1\le j\le k,\quad \alpha,\mu_1,\dots,\mu_j\in\mathbb{N}_0^m,\\ &|\mu_i|\ge 1\ (1\le i\le j),\qquad |\alpha|+\sum_{i=1}^{j}|\mu_i|=k, \end{aligned}$$

y términos sin derivadas de $u$, uniformemente acotados. Para $r\ge 1$ elegimos $p_i = 2r/|\mu_i|$. La desigualdad de Gagliardo–Nirenberg da

$$\|\partial^{\mu_i}u\|_{L^{p_i}(\Omega)} \le C\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-|\mu_i|/r}\|u\|_{H^r(\Omega)}^{|\mu_i|/r}.$$

Si $\theta := \sum_{i=1}^{j}|\mu_i|/r$, entonces $0<\theta\le 1$ y $\sum_{i=1}^{j}1/p_i = \theta/2 \le 1/2$. Hölder, seguido de la inclusión $L^{2/\theta}\hookrightarrow L^2$ en el compacto de la carta, acota el producto por $C_K\|u\|_{H^r(\Omega)}^{\theta}$. La desigualdad $x^\theta \le 1+x$ para $x\ge 0$ prueba (20.9). El caso $r=0$ se obtiene integrando la cota uniforme de $G$ en la imagen de $u$. La suma finita sobre las cartas conserva estas estimaciones. En particular, una cota $\|u\|_{H^r(M,\mathbf{V}_1)}\le R$ da (20.7). Finalmente,

$$\widetilde{G}(u)-\widetilde{G}(v) = \int_0^1 D\widetilde{G}\big(v+\theta(u-v)\big)[u-v]\,d\theta.$$

La extensión global hace que el segmento esté siempre dentro del dominio. Aplicando la estimación anterior al integrando, con constantes uniformes en $\theta$, se obtiene (20.8). El mismo argumento trata varios argumentos y completa la prueba. □

Para $T>0$ y $r\ge 0$ definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_T^r(\mathbf{E}) &:= \big\{\mathbf{u}\in L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E}))\ \big|\ \partial_t\mathbf{u}\in L^2(0,T;H^{r-1}(M,\mathbf{E}))\big\},\\ \mathcal{Y}_T^r(\mathbf{E}) &:= L^2(0,T;H^{r-1}(M,\mathbf{E})), \end{aligned}$$

donde la derivada temporal se entiende en el sentido de distribuciones con valores en $H^{r-1}(M,\mathbf{E})$. En un primer momento equipamos $\mathcal{X}_T^r(\mathbf{E})$ con la norma de gráfica

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_T^r(\mathbf{E}),0}^2 := \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})}^2\,dt + \int_0^T \|\partial_t\mathbf{u}(t)\|_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}^2\,dt. \tag{20.10}$$

Esta norma es completa. En efecto, si $(\mathbf{u}_j)$ es de Cauchy, existen $\mathbf{u}\in L^2(0,T;H^{r+1})$ y $\mathbf{v}\in L^2(0,T;H^{r-1})$ tales que $\mathbf{u}_j\to\mathbf{u}$ y $\partial_t\mathbf{u}_j\to\mathbf{v}$ en los espacios correspondientes. Al pasar al límite en la identidad que define la derivada distribucional se obtiene $\partial_t\mathbf{u}=\mathbf{v}$. El lema siguiente permite incorporar a la norma el supremo temporal.

Usaremos el emparejamiento de la terna de Hilbert $H^{r+1}(M,\mathbf{E})\subseteq H^r(M,\mathbf{E})\subseteq H^{r-1}(M,\mathbf{E})$ dado, sobre secciones suaves, por

$$\langle \mathbf{f},\mathbf{v}\rangle_{H^{r-1},H^{r+1}} := (\Lambda^{r-1}\mathbf{f},\Lambda^{r+1}\mathbf{v})_{L^2(M,\mathbf{E})}. \tag{20.11}$$

Así, $H^{r-1}$ desempeña el papel del dual de $H^{r+1}$ cuando $H^r$ es el espacio pivote.

**Lema 20.1.3.** (Traza temporal) Sea $(M,\mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible. Cada elemento de $\mathcal{X}_T^r(\mathbf{E})$ posee un único representante en

$C([0,T];H^r(M,\mathbf{E}))$. Para ese representante,

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})} - \|\mathbf{u}(\tau)\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})} = 2\int_\tau^t \langle \partial_\rho \mathbf{u}(\rho), \mathbf{u}(\rho)\rangle_{H^{r-1},H^{r+1}}\, d\rho \tag{20.12}$$

para $0 \le \tau \le t \le T$. En particular, la evaluación $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}(0)$ es continua de $\mathcal{X}^r_T(\mathbf{E})$ en $H^r(M,\mathbf{E})$.

*Demostración.* Sea $\Delta_\nabla = \nabla^*\nabla$ el laplaciano de conexión y pongamos $\Lambda = (I+\Delta_\nabla)^{1/2}$. Por el Teorema 12.4.10, existe una base ortonormal $(\mathbf{e}_j)_{j\ge1}$ de $L^2(M,\mathbf{E})$ formada por secciones propias suaves de $\Delta_\nabla$. Denotemos por $P_N$ la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_N$. Las proyecciones $P_N$ conmutan con todas las potencias de $\Lambda$, son contracciones en cada $H^\sigma(M,\mathbf{E})$ y convergen fuertemente a la identidad en esos espacios.

Sea $\mathbf{u} \in \mathcal{X}^r_T(\mathbf{E})$ y pongamos $\mathbf{u}_N = P_N\mathbf{u}$. Como $\partial_t \mathbf{u}_N = P_N \partial_t \mathbf{u}$ en el sentido distribucional, cada coeficiente escalar de $\mathbf{u}_N$ pertenece a $H^1(0,T)$. Por lo tanto, $\mathbf{u}_N \in C([0,T];H^r(M,\mathbf{E}))$ y la regla de derivación en el subespacio finito-dimensional da

$$\|\mathbf{u}_N(t)\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})} - \|\mathbf{u}_N(\tau)\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})} = 2\int_\tau^t \langle \partial_\rho \mathbf{u}_N(\rho), \mathbf{u}_N(\rho)\rangle_{H^{r-1},H^{r+1}}\, d\rho. \tag{20.13}$$

Probemos que $(\mathbf{u}_N)$ converge en $C([0,T];H^r(M,\mathbf{E}))$. Si $\mathbf{w} = \mathbf{u}_N - \mathbf{u}_M$, existe $\tau \in [0,T]$ tal que

$$\|\mathbf{w}(\tau)\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})} \le \frac{1}{T}\int_0^T \|\mathbf{w}(\rho)\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})}\, d\rho \le \frac{1}{T}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E}))}.$$

Aplicando (20.13) a $\mathbf{w}$ y usando Cauchy–Schwarz en el emparejamiento de (20.11), obtenemos, para todo $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}(t)\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})} &\le \frac{1}{T}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E}))} + 2\|\partial_t\mathbf{w}\|_{L^2(0,T;H^{r-1}(M,\mathbf{E}))}\|\mathbf{w}\|_{L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E}))}\\ &\le \left(1+\frac{1}{T}\right)\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E}))} + \|\partial_t\mathbf{w}\|^2_{L^2(0,T;H^{r-1}(M,\mathbf{E}))}.\end{aligned}$$

Como $P_N \to I$ fuertemente en los dos espacios de Bochner que aparecen, el miembro derecho converge a cero cuando $M,N \to \infty$. Existe, por consiguiente, una sección $\widetilde{\mathbf{u}} \in C([0,T];H^r(M,\mathbf{E}))$ tal que $\mathbf{u}_N \to \widetilde{\mathbf{u}}$ uniformemente en $H^r$. Por otra parte, $\mathbf{u}_N \to \mathbf{u}$ en $L^2(0,T;H^{r+1})$; de aquí se sigue que $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ para casi todo tiempo. Así, $\widetilde{\mathbf{u}}$ es un representante de $\mathbf{u}$. Dos representantes continuos que coinciden casi en todas partes coinciden en todo $[0,T]$, lo que prueba la unicidad.

En (20.13), los términos de los extremos convergen uniformemente. Además,

$$\begin{aligned}&\left|\int_\tau^t \left(\langle \partial_\rho \mathbf{u}_N, \mathbf{u}_N\rangle_{H^{r-1},H^{r+1}} - \langle \partial_\rho \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_{H^{r-1},H^{r+1}}\right) d\rho\right|\\ &\quad\le \|\partial_t\mathbf{u}_N - \partial_t\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{r-1}(M,\mathbf{E}))}\|\mathbf{u}_N\|_{L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E}))}\\ &\qquad+ \|\partial_t\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{r-1}(M,\mathbf{E}))}\|\mathbf{u}_N - \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E}))},\end{aligned}$$

donde las normas se toman sobre $(0,T)$. El miembro derecho tiende a cero. Al hacer $N \to \infty$ obtenemos (20.12) para todo $0 \le \tau \le t \le T$.

Finalmente, elegimos $\tau \in [0,T]$ tal que

$$\|\mathbf{u}(\tau)\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})} \le \frac{1}{T}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H^r)} \le \frac{1}{T}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E}))}.$$

La identidad de energía y el mismo argumento anterior dan

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,T;H^r(M,\mathbf{E}))} \le \left(1+\frac{1}{T}\right)\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E}))} + \|\partial_t \mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H^{r-1}(M,\mathbf{E}))}.$$

Esto prueba la continuidad de todas las evaluaciones temporales respecto de la norma de gráfica, en particular la de la traza en $t=0$. □

En adelante equiparemos $\mathcal{X}^r_T(\mathbf{E})$ con la norma

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{X}^r_T(\mathbf{E})} := \|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,T;H^r(M,\mathbf{E}))} + \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})}\,dt + \int_0^T \|\partial_t\mathbf{u}(t)\|^2_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}\,dt. \tag{20.14}$$

La estimación precedente muestra que esta norma es equivalente a (20.10).

## 20.2 Sistemas lineales fuertemente parabólicos

Las estimaciones anteriores permiten controlar los productos que aparecen al derivar una ecuación. Pasamos ahora al problema lineal que servirá en cada paso de la iteración cuasilineal. Pongamos $\mathcal{H} := T^*M \otimes \mathbf{E}$, con la métrica y la conexión inducidas. Sean

$$\mathbf{A}(t) \in \Gamma(\operatorname{End}\mathcal{H}), \qquad \mathbf{B}(t) \in \Gamma(\operatorname{Hom}(\mathcal{H},\mathbf{E})), \qquad \mathbf{C}(t) \in \Gamma(\operatorname{End}\mathbf{E})$$

secciones dependientes del tiempo. Consideramos el operador intrínseco

$$P_t\mathbf{u} := \nabla^*\big(\mathbf{A}(t)\nabla\mathbf{u}\big) + \mathbf{B}(t)(\nabla\mathbf{u}) + \mathbf{C}(t)\mathbf{u} \tag{20.15}$$

y la ecuación

$$\partial_t\mathbf{u} + P_t\mathbf{u} = \mathbf{f}, \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \tag{20.16}$$

Si se fijan una carta y un marco local de $\mathbf{E}$, los índices $i,j,k$ recorren $\{1,\dots,m\}$ y escribimos $(\mathbf{A}\nabla\mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^m A_i{}^j \nabla_j u$ y $\mathbf{B}(\nabla\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^m B^j \nabla_j u$. Con $A^{ij} := \sum_{k=1}^m g_0^{ik} A_k{}^j$, la fórmula local de (20.15) es

$$P_t u = -\sum_{i,j=1}^m \nabla_i\big(A^{ij}(t)\nabla_j u\big) + \sum_{j=1}^m B^j(t)\nabla_j u + C(t)u.$$

**Definición 20.2.1.** (Parabolicidad fuerte) Sea $(M,\mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible. Decimos que la familia de operadores (20.15) es

**fuertemente parabólica** con constante $\lambda > 0$ si $\mathbf{A}(t)$ es autoadjunto en $\mathcal{H}$ y

$$\langle \mathbf{A}(x,t)\zeta, \zeta\rangle_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_E} \geq \lambda |\zeta|^2_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_E} \tag{20.17}$$

para todo $(x,t) \in M\times[0,T]$ y $\zeta \in T^*_xM\otimes \mathbf{E}_x$. Esta condición implica, al tomar $\zeta = \xi\otimes v$, la positividad uniforme del símbolo. Para operadores de símbolo escalar $a^{ij}\,\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, ambas condiciones son equivalentes.

Los sistemas que se utilizarán admiten una formulación en divergencia. En una carta y un marco fijados, un operador con parte principal $-\sum_{i,j=1}^{m} A^{ij}(\nabla^2\cdot)_{ij}$ puede escribirse como $-\sum_{i,j=1}^{m}\nabla_i(A^{ij}\nabla_j) + \sum_{j=1}^{m}\widetilde{B}^j\nabla_j$, con $\widetilde{B}^j = B^j + \sum_{i=1}^{m}\nabla_i A^{ij}$ después de incorporar el término original $\sum_{j=1}^{m} B^j\nabla_j$.

Para efectuar integraciones por partes usaremos la energía covariante

$$\mathscr{E}_r(\mathbf{u}) := \sum_{q=0}^{r} \|\nabla^q \mathbf{u}\|^2_{L^2(M,T^{(0,q)}(TM)\otimes\mathbf{E})}. \tag{20.18}$$

Existen constantes $c_r, C_r > 0$ tales que

$$c_r\|\mathbf{u}\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})} \leq \mathscr{E}_r(\mathbf{u}) \leq C_r\|\mathbf{u}\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})}.$$

La identidad de traza se refiere a la norma espectral, mientras que las identidades diferenciales que siguen se escriben para $\mathscr{E}_r$; las estimaciones integradas se trasladan entre ambas mediante esta equivalencia.

**Lema 20.2.2.** (Estimación de energía de orden alto) Sea $(M,\mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible. Supongamos que (20.17) se cumple y que

$$\sup_{t\in[0,T]}\Big(\|\mathbf{A}(t)\|_{H^s(M,\mathrm{End}\,\mathcal{H})} + \|\mathbf{B}(t)\|_{H^s(M,\mathrm{Hom}(\mathcal{H},\mathbf{E}))} + \|\mathbf{C}(t)\|_{H^s(M,\mathrm{End}\,\mathbf{E})}\Big) \leq K. \tag{20.19}$$

Para $r \in \{0,1,\dots,s\}$ existen constantes $c > 0$ y $C > 0$, dependientes sólo de $r, s, \lambda, K$ y de las métricas y conexiones fijas, tales que toda solución suave de (20.16) satisface

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}_r(\mathbf{u}(t)) + c\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})} \leq C\mathscr{E}_r(\mathbf{u}(t)) + C\|\mathbf{f}(t)\|^2_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}. \tag{20.20}$$

Por consiguiente,

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,T;H^r(M,\mathbf{E}))} + c\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})}\,dt \leq Ce^{CT}\left(\|\mathbf{u}_0\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})} + \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|^2_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}\,dt\right). \tag{20.21}$$

*Demostración.* Para $q \in \{0,1,\dots,r\}$ aplicamos $\nabla^q$ a la ecuación y emparejamos con $\nabla^q\mathbf{u}$. La derivada nueva ocupa el primer lugar, según la Definición 9.1.1. Sea $\mathbf{V}_q$ el tensor obtenido de $\nabla(\nabla^q\mathbf{u})$ moviendo ese primer lugar al último lugar covariante:

$$\mathbf{V}_q(X_1,\dots,X_q,Y) := (\nabla(\nabla^q\mathbf{u}))(Y,X_1,\dots,X_q).$$

Así $\mathbf{A}$ actúa sobre el par formado por $Y$ y el valor en $\mathbf{E}$, y $|\mathbf{V}_q| = |\nabla^{q+1}\mathbf{u}|$. La fórmula de Green del Teorema 9.1.29 da como contribución principal

$$\int_M \langle (I_{T^{(0,q)}(TM)} \otimes \mathbf{A})\mathbf{V}_q, \mathbf{V}_q \rangle \, d\lambda_{\mathbf{g}_0} + \mathcal{R}_q.$$

La integral es al menos $\lambda \|\nabla^{q+1}\mathbf{u}\|^2_{L^2(M, T^{(0,q+1)}(TM)\otimes\mathbf{E})}$.
Describamos las contribuciones de $\mathcal{R}_q$. Al distribuir las $q$ derivadas entre $\mathbf{A}$ y $\nabla\mathbf{u}$, los términos con una derivada sobre $\mathbf{A}$ forman $[\nabla^q, \mathbf{A}](\nabla\mathbf{u})$. Reordenar los lugares covariantes restantes introduce conmutadores de dos derivadas. Para $q = 1$ se usa la identidad de curvatura de la conexión inducida. Si se han efectuado los intercambios hasta el orden $q$, aplicar una derivada más produce dos tipos de términos: la derivada de un coeficiente de curvatura ya presente y la derivada de la sección a la que ese coeficiente se aplica. El nuevo intercambio aporta otra curvatura multiplicada por una derivada de orden menor de la sección. La regla de Leibniz de la Proposición 9.1.40 controla los primeros dos tipos. Es el mismo paso de conmutación desarrollado en el Lema 9.1.41; aquí se aplica también a $T^{(0,q)}(TM)\otimes\mathbf{E}$. En el orden $q$ sólo intervienen curvaturas de las estructuras fijas y sus derivadas hasta orden $q-1$. Por ello estos términos tienen coeficientes acotados y contienen a lo más $q$ derivadas de $\mathbf{u}$ después de integrar por partes.
Para $q = 0$ no hay conmutador. Para $1 \le q \le r$, la estimación (20.6) da, para cada $\varepsilon > 0$,

$$|\mathcal{R}_q| \le CK\|\mathbf{u}\|_{H^r(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{u}\|_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})} \le \varepsilon\|\mathbf{u}\|^2_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})} + C_\varepsilon\|\mathbf{u}\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})}.$$

Los términos de orden menor obedecen

$$\|\mathbf{B}(\nabla\mathbf{u}) + \mathbf{C}\mathbf{u}\|_{H^q(M,\mathbf{E})} \le CK\|\mathbf{u}\|_{H^{q+1}(M,\mathbf{E})}, \qquad q \in \{0,\dots,r\}.$$

En efecto, en cada producto de Leibniz que contiene $|\mu|$ derivadas de un coeficiente, los órdenes disponibles para aplicar el Lema 20.1.1 son $s - |\mu|$ y $|\mu|$; su suma es $s > m/2$. Esta observación incluye $q = 0$ y evita exigir una norma $L^\infty$ de la solución. Después del emparejamiento con $\nabla^q\mathbf{u}$, Young da la misma cota con $\varepsilon$ para cada uno de estos términos.
Si $r = 0$, el término fuente se interpreta directamente por dualidad:

$$|\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{H^{-1}(M,\mathbf{E}),H^1(M,\mathbf{E})}| \le \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{u}\|_{H^1(M,\mathbf{E})},$$

y Young da la cota requerida. Supongamos ahora $r \ge 1$. Para $\mathbf{f}$ suave, la contribución obtenida al sumar las energías covariantes es

$$\mathcal{B}_r(\mathbf{f}, \mathbf{u}) := \sum_{q=0}^{r} \int_M \langle \nabla^q\mathbf{f}, \nabla^q\mathbf{u} \rangle \, d\lambda_{\mathbf{g}_0}.$$

Para $0 \le q \le r-1$, Cauchy–Schwarz da directamente

$$\left| \int_M \langle \nabla^q\mathbf{f}, \nabla^q\mathbf{u} \rangle \, d\lambda_{\mathbf{g}_0} \right| \le C\|\mathbf{f}\|_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{u}\|_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}.$$

En el término superior escribimos $\nabla^r\mathbf{f} = \nabla(\nabla^{r-1}\mathbf{f})$ y aplicamos la definición del adjunto covariante:

$$\int_M \langle \nabla^r\mathbf{f}, \nabla^r\mathbf{u} \rangle \, d\lambda_{\mathbf{g}_0} = \int_M \langle \nabla^{r-1}\mathbf{f}, \nabla^*(\nabla^r\mathbf{u}) \rangle \, d\lambda_{\mathbf{g}_0}.$$

El operador $\mathbf{u} \mapsto \nabla^*(\nabla^r \mathbf{u})$ tiene orden $r+1$, por lo que su norma $L^2$ está acotada por $C\|\mathbf{u}\|_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})}$. Sumando los términos anteriores obtenemos

$$|\mathcal{B}_r(\mathbf{f},\mathbf{u})| \le C\|\mathbf{f}\|_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{u}\|_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})}.$$

Para $\mathbf{f} \in H^{r-1}(M,\mathbf{E})$ y $\mathbf{u} \in H^{r+1}(M,\mathbf{E})$, la expresión que define la extensión es

$$\mathcal{B}_r(\mathbf{f},\mathbf{u}) = \sum_{q=0}^{r-1} \int_M \langle \nabla_w^q \mathbf{f}, \nabla_w^q \mathbf{u}\rangle \, d\lambda_{\mathbf{g}_0} + \int_M \langle \nabla_w^{r-1}\mathbf{f}, \nabla^*(\nabla_w^r \mathbf{u})\rangle \, d\lambda_{\mathbf{g}_0}.$$

Cada emparejamiento es de dos secciones de $L^2$ del mismo haz $T^{(0,q)}(TM)\otimes \mathbf{E}$; en el último término se toma $q = r-1$. Por ello las integrales están definidas. Si $\mathbf{f}_j \to \mathbf{f}$ en $H^{r-1}(M,\mathbf{E})$ y $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $H^{r+1}(M,\mathbf{E})$ son aproximaciones suaves de Meyers–Serrin, la bilinealidad y la cota anterior dan

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_r(\mathbf{f}_j,\mathbf{u}_j) - \mathcal{B}_r(\mathbf{f},\mathbf{u})| &\le C\|\mathbf{f}_j - \mathbf{f}\|_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{u}_j\|_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})} \\ &\quad + C\|\mathbf{f}\|_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Así, la extensión coincide con la expresión suave, es independiente de ambas aproximaciones y satisface la misma cota. Young da entonces

$$|\mathcal{B}_r(\mathbf{f},\mathbf{u})| \le \varepsilon\|\mathbf{u}\|^2_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})} + C\|\mathbf{f}\|^2_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}.$$

Sumamos ahora todas las contribuciones. La suma de los términos coercivos controla $\|\mathbf{u}\|^2_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})}$ salvo un múltiplo de $\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})}$, que se incorpora al miembro derecho. Elegimos $\varepsilon$ después de esta suma, menor que la constante coerciva dividida por el doble del número de términos que deben absorberse. Queda así una constante positiva $c$ y obtenemos (20.20). La integración sobre $[0,t]$ y la desigualdad de Grönwall del Lema 1.8.19 prueban (20.21). □

**Teorema 20.2.3.** (Existencia lineal y regularidad parabólica) Sea $(M,\mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible. Sea $r \in \{0,1,\dots,s\}$. Supongamos que

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} \in C([0,T]; H^s(M, \operatorname{End}\mathcal{H})), \\ &\mathbf{B} \in C([0,T]; H^s(M, \operatorname{Hom}(\mathcal{H},\mathbf{E}))), \\ &\mathbf{C} \in C([0,T]; H^s(M, \operatorname{End}\mathbf{E})), \end{aligned}$$

satisfacen (20.17) con una constante independiente de $t$ y obedecen (20.19). Para cada

$$\mathbf{u}_0 \in H^r(M,\mathbf{E}), \qquad \mathbf{f} \in \mathcal{Y}^r_T(\mathbf{E}),$$

existe una única solución $\mathbf{u} \in \mathcal{X}^r_T(\mathbf{E})$ de (20.16). Además,

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}^r_T(\mathbf{E})} \le C_T\big(\|\mathbf{u}_0\|_{H^r(M,\mathbf{E})} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{Y}^r_T(\mathbf{E})}\big), \tag{20.22}$$

donde $C_T$ puede escogerse uniformemente cuando $T$, $K$ y $\lambda^{-1}$ permanecen acotados. Si los coeficientes, $\mathbf{f}$ y $\mathbf{u}_0$ son suaves, entonces $\mathbf{u}$ es suave en $M \times [0,T]$.

*Demostración.* Sea $(\mathbf{e}_k)_{k\geq 1}$ una base ortonormal de $L^2(M,\mathbf{E})$ formada por secciones propias del laplaciano de conexión, ordenadas según los autovalores $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$, contados con multiplicidad. Sea $V_N$ el espacio generado por $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_N$. Buscamos $\mathbf{u}_N(t) = \sum_{k=1}^{N} d_k(t)\mathbf{e}_k$ y exigimos que, para todo $\mathbf{v} \in V_N$,

$$(\partial_t \mathbf{u}_N, \mathbf{v})_{L^2(M,\mathbf{E})} + \int_M \langle \mathbf{A}\nabla \mathbf{u}_N, \nabla \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}_0} + \int_M \langle \mathbf{B}(\nabla \mathbf{u}_N) + \mathbf{C}\mathbf{u}_N, \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}_0} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle_{H^{-1}(M,\mathbf{E}),H^1(M,\mathbf{E})}. \tag{20.23}$$

Con datos suaves, ésta es una ecuación diferencial lineal de dimensión finita con coeficientes continuos, y por lo tanto posee una solución en todo $[0,T]$, con $\mathbf{u}_N(0)$ igual a la proyección ortogonal de $\mathbf{u}_0$ sobre $V_N$. Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}_N$ y usando (20.17) obtenemos, con constantes independientes de $N$,

$$\|\mathbf{u}_N\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(M,\mathbf{E}))} + \int_0^T \|\mathbf{u}_N(t)\|^2_{H^1(M,\mathbf{E})}\, dt \leq C_T \left( \|\mathbf{u}_0\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} + \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|^2_{H^{-1}(M,\mathbf{E})}\, dt \right). \tag{20.24}$$

Sea $\Pi_N$ la proyección espectral sobre $V_N$. Es una contracción en $H^1$ y en $H^{-1}$, porque conserva los primeros coeficientes en las normas espectrales. La ecuación proyectada se escribe $\partial_t \mathbf{u}_N = \Pi_N(\mathbf{f} - P_t \mathbf{u}_N)$. El operador $P_t\colon H^1 \to H^{-1}$ es uniformemente acotado por las cotas de los coeficientes y la fórmula débil. La energía de orden cero da entonces una cota uniforme de $\partial_t \mathbf{u}_N$ en $L^2(0,T;H^{-1}(M,\mathbf{E}))$. La reflexividad permite extraer una subsucesión que converge débilmente en $L^2(0,T;H^1(M,\mathbf{E}))$ y cuyas derivadas temporales convergen débilmente en $L^2(0,T;H^{-1}(M,\mathbf{E}))$.

La convergencia fuerte en $L^2(0,T;L^2(M,\mathbf{E}))$ puede verse directamente. Si $Q_J$ es la proyección sobre las primeras $J$ secciones propias, la cota $H^1$ da

$$\int_0^T \|(I - Q_J)\mathbf{u}_N(t)\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})}\, dt \leq \frac{C}{1+\mu_{J+1}},$$

donde $\mu_{J+1} \to \infty$ es el siguiente autovalor. Para $J$ fijo, las coordenadas de $Q_J \mathbf{u}_N$ son uniformemente acotadas en $H^1(0,T)$ por la cota de $\partial_t \mathbf{u}_N$ en $H^{-1}(M,\mathbf{E})$; una subsucesión converge uniformemente en el espacio finito dimensional $Q_J L^2(M,\mathbf{E})$. Elegimos primero $J$ grande y después una subsucesión diagonal. Al pasar al límite en (20.23) obtenemos una solución débil $\mathbf{u}$. Además, las dos convergencias débiles anteriores muestran que $\mathbf{u}_N \rightharpoonup \mathbf{u}$ en el espacio de energía $\mathcal{X}^0_T(\mathbf{E})$. La traza $\mathcal{X}^0_T(\mathbf{E}) \to L^2(M,\mathbf{E})$ es lineal y continua por el Lema 20.1.3, y por ello es débilmente continua. Como $\mathbf{u}_N(0) = \Pi_N \mathbf{u}_0 \to \mathbf{u}_0$ fuertemente en $L^2$, se concluye que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.

Mostremos ahora que los datos de orden $r$ producen exactamente la regularidad afirmada. Para $r = 0$, la construcción anterior y la ecuación ya dan $\mathbf{u} \in \mathcal{X}^0_T(\mathbf{E})$. Supongamos, por lo tanto, que $r \geq 1$. Obtendremos cada derivada espacial mediante cocientes diferenciales. Comencemos por la primera derivada.

Justifiquemos las secciones de prueba que dependen de la solución. Fijamos primero el paso espacial $h \neq 0$ y un tiempo $T' < T$. Para $0 < \varepsilon < T - T'$ usamos los promedios de Steklov

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \mathbf{u}(\rho)\, d\rho, \qquad t \in [0,T'].$$

Los cocientes espaciales de $\mathbf{u}^\varepsilon$, localizados en una carta, pertenecen a $L^2(0,T';H^1)$ y son admisibles en

la ecuación débil promediada. Se integra entre 0 y un tiempo de $[0,T']$, usando cortes temporales que aproximen su función indicadora e incluyendo el término inicial. Para $h$ fijo hacemos primero $\varepsilon \to 0^+$. Por ejemplo, $(\mathbf{A}\nabla\mathbf{u})^\varepsilon$ y $\mathbf{A}\nabla\mathbf{u}^\varepsilon$ convergen ambos a $\mathbf{A}\nabla\mathbf{u}$ en $L^2$; la continuidad temporal y la cota uniforme de $\mathbf{A}$ justifican esta afirmación. Los cocientes de paso fijo son operadores acotados en $L^2$, de modo que conservan esa convergencia. Además $\mathbf{u}^\varepsilon(0) \to \mathbf{u}_0$ en $L^2$ por la traza ya obtenida en el orden cero. De este modo se recupera el término inicial de los cocientes. Sólo después se hará $h \to 0$, con las estimaciones uniformes que siguen. Al final podrá tomarse $T' \to T^-$.

En una carta y una trivialización de rango $d := \operatorname{rank}\mathbf{E}$, sea $\delta_h^\ell$ el cociente en la dirección coordenada $\ell$, y sea $\eta$ una función suave con soporte compacto en la carta. Elegimos un abierto $U'$ relativamente compacto en la misma carta que contenga una vecindad de $\operatorname{supp}\eta$; los pasos $h$ se toman de modo que todas las traslaciones utilizadas permanezcan en $U'$. Si $d\lambda_{\mathbf{g}_0} = a(x)\,dx$ y $H(x)$ es la matriz de la métrica fibrada, pongamos $\mathsf{G}(x) := a(x)H(x)$. En la formulación débil usamos como sección de prueba el adjunto discreto ponderado

$$-\mathsf{G}^{-1}\,\delta_{-h}^\ell\big(\mathsf{G}\eta^2\delta_h^\ell\mathbf{u}\big).$$

La identidad discreta exacta en la carta es

$$\int \big\langle \mathsf{G}\delta_h^\ell v, w\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\,dx = -\int \big\langle \mathsf{G}v, \mathsf{G}^{-1}\delta_{-h}^\ell(\mathsf{G}w)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\,dx. \tag{20.25}$$

El operador ponderado difiere de $\delta_{-h}^\ell$ por un operador uniformemente acotado en $L^2$. En efecto, si $\tau_h^\ell w(x) = w(x+he_\ell)$, la regla discreta del producto es

$$\delta_h^\ell(fw) = (\tau_h^\ell f)\delta_h^\ell w + (\delta_h^\ell f)w.$$

En estas estimaciones, las funciones de soporte compacto se consideran extendidas por cero a $\mathbb{R}^m$. Al aplicarla a $\mathsf{G}w$, el primer coeficiente adicional es $O(|h|)$; su producto con $\delta_{-h}^\ell w$ está acotado porque $\|h\delta_{-h}^\ell w\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^d)} \le 2\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^d)}$. El segundo coeficiente está acotado por las primeras derivadas de $\mathsf{G}$.

En la parte principal aparece la matriz trasladada $A(x+he_\ell,t)$, junto con los pesos métricos trasladados. La comparación con los pesos en $x$ introduce un error $O(|h|)$, uniforme por las cotas $C^1$ de los coeficientes fijos. Por tanto, para $|h|$ suficientemente pequeño, la integral principal controla

$$\frac{\lambda}{2}\int_M \eta^2 |\nabla\delta_h^\ell\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_\mathbf{E}}\,d\lambda_{\mathbf{g}_0}.$$

El término temporal es

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_M \eta^2 |\delta_h^\ell\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\,d\lambda_{\mathbf{g}_0}.$$

Los términos en los que el cociente cae sobre la representación local de $\mathbf{A}$, sobre $\eta$ o sobre los coeficientes de la conexión están acotados por

$$\frac{\lambda}{4}\int_M \eta^2 |\nabla\delta_h^\ell\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_\mathbf{E}}\,d\lambda_{\mathbf{g}_0} + C\int_{U'}\big(|\nabla\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_\mathbf{E}} + |\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} + |\mathbf{f}|^2_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\big)\,d\lambda_{\mathbf{g}_0}.$$

La cota es uniforme para $|h|$ menor que la distancia entre $\operatorname{supp}\eta$ y el borde de la carta. Integrando sobre $[0,T]$ y dejando $h \to 0$ se obtiene una derivada espacial adicional en una carta más pequeña.

Para iterar no suponemos de antemano que $\nabla\mathbf{u}$ sea acotada. Aplicamos cocientes de orden $q$, $1 \le q \le r$,

y usamos como secciones de prueba los cocientes inversos de orden $q$ de la misma expresión localizada. El conmutador con la parte principal se obtiene de la regla discreta del producto. Para $\gamma \in \mathbb{N}_0^m$ y un paso común en cada dirección, escribiendo $\tau_h^\gamma$ para la traslación por $h\gamma$, se tiene

$$\delta_h^\gamma(fw) = \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{N}_0^m \\ \mu \le \gamma}} \binom{\gamma}{\mu} (\tau_h^{\gamma-\mu}\delta_h^\mu f)(\delta_h^{\gamma-\mu} w).$$

Esta identidad resulta al aplicar la regla de primer orden una vez por cada dirección del multiíndice. Las traslaciones son acotadas en las normas localizadas y los cocientes de orden $|\mu|$ se controlan por las derivadas de ese orden en $U'$. Así, los términos del conmutador tienen las mismas cotas que las expresiones diferenciales a las que convergen:

$$(\partial^\mu A)\,\partial^{\gamma-\mu+1}\mathbf{u}, \qquad \mu, \gamma \in \mathbb{N}_0^m, \quad 0 < \mu \le \gamma, \quad |\gamma| = q, \tag{20.26}$$

y los términos de conexión tienen orden estrictamente menor. La estimación asimétrica (20.6) muestra que la suma de todos los términos (20.26) está acotada por $C\|\mathbf{A}\|_{H^s(M,\operatorname{End}\mathcal{H})}\|\mathbf{u}\|_{H^{|\gamma|}(M,\mathbf{E})}$. Los términos de primer orden y de orden cero obedecen

$$\|\mathbf{B}(\nabla\mathbf{u}) + \mathbf{C}\mathbf{u}\|_{H^{q-1}(M,\mathbf{E})} \le CK\|\mathbf{u}\|_{H^q(M,\mathbf{E})},$$

mientras que la suma de los términos de fuente es la forma covariante $\mathcal{B}_q(\mathbf{f},\mathbf{u})$ anterior. Moviendo una derivada en el término superior y usando después la dualidad espectral (20.11) se obtiene

$$|\mathcal{B}_q(\mathbf{f},\mathbf{u})| \le \frac{c}{4}\|\mathbf{u}\|^2_{H^{q+1}(M,\mathbf{E})} + C\|\mathbf{f}\|^2_{H^{q-1}(M,\mathbf{E})}.$$

Precisemos la inducción que permite pasar de estas estimaciones locales a la regularidad global. Para $0 \le q \le r$, sea $\mathcal{P}_q$ la afirmación

$$\mathbf{u} \in C([0,T]; H^q(M,\mathbf{E})) \cap L^2(0,T; H^{q+1}(M,\mathbf{E}))$$

y que se cumple la estimación de energía de orden $q$ escrita abajo. La afirmación $\mathcal{P}_0$ es (20.24), después de pasar al límite. El cálculo de cocientes que acabamos de efectuar prueba $\mathcal{P}_1$: la cota uniforme de $\delta_h^\ell\mathbf{u}$ permite extraer un límite débil, y la caracterización por cocientes diferenciales identifica ese límite con $\partial_\ell\mathbf{u}$.

Supongamos ahora demostradas $\mathcal{P}_0,\dots,\mathcal{P}_{q-1}$, donde $2 \le q \le r$. Aplicamos a la ecuación un cociente de orden $q$ y lo probamos contra su cociente inverso localizado. Cuando todos los cocientes caen sobre $\mathbf{u}$, la parabolicidad da el término coercivo de orden $q+1$. Si al menos uno cae sobre $\mathbf{A}$, se obtiene la versión mediante cocientes y traslaciones de uno de los términos de (20.26); la estimación de Moser anterior y Young permiten absorber la parte que contiene $\|\mathbf{u}\|^2_{H^{q+1}(M,\mathbf{E})}$. Los cocientes que caen sobre $\mathbf{B},\mathbf{C}$, los coeficientes de la conexión o los cortes contienen a lo más $q$ derivadas de $\mathbf{u}$, y quedan controlados por $\mathcal{P}_{q-1}$ y por la cota uniforme de los coeficientes. El término fuente se controla mediante $\mathcal{B}_q$, como se mostró arriba. Por último, los cocientes del dato inicial están uniformemente acotados por $\|\mathbf{u}_0\|_{H^q(M,\mathbf{E})}$.

Elegimos una cubierta finita por cartas y una partición de la unidad subordinada. Al sumar las estimaciones locales, los términos donde las derivadas alcanzan a los cortes son de orden menor y ya están cubiertos por $\mathcal{P}_{q-1}$. Las cotas resultantes son uniformes en el paso del cociente; al dejar $h \to 0$, la semicontinuidad débil de la norma proporciona $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H^{q+1}(M,\mathbf{E}))$. La propia ecuación, considerada como una identidad en

$H^{q-1}(M,\mathbf{E})$, da entonces $\partial_t \mathbf{u} \in L^2(0,T;H^{q-1}(M,\mathbf{E}))$. Aplicando el Lema 20.1.3 a la terna de Hilbert

$$H^{q+1}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow H^q(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow H^{q-1}(M,\mathbf{E})$$

obtenemos $\mathbf{u} \in C([0,T];H^q(M,\mathbf{E}))$. De este modo queda probada $\mathcal{P}_q$. Así se cierra el paso inductivo y, para cada $1 \le q \le r$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}_q(\mathbf{u}(t)) + c\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^{q+1}(M,\mathbf{E})} \le C\mathscr{E}_q(\mathbf{u}(t)) + C\|\mathbf{f}(t)\|^2_{H^{q-1}(M,\mathbf{E})}. \tag{20.27}$$

En cada paso sólo se han usado la cota de los coeficientes y la regularidad del paso anterior. Integrando la última desigualdad obtenemos

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,T;H^r(M,\mathbf{E}))} + \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^{r+1}(M,\mathbf{E})}\,dt \le C_T\left(\|\mathbf{u}_0\|^2_{H^r(M,\mathbf{E})} + \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|^2_{H^{r-1}(M,\mathbf{E})}\,dt\right). \tag{20.28}$$

El control hasta $t = 0$ se obtiene aplicando el mismo cálculo a las aproximaciones con dato inicial suave y usando el término $\|\mathbf{u}_0\|_{H^r(M,\mathbf{E})}$ al integrar la identidad de energía. No aparece una condición de compatibilidad adicional, pues $M$ es cerrada.

De la ecuación y de la continuidad de la multiplicación se deduce

$$\|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{r-1}(M,\mathbf{E}))} \le C\big(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E}))} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^r(M,\mathbf{E}))} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;H^{r-1}(M,\mathbf{E}))}\big).$$

Esto prueba (20.22) para datos y coeficientes suaves.

Pasemos a coeficientes y datos con la regularidad del enunciado. Elegimos aproximaciones suaves $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \mathbf{f}_j$ y $\mathbf{u}_{0,j}$ que converjan en los espacios indicados. Sustituimos $\mathbf{A}_j$ por su parte autoadjunta. Como $H^s(M) \hookrightarrow C^1(M)$, la convergencia de $\mathbf{A}_j$ es uniforme; por ello, a partir de cierto índice,

$$\langle \mathbf{A}_j(x,t)\zeta, \zeta\rangle \ge \frac{\lambda}{2}|\zeta|^2$$

para todo $(x,t)$ y toda $\zeta \in T^*_xM \otimes \mathbf{E}_x$. Las soluciones suaves $\mathbf{u}_j$ satisfacen una cota uniforme en $\mathcal{X}^r_T(\mathbf{E})$ por (20.21) y por la propia ecuación.

La reflexividad de los espacios de Bochner permite extraer una subsucesión tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &\rightharpoonup \mathbf{u} && \text{en } L^2(0,T;H^{r+1}(M,\mathbf{E})),\\ \partial_t \mathbf{u}_j &\rightharpoonup \partial_t \mathbf{u} && \text{en } L^2(0,T;H^{r-1}(M,\mathbf{E})). \end{aligned}$$

Para pasar al límite en el término principal, escribimos

$$\mathbf{A}_j\nabla\mathbf{u}_j - \mathbf{A}\nabla\mathbf{u} = (\mathbf{A}_j - \mathbf{A})\nabla\mathbf{u}_j + \mathbf{A}\nabla(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}).$$

La primera parte converge fuertemente a cero en $L^2(0,T;H^{r-1})$ por las estimaciones de producto y la segunda converge débilmente. Los términos con $\mathbf{B}_j$ y $\mathbf{C}_j$ se tratan del mismo modo. Al probar la ecuación contra secciones suaves dependientes del tiempo obtenemos, por tanto, el problema límite.

El mapeo de traza $\mathcal{X}^r_T(\mathbf{E}) \to H^r(M,\mathbf{E})$ es lineal y continuo por el Lema 20.1.3; en consecuencia es débilmente continuo. Como $\mathbf{u}_j(0) = \mathbf{u}_{0,j} \to \mathbf{u}_0$, se concluye que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$. La semicontinuidad débil conserva la estima-

ción (20.22). Si dos soluciones tienen los mismos datos, la estimación de energía de orden cero aplicada a su diferencia da la unicidad. Por último, cuando todos los datos son suaves, se repite la estimación para cualquier orden espacial; la ecuación expresa las derivadas temporales en términos de las derivadas espaciales ya controladas y produce suavidad conjunta. □

**Proposición 20.2.4.** (Estabilidad respecto de los coeficientes) Sea $(M,\mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible. Sean $P_t$ y $\widetilde{P}_t$ dos familias que satisfacen las hipótesis del Teorema 20.2.3, con las mismas cotas $K$ y $\lambda$. Sean $\mathbf{u},\widetilde{\mathbf{u}}\in\mathcal{X}^s_T(\mathbf{E})$ las soluciones correspondientes a $(\mathbf{u}_0,\mathbf{f})$ y $(\widetilde{\mathbf{u}}_0,\widetilde{\mathbf{f}})$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}-\widetilde{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{X}^{s-1}_T(\mathbf{E})}\\
&\quad\le C_T\Big(\|\mathbf{u}_0-\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{s-1}(M,\mathbf{E})}+\|\mathbf{f}-\widetilde{\mathbf{f}}\|_{\mathcal{Y}^{s-1}_T(\mathbf{E})}\\
&\qquad+\|\mathbf{A}-\widetilde{\mathbf{A}}\|_{C([0,T];H^{s-1}(M,\operatorname{End}\mathcal{H}))}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,T;H^{s+1}(M,\mathbf{E}))}\\
&\qquad+\|\mathbf{B}-\widetilde{\mathbf{B}}\|_{C([0,T];H^{s-1}(M,\operatorname{Hom}(\mathcal{H},\mathbf{E})))}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,T;H^{s}(M,\mathbf{E}))}\\
&\qquad+\|\mathbf{C}-\widetilde{\mathbf{C}}\|_{C([0,T];H^{s-1}(M,\operatorname{End}\mathbf{E}))}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,T;H^{s}(M,\mathbf{E}))}\Big).
\end{aligned}\tag{20.29}$$

*Demostración.* Pongamos $\mathbf{w}=\mathbf{u}-\widetilde{\mathbf{u}}$. Al restar las ecuaciones y conservar $P_t$ en el miembro izquierdo obtenemos

$$\partial_t\mathbf{w}+P_t\mathbf{w}=\mathbf{f}-\widetilde{\mathbf{f}}-\nabla^*\big((\mathbf{A}-\widetilde{\mathbf{A}})\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\big)-(\mathbf{B}-\widetilde{\mathbf{B}})(\nabla\widetilde{\mathbf{u}})-(\mathbf{C}-\widetilde{\mathbf{C}})\widetilde{\mathbf{u}}.$$

Como $s-1>\frac{m}{2}$, la estimación de producto (20.4) muestra que el miembro derecho pertenece a $L^2(0,T;H^{s-2}(M,\mathbf{E}))$ y está acotado por los términos que aparecen en (20.29). Aplicamos el Teorema 20.2.3 con $r=s-1$. □

## 20.3 Ecuaciones cuasilineales

La teoría lineal puede aplicarse con coeficientes congelados en una sección dada. La solución no lineal se construirá repitiendo este procedimiento y mostrando que, en un intervalo suficientemente corto, la iteración permanece en una región uniformemente parabólica y se vuelve contractiva en una norma más débil. Sea $\mathcal{U}\subseteq\mathbf{E}$ un abierto fibrado y consideremos dos mapeos fibrados suaves

$$\begin{aligned}
A&\colon \mathcal{U}\longrightarrow \operatorname{End}(T^*M\otimes\mathbf{E}),\\
F&\colon J^1(\mathcal{U})\longrightarrow \mathbf{E}.
\end{aligned}$$

Aquí $J^1(\mathcal{U})$ denota el abierto del haz $\mathbf{E}\oplus(T^*M\otimes\mathbf{E})$ formado por los pares $(z,p)$ con $z\in\mathcal{U}$. Estudiamos

$$\partial_t\mathbf{u}+\nabla^*\big(A(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}\big)=F(j^1\mathbf{u}),\qquad \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0.\tag{20.30}$$

Para $\xi \in T_x^*M$, sea $\iota_\xi : \mathbf{E}_x \to T_x^*M \otimes \mathbf{E}_x$ el mapeo $v \mapsto \xi \otimes v$. El símbolo principal es $\iota_\xi^* A(\mathbf{u}(x))\iota_\xi$. En una carta y un marco local, la ecuación toma la forma

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^{m} \nabla_i \big(A^{ij}(x,u)\nabla_j u\big) = F(x,u,\nabla u).$$

Al desarrollar la divergencia, la derivada horizontal $\nabla_x A$ y la derivada vertical $D_z A(u)[\nabla u]$ sólo contribuyen a términos de orden inferior.

**Teorema 20.3.1.** (Existencia cuasilineal de tiempo corto) Sea $(M, \mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible y sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{E}$ un abierto fibrado. Sea $\mathbf{u}_0 \in H^s(M, \mathbf{E})$ una sección cuya imagen está contenida en $\mathcal{U}$. Supongamos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\langle A(\mathbf{u}_0(x))\zeta, \zeta\rangle_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_\mathbf{E}} \geq \lambda_0 |\zeta|^2_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_\mathbf{E}} \tag{20.31}$$

para todo $x \in M$ y $\zeta \in T_x^*M \otimes \mathbf{E}_x$, y que $A(z)$ es autoadjunto para todo $z \in \mathcal{U}$. Entonces existe $T > 0$ para el cual (20.30) posee una única solución

$$\mathbf{u} \in \mathcal{X}_T^s(\mathbf{E}) \quad \text{con} \quad \mathbf{u}(x,t) \in \mathcal{U}.$$

El tiempo $T$ puede escogerse uniformemente si $\mathbf{u}_0$ recorre un conjunto acotado de $H^s(M, \mathbf{E})$ cuya imagen permanece a distancia positiva del complemento de $\mathcal{U}$ y para el cual la constante de (20.31) tiene una cota inferior positiva.

*Demostración.* La imagen de $\mathbf{u}_0$ es compacta porque $s > \frac{m}{2}$ y $M$ es compacta. Por continuidad de $A$ podemos elegir un abierto $\mathcal{V} \subseteq \mathbf{E}$ tal que

$$\mathbf{u}_0(M) \subseteq \mathcal{V}, \qquad \overline{\mathcal{V}} \text{ es compacta y está contenida en } \mathcal{U},$$

y en cuya cerradura se cumple

$$\langle A(z)\zeta, \zeta\rangle_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_\mathbf{E}} \geq \frac{\lambda_0}{2} |\zeta|^2_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_\mathbf{E}}. \tag{20.32}$$

Definimos $\mathbf{u}^{(0)}(t) = \mathbf{u}_0$ y, una vez construido $\mathbf{u}^{(k)}$, resolvemos el problema lineal

$$\partial_t \mathbf{u}^{(k+1)} + \nabla^* \big(A(\mathbf{u}^{(k)})\nabla \mathbf{u}^{(k+1)}\big) = F(j^1\mathbf{u}^{(k)}), \qquad \mathbf{u}^{(k+1)}(0) = \mathbf{u}_0. \tag{20.33}$$

Mostraremos simultáneamente que la iteración está bien definida y que es contractiva.
Sea $D_s = c_s^{-1}$, con $c_s$ como en la equivalencia que sigue a (20.18). Fijemos $R$ tan grande que $R^2 > 2D_s\mathscr{E}_s(\mathbf{u}_0)+1$. Supongamos de manera inductiva que

$$\|\mathbf{u}^{(k)}\|_{L^\infty(0,T;H^s(M,\mathbf{E}))} \leq R, \qquad \mathbf{u}^{(k)}(M \times [0,T]) \subseteq \mathcal{V}. \tag{20.34}$$

El Lema 20.1.2 da cotas, independientes de $k$, para $A(\mathbf{u}^{(k)})$ en $C([0,T]; H^s(M, \operatorname{End}\mathcal{H}))$ y para $F(j^1\mathbf{u}^{(k)})$ en $C([0,T]; H^{s-1}(M,\mathbf{E}))$. En unión con (20.32), el Teorema 20.2.3 produce $\mathbf{u}^{(k+1)} \in \mathcal{X}_T^s(\mathbf{E})$. La desigualdad diferencial (20.20), antes de reemplazarla por la cota más gruesa (20.22), da una constante $C_R$, independiente

de $k$ y de $T \le 1$, tal que

$$\|\mathbf{u}^{(k+1)}\|^2_{L^\infty(0,T;H^s(M,\mathbf{E}))} \le D_s e^{C_R T}\big(\mathscr{E}_s(\mathbf{u}_0) + C_R T\big), \tag{20.35}$$

$$\|\mathbf{u}^{(k+1)}\|_{\mathcal{X}^s_T(\mathbf{E})} \le C_R. \tag{20.36}$$

La primera cota tiende a $D_s\mathscr{E}_s(\mathbf{u}_0)$ cuando $T \to 0$. Por lo tanto, después de reducir $T$, su miembro derecho es menor que $R^2$.
Además, por el Lema 20.1.3,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}^{(k+1)}(t) - \mathbf{u}_0\|_{H^{s-1}(M,\mathbf{E})} &\le \int_0^t \|\partial_\rho \mathbf{u}^{(k+1)}(\rho)\|_{H^{s-1}(M,\mathbf{E})}\, d\rho \\ &\le T^{\frac{1}{2}} \|\partial_t \mathbf{u}^{(k+1)}\|_{L^2(0,T;H^{s-1}(M,\mathbf{E}))}.\end{aligned} \tag{20.37}$$

El encaje $H^{s-1}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow C^0(M,\mathbf{E})$ y (20.36) muestran que, para $T$ todavía más pequeño, la imagen de $\mathbf{u}^{(k+1)}$ permanece en $\mathcal{V}$. Esto cierra la inducción.
Pongamos $\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}$ y $\mathbf{A}_k = A(\mathbf{u}^{(k)})$, $\mathbf{F}_k = F(j^1\mathbf{u}^{(k)})$. La diferencia de dos ecuaciones consecutivas es

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{w}^{(k+1)} + \nabla^*(\mathbf{A}_k \nabla \mathbf{w}^{(k+1)}) = &-\nabla^*\big((\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_{k-1})\nabla \mathbf{u}^{(k)}\big) \\ &+ \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_{k-1}, \qquad \mathbf{w}^{(k+1)}(0) = 0.\end{aligned} \tag{20.38}$$

La contracción se obtiene en el espacio de energía bajo

$$\mathcal{Z}_T(\mathbf{E}) := C([0,T];L^2(M,\mathbf{E})) \cap L^2(0,T;H^1(M,\mathbf{E})),$$

con

$$\|\mathbf{w}\|^2_{\mathcal{Z}_T(\mathbf{E})} := \|\mathbf{w}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(M,\mathbf{E}))} + \int_0^T \|\mathbf{w}(t)\|^2_{H^1(M,\mathbf{E})}\, dt. \tag{20.39}$$

Las cotas anteriores y el encaje $H^s(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow C^1(M,\mathbf{E})$ encierran los primeros chorros de la iteración en un compacto de $J^1(\mathcal{U})$. Mediante funciones de corte como en la prueba del Lema 20.1.2, extendemos $A$ y $F$ a mapeos suaves definidos en las fibras vectoriales completas de una vecindad de ese compacto. El teorema del valor medio aplicado a esas extensiones permite escribir

$$\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_{k-1} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_k[\mathbf{w}^{(k)}], \tag{20.40}$$

$$\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_{k-1} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_k[\mathbf{w}^{(k)}] + \boldsymbol{\mathcal{C}}_k[\nabla \mathbf{w}^{(k)}]. \tag{20.41}$$

Para cada $t \in [0,T]$, estos coeficientes pertenecen a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{A}}_k(t) &\in H^s\big(M, \operatorname{Hom}(\mathbf{E}, \operatorname{End}\mathcal{H})\big), \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}_k(t) &\in H^{s-1}(M, \operatorname{End}\mathbf{E}), \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_k(t) &\in H^{s-1}(M, \operatorname{Hom}(\mathcal{H}, \mathbf{E})),\end{aligned}$$

y dependen continuamente de $t$ en esos espacios. Las cotas (20.34) y el encaje $H^s(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow C^2(M,\mathbf{E})$ acotan uniformemente en los espacios $L^\infty$ correspondientes a $\boldsymbol{\mathcal{A}}_k, \boldsymbol{\mathcal{B}}_k, \boldsymbol{\mathcal{C}}_k$, a $\nabla\boldsymbol{\mathcal{C}}_k$ y a $\nabla\mathbf{u}^{(k)}$. Aquí $\nabla\boldsymbol{\mathcal{C}}_k$ es una sección

de $T^*M \otimes \operatorname{Hom}(\mathcal{H}, \mathbf{E})$, con la conexión inducida.
Tomamos el producto $L^2(M,\mathbf{E})$ de (20.38) con $\mathbf{w}^{(k+1)}$. Integramos por partes el término que contiene $\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_{k-1}$ y también el término con $\nabla \mathbf{w}^{(k)}$. Como $\mathcal{C}_k$ y $\nabla \mathcal{C}_k$ están uniformemente acotados, este último satisface

$$\left| \int_M \left\langle \mathcal{C}_k[\nabla \mathbf{w}^{(k)}], \mathbf{w}^{(k+1)} \right\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}} d\lambda_{\mathbf{g}_0} \right| \leq C_R \|\mathbf{w}^{(k)}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \left( \|\nabla \mathbf{w}^{(k+1)}\|_{L^2(M,\mathcal{H})} + \|\mathbf{w}^{(k+1)}\|_{L^2(M,\mathbf{E})} \right).$$

Por la parabolicidad y la desigualdad de Young se obtiene

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}^{(k+1)}(t)\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} + \frac{\lambda_0}{2}\|\nabla \mathbf{w}^{(k+1)}(t)\|^2_{L^2(M,\mathcal{H})} \leq C_R \|\mathbf{w}^{(k+1)}(t)\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})} + C_R \|\mathbf{w}^{(k)}(t)\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})}. \tag{20.42}$$

Como $\mathbf{w}^{(k+1)}(0) = 0$, el Lema de Grönwall 1.8.19 implica

$$\|\mathbf{w}^{(k+1)}\|^2_{\mathcal{Z}_T(\mathbf{E})} \leq C_R T e^{C_R T} \|\mathbf{w}^{(k)}\|^2_{C([0,T];L^2(M,\mathbf{E}))} \leq C_R T e^{C_R T} \|\mathbf{w}^{(k)}\|^2_{\mathcal{Z}_T(\mathbf{E})}. \tag{20.43}$$

Reducimos $T$ hasta que $q := C_R T e^{C_R T} < 1$. Entonces

$$\|\mathbf{w}^{(k+1)}\|_{\mathcal{Z}_T(\mathbf{E})} \leq q^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}^{(k)}\|_{\mathcal{Z}_T(\mathbf{E})},$$

Para $k = 1$ la cota $\|\mathbf{w}^{(k)}\|_{\mathcal{Z}_T} \leq q^{(k-1)/2}\|\mathbf{w}^{(1)}\|_{\mathcal{Z}_T}$ es una igualdad. Si vale para $k$, la desigualdad anterior la da para $k+1$ al multiplicar por $q^{1/2}$. Por tanto, al sumar la serie geométrica,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{w}^{(k)}\|_{\mathcal{Z}_T(\mathbf{E})} \leq \frac{\|\mathbf{w}^{(1)}\|_{\mathcal{Z}_T(\mathbf{E})}}{1 - q^{\frac{1}{2}}} < \infty.$$

El espacio $\mathcal{Z}_T(\mathbf{E})$ es completo como intersección de los dos espacios de Banach que lo definen, con la norma suma. Por lo tanto, $(\mathbf{u}^{(k)})$ es de Cauchy en $\mathcal{Z}_T(\mathbf{E})$.
Las cotas uniformes de $(\mathbf{u}^{(k)})_{k\geq 1}$ en $\mathcal{X}^s_T(\mathbf{E})$ mejoran esta convergencia. La sección $\mathbf{u}^{(0)}(t) = \mathbf{u}_0$ sólo se usa para iniciar la iteración y no tiene por qué pertenecer a $L^2(0,T;H^{s+1}(M,\mathbf{E}))$. En cada tiempo, la interpolación de la escala de Sobolev da

$$\|\mathbf{w}\|_{H^{s-1}(M,\mathbf{E})} \leq C \|\mathbf{w}\|^{\frac{1}{s}}_{L^2(M,\mathbf{E})} \|\mathbf{w}\|^{\frac{s-1}{s}}_{H^s(M,\mathbf{E})}, \tag{20.44}$$

y, después de integrar en el tiempo,

$$\|\mathbf{w}\|_{L^2(0,T;H^s(M,\mathbf{E}))} \leq C \|\mathbf{w}\|^{\frac{1}{s}}_{L^2(0,T;H^1(M,\mathbf{E}))} \|\mathbf{w}\|^{\frac{s-1}{s}}_{L^2(0,T;H^{s+1}(M,\mathbf{E}))}. \tag{20.45}$$

Por ello $(\mathbf{u}^{(k)})$ converge fuertemente en $C([0,T];H^{s-1}(M,\mathbf{E})) \cap L^2(0,T;H^s(M,\mathbf{E}))$. La compacidad débil en los factores $L^2$, la compacidad débil-* en $L^\infty(0,T;H^s(M,\mathbf{E}))$ y las cotas uniformes producen un límite $\mathbf{u} \in \mathcal{X}^s_T(\mathbf{E})$. Las estimaciones de composición permiten pasar al límite en $A(\mathbf{u}^{(k)})$ y $F(j^1\mathbf{u}^{(k)})$, por lo que $\mathbf{u}$ satisface (20.30). La continuidad en $H^{s-1}$ y el encaje en $C^0$ garantizan que su imagen permanece en $\mathcal{U}$.
Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos soluciones, repetimos el cálculo (20.40)– (20.42) para $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Ahora $\mathbf{w}(0) = 0$ y el miembro derecho contiene $C_R\|\mathbf{w}(t)\|^2_{L^2(M,\mathbf{E})}$ en lugar de la diferencia del paso anterior. El Lema de Grönwall 1.8.19 da $\mathbf{w} = 0$ en todo $[0,T]$. La uniformidad del tiempo de existencia se desprende de que todas las constantes usadas dependen únicamente de la cota $H^s$, de la distancia al complemento de $\mathcal{U}$ y de la cota inferior de parabolicidad. □

La forma autónoma de la ecuación basta para la mayor parte del capítulo. En las aplicaciones geométricas aparecerán también coeficientes con dependencia explícita del tiempo; el mismo argumento proporciona la siguiente versión.

**Corolario 20.3.2.** (Dependencia explícita del tiempo) Sea $T_* > 0$ y sean

$$A\colon [0,T_*]\times \mathcal{U} \longrightarrow \operatorname{End}(T^*M\otimes \mathbf{E}),$$
$$F\colon [0,T_*]\times J^1(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbf{E}$$

mapeos fibrados suaves. Supongamos que $A(t,z)$ es autoadjunto y que la condición de parabolicidad fuerte se cumple en $(0,\mathbf{u}_0)$ con una constante positiva. Entonces existe $T\in(0,T_*]$ y una única solución $\mathbf{u}\in \mathcal{X}^s_T(\mathbf{E})$ de

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla^*\big(A(t,\mathbf{u})\nabla \mathbf{u}\big) = F(t,j^1\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0.$$

Las afirmaciones de regularidad, dependencia de los datos y uniformidad del tiempo permanecen válidas cuando las cotas de las derivadas de $A$ y $F$ son uniformes para $t\in[0,T_*]$ sobre los compactos considerados.

*Demostración.* En la iteración de (20.33) se sustituyen los coeficientes por $A(t,\mathbf{u}^{(k)})$ y $F(t,j^1\mathbf{u}^{(k)})$. Las estimaciones de composición del Lema 20.1.2 son uniformes en $t$ porque el intervalo temporal es compacto. La estimación de energía, la permanencia dentro de $\mathcal{V}$ y la contracción en $\mathcal{Z}_T(\mathbf{E})$ no cambian. Las pruebas de regularidad y dependencia paramétrica sólo añaden derivadas de los coeficientes respecto de $t$, que son términos de orden inferior uniformemente acotados. □

**Corolario 20.3.3.** (Regularidad y dependencia de los datos) Sea $(M,\mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible y considérese la ecuación cuasilineal (20.30). Bajo las hipótesis del Teorema 20.3.1 se cumplen las afirmaciones siguientes.

(a) En subconjuntos acotados de datos iniciales que comparten las cotas de parabolicidad y de distancia a $\mathbf{E}\setminus\mathcal{U}$, las soluciones satisfacen

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\mathcal{X}^{s-1}_T(\mathbf{E})} \le C\|\mathbf{u}_0-\mathbf{v}_0\|_{H^{s-1}(M,\mathbf{E})}. \tag{20.46}$$

(b) Si $\mathbf{u}_0\in H^{s+q}(M,\mathbf{E})$ para algún entero $q\ge 0$, entonces, tras reducir $T$ sólo mediante una cota de $\|\mathbf{u}_0\|_{H^s(M,\mathbf{E})}$, se tiene $\mathbf{u}\in\mathcal{X}^{s+q}_T(\mathbf{E})$.

(c) Si $\mathbf{u}_0$ es suave, la solución es suave en $M\times[0,T]$. Para un dato inicial meramente $H^s$, la solución es suave en $M\times(0,T]$.

(d) Una familia suave de datos iniciales suaves produce una familia suave de soluciones, mientras todas ellas permanezcan en un conjunto sobre el que las cotas anteriores sean uniformes.

*Demostración.* La ecuación de $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ es

$$\begin{aligned}\partial_t(\mathbf{u}-\mathbf{v}) + \nabla^*(A(\mathbf{u})\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})) = {}& -\nabla^*\big((A(\mathbf{u})-A(\mathbf{v}))\nabla\mathbf{v}\big)\\ & + F(j^1\mathbf{u})-F(j^1\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Aplicamos $\nabla^q$, $0 \le q \le s-1$, y repetimos la integración por partes del Lema 20.2.2. En el término que contiene la diferencia de coeficientes usamos

$$\|(A(\mathbf{u})-A(\mathbf{v}))\nabla \mathbf{v}\|_{H^{s-1}(M,\boldsymbol{\mathcal{H}})} \le C_R \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{H^{s-1}(M,\mathbf{E})} \|\mathbf{v}\|_{H^s(M,\mathbf{E})}. \tag{20.47}$$

La estimación es válida porque $H^{s-1}(M)$ es un álgebra. La diferencia de los términos $F$ está acotada en $H^{s-2}(M,\mathbf{E})$ por $C_R\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{H^{s-1}(M,\mathbf{E})}$. Después de absorber la derivada de orden $s$ de $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}_{s-1}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) + c\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2_{H^s(M,\mathbf{E})} \le C_R \mathscr{E}_{s-1}(\mathbf{u}-\mathbf{v}). \tag{20.48}$$

El Lema de Grönwall 1.8.19 controla la parte $C([0,T];H^{s-1}(M,\mathbf{E})) \cap L^2(0,T;H^s(M,\mathbf{E}))$. La ecuación de la diferencia controla además $\partial_t(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ en $L^2(0,T;H^{s-2}(M,\mathbf{E}))$, y se obtiene (20.46).

Probemos ahora la persistencia de regularidad mediante una energía de orden arbitrario. Sea $N \ge s$ y supongamos primero que $\mathbf{u}$ es suave. En un intervalo $[0,T]$ donde $\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^s(M,\mathbf{E}))} \le R$, las estimaciones de Moser con control de orden alto dan

$$\|[\nabla^N, A(\mathbf{u})](\nabla \mathbf{u})\|_{L^2(M,T^{(0,N)}(TM)\otimes\boldsymbol{\mathcal{H}})} + \|F(j^1\mathbf{u})\|_{H^{N-1}(M,\mathbf{E})} \le C_{N,R}\big(1+\|\mathbf{u}\|_{H^N(M,\mathbf{E})}\big). \tag{20.49}$$

En efecto, (20.5) da

$$\begin{aligned}
&\|[\nabla^N, A(\mathbf{u})]\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(M,T^{(0,N)}(TM)\otimes\boldsymbol{\mathcal{H}})} \\
&\quad\le C_N \|\nabla A(\mathbf{u})\|_{L^\infty(M,T^*M\otimes \mathrm{End}(\boldsymbol{\mathcal{H}}))} \|\nabla\mathbf{u}\|_{H^{N-1}(M,\boldsymbol{\mathcal{H}})} \\
&\qquad + C_N \|A(\mathbf{u})\|_{H^N(M,\mathrm{End}(\boldsymbol{\mathcal{H}}))} \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(M,\boldsymbol{\mathcal{H}})}.
\end{aligned}$$

La cota $H^s \hookrightarrow C^2$ controla los dos factores de norma infinito. La estimación (20.9) controla $A(\mathbf{u})$ en $H^N$ por $C_{N,R}(1+\|\mathbf{u}\|_{H^N(M,\mathbf{E})})$. Aplicada a $(\mathbf{u},\nabla\mathbf{u}) \mapsto F(\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})$ con orden $N-1$, esa misma estimación controla el término restante de (20.49). Todas las constantes usan las cotas de los primeros chorros y las estructuras fijas. Al aplicar $\nabla^N$ a la ecuación, integrar por partes y usar (20.49), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}_N(\mathbf{u}(t)) + c\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^{N+1}(M,\mathbf{E})} \le C_{N,R}\big(1+\mathscr{E}_N(\mathbf{u}(t))\big). \tag{20.50}$$

Para una solución $\mathbf{u} \in \mathcal{X}^N_T(\mathbf{E})$, la identidad que permite usar esta energía es

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}_N(\mathbf{u}(t)) = 2\mathcal{B}_N(\partial_t\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)) \quad \text{para casi todo } t \in (0,T), \tag{20.51}$$

donde $\mathcal{B}_N$ es la forma extendida en la prueba del Lema 20.2.2. Para verificarla, fijamos un intervalo compacto $J \subset (0,T)$ y regularizamos sólo en tiempo: $\mathbf{u}_\varepsilon = \rho_\varepsilon *_t \mathbf{u}$, con $\varepsilon$ menor que la distancia de $J$ a los extremos. La continuidad de las traslaciones en los espacios de Bochner da

$$\mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{u} \quad \text{en } L^2(J;H^{N+1}(M,\mathbf{E})), \qquad \partial_t\mathbf{u}_\varepsilon \to \partial_t\mathbf{u} \quad \text{en } L^2(J;H^{N-1}(M,\mathbf{E})).$$

La primera convergencia implica $\mathscr{E}_N(\mathbf{u}_\varepsilon) \to \mathscr{E}_N(\mathbf{u})$ en $L^1(J)$. Por la cota de $\mathcal{B}_N$, el error del miembro derecho, integrado sobre $J$, es a lo más

$$C\|\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon - \partial_t\mathbf{u}\|_{L^2(J;H^{N-1}(M,\mathbf{E}))} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(J;H^{N+1}(M,\mathbf{E}))}$$

$$+ C\|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^2(J;H^{N-1}(M,\mathbf{E}))}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{L^2(J;H^{N+1}(M,\mathbf{E}))},$$

que tiende a cero. Para $\mathbf{u}_\varepsilon$, la diferenciación de la norma covariante y la fórmula de $\mathcal{B}_N$ dan la identidad clásica; al probarla contra una función de $C_c^\infty(J)$ y tomar límites se obtiene (20.51) en distribuciones. Su miembro derecho pertenece a $L^1(0,T)$. El Lema 20.1.3 proporciona el representante continuo en $H^N(M,\mathbf{E})$, de modo que la energía tiene el representante absolutamente continuo determinado por esta identidad.

Finalmente, para casi todo $t$, sustituimos la ecuación en $\mathcal{B}_N(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{u})$. Las integraciones por partes espaciales son válidas para $\mathbf{u}(t) \in H^{N+1}(M,\mathbf{E})$ por la definición explícita de esa forma. Las estimaciones de producto y de Moser de (20.49) controlan los términos resultantes en los mismos espacios; se obtienen también como límites de aproximaciones suaves en $H^{N+1}(M,\mathbf{E})$. La estimación de energía se cumple así para casi todo tiempo y puede integrarse en cualquier subintervalo de $[0,T]$.

Justifiquemos que esta estimación se aplica en el intervalo de existencia determinado por la norma de orden $s$. Si $\mathbf{u}_0 \in H^N$, el teorema cuasilineal aplicado inicialmente con orden $N$ produce una solución en un intervalo posiblemente menor. Por unicidad coincide allí con la solución de orden $s$. Mientras ambas están definidas, Grönwall aplicado a (20.50) acota su norma $H^N$ mediante $N, R, T$ y $\|\mathbf{u}_0\|_{H^N(M,\mathbf{E})}$. La distancia al borde de $\mathcal{U}$ y la parabolicidad conservan las cotas de la construcción de orden $s$. Al reiniciar el teorema de existencia en cualquier tiempo de ese intervalo, estas cotas y la cota $H^N$ dan un tiempo adicional positivo independiente del tiempo de reinicio. Si el intervalo de regularidad $H^N$ terminara antes de $T$, bastaría reiniciar suficientemente cerca de su extremo para sobrepasarlo. Por unicidad, la prolongación seguiría siendo la misma solución. Así se obtiene regularidad $H^N$ hasta $T$.

Para justificar las identidades con datos $H^N$, aproximamos el dato en esa norma por secciones suaves. La estimación de orden $s$ proporciona un intervalo común, y el argumento anterior y (20.50) dan cotas uniformes en $\mathcal{X}_T^N$. El paso al límite débil y la identificación de la traza son los del teorema lineal; la unicidad identifica el límite con $\mathbf{u}$. Se concluye $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_T^N$. El intervalo $T$ se fija con las cotas de orden $s$, aunque la norma de orden $N$ de la solución depende también de la del dato inicial.

La misma energía prueba el suavizado sin atribuir al dato derivadas que no posee. Fijemos $0 < \tau < T$ y un entero $q \geq 1$. Elegimos números

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_q = \tau$$

y funciones suaves $\chi_j$ que se anulan en un entorno de $[0, \tau_{j-1}]$ y valen uno en $[\tau_j, T]$. Supongamos inductivamente que, tras trasladar el origen temporal a $\tau_{j-1}$, la restricción de la solución a $[\tau_{j-1}, T]$ pertenece a $\mathcal{X}_{T-\tau_{j-1}}^{s+j-1}(\mathbf{E})$; para $j = 1$ ésta es precisamente la regularidad de existencia. Aplicamos el cálculo de (20.50) con $N = s + j$ y peso $\chi_j^2$ a aproximaciones suaves de $\mathbf{u}$. El único término nuevo es

$$2\chi_j \chi_j' \mathscr{E}_{s+j}(\mathbf{u}),$$

cuya integral es finita porque la hipótesis inductiva contiene $\mathbf{u} \in L^2(\tau_{j-1}, T; H^{s+j}(M,\mathbf{E}))$. Después de pasar al límite se obtiene

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(\tau_j,T;H^{s+j}(M,\mathbf{E}))} + \int_{\tau_j}^{T} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^{s+j+1}(M,\mathbf{E})}\, dt \leq C_{j,R,\tau}\left(1 + \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^{s+j}(M,\mathbf{E})}\, dt\right). \tag{20.52}$$

La inducción llega a cualquier $q$. El encaje de Sobolev da suavidad espacial en $M \times (0,T]$, y la ecuación expresa cada derivada temporal en términos de derivadas espaciales ya controladas; de este modo se obtiene suavidad conjunta. Si $\mathbf{u}_0$ es suave, la estimación (20.50) empieza en $t = 0$ para todo $N$ y la solución es suave hasta el tiempo inicial.

Finalmente, justificamos la dependencia suave sin suponer de antemano que puede derivarse respecto del parámetro. Sea $a \mapsto \mathbf{u}_{0,a}$ una familia suave de datos suaves y sea $\mathbf{u}_a$ la familia de soluciones obtenida en un intervalo común. Para una dirección paramétrica fija definimos el cociente

$$\mathbf{h}_\varepsilon := \frac{\mathbf{u}_{a+\varepsilon} - \mathbf{u}_a}{\varepsilon}.$$

La fórmula integral del valor medio aplicada a las extensiones de $A$ y $F$ construidas en la prueba del teorema muestra que $\mathbf{h}_\varepsilon$ satisface un sistema lineal cuyo término principal es $\nabla^*(A(\mathbf{u}_a)\nabla \mathbf{h}_\varepsilon)$ y cuyos demás coeficientes son promedios de $D_z A$, $D_z F$ y $D_p F$ a lo largo del segmento entre las dos soluciones. Las energías (20.48) y (20.50) acotan uniformemente $\mathbf{h}_\varepsilon$ en cada orden, porque los cocientes de los datos iniciales están uniformemente acotados.

Al restar las ecuaciones de $\mathbf{h}_\varepsilon$ y $\mathbf{h}_\delta$, los coeficientes promediados convergen por las estimaciones de composición de Moser. La energía de la diferencia muestra que $(\mathbf{h}_\varepsilon)$ es de Cauchy en cada espacio de orden una unidad menor. Su límite $\mathbf{h} = \partial_a \mathbf{u}_a$ satisface

$$\begin{aligned} &\partial_t \mathbf{h} + \nabla^*\big(A(\mathbf{u}_a)\nabla \mathbf{h} + D_z A(\mathbf{u}_a)[\mathbf{h}]\nabla \mathbf{u}_a\big) \\ &\qquad = D_z F(\mathbf{u}_a, \nabla \mathbf{u}_a)[\mathbf{h}] + D_p F(\mathbf{u}_a, \nabla \mathbf{u}_a)[\nabla \mathbf{h}]. \end{aligned} \tag{20.53}$$

Hagamos explícito el paso a las derivadas paramétricas superiores. Para una variable real $a$ escribimos $\mathbf{u}^{[k]} = \partial_a^k \mathbf{u}_a$ y definimos el operador diferencial no lineal

$$\mathcal{H}(\mathbf{v}) := -\nabla^*(A(\mathbf{v})\nabla \mathbf{v}) + F(\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}).$$

Supongamos construidas y continuas las derivadas $\mathbf{u}^{[1]}, \dots, \mathbf{u}^{[q-1]}$ en todos los órdenes espaciales, con $q \geq 2$. La fórmula de Faà di Bruno da la ecuación candidata

$$(\partial_t - D\mathcal{H}(\mathbf{u}_a))\mathbf{u}^{[q]} = \sum_{j=2}^{q} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_j \in \mathbb{N} \\ k_1+\cdots+k_j = q}} \frac{q!}{j!\,k_1!\cdots k_j!} D^j \mathcal{H}(\mathbf{u}_a)[\mathbf{u}^{[k_1]}, \dots, \mathbf{u}^{[k_j]}].$$

En esta suma cada $k_i$ es menor que $q$; por la hipótesis inductiva el miembro derecho es conocido. El operador de la izquierda es precisamente el de (20.53) y conserva la parte principal $\nabla^*(A(\mathbf{u}_a)\nabla\cdot)$. El dato inicial es $\partial_a^q \mathbf{u}_{0,a}$. La teoría lineal produce una solución única en cada orden espacial.

Para identificarla con una derivada, tomamos el cociente incremental de la ecuación de $\mathbf{u}^{[q-1]}$. Las reglas integrales del producto y de la composición expresan sus coeficientes mediante promedios de las derivadas de $A$ y $F$. La hipótesis inductiva hace converger las fuentes al miembro derecho anterior. Restando dos ecuaciones de cocientes, la estimación lineal controla su diferencia por la diferencia de los datos, coeficientes y fuentes, que tiende a cero. Los cocientes son, por tanto, de Cauchy, y su límite es la solución lineal recién construida. La misma estimación, aplicada a dos valores próximos de $a$, prueba su continuidad. Esto cierra el paso de $q-1$ a $q$, con el caso $q = 1$ ya demostrado. Para parámetros en un abierto de $\mathbb{R}^d$, se aplica este argumento a derivadas direccionales sucesivas; las fórmulas multilineales de Faà di Bruno proporcionan

las derivadas mixtas con el mismo control. Las cotas se toman localmente en el parámetro, sobre compactos donde el intervalo y las hipótesis de existencia son uniformes. Esto demuestra la última afirmación. □

**Teorema 20.3.4.** (Criterio de continuación) Sea $(M, \mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial con métrica fibrada y conexión compatible y sea $\mathbf{u}$ una solución maximal de (20.30), definida en $[0, T_{\max})$, con $T_{\max} < \infty$, y supongamos que $\mathbf{u} \in \mathcal{X}^s_T(\mathbf{E})$ para todo $T < T_{\max}$. Si existen $R, \delta > 0$ tales que, para todo $0 \le t < T_{\max}$,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H^s(M,\mathbf{E})} \le R, \tag{20.54}$$

$$\inf_{x \in M} \operatorname{dist}_{\mathbf{E}_x}\big(\mathbf{u}(x,t), \mathbf{E}_x \setminus \mathcal{U}_x\big) \ge \delta, \tag{20.55}$$

$$\langle A(\mathbf{u}(x,t))\zeta, \zeta\rangle_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_\mathbf{E}} \ge \delta |\zeta|^2_{\mathbf{g}_0,\mathbf{h}_\mathbf{E}}. \tag{20.56}$$

La última desigualdad se exige para todo $x \in M$ y $\zeta \in T^*_x M \otimes \mathbf{E}_x$. Entonces $\mathbf{u}$ se prolonga a un intervalo $[0, T_{\max} + \varepsilon)$, en contradicción con su maximalidad. Por lo tanto, si el tiempo maximal es finito, al menos una de las cantidades controladas en (20.54)–(20.56) debe degenerar.

*Demostración.* La última afirmación del Teorema 20.3.1 proporciona un tiempo $\varepsilon > 0$ que depende sólo de $R$, $\delta$ y de cotas de $A, F$ sobre el compacto recorrido por los primeros chorros de $\mathbf{u}$. Estas últimas cotas se siguen de $H^s(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow C^1(M,\mathbf{E})$. Para cualquier $t_0 \in (T_{\max} - \frac{\varepsilon}{2}, T_{\max})$, aplicamos el teorema de existencia con dato inicial $\mathbf{u}(t_0)$. Obtenemos una solución en $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. La unicidad hace que coincida con $\mathbf{u}$ en $[t_0, T_{\max})$, de modo que la prolonga más allá de $T_{\max}$. □

## 20.4 Principios del máximo

Las estimaciones de energía controlan la solución en normas globales, pero no registran por sí solas el signo de una función o la pertenencia de un tensor a un cono convexo. Los principios del máximo proporcionan esa información puntual y serán la herramienta básica para estudiar la curvatura bajo el flujo de Ricci.

**Teorema 20.4.1.** (Principio del máximo escalar) Sea $(M, \mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada. Sea

$$L_t \varphi = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x,t)(\nabla^2 \varphi)_{ij} + \sum_{i=1}^{m} b^i(x,t)\nabla_i \varphi + c(x,t)\varphi,$$

donde $a^{ij}$, $b^i$ y $c$ son continuos en $M \times [0,T]$, $(a^{ij})$ es simétrica y existe $\lambda > 0$ tal que $\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \lambda |\xi|^2_{\mathbf{g}_0}$ para todo $(x,t) \in M \times [0,T]$ y toda $\xi \in T^*_x M$. Supongamos que $f \in C^0(M \times [0,T])$ y que $u \in C^0(M \times [0,T]) \cap C^{2,1}(M \times (0,T])$ satisface

$$\partial_t u - L_t u \le f \tag{20.57}$$

y sea $\gamma \in \mathbb{R}$ una cota superior de $c$ en $M \times [0,T]$. Entonces, para $0 \le t \le T$,

$$\sup_{x \in M} u(x,t) \le e^{\gamma t}\left( \max\left\{0, \sup_{x \in M} u(x,0)\right\} + \int_0^t e^{-\gamma \rho} \max\left\{0, \sup_{x \in M} f(x,\rho)\right\} d\rho \right). \tag{20.58}$$

En particular, si $c \le 0$, $f \le 0$ y $u(0) \le 0$, entonces $u \le 0$ en $M \times [0,T]$.

*Demostración.* Pongamos $v(x,t) = e^{-\gamma t} u(x,t)$ y

$$F_+(t) := \max\left\{0, \sup_{x\in M} e^{-\gamma t} f(x,t)\right\}, \qquad z(t) := \max\left\{0, \sup_{x\in M} u(x,0)\right\} + \int_0^t F_+(\rho)\, d\rho.$$

La función $w = v - z$ satisface

$$\partial_t w - \sum_{i,j=1}^m a^{ij} (\nabla^2 w)_{ij} - \sum_{i=1}^m b^i \nabla_i w - (c-\gamma) w \le 0, \qquad w(0) \le 0, \tag{20.59}$$

porque $c - \gamma \le 0$ y $z \ge 0$.
Si $w$ alcanzara un valor positivo, para $\varepsilon > 0$ pequeño la función $w_\varepsilon = w - \varepsilon t - \varepsilon$ tendría un primer máximo no negativo en algún $(x_0, t_0)$ con $t_0 > 0$. Allí

$$\partial_t w_\varepsilon \ge 0, \qquad \nabla w_\varepsilon = 0, \qquad \sum_{i,j=1}^m a^{ij} (\nabla^2 w_\varepsilon)_{ij} \le 0.$$

Si $D = \partial_t - \sum_{i,j=1}^m a^{ij} (\nabla^2 \cdot)_{ij} - \sum_{i=1}^m b^i \nabla_i - (c-\gamma)$, las tres relaciones anteriores y $c - \gamma \le 0$ implican $D w_\varepsilon(x_0, t_0) \ge 0$.
Por otra parte,

$$D w_\varepsilon = D w - \varepsilon + (c-\gamma)\varepsilon(t+1) \le -\varepsilon,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $w \le 0$. Al multiplicar por $e^{\gamma t}$ se obtiene (20.58). □

**Corolario 20.4.2.** (Comparación escalar) Sea $(M, \mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada y sea $L_t$ el operador del Teorema 20.4.1. Sean $u, v \in C^0(M \times [0,T]) \cap C^{2,1}(M \times (0,T])$. Si

$$\partial_t u - L_t u \le \partial_t v - L_t v \quad \text{y} \quad u(0) \le v(0),$$

entonces $u \le v$ en $M \times [0,T]$ cuando $c \le 0$. Para $c$ acotado, la misma conclusión se obtiene después de multiplicar ambas funciones por $e^{-\gamma t}$ con $\gamma \ge \sup_{(x,t)\in M\times[0,T]} c(x,t)$.

*Demostración.* Se aplica el Teorema 20.4.1 a $u - v$. □

Para formular la versión tensorial, una familia $\mathcal{K} = (K_x)_{x\in M}$ de subconjuntos de $\mathbf{E}_x$ se llamará *invariante por transporte paralelo* si el transporte a lo largo de cualquier curva lleva $K_x$ en el conjunto correspondiente a su extremo. En particular, esta condición identifica localmente todos los $K_x$ mediante la conexión. Si $q \in \partial K_x$, un vector $\nu \in \mathbf{E}_x$ es un normal exterior de apoyo si

$$\langle \nu, z - q \rangle_{\mathbf{E}_x} \le 0 \qquad \text{para todo } z \in K_x.$$

**Teorema 20.4.3.** (Principio del máximo tensorial) Sea $(M, \mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial real con métrica fibrada y conexión compatible. Sea $\mathcal{K} = (K_x)_{x\in M}$ una familia de

conjuntos cerrados, convexos y no vacíos, invariante por transporte paralelo. Sea $\mathbf{S} \in C^0(M \times [0,T], \mathbf{E}) \cap C^{2,1}(M \times (0,T], \mathbf{E})$ una solución de

$$\partial_t \mathbf{S} = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x,t)(\nabla^2 \mathbf{S})_{ij} + \sum_{i=1}^{m} b^i(x,t)\nabla_i \mathbf{S} + \Phi(x,t,\mathbf{S}), \tag{20.60}$$

donde $\mathbf{a} \in C^0(M \times [0,T], S^2TM)$ y $\mathbf{b} \in C^0(M \times [0,T], TM)$ son campos cuyos componentes $a^{ij}$ y $b^i$ multiplican la identidad de $\mathbf{E}$, y $(a^{ij})$ es simétrica y uniformemente positiva. Supongamos que $\Phi$ es continua y localmente Lipschitz en su última variable, uniformemente en $(x,t)$ sobre conjuntos compactos, y que para todo $q \in \partial K_x$ y todo normal exterior de apoyo $\nu$ en $q$ se cumple

$$\langle \nu, \Phi(x,t,q) \rangle_{\mathbf{h_E}} \leq 0. \tag{20.61}$$

Si $\mathbf{S}(x,0) \in K_x$ para todo $x \in M$, entonces $\mathbf{S}(x,t) \in K_x$ para todo $(x,t) \in M \times [0,T]$.

*Demostración.* Sea $\Pi_x \colon \mathbf{E}_x \longrightarrow K_x$ la proyección métrica, que es única por la convexidad. Definimos

$$\rho(x,t) := \frac{1}{2} |\mathbf{S}(x,t) - \Pi_x(\mathbf{S}(x,t))|^2_{\mathbf{E}_x}.$$

La función distancia al cuadrado de un convexo cerrado en un espacio euclidiano es de clase $C^1$ y su gradiente es $z \mapsto z - \Pi_x z$. Además es convexa y de clase $C^{1,1}$. La invariancia de $\mathcal{K}$ por transporte paralelo permite identificar las funciones distancia de fibras vecinas. En particular, $\rho$ es continua, es de clase $C^1$ respecto del tiempo positivo y

$$\partial_t \rho(x,t) = \langle \mathbf{S}(x,t) - \Pi_x \mathbf{S}(x,t), \partial_t \mathbf{S}(x,t) \rangle_{\mathbf{h_E}}. \tag{20.62}$$

Fijemos $t > 0$ y un punto $x$ donde $\rho(\cdot,t)$ alcanza su máximo. Pongamos $q = \Pi_x \mathbf{S}(x,t)$ y $\nu = \mathbf{S}(x,t) - q$. Sea $X \in T_xM$, sea $\gamma(h) = \exp_x(hX)$ y transportemos $\mathbf{S}(\gamma(h),t)$ paralelamente de vuelta a $\mathbf{E}_x$; denotemos la curva transportada por $z(h)$. La invariancia por transporte identifica $K_{\gamma(h)}$ con $K_x$, y la maximalidad de $x$ da

$$\frac{1}{2} \operatorname{dist}_{\mathbf{E}_x}(z(h), K_x)^2 \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist}_{\mathbf{E}_x}(z(0), K_x)^2.$$

La desigualdad del subgradiente para la función convexa distancia al cuadrado es

$$\frac{1}{2} \operatorname{dist}_{\mathbf{E}_x}(z, K_x)^2 \geq \frac{1}{2} \operatorname{dist}_{\mathbf{E}_x}(z(0), K_x)^2 + \langle \nu, z - z(0) \rangle_{\mathbf{h_E}}.$$

La aplicamos a $z(h)$ y $z(-h)$, sumamos y dividimos entre $h^2$. Al hacer $h \to 0$ obtenemos

$$\langle \nu, (\nabla^2 \mathbf{S})(X,X)(x,t) \rangle_{\mathbf{h_E}} \leq 0. \tag{20.63}$$

La primera derivada en $h = 0$ proporciona asimismo

$$\langle \nu, \nabla_X \mathbf{S}(x,t) \rangle_{\mathbf{h_E}} = 0. \tag{20.64}$$

Diagonalizamos $(a^{ij}(x,t))$ en una base ortonormal de $T_xM$. Al sumar (20.63) con los autovalores positivos

como pesos y usar (20.64), resulta

$$\left\langle v, \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(\nabla^2 \mathbf{S})_{ij} + \sum_{i=1}^{m} b^i \nabla_i \mathbf{S} \right\rangle_{\mathbf{h_E}} \leq 0. \tag{20.65}$$

Si $v = 0$, todas las expresiones que debemos estimar son cero. Si $v \neq 0$, la propiedad de la proyección implica $q \in \partial K_x$ y $v$ es un normal exterior de apoyo en $q$. Si $L$ es una constante de Lipschitz de $\Phi$ sobre el compacto recorrido por $\mathbf{S}$ y por su proyección, de (20.61) se deduce

$$\begin{aligned} \langle v, \Phi(x,t,\mathbf{S})\rangle_{\mathbf{h_E}} &= \langle v, \Phi(x,t,q)\rangle_{\mathbf{h_E}} + \langle v, \Phi(x,t,\mathbf{S}) - \Phi(x,t,q)\rangle_{\mathbf{h_E}} \\ &\leq L|v|^2_{\mathbf{h_E}} = 2L\rho(x,t). \end{aligned} \tag{20.66}$$

Las identidades (20.62) y (20.60), junto con (20.65) y (20.66), muestran que

$$\partial_t \rho(x,t) \leq 2L\rho(x,t) \tag{20.67}$$

en todo máximo espacial de $\rho(\cdot,t)$.

Resta pasar del máximo espacial a una función de una variable. Definimos $Q(t) = \max_{x\in M} \rho(x,t)$. Su derivada superior de Dini satisface

$$D^+Q(t) \leq \max_{\substack{x\in M \\ \rho(x,t)=Q(t)}} \partial_t \rho(x,t) \leq 2LQ(t). \tag{20.68}$$

Para la primera desigualdad, elegimos $h_j \to 0^+$ y puntos $x_j$ donde $\rho(\cdot, t+h_j)$ alcanza su máximo. Una subsucesión converge a un máximo de $\rho(\cdot,t)$, y

$$\frac{Q(t+h_j) - Q(t)}{h_j} \leq \frac{\rho(x_j, t+h_j) - \rho(x_j,t)}{h_j};$$

la continuidad uniforme de $\partial_t \rho$ cerca del tiempo positivo $t$ permite pasar al límite. La siguiente estimación de tipo Grönwall para derivadas superiores de Dini se prueba aplicando el argumento del primer máximo a $e^{-2Lt}Q(t)$; así,

$$Q(t) \leq e^{2L(t-\tau)}Q(\tau), \qquad 0 < \tau < t \leq T.$$

Como $Q$ es continua y $Q(0) = 0$, hacemos $\tau \to 0^+$ y obtenemos $Q(t) = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{S}(x,t) \in K_x$ para todo $(x,t)$. □

**Observación 20.4.4.** La demostración sigue siendo válida si la conexión depende suavemente de $t$, siempre que sea compatible con una misma métrica fibrada fija y que cada conexión preserve $\mathcal{K}$ por transporte paralelo. En efecto, el argumento espacial se realiza en un tiempo fijo, y la función $\frac{1}{2}\operatorname{dist}(\mathbf{S}, K_x)^2$ no incorpora una métrica variable al derivarse en el tiempo. Si también varía la métrica fibrada, se debe transportar primero el problema a un haz con métrica fija o incluir su derivada en la identidad temporal.

**Corolario 20.4.5.** (Conos de formas no negativas) Sea $(M, \mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana cerrada, sea $\mathbf{V} \longrightarrow M$ un haz vectorial real con métrica fibrada y conexión compatible, y sea $\mathbf{S}(t)$ una sección de $S^2\mathbf{V}^*$ que

satisface

$$\partial_t \mathbf{S} = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} (\nabla^2 \mathbf{S})_{ij} + \Phi(\mathbf{S}).$$

Supongamos que, para cada forma $Q \geq 0$ y cada $v \in \mathbf{V}_x$ con $Q(v,v) = 0$, se tiene

$$\Phi(Q)(v,v) \geq 0.$$

Suponemos también la regularidad y la positividad uniforme de los coeficientes, y la condición local de Lipschitz de $\Phi$, del Teorema 20.4.3. Si $\mathbf{S}(0) \geq 0$, entonces $\mathbf{S}(t) \geq 0$ mientras exista la solución.

*Demostración.* El cono de formas semidefinidas positivas es cerrado, convexo e invariante por transporte paralelo. Sus funcionales normales exteriores en un punto de la frontera son combinaciones no negativas de los funcionales $Q \mapsto -Q(v,v)$ con $v$ en el núcleo de $Q$. La hipótesis es exactamente (20.61); aplicamos el Teorema 20.4.3. □

Para desarrollos clásicos de la teoría parabólica con coeficientes menos regulares, véanse [61, Capítulo 7] y [35, Capítulo 3].

# 21

# Flujo de Ricci

Una métrica riemanniana determina cómo se miden las longitudes, los ángulos y la curvatura. El flujo de Ricci permite que esa regla de medición cambie con el tiempo según una ecuación construida a partir de su propio tensor de Ricci. En lugar de buscar directamente una métrica especial, se parte de una métrica inicial y se estudia qué rasgos de la geometría mejoran, cuáles se preservan y de qué manera puede concentrarse la curvatura.

La analogía con el calor es útil, pero no debe tomarse de manera literal. La incógnita es la propia métrica y la ecuación es invariante bajo difeomorfismos. Esta simetría hace que su símbolo sea degenerado en las direcciones tangentes a las órbitas de la acción de difeomorfismos. El procedimiento de DeTurck fija un calibre mediante un campo vectorial y convierte el problema en un sistema estrictamente parabólico; una familia de difeomorfismos permite recuperar después la solución del flujo original [75, 43].

Comenzaremos con las fórmulas de variación de la métrica, la conexión y la curvatura. Después identificaremos la degeneración del símbolo, construiremos el sistema de Ricci–DeTurck y demostraremos existencia y unicidad en tiempo corto. Las ecuaciones de evolución de la curvatura y los principios del máximo conducirán a las primeras estimaciones a priori. Al final estudiaremos los reescalamientos, el flujo normalizado, las métricas de Einstein y los solitones. Estas últimas soluciones proporcionan modelos autosimilares que reaparecerán al ampliar las regiones donde se forman singularidades.

### Richard Hamilton y una nueva estrategia para la geometría

Hamilton introdujo el flujo de Ricci en 1982 y propuso estudiar la topología de una variedad dejando evolucionar su geometría. La estrategia exigía combinar tres niveles: una ecuación parabólica para construir y regularizar la métrica, estimaciones riemannianas para controlar la curvatura y argumentos topológicos para interpretar los posibles límites. El análisis de compacidad y singularidades del capítulo siguiente continúa este programa.

Sea $M^m$ una variedad suave cerrada, con $m \geq 2$. Cuando una afirmación requiera conexidad, se indicará expresamente. Para un tensor $\mathbf{T}$ escribimos $\Delta \mathbf{T} = \operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2 \mathbf{T}) = -\nabla^* \nabla \mathbf{T}$. Todas las normas, contracciones y derivadas covariantes dependientes del tiempo se calculan con $\mathbf{g}(t)$, salvo indicación contraria. Los índices coordenados de $M$ pertenecen a $\{1, \dots, m\}$. Para las derivadas de orden superior conservamos el orden de la Definición 9.1.1:

$$(\nabla^2 \mathbf{T})(X, Y, \dots) = \big(\nabla_X(\nabla_Y \mathbf{T}) - \nabla_{\nabla_X Y} \mathbf{T}\big)(\dots).$$

Así, en $(\nabla^2\mathbf{T})_{abi_1\dots i_q}$, el índice $a$ corresponde a la derivada exterior y $b$ a la interior. Las permutaciones de $a$ y $b$ se efectuarán mediante la identidad de curvatura del capítulo citado. También conservamos $R_{ijk}{}^{\ell} = (R(\partial_i,\partial_j)\partial_k)^{\ell}$, $\mathrm{Ric}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} R_{kij}{}^{k}$ y $R_{ijk\ell} = \sum_{q=1}^{m} g_{\ell q} R_{ijk}{}^{q}$. Para un tensor simétrico covariante $\mathbf{h}$ ponemos

$$(\operatorname{div}\mathbf{h})_i := \sum_{j=1}^{m} \nabla^j h_{ij}, \qquad \operatorname{div}^2\mathbf{h} := \sum_{i=1}^{m} \nabla^i (\operatorname{div}\mathbf{h})_i.$$

Denotaremos por $\lambda_{\mathbf{g}}$ la medida de Riemann–Lebesgue determinada por $\mathbf{g}$. En una carta su peso respecto de la medida de Lebesgue es $\sqrt{\det(\mathbf{g})}$; por ello no se requiere orientar $M$. Cuando $M$ es orientable y se fija una orientación, integrar respecto de $\lambda_{\mathbf{g}}$ coincide con integrar la forma de volumen riemanniana. Las identidades que contienen $\partial_t d\lambda_{\mathbf{g}(t)}$ se entienden como identidades de medidas dependientes suavemente de $t$, verificadas mediante esos pesos coordenados.

## 21.1 Variaciones de la métrica y del funcional de Einstein–Hilbert

Las identidades de variación que siguen permiten fijar los signos que aparecerán después. Sea $\mathbf{g}(t)$ una familia suave de métricas, $\mathbf{g}(0) = \mathbf{g}$ y $\mathbf{h} = \partial_t \mathbf{g}(t)|_{t=0}$.

**Lema 21.1.1.** (Identidades de variación métrica) Sea $M^m$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{g}(t)$ una familia suave de métricas en $M$, con $\mathbf{g}(0) = \mathbf{g}$ y $\mathbf{h} = \partial_t \mathbf{g}(t)|_{t=0}$. Se tienen

$$\partial_t g^{ij}(t)\Big|_{t=0} = -h^{ij}, \tag{21.1}$$

$$\partial_t d\lambda_{\mathbf{g}(t)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\mathbf{h})\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \tag{21.2}$$

$$\partial_t \Gamma(\mathbf{g}(t))^{k}_{ij}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{m} g^{k\ell}\left(\nabla_i h_{j\ell} + \nabla_j h_{i\ell} - \nabla_\ell h_{ij}\right), \tag{21.3}$$

$$\partial_t R(\mathbf{g}(t))_{ijr}{}^{s}\Big|_{t=0} = \nabla_i \dot\Gamma^{s}_{jr} - \nabla_j \dot\Gamma^{s}_{ir}, \tag{21.4}$$

$$\partial_t \operatorname{Ric}(\mathbf{g}(t))_{ij}\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{m}\left(\nabla_k \dot\Gamma^{k}_{ij} - \nabla_i \dot\Gamma^{k}_{kj}\right), \tag{21.5}$$

$$DR_{\mathbf{g}}[\mathbf{h}] = -\langle \mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{g}} + \operatorname{div}^2\mathbf{h} - \Delta_{\mathbf{g}}\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}. \tag{21.6}$$

Aquí $\dot\Gamma^{k}_{ij}$ denota la expresión del tercer miembro.

*Demostración.* La derivación de $\sum_{k=1}^{m} g^{ik}(t) g_{kj}(t) = \delta^i_j$ da

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\partial_t g^{ik}(t)\Big|_{t=0} g_{kj} + g^{ik} h_{kj}\right) = 0,$$

y la multiplicación por $g^{j\ell}$ prueba (21.1). En coordenadas, la identidad de Jacobi para el determinante

proporciona

$$\partial_t \sqrt{\det \mathbf{g}(t)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\sqrt{\det \mathbf{g}} \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} h_{ij},$$

de donde se obtiene (21.2).
Si $\nabla^t$ es la conexión de Levi–Civita de $\mathbf{g}(t)$ y

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \nabla^t_{\mathbf{X}} \mathbf{Y},$$

la derivación de la fórmula de Koszul, seguida de la cancelación de los términos que contienen $\nabla_X Y$, da

$$2\mathbf{g}(\mathbf{A}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{h})(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) + (\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{h})(\mathbf{X},\mathbf{Z}) - (\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{h})(\mathbf{X},\mathbf{Y}).$$

En un marco coordenado esto es (21.3). Al derivar la definición de la curvatura y usar que $\nabla$ no tiene torsión se obtiene

$$\partial_t \mathbf{R}^t(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{Z}\big|_{t=0} = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A})(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) - (\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{A})(\mathbf{X},\mathbf{Z}),$$

que prueba (21.4); su contracción en el primer índice covariante y el contravariante da (21.5).
Las contracciones de (21.3) son

$$\sum_{k=1}^{m} \dot\Gamma^k_{kj} = \frac{1}{2}\nabla_j \operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}, \qquad \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\dot\Gamma^k_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \nabla^i h_i{}^k - \frac{1}{2}\nabla^k \operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\, \partial_t \operatorname{Ric}(\mathbf{g}(t))_{ij}\Big|_{t=0} = \operatorname{div}^2 \mathbf{h} - \Delta_{\mathbf{g}} \operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}.$$

Finalmente se deriva $R(\mathbf{g}(t)) = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(t)\operatorname{Ric}(\mathbf{g}(t))_{ij}$ y se usa (21.1). Esto da (21.6). □

Para $s > \frac{m}{2} + 2$, el conjunto $\operatorname{Met}^s(M)$ de métricas $H^s$ es un abierto de $H^s(S^2T^*M)$. En efecto, fijada una métrica suave $\mathbf{g}_*$, el encaje $H^s \hookrightarrow C^0$ hace continua la función

$$\mathbf{g} \longmapsto \min_{x\in M} \min_{\substack{v\in T_xM \\ |v|_{\mathbf{g}_*}=1}} \frac{\mathbf{g}_x(v,v)}{\mathbf{g}_{*,x}(v,v)}.$$

Denotemos este mínimo por $m(\mathbf{g})$. Su existencia se justifica en marcos locales de $\mathbf{g}_*$ sobre una cubierta finita de compactos: la esfera unitaria queda identificada con una esfera euclidiana fija y la evaluación de $\mathbf{g}$ es continua. Éste es el argumento de los extremos fibrados del Lema 9.1.43. Además, si $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ son dos campos simétricos de clase $H^s$ y $|v|_{\mathbf{g}_*} = 1$, Cauchy–Schwarz da

$$|(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2)_x(v,v)| \le \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{\infty;\mathbf{g}_*}.$$

Tomando mínimos y después intercambiando $\mathbf{g}_1$ y $\mathbf{g}_2$, obtenemos

$$|m(\mathbf{g}_1) - m(\mathbf{g}_2)| \le \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{\infty;\mathbf{g}_*} \le C\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{H^s(M,S^2T^*M)}.$$

Así queda demostrada la continuidad respecto de la norma de Sobolev. Como $M$ es compacta, $m(\mathbf{g}) > 0$ exactamente cuando $\mathbf{g}$ es definida positiva en todas sus fibras. La condición $m(\mathbf{g}) > 0$ define, por tanto, un abierto. La inversión de matrices positivas, los productos de Sobolev y las fórmulas locales de la curvatura muestran que

$$\mathbf{g} \longmapsto \int_M R_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

es un mapeo suave de $\mathrm{Met}^s(M)$ en $\mathbb{R}$.

**Proposición 21.1.2.** (Primera variación de Einstein–Hilbert) Sea $M^m$ una variedad suave cerrada y conexa, y sea $\mathbf{g}$ una métrica riemanniana en $M$. El funcional

$$\mathcal{S}(\mathbf{g}) = \int_M R_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \tag{21.7}$$

satisface

$$D\mathcal{S}(\mathbf{g})[\mathbf{h}] = -\int_M \left\langle \mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} - \frac{1}{2} R_{\mathbf{g}}\mathbf{g}, \mathbf{h} \right\rangle_{\mathbf{g}} d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{21.8}$$

Si $m \geq 3$, los puntos críticos de $\mathcal{S}$ restringido a las métricas de volumen fijo son exactamente las métricas de Einstein.

*Demostración.* Las ecuaciones (21.2) y (21.6) dan

$$D\mathcal{S}(\mathbf{g})[\mathbf{h}] = \int_M \left( -\langle \mathrm{Ric}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{g}} + \frac{1}{2} R \,\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h} + \sum_{i=1}^{m} \nabla_i \left( \sum_{j=1}^{m} \nabla_j h^{ij} - \nabla^i \,\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h} \right) \right) d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La integral de la divergencia sobre la variedad cerrada $M$ es cero, lo que prueba (21.8).
Por otra parte,

$$D\,\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}}[\mathbf{h}] = \frac{1}{2} \int_M \mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

no es el funcional cero, pues su valor en $\mathbf{h} = \mathbf{g}$ es $\frac{m}{2}\mathrm{Vol}(M, \mathbf{g})$. Si $\mathbf{g}$ es crítica en el nivel de volumen, elegimos $\mathbf{h}_0$ con $D\,\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}}[\mathbf{h}_0] = 1$. Todo tensor $\mathbf{h}$ se descompone como

$$\mathbf{h} = \left(\mathbf{h} - D\,\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}}[\mathbf{h}]\mathbf{h}_0\right) + D\,\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}}[\mathbf{h}]\mathbf{h}_0.$$

El primer sumando pertenece al núcleo de $D\,\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}}$, donde $D\mathcal{S}_{\mathbf{g}}$ se anula. Por lo tanto, $D\mathcal{S}_{\mathbf{g}} = cD\,\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}}$, con $c = D\mathcal{S}_{\mathbf{g}}[\mathbf{h}_0]$. Las fórmulas de las dos diferenciales implican

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} R\mathbf{g} = c\mathbf{g}$$

tras cambiar, si es necesario, el valor de la constante $c$. La traza de esta igualdad, cuando $m \geq 3$, afirma que $R$ es constante; al sustituirla de nuevo resulta $\mathrm{Ric} = \lambda\mathbf{g}$ con $\lambda$ constante. La implicación recíproca se obtiene directamente de (21.8), porque los vectores tangentes al nivel de volumen satisfacen $\int_M \mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0$. □

En dimensión dos, el Teorema A.8.7 hace constante a $\mathcal{S}$ sobre cada componente topológica del espacio de métricas; por eso la última caracterización requiere $m \geq 3$. La fórmula de primera variación conserva, sin embargo,

su validez en toda dimensión.

## 21.2 Invariancia por difeomorfismos y degeneración del símbolo

**Definición 21.2.1.** (Flujo de Ricci) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Un *flujo de Ricci* en $M$ es una familia de métricas $\mathbf{g}(t)$ que satisface

$$\partial_t \mathbf{g}(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}. \tag{21.9}$$

La conexión de Levi–Civita es natural: si $\varphi$ es un difeomorfismo, $\nabla^{\varphi^*\mathbf{g}} = \varphi^*\nabla^{\mathbf{g}}$. Al tomar la curvatura y contraer se obtiene

$$\mathrm{Ric}_{\varphi^*\mathbf{g}} = \varphi^*\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}. \tag{21.10}$$

Así, el pullback por un difeomorfismo independiente del tiempo lleva soluciones en soluciones. Para una familia $\varphi_t$, si

$$\mathbf{X}_t = (\partial_t \varphi_t)\circ \varphi_t^{-1},$$

la regla de derivación del pullback es

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_t^*\mathbf{g}(t)\right) = \varphi_t^*\left(\partial_t \mathbf{g}(t) + \mathcal{L}_{\mathbf{X}_t}\mathbf{g}(t)\right). \tag{21.11}$$

Se prueba primero en funciones y formas de grado uno y después se usa la regla de Leibniz para productos tensoriales.

La naturalidad explica por qué el miembro derecho de (21.9) no es estrictamente parabólico. Con $(\delta_{\mathbf{g}}\mathbf{h})_j = -\sum_{i=1}^{m} \nabla^i h_{ij}$, definimos el adjunto formal de $\delta_{\mathbf{g}}$ por

$$(\delta_{\mathbf{g}}^*\boldsymbol{\omega})_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i\right). \tag{21.12}$$

Si $\nabla^*\nabla = -\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2)$, el Lema 21.1.1, seguido de la conmutación de las derivadas covariantes, da

$$2D\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}[\mathbf{h}] = \nabla^*\nabla\mathbf{h} - \nabla^2\,\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\,\mathbf{h} - 2\delta_{\mathbf{g}}^*\delta_{\mathbf{g}}\mathbf{h} + \mathcal{Q}_{\mathbf{g}}(\mathbf{h}), \tag{21.13}$$

donde el término de orden cero es

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{g}}(\mathbf{h})_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Ric}_i{}^k h_{kj} + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Ric}_j{}^k h_{ki} - 2\sum_{k,\ell=1}^{m} R_{kij\ell} h^{k\ell}. \tag{21.14}$$

Antes de conmutar, la sustitución de (21.3) en (21.5) da la identidad tensorial

$$2D\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}[\mathbf{h}]_{ij} = \sum_{k,a=1}^{m} g^{ka}\left((\nabla^2\mathbf{h})_{aijk} + (\nabla^2\mathbf{h})_{ajik}\right) + (\nabla^*\nabla\mathbf{h})_{ij} - (\nabla^2\,\mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\,\mathbf{h})_{ij}. \tag{21.15}$$

Para ver de dónde procede $\mathcal{Q}_{\mathbf{g}}$, aplicamos la identidad de conmutación a los dos lugares de $\mathbf{h}$:

$$\begin{aligned}\sum_{a,k=1}^{m} g^{ak}\big((\nabla^2\mathbf{h})_{aijk} - (\nabla^2\mathbf{h})_{iajk}\big) &= -\sum_{a,k,p=1}^{m} g^{ak}\big(R_{aij}{}^{p}h_{pk} + R_{aik}{}^{p}h_{jp}\big)\\ &= \sum_{p=1}^{m}\mathrm{Ric}_i{}^{p}h_{pj} - \sum_{k,\ell=1}^{m} R_{kij\ell}h^{k\ell}.\end{aligned}$$

La misma igualdad con $i$ y $j$ intercambiados produce el otro término de Ricci. Las simetrías de Riemann y la simetría de $\mathbf{h}$ hacen iguales las dos contracciones restantes. Las derivadas que ya están en el orden $i,a$ y $j,a$ forman $-2\delta_{\mathbf{g}}^{*}\delta_{\mathbf{g}}\mathbf{h}$. Esto prueba (21.13) y (21.14) con el orden de derivación fijado.

Si $\mathbf{h} = \mathcal{L}_{X}\mathbf{g}$, su parte de símbolo es $h_{ij} = \xi_i X_j + \xi_j X_i$ y la sustitución en (21.15) anula el símbolo de $D\,\mathrm{Ric}$. Es precisamente la dirección infinitesimal de la órbita de los difeomorfismos. No se puede, por lo tanto, aplicar directamente la teoría fuertemente parabólica a (21.9).

## 21.3 El sistema de Ricci–DeTurck

La degeneración anterior no refleja una pérdida de difusión, sino la libertad de cambiar coordenadas durante la evolución. El procedimiento de DeTurck elimina esa libertad comparando la conexión de la métrica desconocida con una conexión fija. Fijemos una métrica suave $\bar{\mathbf{g}}$, denotemos por $\bar{\nabla}$ su conexión de Levi–Civita y escribamos

$$\mathbf{A}(\mathbf{g})_{ij}^{k} = \Gamma(\mathbf{g})_{ij}^{k} - \Gamma(\bar{\mathbf{g}})_{ij}^{k}, \qquad \mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\mathbf{g})^{k} = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\mathbf{A}(\mathbf{g})_{ij}^{k}.$$

La diferencia de conexiones es tensorial, de modo que $\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\mathbf{g})$ es un campo vectorial definido globalmente. El sistema modificado es

$$\partial_t \mathbf{g} = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} + \mathcal{L}_{\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\mathbf{g})}\mathbf{g}. \tag{21.16}$$

**Proposición 21.3.1.** (Parabolicidad del sistema de DeTurck) Sea $M^m$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\bar{\mathbf{g}}$ una métrica riemanniana fija y considérese el sistema de Ricci–DeTurck (21.16). El miembro derecho de (21.16) es un operador cuasilineal cuya parte principal es fuertemente parabólica localmente. Más precisamente, respecto de $\bar{\nabla}$ se escribe

$$-2\,\mathrm{Ric}(\mathbf{g})_{ij} + (\mathcal{L}_{\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\mathbf{g})}\mathbf{g})_{ij} = \sum_{a,b=1}^{m} g^{ab}(\bar{\nabla}^2\mathbf{g})_{abij} + P_{ij}(\mathbf{g}, \mathbf{g}^{-1}, \bar{\nabla}\mathbf{g}, \overline{\mathrm{Rm}}), \tag{21.17}$$

donde $P$ es suave, no contiene derivadas de $\mathbf{g}$ de orden mayor que uno y es polinómico en $\bar{\nabla}\mathbf{g}$. El símbolo de Fourier de la linealización en una covariable $\xi \neq 0$ es

$$-\sum_{a,b=1}^{m} g^{ab}\xi_a\xi_b\,\mathrm{Id}_{S^2T^*M}. \tag{21.18}$$

En cada compacto de $M$, la cota de parabolicidad puede elegirse común para las métricas suficientemente

próximas en $C^0$ a una métrica fija. En particular, si $M$ es compacta, esta cota es global.

*Demostración.* La fórmula de diferencia de conexiones es

$$\mathbf{A}(\mathbf{g})^{k}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{m} g^{k\ell}\big(\bar\nabla_i g_{j\ell} + \bar\nabla_j g_{i\ell} - \bar\nabla_\ell g_{ij}\big).$$

Al expresar la curvatura de $\mathbf{g}$ mediante $\bar\nabla$ se obtiene

$$\mathbf{R}(\mathbf{g})_{ijk}{}^{\ell} = \overline{R}_{ijk}{}^{\ell} + \bar\nabla_i \mathbf{A}(\mathbf{g})^{\ell}_{jk} - \bar\nabla_j \mathbf{A}(\mathbf{g})^{\ell}_{ik} + \sum_{p=1}^{m}\big(\mathbf{A}(\mathbf{g})^{p}_{jk}\mathbf{A}(\mathbf{g})^{\ell}_{ip} - \mathbf{A}(\mathbf{g})^{p}_{ik}\mathbf{A}(\mathbf{g})^{\ell}_{jp}\big).$$

La contracción que define Ricci contiene segundas derivadas de $\mathbf{g}$. Por otra parte,

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{W}}\mathbf{g})_{ij} = \nabla_i W_j + \nabla_j W_i.$$

En un punto en el que se toman coordenadas normales para $\bar{\mathbf{g}}$, las partes que contienen dos derivadas de $\mathbf{g}$ son

$$(-2\,\mathrm{Ric}(\mathbf{g}))^{(2)}_{ij} = \sum_{a,b=1}^{m} g^{ab}\big((\bar\nabla^2\mathbf{g})_{abij} + (\bar\nabla^2\mathbf{g})_{ijab} - (\bar\nabla^2\mathbf{g})_{aibj} - (\bar\nabla^2\mathbf{g})_{ajbi}\big),$$
$$(\mathcal{L}_{\mathbf{W}}\mathbf{g})^{(2)}_{ij} = \sum_{a,b=1}^{m} g^{ab}\big((\bar\nabla^2\mathbf{g})_{iabj} + (\bar\nabla^2\mathbf{g})_{jabi} - (\bar\nabla^2\mathbf{g})_{ijab}\big).$$

Los tres términos de calibre se cancelan por pares, y el único término de segundo orden restante es $\sum_{a,b=1}^{m} g^{ab}(\bar\nabla^2\mathbf{g})_{abij}$. Las conmutaciones de $\bar\nabla$ producen $\overline{\mathrm{Rm}}*\mathbf{g}$ y todos los demás términos son contracciones de $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}^{-1}$, $\bar\nabla\mathbf{g}$ y $\overline{\mathrm{Rm}}$. Esto prueba (21.17).

Para aplicar la teoría en forma divergencia observamos la identidad exacta

$$\sum_{a,b=1}^{m} g^{ab}(\bar\nabla^2\mathbf{g})_{ab} = \sum_{a,b=1}^{m}\bar\nabla_a\big(g^{ab}\bar\nabla_b\mathbf{g}\big) - \sum_{a,b=1}^{m}(\bar\nabla_a g^{ab})\bar\nabla_b\mathbf{g}. \tag{21.19}$$

El último sumando sólo contiene primeras derivadas de $\mathbf{g}$. El coeficiente principal es, por lo tanto,

$$A^{ab}(\mathbf{g}) = g^{ab}\,\mathrm{Id}_{S^2T^*M}.$$

Como endomorfismo de $T^*M\otimes S^2T^*M$ medido con $\bar{\mathbf{g}}$, se escribe $A_a{}^b = \sum_{c=1}^{m}\bar g_{ac}g^{cb}\,\mathrm{Id}_{S^2T^*M}$; al subir el primer índice con $\bar{\mathbf{g}}$ se recupera $A^{ab}$. Este coeficiente satisface $A^{ab*} = A^{ba}$. Para precisar la uniformidad, fijemos un compacto $K\subseteq M$ y una métrica continua $\mathbf{g}_*$. La comparación en compactos demostrada después del Lema 7.1.8, cuyo argumento también vale para métricas continuas, proporciona $0<c_*\le C_*<\infty$ tales que

$$c_*\bar{\mathbf{g}}_x(v,v) \le (\mathbf{g}_*)_x(v,v) \le C_*\bar{\mathbf{g}}_x(v,v) \qquad (x\in K,\ v\in T_xM).$$

Si $\|\mathbf{g}-\mathbf{g}_*\|_{C^0(K,S^2T^*M;\bar{\mathbf{g}})} < c_*/2$, la desigualdad de Cauchy–Schwarz para el producto interno tensorial da, para

$x \in K$ y $v \in T_xM$,

$$|(\mathbf{g}-\mathbf{g}_*)_x(v,v)| \le |\mathbf{g}-\mathbf{g}_*|_{\bar{\mathbf{g}}}(x)|v|^2_{\bar{\mathbf{g}}} < \frac{c_*}{2}\bar{\mathbf{g}}_x(v,v) \qquad (v \neq 0).$$

En efecto, en una base $\bar{\mathbf{g}}$–ortonormal se aplica Cauchy–Schwarz a $\sum_{a,b=1}^{m}(g-g_*)_{ab}v^a v^b$ y se usa $\sum_{a,b=1}^{m}(v^a v^b)^2 = (\sum_{a=1}^{m}(v^a)^2)^2$. Al sumar esta cota a la comparación de $\mathbf{g}_*$, se obtiene

$$\frac{c_*}{2}\bar{\mathbf{g}} \le \mathbf{g} \le \left(C_* + \frac{c_*}{2}\right)\bar{\mathbf{g}} \qquad \text{en } K.$$

La comparación dual de la Proposición 7.1.9 da, con $\lambda = (C_* + c_*/2)^{-1} > 0$,

$$\mathbf{g}_x^{-1}(\xi,\xi) \ge \lambda \bar{\mathbf{g}}_x^{-1}(\xi,\xi) \qquad (x \in K,\ \xi \in T_x^*M).$$

Para aplicar esta desigualdad a un covector con valores en $S^2T_x^*M$, elegimos una base $F_1,\dots,F_d$ ortonormal de ese espacio para la métrica inducida por $\bar{\mathbf{g}}$, donde $d = m(m+1)/2$. Escribimos $\zeta_a = \sum_{\alpha=1}^{d} z_a^\alpha F_\alpha$ en un marco tangente $\bar{\mathbf{g}}$–ortonormal. Para cada $\alpha$, los números $z_a^\alpha$ son las componentes de un covector al que se aplica la cota anterior. Por ello,

$$\begin{aligned}\sum_{a,b=1}^{m}\left\langle A^{ab}(\mathbf{g})\zeta_b,\zeta_a\right\rangle_{\bar{\mathbf{g}}} &= \sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{a,b=1}^{m} g^{ab}z_b^\alpha z_a^\alpha \\ &\ge \lambda\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{a=1}^{m}|z_a^\alpha|^2 = \lambda|\zeta|^2_{\bar{\mathbf{g}}}.\end{aligned}$$

Si $M$ es compacta, tomamos $K = M$. El encaje de Sobolev en $C^0$ permite escoger la vecindad en $\mathrm{Met}^s(M)$ de modo que se cumpla la cota anterior; en particular, esto vale para $s > m/2 + 2$, como en este capítulo. En el marco de variedades cerradas se obtiene así la condición de Legendre uniforme del Teorema 20.3.1; el abierto fibrado de valores permitido es el cono de formas bilineales definidas positivas. Si $M$ no es compacta, una comparación $\mathbf{g} \le C\bar{\mathbf{g}}$ en todo $M$, con $C$ independiente del punto, proporciona igualmente una cota inferior principal $\lambda = C^{-1}$. Sin una comparación uniforme no se deduce una constante global de la sola positividad puntual.

La linealización del término principal en la dirección $\mathbf{h}$ es $\sum_{a,b=1}^{m} g^{ab}(\bar{\nabla}^2\mathbf{h})_{abij}$ más términos de orden a lo sumo uno en $\mathbf{h}$. La sustitución $\bar{\nabla}_a \mapsto i\xi_a$ da (21.18). Como $\sum_{a,b=1}^{m} g^{ab}\xi_a\xi_b > 0$, el sistema es fuertemente parabólico localmente, y las cotas anteriores proporcionan la uniformidad en el caso compacto. La presencia de frontera no altera este cálculo del símbolo; la aplicación de la teoría del Capítulo 20 se hace aquí sobre $M$ cerrada. □

El argumento de unicidad utilizará un flujo armónico de mapeos. Para construirlo mediante una ecuación en un haz trivial necesitaremos comprobar que la solución ambiente permanece en la subvariedad encajada. La estimación siguiente hace explícita esa permanencia.

**Lema 21.3.2.** (Permanencia en una subvariedad mediante la distancia tubular) Sea $N$ una subvariedad compacta sin frontera encajada de una variedad riemanniana $(\mathcal{N},\mathbf{h})$ y sea $\mathcal{T}$ una vecindad tubular con retracción $\pi\colon \mathcal{T}\to N$. Pongamos $\rho(y)=\tfrac12\operatorname{dist}_{\mathbf{h}}(y,N)^2$. Sea $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ una extensión suave a $\mathcal{T}$ de la segunda forma fundamental $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ de $N$, definida como sigue. Para $y=\exp_z^{\perp}\nu$, con $z=\pi(y)$, sea $\mathsf{P}_{z,y}\colon T_z\mathcal{N}\to T_y\mathcal{N}$ el transporte paralelo a lo largo de la geodésica normal. Ponemos

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_y(V,W):=\mathsf{P}_{z,y}\big(\boldsymbol{\mathcal{A}}_z(d\pi_y V,d\pi_y W)\big),\qquad V,W\in T_y\mathcal{N}.$$

Si un mapeo suave $U\colon M\times[0,T]\to\mathcal{T}$ satisface

$$\partial_t U=\tau_{\mathbf{g}(t),\mathbf{h}}(U)-\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(t)\,\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_U(\partial_i U,\partial_j U),\tag{21.20}$$

existe una constante $C$, uniforme mientras $U$ recorra un compacto de $\mathcal{T}$ y $\mathbf{g}(t)$ permanezca en una familia uniformemente equivalente, tal que

$$(\partial_t-\Delta_{\mathbf{g}(t)})(\rho\circ U)\le C\big(1+|dU|^2_{\mathbf{g}(t),\mathbf{h}}\big)(\rho\circ U).\tag{21.21}$$

En particular, si $M$ es cerrada y $U(\cdot,0)$ toma valores en $N$, entonces $U(M\times[0,T])\subseteq N$.

*Demostración.* La fórmula de la cadena para la tensión de un mapeo da

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta_{\mathbf{g}(t)})(\rho\circ U)=&-d\rho_U\left(\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_U(\partial_i U,\partial_j U)\right)\\&-\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\operatorname{Hess}_{\mathbf{h}}\rho_U(\partial_i U,\partial_j U).\end{aligned}$$

Para estimar el miembro derecho utilizamos coordenadas de Fermi $y=(z^a,\nu^\alpha)$, donde $z=\pi(y)$ y $\nu$ es normal a $N$ en $z$. Escribimos $d=\dim N$ y $c=\dim\mathcal{N}-d$. Elegimos un marco normal ortonormal local $(\mathbf{n}_\alpha)_{\alpha=1}^{c}$, y ponemos $\nu=\sum_{\alpha=1}^{c}\nu^\alpha\mathbf{n}_\alpha(z)$. En estas coordenadas $a,b\in\{1,\dots,d\}$ y $\alpha,\beta\in\{1,\dots,c\}$. En un compacto de la vecindad tubular, los desarrollos de Taylor son uniformes y dan

$$\rho(z,\nu)=\frac12\sum_{\alpha=1}^{c}(\nu^\alpha)^2,\qquad \partial_a\rho=0,\qquad \partial_\alpha\rho=\nu^\alpha,\tag{21.22}$$

$$(\operatorname{Hess}\rho)_{ab}=-\langle\nu,\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ab}\rangle+O(|\nu|^2),\qquad (\operatorname{Hess}\rho)_{a\beta}=O(|\nu|),\qquad (\operatorname{Hess}\rho)_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+O(|\nu|).\tag{21.23}$$

La primera línea es exacta: las geodésicas normales minimizan la distancia a $N$ en la vecindad tubular. Para la segunda línea se usa $(\operatorname{Hess}\rho)_{AB}=\partial_A\partial_B\rho-\sum_{C=1}^{d+c}\Gamma^{C}_{AB}\partial_C\rho$. Los índices $A,B$ recorren $\{1,\dots,d+c\}$. En la sección nula $\Gamma^{\alpha}_{ab}$ son las componentes normales de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ab}$; multiplicarlas por $\nu^\alpha$ da el término lineal del bloque tangencial. El bloque normal empieza con la identidad y el mixto se anula sobre $N$, lo que justifica los órdenes de los restos por Taylor. Aquí $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ab}$ es la segunda forma fundamental de $N$ en la sección nula. Por la manera en que se prolongó esa forma, transportamos $V\in T_y\mathcal{N}$ de vuelta a $T_z\mathcal{N}$ y lo descomponemos como

$V^\top + V^\perp$ según $T_zN \oplus (T_zN)^\perp$. La suavidad de $d\pi$ y su valor sobre la sección nula dan $d\pi_y V = V^\top + O(|\nu|)|V|$. Además $d\rho_y(\mathrm{P}_{z,y}Z) = \langle \nu, Z\rangle$ para $Z \in T_z\mathcal{N}$, por la primera variación de la distancia. Por tanto,

$$d\rho_y\big(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_y(V,V)\big) = \langle \nu, \boldsymbol{\mathcal{A}}_z(V^\top, V^\top)\rangle + O(|\nu|^2)|V|^2_{\mathbf{h}}. \tag{21.24}$$

Fijemos un punto del dominio y tomemos allí un marco ortonormal $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^m$ para $\mathbf{g}(t)$. Si $V_i = dU(\mathbf{e}_i) = V_i^\top + V_i^\perp$, las dos fórmulas anteriores muestran, para cada $i$, que

$$\begin{aligned} &- d\rho_U\big(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_U(V_i,V_i)\big) - \mathrm{Hess}_{\mathbf{h}}\,\rho_U(V_i,V_i) \\ &\qquad = -|V_i^\perp|^2_{\mathbf{h}} + \mathcal{E}_i, \end{aligned}$$

con

$$|\mathcal{E}_i| \le C|\nu||V_i^\perp|_{\mathbf{h}}|V_i|_{\mathbf{h}} + C|\nu|^2\big(1 + |V_i|^2_{\mathbf{h}}\big).$$

En efecto, el término $\langle \nu, \boldsymbol{\mathcal{A}}(V_i^\top, V_i^\top)\rangle$ que procede de $d\rho(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$ se cancela con el término lineal, de signo opuesto, de $\mathrm{Hess}\,\rho(V_i^\top, V_i^\top)$. El bloque normal de la Hessiana deja $-|V_i^\perp|^2$, mientras que el bloque mixto y los restos de Taylor producen los errores indicados. Al sumar en $i$ obtenemos

$$\begin{aligned} &- d\rho_U\left(\sum_{i,j=1}^m g^{ij}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_U(\partial_i U, \partial_j U)\right) - \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\,\mathrm{Hess}_{\mathbf{h}}\,\rho_U(\partial_i U, \partial_j U) \\ &\qquad = -|(dU)^\perp|^2_{\mathbf{g}(t),\mathbf{h}} + \mathcal{E}, \end{aligned} \tag{21.25}$$

donde

$$|\mathcal{E}| \le C|\nu||(dU)^\perp||dU| + C|\nu|^2\big(1 + |dU|^2\big). \tag{21.26}$$

La desigualdad de Young absorbe el término cruzado:

$$C|\nu||(dU)^\perp||dU| \le \frac{1}{2}|(dU)^\perp|^2 + C|\nu|^2|dU|^2.$$

En estas coordenadas, $|\nu|^2 = 2\rho(z,\nu)$. Las tres estimaciones anteriores implican (21.21). En un intervalo en el que $U$ es suave, $|dU|$ está acotada porque $M$ es compacta. El principio del máximo aplicado a $e^{-Ct}(\rho \circ U)$ y el dato inicial nulo concluye que $\rho \circ U = 0$. □

**Corolario 21.3.3.** (Flujo armónico de mapeos con métrica de dominio variable) Sea $M$ una variedad suave cerrada. Sean $\mathbf{g}(t)$ una familia suave de métricas sobre $M$, $\bar{\mathbf{g}}$ una métrica suave fija y $F_0 \colon M \to M$ un mapeo suave. Existe $T_0 > 0$ para el cual el problema

$$\partial_t F = \tau_{\mathbf{g}(t),\bar{\mathbf{g}}}(F), \qquad F(0) = F_0, \tag{21.27}$$

tiene una única solución suave. El tiempo puede elegirse uniformemente cuando las métricas del dominio y sus inversas satisfacen cotas uniformes de elipticidad y de regularidad, y los datos $\iota \circ F_0$ están acotados en una norma $H^s$, con $s > m/2 + 2$, para un encaje fijo $\iota$ del blanco. La geometría suave del blanco permanece fija.

*Demostración.* El Teorema A.6.2 proporciona un encaje $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. En una vecindad de $\iota(M)$ elegimos una métrica ambiente $\mathbf{h}$ que haga isométrica la inclusión $\iota\colon (M,\bar{\mathbf{g}}) \to (\mathbb{R}^N,\mathbf{h})$. Para construirla, en el haz normal de un encaje euclidiano se toma la suma ortogonal de $\bar{\mathbf{g}}$ en las direcciones horizontales y una métrica suave en las normales. Una conexión fija define esa descomposición; el difeomorfismo tubular transporta la métrica a una vecindad de $\iota(M)$. Su restricción a la sección nula es la prescrita. Sea $\mathcal{T}$ una vecindad tubular, sea $\pi\colon \mathcal{T} \to \iota(M)$ su retracción y sea $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ la segunda forma fundamental de $\iota(M)$. Reduciendo $\mathcal{T}$, prolongamos suavemente el mapeo

$$(y,V,W) \longmapsto \mathsf{P}_{\pi(y),y}\big(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\pi(y)}(d\pi_y V, d\pi_y W)\big)$$

a un abierto de $\mathbb{R}^N$ y denotamos la prolongación por $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$. La existencia de la vecindad tubular y de la retracción se obtuvo en el Teorema 2.12.3.

Para $U_0 = \iota \circ F_0$ resolvemos en el haz trivial $M \times \mathbb{R}^N$ el sistema

$$\partial_t U = \tau_{\mathbf{g}(t),\mathbf{h}}(U) - \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(t)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_U(\partial_i U, \partial_j U), \qquad U(0) = U_0. \tag{21.28}$$

En coordenadas del espacio ambiente, la parte principal es $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(t)\partial_i\partial_j U^\alpha$ y los términos restantes dependen suavemente de $(x,t,U,dU)$. El Corolario 20.3.2 produce una única solución suave en un intervalo corto. Reduciendo ese intervalo, su imagen permanece en $\mathcal{T}$.

Aplicamos el Lema 21.3.2 con $N = \iota(M)$. Como $U_0$ toma valores en $N$, se tiene $U(M \times [0,T_0]) \subseteq \iota(M)$. Existe, por tanto, un mapeo suave $F$ tal que $U = \iota \circ F$. La fórmula de Gauss afirma que la componente normal de la tensión de $\iota \circ F$ es $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\boldsymbol{\mathcal{A}}(dF(\partial_i), dF(\partial_j))$; al restringir (21.28) a la subvariedad, ese término se cancela y queda exactamente (21.27).

Dos soluciones intrínsecas producen, al componer con $\iota$, dos soluciones del mismo sistema ambiente y por ello coinciden. Finalmente, las constantes de existencia dependen sólo de las cotas uniformes de $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}^{-1}$, de un número finito de sus derivadas y de la geometría fija de la vecindad tubular y de una cota $H^s$ de $U_0 = \iota \circ F_0$. El encaje $H^s \hookrightarrow C^1$ controla también los valores y primeras derivadas que aparecen en la no linealidad. Esto prueba la afirmación uniforme. □

**Teorema 21.3.4.** (Existencia y unicidad en tiempo corto) Para toda métrica suave $\mathbf{g}_0$ sobre una variedad suave cerrada $M$ existe $T > 0$ y una única solución suave

$$\mathbf{g}\colon M \times [0,T] \longrightarrow S^2T^*M$$

del flujo de Ricci con $\mathbf{g}(0) = \mathbf{g}_0$. Si los datos iniciales forman una familia suave de métricas suaves, producen localmente en el parámetro una familia suave de soluciones en un intervalo común. El intervalo puede elegirse uniformemente sobre compactos del espacio de parámetros. En particular, para $\tau > 0$ la dependencia es suave en cada norma $C^k$ sobre $M \times [\tau,T]$, mientras el intervalo de existencia sea común.

*Demostración.* Tomamos $\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g}_0$. La Proposición 21.3.1 y el Teorema 20.3.1 producen una solución única $\widetilde{\mathbf{g}}(t)$ de

$$\partial_t \widetilde{\mathbf{g}} = -2\,\mathrm{Ric}_{\widetilde{\mathbf{g}}} + \mathcal{L}_{\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\widetilde{\mathbf{g}})}\widetilde{\mathbf{g}}, \qquad \widetilde{\mathbf{g}}(0) = \mathbf{g}_0. \tag{21.29}$$

La positividad definida es una condición abierta; la continuidad temporal permite reducir $T$ para que $\widetilde{\mathbf{g}}(t)$ siga siendo una métrica. Sea $\varphi_t$ el flujo no autónomo determinado por

$$\partial_t \varphi_t = -\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\widetilde{\mathbf{g}}(t)) \circ \varphi_t, \qquad \varphi_0 = \mathrm{id}_M. \tag{21.30}$$

El campo es suave en $M \times [0,T]$. La compacidad de $M$ asegura que el flujo existe en todo el intervalo, y cada $\varphi_t$ es un difeomorfismo. Con $\mathbf{g}(t) = \varphi_t^* \widetilde{\mathbf{g}}(t)$, las ecuaciones (21.11), (21.29) y (21.10) dan

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{g} &= \varphi_t^* \left( -2\,\mathrm{Ric}_{\widetilde{\mathbf{g}}} + \mathcal{L}_{\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\widetilde{\mathbf{g}})} \widetilde{\mathbf{g}} - \mathcal{L}_{\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\widetilde{\mathbf{g}})} \widetilde{\mathbf{g}} \right) \\ &= -2\,\mathrm{Ric}_{\varphi_t^* \widetilde{\mathbf{g}}} = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}. \end{aligned}$$

Esto prueba la existencia.

La unicidad no se deduce aplicando la unicidad del sistema de DeTurck a dos flujos de Ricci: los difeomorfismos que fijan el calibre dependen de la solución. Para resolver esta dificultad, consideremos dos soluciones $\mathbf{g}_1(t)$ y $\mathbf{g}_2(t)$ con el mismo dato inicial y resolvamos, para $a = 1, 2$, el flujo armónico de mapeos

$$\partial_t F_a = \tau_{\mathbf{g}_a(t), \bar{\mathbf{g}}}(F_a), \qquad F_a(0) = \mathrm{id}_M. \tag{21.31}$$

El Corolario 21.3.3 da una solución suave durante un intervalo común. Como $dF_a(0) = \mathrm{Id}$, la continuidad uniforme de $dF_a(t)$ y la compacidad de $M$ permiten reducir el intervalo para que cada $dF_a(t)$ sea un isomorfismo lineal. Así, $F_a(t)$ es un difeomorfismo local.

Comprobemos también la inyectividad global. Elegimos una familia finita de cartas con tres bolas coordenadas concéntricas $V_\alpha \Subset W_\alpha \Subset U_\alpha$, de manera que los $V_\alpha$ cubran $M$ y que cada $W_\alpha$ sea convexa en coordenadas. La convergencia $F_a(t) \to \mathrm{id}_M$ en $C^1$ permite reducir el tiempo para que $F_a(t)(W_\alpha) \subseteq U_\alpha$ y para que la representación coordenada $f_{a,t,\alpha}$ satisfaga

$$\| D(f_{a,t,\alpha} - \mathrm{id}) \|_\infty < \frac{1}{2}$$

sobre $W_\alpha$, simultáneamente para todos los índices de la familia finita. La integración a lo largo del segmento entre dos puntos $x, y$ de esa bola da

$$|f_{a,t,\alpha}(x) - f_{a,t,\alpha}(y)| \geq \frac{1}{2} |x - y|.$$

Por tanto, cada restricción a $W_\alpha$ es inyectiva.

Sea $\delta > 0$ un número de Lebesgue de la cubierta $(V_\alpha)$ para una distancia riemanniana fija. Podemos reducir de nuevo el tiempo de modo que $d(F_a(t)(x), x) < \delta/3$ para todo $x \in M$. Si $F_a(t)(x) = F_a(t)(y)$, la desigualdad triangular da $d(x,y) < 2\delta/3$, de modo que ambos puntos pertenecen a algún $V_\alpha$. La inyectividad local recién demostrada implica $x = y$. Finalmente, $F_a(t)$ preserva cada componente conexa, pues $s \mapsto F_a(st)(x)$ es un camino que empieza en $x$. En cada componente su imagen es no vacía, abierta por ser un difeomorfismo local y cerrada por compacidad. Por conexidad es toda la componente. Así $F_a(t)$ es biyectiva y su inversa es suave por el teorema de la función inversa.

Definamos

$$\widehat{\mathbf{g}}_a(t) = (F_a(t)^{-1})^* \mathbf{g}_a(t).$$

La tensión de la identidad de $(M, \widehat{\mathbf{g}}_a)$ en $(M, \bar{\mathbf{g}})$ es

$$\tau_{\widehat{\mathbf{g}}_a, \bar{\mathbf{g}}}(\mathrm{id})^k = \sum_{i,j=1}^{m} \widehat{g}_a^{ij} \left( \overline{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma(\widehat{\mathbf{g}}_a)_{ij}^k \right) = -\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\widehat{\mathbf{g}}_a)^k. \tag{21.32}$$

Pongamos

$$\mathbf{V}_a = (\partial_t F_a) \circ F_a^{-1}.$$

Al precomponer la ecuación de $F_a$ con $F_a^{-1}$, la naturalidad de la tensión respecto de cambios en el dominio da la identidad exacta

$$\mathbf{V}_a = \tau_{\widehat{\mathbf{g}}_a, \bar{\mathbf{g}}}(\mathrm{id}) = -\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\widehat{\mathbf{g}}_a). \tag{21.33}$$

La derivación del pullback por la familia inversa es

$$\partial_t \widehat{\mathbf{g}}_a = (F_a^{-1})^* (\partial_t \mathbf{g}_a) - \mathcal{L}_{\mathbf{V}_a} \widehat{\mathbf{g}}_a. \tag{21.34}$$

En efecto, la derivada de $F_a^{-1} \circ F_a = \mathrm{id}$ identifica la velocidad euleriana de la inversa con el pullback de $-\mathbf{V}_a$, y la regla (21.11) da (21.34). Por (21.10) y (21.33), esta fórmula se convierte en

$$\partial_t \widehat{\mathbf{g}}_a = -2\,\mathrm{Ric}_{\widehat{\mathbf{g}}_a} + \mathcal{L}_{\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\widehat{\mathbf{g}}_a)} \widehat{\mathbf{g}}_a, \qquad \widehat{\mathbf{g}}_a(0) = \mathbf{g}_0.$$

La unicidad del problema cuasilineal parabólico da $\widehat{\mathbf{g}}_1 = \widehat{\mathbf{g}}_2 =: \widehat{\mathbf{g}}$. Además,

$$\partial_t F_a = -\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{g}}}(\widehat{\mathbf{g}}) \circ F_a, \qquad F_a(0) = \mathrm{id}_M.$$

La unicidad de esta ecuación diferencial ordinaria no autónoma implica $F_1 = F_2$. Puesto que $\mathbf{g}_a = F_a^* \widehat{\mathbf{g}}$, se concluye que $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2$ en un intervalo inicial. El conjunto de tiempos hasta los cuales coinciden es cerrado por continuidad y abierto por el mismo argumento iniciado en cualquier tiempo; por conexidad del intervalo temporal, coinciden en todo intervalo común de existencia.

Para familias suaves de datos suaves se mantiene fija una métrica de referencia y se reduce el tiempo de manera uniforme. La cuarta afirmación del Corolario 20.3.3, la dependencia de la ecuación (21.30) respecto de parámetros y la regla de pullback dan suavidad conjunta. El suavizado parabólico permite medirla en toda norma $C^k$ sobre $M \times [\tau, T]$ cuando $\tau > 0$. □

**Observación 21.3.5.** La segunda mitad de la prueba también muestra la dirección inversa del procedimiento de DeTurck. El flujo de mapeos armónicos lleva cualquier solución de Ricci a una solución del mismo sistema estrictamente parabólico; la ecuación ordinaria de los difeomorfismos permite recuperar la solución geométrica sin ambigüedad.

## 21.4 Ecuaciones de evolución

Sea $\mathbf{g}(t)$ una solución suave de (21.9). Al sustituir $\mathbf{h} = -2\,\mathrm{Ric}$ en el Lema 21.1.1 se obtienen las identidades

$$\partial_t g^{ij} = 2\,\mathrm{Ric}^{ij}, \tag{21.35}$$

$$\partial_t d\lambda_{\mathbf{g}} = -R\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \tag{21.36}$$

$$\partial_t \Gamma_{ij}^k = -\sum_{\ell=1}^m g^{k\ell}\left(\nabla_i \mathrm{Ric}_{j\ell} + \nabla_j \mathrm{Ric}_{i\ell} - \nabla_\ell \mathrm{Ric}_{ij}\right). \tag{21.37}$$

En particular,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(M, \mathbf{g}(t)) = -\int_M R_{\mathbf{g}(t)}\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)}. \tag{21.38}$$

**Proposición 21.4.1.** (Variación del laplaciano) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera, sea $\mathbf{g}(t)$ una familia suave de métricas en $M$, sea $\mathbf{h} = \partial_t \mathbf{g}$ y sea $f = f(x,t)$ una función suave. Entonces

$$\partial_t(\Delta f) = \Delta(\partial_t f) - \sum_{i,j=1}^m h^{ij}(\nabla^2 f)_{ij} - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \nabla^i h_i{}^k - \frac{1}{2}\nabla^k \mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\mathbf{h}\right)\nabla_k f. \tag{21.39}$$

Bajo el flujo de Ricci, la identidad de Bianchi contraída da

$$\partial_t(\Delta f) = \Delta(\partial_t f) + 2\sum_{i,j=1}^m \mathrm{Ric}^{ij}(\nabla^2 f)_{ij}. \tag{21.40}$$

Bajo un flujo de la forma $\partial_t \mathbf{g} = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} + \frac{2}{m} r(t)\mathbf{g}$, con $r(t)$ constante en el espacio, aparece además $-\frac{2}{m} r(t)\,\Delta_{\mathbf{g}} f$.

*Demostración.* En coordenadas,

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\left(\partial_i\partial_j f - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \partial_k f\right).$$

Derivamos, usamos $\partial_t g^{ij} = -h^{ij}$ y contraemos la fórmula de variación de Christoffel. Esto da

$$\sum_{i,j=1}^m g^{ij}\partial_t \Gamma_{ij}^k = \sum_{i=1}^m \nabla^i h_i{}^k - \frac{1}{2}\nabla^k \mathrm{tr}_{\mathbf{g}}\mathbf{h},$$

y por lo tanto (21.39). Para $\mathbf{h} = -2\,\mathrm{Ric}$, la igualdad $\sum_{i=1}^m \nabla^i \mathrm{Ric}_{ik} = \frac{1}{2}\nabla_k R$ cancela el término de primer orden. Si se añade $\frac{2}{m} r\mathbf{g}$, su derivada espacial es cero y su contracción con $\nabla^2 f$ es $\frac{2}{m} r\Delta f$. □

La evolución de la curvatura comienza con la fórmula no conmutada que se deduce directamente de la variación de la conexión.

**Lema 21.4.2.** (Evolución no conmutada de la curvatura) Sea $M^m$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{g}(t)$ una solución suave del flujo de Ricci en $M$. El tensor de tipo $(1,3)$ satisface

$$\partial_t R_{ijk}{}^\ell = \sum_{q=1}^m g^{\ell q}\big(-(\nabla^2 \mathrm{Ric})_{ijkq} - (\nabla^2 \mathrm{Ric})_{ikjq} + (\nabla^2 \mathrm{Ric})_{iqjk} \tag{21.41}$$

$$+ (\nabla^2 \mathrm{Ric})_{jikq} + (\nabla^2 \mathrm{Ric})_{jkiq} - (\nabla^2 \mathrm{Ric})_{jqik}\big). \tag{21.42}$$

Para el tensor totalmente covariante se añade el término procedente de la métrica:

$$\partial_t R_{ijk\ell} = -2\sum_{q=1}^{m} \mathrm{Ric}_{\ell q} R_{ijk}{}^{q} + \sum_{q=1}^{m} g_{\ell q}\partial_t R_{ijk}{}^{q}. \tag{21.43}$$

*Demostración.* La ecuación (21.4) y (21.37) dan

$$\partial_t R_{ijk}{}^{\ell} = \nabla_i(\partial_t \Gamma^{\ell}_{jk}) - \nabla_j(\partial_t \Gamma^{\ell}_{ik}).$$

Se sustituye (21.37) y se usa $\nabla \mathbf{g} = 0$; al abrir los dos paréntesis aparecen exactamente los seis términos de (21.42). Finalmente se deriva $R_{ijk\ell} = \sum_{q=1}^{m} g_{\ell q} R_{ijk}{}^{q}$ y se emplea $\partial_t g_{\ell q} = -2\,\mathrm{Ric}_{\ell q}$. □

Las conmutaciones necesarias para reconocer el laplaciano se obtienen de

$$([\nabla_a, \nabla_b]\mathbf{T})_{i_1\dots i_r} = -\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{p=1}^{m} R_{abi_\alpha}{}^{p}\, T_{i_1\dots i_{\alpha-1} p i_{\alpha+1}\dots i_r} \tag{21.44}$$

y de la segunda identidad de Bianchi

$$\nabla_a R_{bcde} + \nabla_b R_{cade} + \nabla_c R_{abde} = 0. \tag{21.45}$$

Al contraer esta última se obtiene

$$\sum_{i=1}^{m} \nabla^{i} \mathrm{Ric}_{ij} = \frac{1}{2}\nabla_j R. \tag{21.46}$$

En las fórmulas de estimación usaremos la notación $\mathbf{S} * \mathbf{T}$ para una suma finita universal de contracciones de $\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}$ mediante $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}^{-1}$. Esta es la Notación 9.1.37; el Lema 9.1.39 controla cada contracción. El número de sumandos y sus coeficientes dependen únicamente del tipo tensorial y de $m$. Para tensores covariantes de órdenes $r, q \in \mathbb{N}_0$ existe $C = C(m, r, q)$ tal que

$$|\mathbf{S} * \mathbf{T}|_{\mathbf{g}} \le C |\mathbf{S}|_{\mathbf{g}} |\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}$$

para tensores de tipos fijos. Esta notación no suprime derivadas: sólo reúne contracciones algebraicas que quedan completamente determinadas al aplicar (21.44).

**Proposición 21.4.3.** (Evolución de Ricci, de la curvatura escalar y de Riemann) Sea $M^m$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{g}(t)$ una solución suave del flujo de Ricci en $M$. Definamos

$$B_{ijk\ell} = \sum_{p,q,r,s=1}^{m} g^{pr} g^{qs} R_{pijq} R_{rk\ell s}. \tag{21.47}$$

Se tienen

$$\partial_t \mathrm{Ric}_{ij} = \Delta \mathrm{Ric}_{ij} + 2\sum_{k,\ell=1}^{m} R_{kij\ell}\,\mathrm{Ric}^{k\ell} - 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Ric}_{i}{}^{k}\,\mathrm{Ric}_{kj}, \tag{21.48}$$

$$\partial_t R_{\mathbf{g}(t)} = \Delta_{\mathbf{g}(t)} R_{\mathbf{g}(t)} + 2|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)}, \tag{21.49}$$

Además, con todos los índices covariantes,

$$\partial_t R_{ijk\ell} = \Delta R_{ijk\ell} + 2\big(B_{ij\ell k} - B_{ijk\ell} - B_{ikj\ell} + B_{i\ell jk}\big) - \sum_{p,q=1}^{m} g^{pq}\big(R_{pjk\ell}\,\mathrm{Ric}_{qi} + R_{ipk\ell}\,\mathrm{Ric}_{qj} + R_{ijkp}\,\mathrm{Ric}_{q\ell} + R_{ijp\ell}\,\mathrm{Ric}_{qk}\big). \tag{21.50}$$

En particular,

$$(\partial_t - \Delta)\,\mathrm{Rm} = \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm}. \tag{21.51}$$

La igualdad esquemática es exactamente (21.50): el miembro derecho reúne únicamente contracciones algebraicas de dos tensores de curvatura y no contiene derivadas adicionales.

*Demostración.* Primero derivamos la fórmula con cuatro índices. Al conmutar en (21.42) las dos derivadas que recaen sobre $\mathrm{Ric}_{kq}$ y usar (21.43), se obtiene

$$\partial_t R_{ijk\ell} = (\nabla^2 \mathrm{Ric})_{i\ell jk} - (\nabla^2 \mathrm{Ric})_{ikj\ell} - (\nabla^2 \mathrm{Ric})_{j\ell ik} + (\nabla^2 \mathrm{Ric})_{jki\ell} - \sum_{p,q=1}^{m} g^{pq}\big(R_{ijkp}\,\mathrm{Ric}_{q\ell} + R_{ijp\ell}\,\mathrm{Ric}_{qk}\big). \tag{21.52}$$

En efecto, los cuatro términos escritos con dos derivadas son los cuatro términos no conmutados de (21.42). Los dos términos restantes forman

$$([\nabla_j, \nabla_i]\,\mathrm{Ric})_{k\ell} = \sum_{p=1}^{m} R_{ijk}{}^{p}\,\mathrm{Ric}_{p\ell} + \sum_{p=1}^{m} R_{ij\ell}{}^{p}\,\mathrm{Ric}_{kp},$$

por (21.44). Al añadir el término que procede de bajar el índice se obtiene

$$\sum_{p=1}^{m} R_{ijk}{}^{p}\,\mathrm{Ric}_{p\ell} + \sum_{p=1}^{m} R_{ij\ell}{}^{p}\,\mathrm{Ric}_{kp} - 2\sum_{q=1}^{m} \mathrm{Ric}_{\ell q}\,R_{ijk}{}^{q} = -\sum_{p,q=1}^{m} g^{pq}\big(R_{ijkp}\,\mathrm{Ric}_{q\ell} + R_{ijp\ell}\,\mathrm{Ric}_{qk}\big),$$

donde se usó $R_{ij\ell p} = -R_{ijp\ell}$. Esto demuestra (21.52).

Probamos ahora la identidad de Simons que transforma las segundas derivadas. La segunda identidad de Bianchi y su contracción dan, con el orden de índices usado aquí,

$$\Delta R_{ijk\ell} = \sum_{p,q=1}^{m} g^{pq}(\nabla^2 \mathrm{Rm})_{piqjk\ell} - \sum_{p,q=1}^{m} g^{pq}(\nabla^2 \mathrm{Rm})_{pjqik\ell}, \tag{21.53}$$

$$\sum_{p,q=1}^{m} g^{pq}\nabla_p R_{qjk\ell} = \nabla_\ell\,\mathrm{Ric}_{jk} - \nabla_k\,\mathrm{Ric}_{j\ell}. \tag{21.54}$$

Para efectuar la conmutación fijamos un punto y un marco ortonormal allí. La identidad (21.44) da

$$\begin{aligned}&\sum_{p=1}^{m}([\nabla_p,\nabla_i]\,\mathrm{Rm})_{pjk\ell}\\&\quad=\sum_{r=1}^{m}\mathrm{Ric}_{ir}\,R_{rjk\ell}-\sum_{p,r=1}^{m}\big(R_{pijr}R_{prk\ell}+R_{pikr}R_{pjr\ell}+R_{pi\ell r}R_{pjkr}\big).\end{aligned}$$

El primer término procede de $\sum_{p=1}^{m}R_{pipr}=-\mathrm{Ric}_{ir}$. La primera identidad de Bianchi y la antisimetría en los últimos lugares transforman las tres sumas restantes en

$$\begin{aligned}-\sum_{p,r=1}^{m}R_{pijr}R_{prk\ell}&=B_{ijk\ell}-B_{ij\ell k},\\-\sum_{p,r=1}^{m}R_{pikr}R_{pjr\ell}&=B_{ikj\ell},\\-\sum_{p,r=1}^{m}R_{pi\ell r}R_{pjkr}&=-B_{i\ell jk}.\end{aligned}$$

Por ejemplo, para la primera igualdad se sustituye $R_{prk\ell}=-R_{pk\ell r}+R_{p\ell kr}$, que es Bianchi con los índices permutados. Las otras dos igualdades usan directamente $R_{pjr\ell}=-R_{pj\ell r}$ y la definición de $B$. Al volver a coordenadas arbitrarias, el resultado es

$$\begin{aligned}&\sum_{p,q=1}^{m}g^{pq}\big((\nabla^2\,\mathrm{Rm})_{piqjk\ell}-(\nabla^2\,\mathrm{Rm})_{ipqjk\ell}\big)\\&\qquad=\sum_{r=1}^{m}\mathrm{Ric}_i{}^{r}R_{rjk\ell}-B_{ij\ell k}+B_{ijk\ell}-B_{i\ell jk}+B_{ikj\ell}.\end{aligned}$$

Sustituimos esta igualdad y la análoga con $i$ y $j$ intercambiados en (21.53), y después usamos (21.54). Al agrupar los cuatro términos $B$ resulta

$$\begin{aligned}&\Delta R_{ijk\ell}+2\big(B_{ij\ell k}-B_{ijk\ell}-B_{ikj\ell}+B_{i\ell jk}\big)\\&\quad=(\nabla^2\,\mathrm{Ric})_{i\ell jk}-(\nabla^2\,\mathrm{Ric})_{ikj\ell}-(\nabla^2\,\mathrm{Ric})_{j\ell ik}+(\nabla^2\,\mathrm{Ric})_{jki\ell}\\&\qquad+\sum_{p,q=1}^{m}g^{pq}\big(R_{pjk\ell}\,\mathrm{Ric}_{qi}+R_{ipk\ell}\,\mathrm{Ric}_{qj}\big).\end{aligned}\tag{21.55}$$

La sustitución de (21.55) en (21.52) prueba (21.50) término por término.

Para obtener la ecuación de Ricci, sustituimos $\mathbf{h}=-2\,\mathrm{Ric}$ en (21.13). La identidad contraída de Bianchi da

$$\delta_{\mathbf{g}}(-2\,\mathrm{Ric})=dR,\qquad \mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(-2\,\mathrm{Ric})=-2R.$$

Por ello los dos términos hessianos se cancelan. La fórmula explícita (21.14) deja

$$\partial_t \operatorname{Ric}_{ij} = \Delta \operatorname{Ric}_{ij} + 2\sum_{k,\ell=1}^{m} R_{kij\ell}\operatorname{Ric}^{k\ell} - 2\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Ric}_i{}^k \operatorname{Ric}_{kj},$$

que es (21.48).
También puede obtenerse la ecuación escalar sin contraer la anterior. En efecto, (21.6), con $\mathbf{h} = -2\operatorname{Ric}$, da

$$\begin{aligned}\partial_t R_{\mathbf{g}(t)} &= 2|\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} - 2\operatorname{div}^2_{\mathbf{g}(t)}\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)} + 2\Delta_{\mathbf{g}(t)} R_{\mathbf{g}(t)} \\ &= 2|\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} + \Delta_{\mathbf{g}(t)} R_{\mathbf{g}(t)},\end{aligned}$$

donde se usó (21.46). Esto demuestra (21.49).
Finalmente, cada término adicional de (21.50) es una contracción de dos copias de Rm, porque Ric es una contracción de Rm. Esto prueba (21.51). □

**Corolario 21.4.4.** (Evolución de normas de curvatura) Sea $M^m$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{g}(t)$ una solución suave del flujo de Ricci en $M$. Existen constantes $C_m, C'_m > 0$, dependientes sólo de la dimensión, tales que

$$(\partial_t - \Delta_{\mathbf{g}(t)})|\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} = -2|\nabla_{\mathbf{g}(t)}\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} - 8\sum_{i,j,k,\ell=1}^{m}\big(B_{ijk\ell} + B_{ikj\ell}\big)R^{ijk\ell}, \tag{21.56}$$

$$(\partial_t - \Delta_{\mathbf{g}(t)})|\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} \le -2|\nabla_{\mathbf{g}(t)}\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} + C_m|\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|^3_{\mathbf{g}(t)}, \tag{21.57}$$

$$(\partial_t - \Delta_{\mathbf{g}(t)})|\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} = -2|\nabla_{\mathbf{g}(t)}\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} + 4\sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} R_{kij\ell}\operatorname{Ric}^{ij}\operatorname{Ric}^{k\ell}, \tag{21.58}$$

$$(\partial_t - \Delta_{\mathbf{g}(t)})R^2_{\mathbf{g}(t)} = -2|dR_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} + 4R_{\mathbf{g}(t)}|\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)}. \tag{21.59}$$

En particular,

$$(\partial_t - \Delta_{\mathbf{g}(t)})|\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} \le -2|\nabla_{\mathbf{g}(t)}\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} + C'_m|\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)}|\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)}. \tag{21.60}$$

*Demostración.* Para cualquier tensor covariante $\mathbf{T}$ que dependa del tiempo,

$$\Delta_{\mathbf{g}(t)}|\mathbf{T}|^2_{\mathbf{g}(t)} = 2\langle\Delta_{\mathbf{g}(t)}\mathbf{T}, \mathbf{T}\rangle_{\mathbf{g}(t)} + 2|\nabla_{\mathbf{g}(t)}\mathbf{T}|^2_{\mathbf{g}(t)}.$$

La derivación temporal de la norma también deriva cada copia de $\mathbf{g}^{-1}$. Por (21.35), esos términos son contracciones de $\operatorname{Ric}*\mathbf{T}*\mathbf{T}$. Con $\mathbf{T} = \operatorname{Rm}$, contraemos (21.50) con $2R^{ijk\ell}$ y añadimos los cuatro términos obtenidos al derivar las métricas inversas. Los términos $\operatorname{Ric}*\operatorname{Rm}*\operatorname{Rm}$ se cancelan y, para cada lugar covariante, el término de Ricci en la evolución del tensor cancela el término que deriva la métrica inversa en ese mismo lugar. Para los sumandos $B$, cambiar los nombres de $k$ y $\ell$ y usar $R^{ij\ell k} = -R^{ijk\ell}$ da

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} B_{ij\ell k}R^{ijk\ell} = -\sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} B_{ijk\ell}R^{ijk\ell},$$

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} B_{i\ell jk}R^{ijk\ell} = -\sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} B_{ikj\ell}R^{ijk\ell}.$$

Por consiguiente, el resto es

$$-8\sum_{i,j,k,\ell=1}^{m}(B_{ijk\ell}+B_{ikj\ell})R^{ijk\ell}.$$

Esto prueba (21.56). La estimación algebraica de $B$ da (21.57).

Para el tensor de Ricci, derivamos directamente las dos métricas inversas que intervienen en $|\mathrm{Ric}|^2 = \sum_{i,j,a,b=1}^{m} g^{ia}g^{jb}\,\mathrm{Ric}_{ij}\,\mathrm{Ric}_{ab}$ y usamos (21.35). De este modo se obtiene

$$\partial_t|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} = 2\langle\partial_t\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)},\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}\rangle_{\mathbf{g}(t)} + 4\sum_{i,j,k=1}^{m}\mathrm{Ric}_i{}^j\,\mathrm{Ric}_j{}^k\,\mathrm{Ric}_k{}^i.$$

Los términos cúbicos en Ricci que proceden de (21.48) cancelan exactamente el segundo sumando. Al restar la fórmula de $\Delta_{\mathbf{g}(t)}|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)}$ queda (21.58). La desigualdad siguiente es Cauchy–Schwarz en cada fibra. Finalmente,

$$(\partial_t-\Delta_{\mathbf{g}(t)})R^2_{\mathbf{g}(t)} = 2R_{\mathbf{g}(t)}(\partial_t-\Delta_{\mathbf{g}(t)})R_{\mathbf{g}(t)} - 2|dR_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)},$$

y (21.49) prueba (21.59). □

## 21.5 Principio del máximo y estimaciones a priori

Las ecuaciones de evolución se vuelven útiles cuando se combinan con el principio del máximo. La curvatura escalar satisface una desigualdad cerrada, mientras que la norma del tensor de Riemann obedece una ecuación con un término cúbico. De estas dos observaciones se obtienen las primeras cotas y, mediante una inducción de Bernstein, las estimaciones de todas las derivadas de la curvatura.

Para aplicar el principio del máximo del capítulo anterior, fijamos $\nabla^0 = \nabla^{\mathbf{g}(0)}$. En cada tiempo, sobre funciones,

$$\Delta_{\mathbf{g}(t)}f = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(t)((\nabla^0)^2 f)_{ij} + \sum_{k=1}^{m} b^k(x,t)\nabla^0_k f,$$

donde

$$b^k(x,t) = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(t)\big(\Gamma(\mathbf{g}(0))^k_{ij} - \Gamma(\mathbf{g}(t))^k_{ij}\big), \qquad k\in\{1,\dots,m\}.$$

En un subintervalo compacto de existencia, la suavidad y la positividad de $\mathbf{g}(t)$ hacen uniformes la elipticidad y las cotas de estos coeficientes. Por tanto, el operador tiene las hipótesis del Teorema 20.4.1, aunque la métrica que define el laplaciano varíe con el tiempo.

**Proposición 21.5.1.** (Cota inferior de la curvatura escalar) Sea $M^m$ una variedad suave cerrada y sea $\mathbf{g}(t)$ una solución suave del flujo de Ricci en $M$. Sea

$$a_0 = \min_{x\in M} R_{\mathbf{g}(0)}(x).$$

Mientras el denominador sea positivo,

$$R_{\mathbf{g}(t)}(x) \geq \frac{a_0}{1 - \frac{2}{m} a_0 t} \qquad (x \in M). \tag{21.61}$$

En particular, la condición $R_{\mathbf{g}(0)} \geq 0$ se preserva. Si $R_{\mathbf{g}(0)} > 0$, entonces $R_{\mathbf{g}(t)} > 0$ durante todo el intervalo de existencia.

*Demostración.* La desigualdad de Cauchy–Schwarz para los autovalores de Ricci da

$$|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} \geq \frac{1}{m} R^2_{\mathbf{g}(t)}.$$

Sea $a(t)$ la solución de

$$a'(t) = \frac{2}{m} a(t)^2, \qquad a(0) = a_0.$$

Si $a_0 \neq 0$, entonces

$$a(t) = \frac{a_0}{1 - \frac{2}{m} a_0 t};$$

si $a_0 = 0$, se tiene $a(t) = 0$. Para $u = R_{\mathbf{g}(t)} - a$,

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta) u &= 2|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} - \frac{2}{m} a^2 \\ &\geq \frac{2}{m}(R^2_{\mathbf{g}(t)} - a^2) = \frac{2}{m}(R_{\mathbf{g}(t)} + a) u.\end{aligned}$$

Pongamos $b = \frac{2}{m}(R_{\mathbf{g}(t)} + a)$ y $v = -u$. En cualquier subintervalo compacto de existencia, $b$ tiene una cota superior $B$. La desigualdad anterior se escribe

$$(\partial_t - \Delta) v \leq b v.$$

Para $\widetilde{v} = e^{-Bt} v$ se tiene

$$(\partial_t - \Delta) \widetilde{v} \leq (b - B) \widetilde{v}.$$

Como $b - B \leq 0$ y $\widetilde{v}(0) \leq 0$, el Teorema 20.4.1 aplicado al máximo positivo de $\widetilde{v}$ da $\widetilde{v} \leq 0$. Así, $u \geq 0$. La positividad estricta se obtiene también del principio ya demostrado: si $a_0 = \min_{x \in M} R_{\mathbf{g}(0)}(x) > 0$, entonces $(\partial_t - \Delta)(a_0 - R) = -2|\mathrm{Ric}|^2 \leq 0$. El principio del máximo implica $R(x,t) \geq a_0 > 0$ en cada subintervalo compacto de existencia. El mismo argumento con $a_0 = 0$ conserva la no negatividad. □

**Proposición 21.5.2.** (Control inicial de la curvatura) Sea $M^m$ una variedad suave cerrada y sea $\mathbf{g}(t)$ una solución suave del flujo de Ricci en $M$. Si

$$K_0 = \max_{x \in M} |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(0)}(x)|_{\mathbf{g}(0)},$$

entonces existe $c_m > 0$ tal que

$$\max_{x \in M} |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}(x)|_{\mathbf{g}(t)} \leq \frac{K_0}{1 - c_m K_0 t} \tag{21.62}$$

si $1 - c_m K_0 t > 0$. Cuando $K_0 = 0$, el flujo permanece plano.

*Demostración.* Pongamos $q(x,t) = |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}(x)|^2_{\mathbf{g}(t)}$. La Ecuación (21.57) y el principio del máximo escalar muestran que el máximo superior derecho $Q(t) = \max_{x\in M} q(x,t)$ satisface

$$D^+Q(t) \le C_m Q(t)^{\frac{3}{2}}.$$

La solución de $y' = C_m y^{\frac{3}{2}}$, $y(0) = K_0^2$, es

$$y(t) = \frac{K_0^2}{\left(1 - \frac{C_m}{2} K_0 t\right)^2}.$$

La comparación para ecuaciones ordinarias da la conclusión con $c_m = \frac{C_m}{2}$. Si $K_0 = 0$, la comparación da $q = 0$. □

Las estimaciones de las derivadas de la curvatura son necesarias para excluir una pérdida de regularidad cuando la curvatura permanece acotada.

**Proposición 21.5.3.** (Estimaciones globales de derivadas) Sea $M^m$ una variedad suave cerrada y sea $\mathbf{g}(t)$ una solución suave del flujo de Ricci en $M$. Supongamos que $\mathbf{g}(t)$ está definido en $M \times [0,T]$ y

$$|\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}(x)|_{\mathbf{g}(t)} \le K \qquad ((x,t) \in M \times [0,T]).$$

Para cada entero $r \ge 1$ existe una constante $C_r = C_r(m, r, KT)$ tal que

$$|\nabla^r_{\mathbf{g}(t)} \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}(x)|_{\mathbf{g}(t)} \le C_r K t^{-\frac{r}{2}} \qquad ((x,t) \in M \times (0,T]). \tag{21.63}$$

Si $K = 0$, todas las derivadas se anulan y la afirmación se interpreta de esa manera.

*Demostración.* Escribamos $\mathcal{D} = \partial_t - \Delta$ y $\mathbf{T}_r = \nabla^r \mathrm{Rm}$ para $r \in \mathbb{N}_0$. Si $\mathbf{T}$ es covariante de orden $q$, derivar sus componentes da

$$([\partial_t, \nabla]\mathbf{T})_{ij_1\dots j_q} = -\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{p=1}^{m} (\partial_t \Gamma^p_{ij_\alpha}) T_{j_1\dots j_{\alpha-1} p j_{\alpha+1}\dots j_q}.$$

Por (21.37), esto es una suma de contracciones de $\nabla\mathrm{Rm}$ con $\mathbf{T}$. Por otra parte, el Lema 9.1.41, aplicado a la conexión tensorial y con $\Delta = -\nabla^*\nabla$, da

$$[\Delta, \nabla]\mathbf{T} = \mathrm{Rm} * \nabla\mathbf{T} + \nabla\mathrm{Rm} * \mathbf{T}.$$

En este uso del lema, el haz es el de los tensores del tipo de $\mathbf{T}$; su curvatura es la suma de las acciones de Riemann sobre cada lugar, como expresa (21.44).
Probamos para cada $r \in \mathbb{N}_0$ la identidad

$$(\partial_t - \Delta_{\mathbf{g}(t)})\nabla^r_{\mathbf{g}(t)} \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)} = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0 \\ a+b=r}} \nabla^a_{\mathbf{g}(t)} \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)} * \nabla^b_{\mathbf{g}(t)} \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}. \tag{21.64}$$

Para $r=0$ es (21.51). Supongamos que vale para cierto $r\geq 0$. Como $\mathbf{T}_{r+1}=\nabla\mathbf{T}_r$,

$$\mathcal{D}\mathbf{T}_{r+1}=\nabla(\mathcal{D}\mathbf{T}_r)+[\partial_t,\nabla]\mathbf{T}_r-[\Delta,\nabla]\mathbf{T}_r.$$

La Proposición 9.1.40 transforma el primer término en la suma, para $a+b=r$, de $\mathbf{T}_{a+1}*\mathbf{T}_b$ y $\mathbf{T}_a*\mathbf{T}_{b+1}$. Los dos conmutadores aportan únicamente $\mathbf{T}_1*\mathbf{T}_r$ y $\mathbf{T}_0*\mathbf{T}_{r+1}$. Todos estos productos tienen suma de órdenes $r+1$; agrupando los que comparten ese par de órdenes se obtiene (21.64) para $r+1$. El número de términos y sus coeficientes dependen sólo de $m$ y de $r$.

Al pasar a la norma de $\mathbf{T}_r$ se deriva cada una de las $r+4$ copias de la métrica inversa. La identidad $\partial_t\mathbf{g}^{-1}=2\,\mathrm{Ric}^{\sharp\sharp}$ acota su contribución por $C_r|\mathrm{Rm}||\mathbf{T}_r|^2$, que es el tipo de término correspondiente a $a=0$ o $b=0$ en la suma siguiente. Por la regla de Leibniz,

$$(\partial_t-\Delta_{\mathbf{g}(t)})|\nabla^r_{\mathbf{g}(t)}\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)}\leq -2|\nabla^{r+1}_{\mathbf{g}(t)}\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|^2_{\mathbf{g}(t)} \tag{21.65}$$

$$+C_r\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0\\ a+b=r}}|\nabla^r_{\mathbf{g}(t)}\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)}|\nabla^a_{\mathbf{g}(t)}\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)}|\nabla^b_{\mathbf{g}(t)}\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)}. \tag{21.66}$$

La normalización de escala evita mezclar potencias distintas de $K$. Si $K>0$, definimos

$$\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)=K\mathbf{g}\left(\frac{\tau}{K}\right),\qquad 0\leq\tau\leq KT. \tag{21.67}$$

Entonces $\widetilde{\mathbf{g}}$ satisface el flujo de Ricci y $|\mathrm{Rm}_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)}|_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)}\leq 1$. En las variables originales el término sin derivadas de (21.57) es de tamaño $K^3$, no de tamaño $K^2$; la transformación (21.67) lo convierte en una constante adimensional. Basta, por lo tanto, probar la estimación cuando $K=1$ en un intervalo $[0,S]$, con $S=KT$. Escribimos

$$u_j(x,\tau)=|\nabla^j_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)}\mathrm{Rm}_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)}(x)|^2_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)}.$$

Procedemos por inducción en $r$. Supongamos conocidas las cotas $u_j\leq C_{j,S}\tau^{-j}$ para $j<r$; para $r=1$ esta hipótesis sólo usa $u_0\leq 1$. En (21.66), los sumandos con $a=0$ o $b=0$ están acotados por $C_ru_r$. Si $1\leq a,b\leq r-1$, la hipótesis inductiva da $\tau^r\sqrt{u_ru_au_b}\leq C_{r,S}\tau^{r/2}\sqrt{u_r}$. Escribimos el último producto como $C_{r,S}(\tau^{(r-1)/2}\sqrt{u_r})\tau^{1/2}$ y aplicamos Young. Como $\tau\leq S$, resulta

$$\tau^r u_r^{\frac12}u_a^{\frac12}u_b^{\frac12}\leq\varepsilon\tau^{r-1}u_r+C_{r,S,\varepsilon},\qquad a+b=r.$$

Al derivar la potencia de $\tau$ y absorber también $\tau^ru_r\leq S\tau^{r-1}u_r$, obtenemos

$$(\partial_\tau-\Delta_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)})(\tau^ru_r)\leq -2\tau^ru_{r+1}+C_{r,S}\tau^{r-1}u_r+C_{r,S}. \tag{21.68}$$

El mismo cálculo, ya justificado por la hipótesis inductiva, da para $1\leq j<r$

$$(\partial_\tau-\Delta_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)})(\tau^ju_j)\leq -2\tau^ju_{j+1}+C_{j,S}\tau^{j-1}u_j+C_{j,S}, \tag{21.69}$$

y para $j=0$ da

$$(\partial_\tau-\Delta_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)})u_0\leq -2u_1+C_m. \tag{21.70}$$

Ponemos $A_r=1$ y, para $j=r,r-1,\dots,1$, definimos $A_{j-1}=1+C_{j,S}A_j$. Esta elección hace que el término

$C_{j,S}A_j\tau^{j-1}u_j$ de (21.68) o (21.69) sea absorbido por $-2A_{j-1}\tau^{j-1}u_j$. Para

$$F_r = \tau^r u_r + \sum_{j=0}^{r-1} A_j \tau^j u_j \tag{21.71}$$

resulta así

$$(\partial_\tau - \Delta_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)})F_r \le C_{r,S}. \tag{21.72}$$

Como $F_r(0) = A_0 u_0(0) \le A_0$, el principio del máximo implica $F_r \le A_0 + C_{r,S}S$. En particular,

$$|\nabla^r_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)} \mathrm{Rm}_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)}|_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)} \le C_{r,S}\tau^{-\frac{r}{2}}.$$

Esto cierra la inducción.
Finalmente, bajo el reescalamiento constante de (21.67),

$$|\nabla^r_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)} \mathrm{Rm}_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)}|_{\widetilde{\mathbf{g}}(\tau)} = K^{-1-\frac{r}{2}}|\nabla^r_{\mathbf{g}(\tau/K)} \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(\tau/K)}|_{\mathbf{g}(\tau/K)}.$$

Tomando $\tau = Kt$ se obtiene

$$|\nabla^r_{\mathbf{g}(t)} \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)} \le C_r(m, r, KT)Kt^{-\frac{r}{2}},$$

que es (21.63). El caso $K = 0$ ya se sigue de la Proposición 21.5.2. □

**Teorema 21.5.4.** (Criterio de continuación) Sea $\mathbf{g}(t)$ la solución maximal del flujo de Ricci en una variedad suave cerrada, definida en $[0, T_{\max})$. Si $T_{\max} < \infty$, entonces

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} \max_{x \in M} |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}(x)|_{\mathbf{g}(t)} = \infty. \tag{21.73}$$

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que $|\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)} \le K$ en $M \times [0, T_{\max})$. Como $|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)} \le \sqrt{m}|\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)}$, para todo vector $v \neq 0$ fijo en $TM$ se tiene

$$|\partial_t \log \mathbf{g}(t)(v, v)| = 2\frac{|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}(v, v)|}{\mathbf{g}(t)(v, v)} \le 2\sqrt{m}K.$$

La integración temporal proporciona

$$e^{-2\sqrt{m}KT_{\max}}\mathbf{g}(0) \le \mathbf{g}(t) \le e^{2\sqrt{m}KT_{\max}}\mathbf{g}(0). \tag{21.74}$$

La desigualdad (21.74) afirma que, para todo $x \in M$ y todo $v \in T_xM$,

$$e^{-2\sqrt{m}KT_{\max}}\mathbf{g}(0)_x(v, v) \le \mathbf{g}(t)_x(v, v) \le e^{2\sqrt{m}KT_{\max}}\mathbf{g}(0)_x(v, v).$$

Las constantes son independientes de $x$ y de $t < T_{\max}$. En particular, el posible límite no puede perder positividad. La Proposición 7.1.9 permite medir cualquier tensor de tipo fijo con $\mathbf{g}(0)$ o con $\mathbf{g}(t)$ usando constantes comunes. Para sustituir, además, las derivadas de Levi–Civita dependientes de $t$ por derivadas respecto de una conexión fija, se necesita el argumento de cambio de conexión que sigue.
Aplicamos la Proposición 21.5.3 al flujo trasladado que comienza en $\frac{T_{\max}}{4}$. Todas las derivadas covariantes

de Riemann quedan uniformemente acotadas en $M \times [\frac{T_{\max}}{2}, T_{\max})$.
Explicamos el paso a una conexión fija. Sea $\nabla^0 = \nabla^{\mathbf{g}(0)}$ y

$$\mathbf{A}(t) = \nabla^{\mathbf{g}(t)} - \nabla^0.$$

Las identidades de cambio de conexión tienen la forma

$$\nabla^0 \mathbf{T} = \nabla^{\mathbf{g}(t)} \mathbf{T} + \mathbf{A} * \mathbf{T}, \qquad \nabla^0 \mathbf{g} = \mathbf{A} * \mathbf{g}, \tag{21.75}$$

donde, en la segunda igualdad, los dos sumandos correspondientes a los dos índices de $\mathbf{g}$ están incluidos en la notación $*$. Como $\nabla^0$ es fija, (21.37) se escribe

$$\partial_t \mathbf{A} = -\mathbf{g}^{-1} * \nabla^{\mathbf{g}(t)} \mathrm{Ric}. \tag{21.76}$$

La estimación de orden uno de la Proposición 21.5.3 acota el miembro derecho y, al integrar desde $\frac{T_{\max}}{2}$, acota $\mathbf{A}$.
Para los órdenes superiores fijamos $t_0 = T_{\max}/2$ y medimos todas las normas infinito con $\mathbf{g}(0)$. Precisemos primero la conversión de derivadas. La fórmula triangular del Lema 9.1.28, o su aplicación a las dos conexiones, tiene aquí la forma

$$(\nabla^0)^r \mathbf{T} = (\nabla^{\mathbf{g}(t)})^r \mathbf{T} + \sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{C}_{r,j} * (\nabla^{\mathbf{g}(t)})^j \mathbf{T}, \qquad r \geq 1. \tag{21.77}$$

Cada $\mathbf{C}_{r,j}$ es una suma finita de productos de $\mathbf{A}, \nabla^0 \mathbf{A}, \ldots, (\nabla^0)^{r-j-1} \mathbf{A}$. Para $r = 1$ la fórmula es (21.75). Si vale para $r$, aplicamos $\nabla^0$: cuando la derivada alcanza a $\mathbf{C}_{r,j}$, aumenta a lo más en uno el orden de una derivada de $\mathbf{A}$; cuando alcanza a $(\nabla^{\mathbf{g}})^j \mathbf{T}$, la primera identidad de (21.75) produce $(\nabla^{\mathbf{g}})^{j+1} \mathbf{T}$ y $\mathbf{A} * (\nabla^{\mathbf{g}})^j \mathbf{T}$. Son exactamente los términos admitidos para $r+1$. Las contracciones se entienden como las acciones naturales de una diferencia de conexiones sobre cada lugar tensorial; no introducen derivadas nuevas de la métrica.
Supongamos ahora acotadas $(\nabla^0)^j \mathbf{A}$ para $j \in \{0, \ldots, r-1\}$, con $r \geq 1$. La identidad $\nabla^0 \mathbf{g} = \mathbf{A} * \mathbf{g}$ muestra que las derivadas de $\mathbf{g}$ hasta orden $r$ están acotadas: en el paso de orden $k$ a $k+1$ se distribuyen $k$ derivadas entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{g}$, por lo que intervienen a lo más $(\nabla^0)^k \mathbf{A}$ y las derivadas de $\mathbf{g}$ ya controladas. Para $0 \leq k \leq r-1$ todos esos factores están disponibles. Derivar $\mathbf{g}^{-1} \mathbf{g} = I$ de la misma manera controla las derivadas de $\mathbf{g}^{-1}$ hasta orden $r$, usando además la equivalencia uniforme de métricas.
Aplicamos $(\nabla^0)^r$ a (21.76). La regla de Leibniz reparte las derivadas entre $\mathbf{g}^{-1}$ y $\nabla^{\mathbf{g}(t)} \mathrm{Ric}$. Para el segundo factor, (21.77) utiliza sólo derivadas de $\mathbf{A}$ hasta orden $r-1$ y derivadas de Riemann respecto de $\nabla^{\mathbf{g}(t)}$ hasta orden $r+1$. Por la hipótesis inductiva y las estimaciones de curvatura, todas están acotadas. En consecuencia,

$$\| \partial_t (\nabla^0)^r \mathbf{A}(t) \|_{L^\infty(M, T^{(1,r+2)}(TM); \mathbf{g}(0))} \leq C_r, \qquad t \in [t_0, T_{\max}).$$

Si $a_r(t) := \| (\nabla^0)^r \mathbf{A}(t) \|_{L^\infty(M, T^{(1,r+2)}(TM); \mathbf{g}(0))}$, la integración proporciona incluso $a_r(t) \leq a_r(t_0) + C_r(t - t_0)$ y, en particular,

$$a_r(t) \leq a_r(t_0) + C_r \int_{t_0}^{t} (1 + a_r(\rho))\, d\rho. \tag{21.78}$$

Esto prueba el paso inductivo. El caso $r = 0$ ya se obtuvo al integrar la evolución de $\mathbf{A}$. Quedan acotadas

todas las derivadas de $\mathbf{A}$ con la conexión fija; las identidades anteriores dan entonces las de $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}^{-1}$ y Rm. En particular, la conversión de conexiones proporciona, para cada $r$, una constante $C_r$ tal que

$$\|(\nabla^0)^r \partial_t \mathbf{g}(t)\|_{C^0(M,(T^*M)^{\otimes(r+2)};\mathbf{g}(0))} = 2\|(\nabla^0)^r \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)}\|_{C^0(M,(T^*M)^{\otimes(r+2)};\mathbf{g}(0))} \le C_r.$$

Por consiguiente, si $t_0 \le t_1 < t_2 < T_{\max}$,

$$\|\mathbf{g}(t_2) - \mathbf{g}(t_1)\|_{C^r(M,S^2T^*M;\mathbf{g}(0))} \le C_r|t_2 - t_1|. \tag{21.79}$$

La completitud de cada espacio $C^r$ y la compatibilidad de sus límites producen una métrica suave $\mathbf{g}_*$ tal que

$$\mathbf{g}(t) \longrightarrow \mathbf{g}_* \quad \text{en } C^\infty(M) \quad \text{cuando } t \nearrow T_{\max}.$$

La desigualdad (21.74) asegura que $\mathbf{g}_*$ es definida positiva.

El Teorema 21.3.4, aplicado a $\mathbf{g}_*$, produce una solución en $[T_{\max}, T_{\max} + \varepsilon)$ con dato $\mathbf{g}_*$. La definición por tramos es continua y su primera derivada temporal coincide a ambos lados, pues es $-2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}_*}$. Para comprobar todas las derivadas, definimos los operadores diferenciales $\mathcal{P}_1(\mathbf{g}) = -2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$ y

$$\mathcal{P}_{k+1}(\mathbf{g}) := D\mathcal{P}_k(\mathbf{g})[-2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}], \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Si $\partial_t^k \mathbf{g} = \mathcal{P}_k(\mathbf{g})$, la regla de la cadena da $\partial_t^{k+1}\mathbf{g} = \mathcal{P}_{k+1}(\mathbf{g})$. Así cada derivada temporal es una expresión suave en la métrica inversa y en un número finito de derivadas espaciales de la métrica. La convergencia en todos los espacios $C^r$ hace coincidir esas expresiones, y sus derivadas espaciales, con las de la solución nueva en $T_{\max}$. Se obtiene así una extensión suave, lo que contradice la maximalidad. Esta prueba es también la aplicación geométrica del Teorema 20.3.4: las estimaciones de derivadas verifican que ninguna norma de los coeficientes del sistema de DeTurck diverge mientras la curvatura permanezca acotada. Esto prueba primero que el límite superior es infinito.

Si el límite completo no fuese infinito, existirían $K < \infty$ y $t_j \nearrow T_{\max}$ tales que

$$\max_{x\in M} |\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}(t_j)}(x)|_{\mathbf{g}(t_j)} \le K.$$

Reemplazando $K$ por $\max\{K, 1\}$ podemos suponer $K > 0$. Aplicamos la Proposición 21.5.2 al flujo trasladado que comienza en $t_j$. Para $j$ tan grande que $T_{\max} - t_j < (2c_m K)^{-1}$ se obtiene

$$\max_{x\in M} |\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}(t)}(x)|_{\mathbf{g}(t)} \le 2K, \qquad t_j \le t < T_{\max}.$$

En el intervalo compacto $[0, t_j]$ la curvatura también está acotada. Por lo tanto existe una cota uniforme en todo $[0, T_{\max})$, contradiciendo la primera parte de la prueba. La conclusión es el límite afirmado. □

## 21.6 Reescalamientos y flujo normalizado

Si $c > 0$ es constante y $\widehat{\mathbf{g}} = c\mathbf{g}$, las conexiones de Levi–Civita de $\mathbf{g}$ y $\widehat{\mathbf{g}}$ coinciden. Por consiguiente,

$$\operatorname{Rm}^{(1,3)}_{c\mathbf{g}} = \operatorname{Rm}^{(1,3)}_{\mathbf{g}}, \qquad \operatorname{Rm}^{(0,4)}_{c\mathbf{g}} = c\operatorname{Rm}^{(0,4)}_{\mathbf{g}}, \qquad \operatorname{Ric}_{c\mathbf{g}} = \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}, \qquad R_{c\mathbf{g}} = c^{-1}R_{\mathbf{g}}, \qquad d\lambda_{c\mathbf{g}} = c^{\frac{m}{2}} d\lambda_{\mathbf{g}}, \tag{21.80}$$

así como

$$d_{c\mathbf{g}} = c^{1/2} d_{\mathbf{g}}, \qquad \operatorname{inj}_{c\mathbf{g}} = c^{1/2} \operatorname{inj}_{\mathbf{g}}, \qquad |\nabla^q_{c\mathbf{g}} \operatorname{Rm}_{c\mathbf{g}}|_{c\mathbf{g}} = c^{-1-q/2} |\nabla^q_{\mathbf{g}} \operatorname{Rm}_{\mathbf{g}}|_{\mathbf{g}}. \tag{21.81}$$

La igualdad $\operatorname{Ric}_{c\mathbf{g}} = \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$ es una igualdad de tensores covariantes de orden dos; es importante no sustituirla por $c^{-1}\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$.

Denotemos por

$$r(\mathbf{g}) = \frac{1}{\operatorname{Vol}(M,\mathbf{g})} \int_M R_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \tag{21.82}$$

el promedio de la curvatura escalar. El flujo de Ricci normalizado por el volumen es

$$\partial_t \mathbf{g} = -2 \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + \frac{2}{m} r(\mathbf{g}) \mathbf{g}. \tag{21.83}$$

**Proposición 21.6.1.** (Volumen y curvatura del flujo normalizado) Sea $M^m$ una variedad suave cerrada y sea $\mathbf{g}(t)$ una solución suave del flujo de Ricci normalizado (21.83). Toda solución de (21.83) satisface

$$\partial_t g_{ij} = -2 \operatorname{Ric}_{ij} + \frac{2}{m} r g_{ij}, \tag{21.84}$$

$$\partial_t d\lambda_{\mathbf{g}} = (-R_{\mathbf{g}} + r) d\lambda_{\mathbf{g}}, \tag{21.85}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(M, \mathbf{g}(t)) = 0, \tag{21.86}$$

$$\partial_t R_{\mathbf{g}} = \Delta_{\mathbf{g}} R_{\mathbf{g}} + 2 |\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}|^2_{\mathbf{g}} - \frac{2}{m} r R_{\mathbf{g}}. \tag{21.87}$$

*Demostración.* La primera identidad es la expresión en componentes de (21.83). La traza de $\mathbf{h} = -2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + \frac{2}{m} r \mathbf{g}$ es $-2R_{\mathbf{g}} + 2r$. Por (21.2) se obtiene (21.85). Integrando esta identidad,

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(M, \mathbf{g}(t)) = -\int_M R_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} + r \int_M d\lambda_{\mathbf{g}} = 0,$$

donde se usó la definición (21.82). La parte $-2\operatorname{Ric}$ de $\mathbf{h}$ produce $\Delta_{\mathbf{g}} R_{\mathbf{g}} + 2|\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}|^2_{\mathbf{g}}$ por (21.49). Para la parte $\frac{2}{m} r \mathbf{g}$, el número $r(t)$ es constante en el espacio en cada tiempo, de modo que los dos términos de derivadas en (21.6) se anulan, mientras que

$$-\left\langle \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}, \frac{2}{m} r \mathbf{g} \right\rangle_{\mathbf{g}} = -\frac{2}{m} r R_{\mathbf{g}}.$$

La suma prueba (21.87). □

El flujo normalizado no constituye una ecuación distinta desde el punto de vista local. Un reescalamiento espacial por una función positiva del tiempo, junto con un cambio de la variable temporal, transforma una solución no normalizada en una normalizada. En efecto, si $\mathbf{g}(t)$ resuelve (21.9), pongamos

$$c(t) := \left( \frac{\operatorname{Vol}(M, \mathbf{g}(0))}{\operatorname{Vol}(M, \mathbf{g}(t))} \right)^{2/m}, \qquad \tau(t) := \int_0^t c(s)\, ds, \qquad \widehat{\mathbf{g}}(\tau(t)) := c(t) \mathbf{g}(t).$$

Entonces $\operatorname{Vol}(\widehat{\mathbf{g}}) = \operatorname{Vol}(\mathbf{g}(0))$. Además, si se considera $c$ como función de $\tau$ y $t = t(\tau)$, se tiene

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c}, \qquad \frac{1}{c} \frac{dc}{d\tau} = \frac{2}{m} r(\widehat{\mathbf{g}}),$$

pues $\partial_t \log \mathrm{Vol}(\mathbf{g}) = -r(\mathbf{g})$ y $r(c\mathbf{g}) = c^{-1} r(\mathbf{g})$. Entonces, usando (21.80),

$$\begin{aligned} \partial_\tau \widehat{\mathbf{g}} &= \frac{dc}{d\tau}\mathbf{g} + c\frac{dt}{d\tau}\partial_t \mathbf{g} \\ &= \frac{1}{c}\frac{dc}{d\tau}\widehat{\mathbf{g}} - 2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} \\ &= \frac{2}{m} r(\widehat{\mathbf{g}})\widehat{\mathbf{g}} - 2\,\mathrm{Ric}_{\widehat{\mathbf{g}}}. \end{aligned}$$

Así se obtiene exactamente (21.83).

## 21.7 Métricas de Einstein, superficies y solitones

Las soluciones más simples combinan reescalamientos, difeomorfismos y estructuras especiales de la curvatura.

**Ejemplo 21.7.1.** (Métricas de Einstein) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sea $\mathbf{g}_0$ una métrica riemanniana en $M$. Supongamos que $\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_0} = \lambda \mathbf{g}_0$, con $\lambda$ constante. En el intervalo en que $1 - 2\lambda t > 0$,

$$\mathbf{g}(t) = (1 - 2\lambda t)\mathbf{g}_0 \tag{21.88}$$

resuelve el flujo de Ricci. En efecto,

$$\partial_t \mathbf{g} = -2\lambda \mathbf{g}_0, \qquad \mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)} = \mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_0} = \lambda \mathbf{g}_0.$$

Si $\lambda > 0$, la solución homotética se extingue en $t = \frac{1}{2\lambda}$; si $\lambda = 0$, es estacionaria; si $\lambda < 0$, existe para todo $t \geq 0$ y se expande. La misma métrica $\mathbf{g}_0$ es un punto fijo del flujo normalizado, pues $r(\mathbf{g}_0) = m\lambda$.

En particular, una métrica de curvatura seccional constante $K$ es Einstein con $\lambda = (m-1)K$. La fórmula (21.88) describe por completo su evolución.

**Proposición 21.7.2.** (Flujo de Ricci en dimensión dos) En una superficie cerrada,

$$\partial_t \mathbf{g} = -R\mathbf{g}, \qquad \partial_t R = \Delta R + R^2 \tag{21.89}$$

para el flujo no normalizado. Para el flujo normalizado,

$$\partial_t \mathbf{g} = (r - R)\mathbf{g}, \qquad \partial_t R = \Delta R + R(R - r) \tag{21.90}$$

En este último caso

$$r = \frac{4\pi\chi(M)}{\mathrm{Vol}(M, \mathbf{g}(0))} \tag{21.91}$$

es constante en el tiempo.

*Demostración.* En dimensión dos, las simetrías algebraicas de Riemann implican

$$\mathrm{Ric} = K\mathbf{g}, \qquad R = 2K,$$

y, por lo tanto, $\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}R\mathbf{g}$. La sustitución en (21.9) y (21.49) da

$$\partial_t \mathbf{g} = -R\mathbf{g}, \qquad \partial_t R = \Delta R + 2\left|\frac{1}{2}R\mathbf{g}(t)\right|^2_{\mathbf{g}(t)} = \Delta R + R^2,$$

porque $|\mathbf{g}(t)|^2_{\mathbf{g}(t)} = 2$. Las fórmulas normalizadas se obtienen del mismo modo a partir de (21.83) y (21.87). Si $M$ es orientable, el Teorema A.8.7 afirma

$$\int_M K\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 2\pi\chi(M).$$

Si $M$ no es orientable, aplicamos esta igualdad al espacio cubriente orientable de dos hojas $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ con la métrica levantada. Como

$$\int_{\widetilde{M}} K_{\pi^*\mathbf{g}}\, d\lambda_{\pi^*\mathbf{g}} = 2\int_M K_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \chi(\widetilde{M}) = 2\chi(M),$$

la misma fórmula vale en $M$. Por consiguiente, $\displaystyle\int_M R\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 4\pi\chi(M)$. El volumen es constante por (21.86), lo que prueba (21.91). □

**Definición 21.7.3.** (Solitón de Ricci) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. Un *solitón de Ricci* en $M$ es una métrica $\mathbf{g}_0$ para la cual existen un campo vectorial suave $\mathbf{X}$ y una constante $\lambda$ tales que

$$\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_0} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{g}_0 = \lambda \mathbf{g}_0. \tag{21.92}$$

Se llama contractivo, estacionario o expansivo según $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ o $\lambda < 0$. Si $\mathbf{X} = \nabla^{\mathbf{g}_0} f$, la ecuación equivale a

$$\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_0} + \nabla^2 f = \lambda \mathbf{g}_0 \tag{21.93}$$

y se habla de un solitón gradiente.

**Proposición 21.7.4.** (Soluciones autosimilares) Sea $M$ una variedad suave cerrada y sea $(\mathbf{g}_0, \mathbf{X}, \lambda)$ un solitón de Ricci en $M$. Pongamos

$$\sigma(t) = 1 - 2\lambda t$$

y, mientras $\sigma(t) > 0$, sea $\varphi_t$ la familia de difeomorfismos generada por el campo dependiente del tiempo

$$\mathbf{Y}_t = \frac{1}{\sigma(t)}\mathbf{X}, \qquad \varphi_0 = \mathrm{id}_M. \tag{21.94}$$

Entonces

$$\mathbf{g}(t) = \sigma(t)\varphi_t^*\mathbf{g}_0 \tag{21.95}$$

es una solución del flujo de Ricci.

*Demostración.* La regla de derivación del pullback y $\sigma'(t) = -2\lambda$ dan

$$\partial_t \mathbf{g}(t) = -2\lambda\varphi_t^*\mathbf{g}_0 + \sigma(t)\varphi_t^*(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}_t}\mathbf{g}_0)$$

$$= \varphi_t^*(-2\lambda \mathbf{g}_0 + \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{g}_0)$$
$$= -2\varphi_t^* \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}_0},$$

donde la última igualdad es (21.92). Por la naturalidad de Ricci y su invariancia bajo reescalamientos constantes,

$$\operatorname{Ric}_{\sigma(t)\varphi_t^*\mathbf{g}_0} = \operatorname{Ric}_{\varphi_t^*\mathbf{g}_0} = \varphi_t^* \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}_0}.$$

Por lo tanto, $\partial_t \mathbf{g} = -2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$. □

Las métricas de Einstein son los solitones con $\mathbf{X} = 0$. Los solitones con $\mathbf{X} \neq 0$ incorporan además el movimiento por difeomorfismos que la ecuación geométrica no detecta en su símbolo principal. La Proposición 21.7.4 describe la combinación de ese movimiento con el reescalamiento.

# 22

# Compactación, singularidades y teoría de Perelman

Cuando la curvatura de un flujo de Ricci crece sin cota, la geometría relevante se concentra en regiones cuyo tamaño natural tiende a cero. Para observarlas se elige un punto de gran curvatura, se multiplica la métrica por esa escala y se reparametriza el tiempo. Si el volumen no colapsa y las derivadas de la curvatura permanecen controladas, una subsucesión de estos reescalamientos converge a un flujo completo que conserva la geometría de la singularidad a escala unitaria.

Ésta es la primera cadena de ideas del capítulo: estimaciones de Shi, radio de inyectividad y compactación de Hamilton. La segunda comienza con el calor conjugado y las cantidades monótonas de Perelman. Los funcionales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{W}$, la cantidad $\mu$ y el volumen reducido impiden que las regiones de curvatura controlada pierdan todo su volumen. En dimensión tres, el pinzamiento de Hamilton–Ivey convierte los límites de reescalamiento en soluciones antiguas de curvatura no negativa, las $\kappa$–soluciones.

La teoría de cirugía exige además una descripción uniforme de las regiones de gran curvatura, la solución estándar que se inserta después de cortar un cuello y un argumento inductivo que preserve el pinzamiento, el no colapso y las vecindades canónicas. Estudiaremos primero la parte analítica que conduce hasta los límites de singularidad. En la sección final formularemos con hipótesis precisas los teoremas estructurales de cirugía y extinción que se utilizan para concluir la Conjetura de Poincaré; seguiremos para estos resultados los Capítulos 12–19 de [104].

Perelman introdujo estas herramientas en sus trabajos de 2002 y 2003 [114, 116, 115]. La presentación se apoya también en las estimaciones de compactación y singularidad de [36] y con el enfoque entrópico de [154].

### Grisha Perelman y la geometría de las singularidades

La aportación de Perelman no consistió únicamente en continuar el flujo a través de una singularidad. Primero encontró cantidades que distinguen una dirección irreversible de la evolución; después utilizó el no colapso y la compactación para demostrar que, al ampliar una región de gran curvatura, sólo pueden aparecer modelos muy rígidos. La cirugía se apoya en esa rigidez: se corta donde la geometría es casi cilíndrica y se reemplaza la región singular por un casquete cuyo comportamiento puede controlarse. De esta manera, la singularidad deja de ser un punto donde termina el argumento y se convierte en una parte organizada de la

evolución.

En todo el capítulo la dimensión se denotará por $m$.

## 22.1 Convergencia suave apuntada

Una sucesión reescalada rara vez converge sobre toda la variedad original. La noción adecuada fija un punto base y exige convergencia suave únicamente en compactos cada vez mayores del espacio límite. Para flujos, las identificaciones espaciales deben ser independientes del tiempo, pues de otro modo la ecuación límite adquiriría términos de Lie adicionales.

**Definición 22.1.1.** (Convergencia suave apuntada) Una sucesión de variedades riemannianas completas y sin frontera apuntadas $(M_i, \mathbf{g}_i, p_i)$ *converge suavemente en sentido apuntado* a $(M_\infty, \mathbf{g}_\infty, p_\infty)$ si existe una exhaustión

$$p_\infty \in U_1 \Subset U_2 \Subset \cdots \Subset M_\infty, \qquad \bigcup_{a=1}^{\infty} U_a = M_\infty,$$

una sucesión de enteros $a_i \to \infty$ y encajes $\Phi_i \colon U_{a_i} \to M_i$. Para cada $a \in \mathbb{N}$ y cada $i$ con $a \le a_i$, denotamos sus restricciones por

$$\Phi_{i,a} \colon U_a \longrightarrow M_i, \qquad \Phi_{i,a}(p_\infty) = p_i,$$

tales que

$$\Phi_{i,a}^{*}\mathbf{g}_i \longrightarrow \mathbf{g}_\infty \quad \text{en } C^\infty(U_a).$$

Exigimos además que las imágenes agoten también las bolas apuntadas de los espacios aproximantes: para cada $R > 0$ existe $a(R)$ tal que, para todo $i$ suficientemente grande,

$$\overline{B_{\mathbf{g}_\infty}(p_\infty, R)} \subseteq U_{a(R)}, \qquad B_{\mathbf{g}_i}(p_i, R) \subseteq \Phi_{i,a(R)}(U_{a(R)}). \tag{22.1}$$

La notación $C^\infty(U_a)$ significa convergencia uniforme de cada derivada en cada compacto contenido en $U_a$. Como $\Phi_{i,a} = \Phi_i|_{U_a}$, las identificaciones son compatibles al restringir los dominios. Se trabaja en la componente conexa de cada punto base, y la variedad límite también se toma conexa y sin frontera.

**Definición 22.1.2.** (Convergencia apuntada de flujos) Sean $M_i$ y $M_\infty$ variedades suaves sin frontera y sean $\mathbf{g}_i(t)$ flujos de Ricci completos sobre $M_i$, definidos en un intervalo común $I$. Decimos que

$$(M_i, \mathbf{g}_i(t), p_i) \longrightarrow (M_\infty, \mathbf{g}_\infty(t), p_\infty)$$

suavemente sobre compactos espacio–temporales si los encajes de la definición anterior son independientes de $t$ y, para todo $J \Subset I$,

$$\Phi_{i,a}^{*}\mathbf{g}_i(t) \longrightarrow \mathbf{g}_\infty(t) \quad \text{en } C^\infty(U_a \times J).$$

Además, el agotamiento de las bolas se exige de manera uniforme en los intervalos temporales compactos: dados $J \Subset I$ y $R > 0$, puede elegirse $a = a(J, R)$ de modo que, para $i$ suficientemente grande y todo $t \in J$,

$$\overline{B_{\mathbf{g}_\infty(t)}(p_\infty, R)} \subseteq U_a, \qquad B_{\mathbf{g}_i(t)}(p_i, R) \subseteq \Phi_{i,a}(U_a). \tag{22.2}$$

**Lema 22.1.3.** (Paso al límite de la geometría) Sean $M_i$ y $M_\infty$ variedades suaves sin frontera y supongamos que $(M_i, \mathbf{g}_i(t), p_i)$ converge suavemente en sentido apuntado a $(M_\infty, \mathbf{g}_\infty(t), p_\infty)$. Entonces, sobre cada compacto identificado, convergen las conexiones de Levi–Civita, los tensores de Rm y Ric, las curvaturas escalares y todas sus derivadas covariantes. La convergencia también conmuta con productos tensoriales, contracciones y trazas. Si los $\mathbf{g}_i(t)$ son flujos de Ricci y la convergencia es espacio–temporal, el límite satisface $\partial_t \mathbf{g}_\infty = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_\infty}$.

*Demostración.* En una carta fija, los símbolos de Christoffel son funciones racionales suaves de $g_{ij}$, $g^{ij}$ y $\partial g_{ij}$. La curvatura y sus derivadas se obtienen iterando derivadas y productos de esos coeficientes. La convergencia $C^\infty$ permite pasar al límite en todas esas expresiones. Las operaciones tensoriales son continuas en cada espacio $C^k$ sobre compactos. Finalmente, la convergencia $C^\infty$ en la variable temporal permite pasar al límite en la ecuación del flujo. □

El radio de inyectividad evita que una cota de curvatura oculte un colapso.

**Lema 22.1.4.** (Volumen, curvatura y radio de inyectividad) Para cada $m \in \mathbb{N}$ y $v > 0$ existe $c = c(m, v) > 0$ con la propiedad siguiente. Si $(N^m, \mathbf{h})$ es una variedad riemanniana completa y sin frontera,

$$|\mathrm{Rm}_{\mathbf{h}}|_{\mathbf{h}} \le r^{-2} \quad \text{en } B_{\mathbf{h}}(x, r), \qquad \mathrm{Vol}_{\mathbf{h}}\, B_{\mathbf{h}}(x, r) \ge v r^m,$$

entonces $\mathrm{inj}_{\mathbf{h}}(x) \ge cr$.

La estimación anterior es local: sólo intervienen la geometría de la bola $B_{\mathbf{h}}(x, r)$ y la completitud de la métrica. Su demostración, basada en el lema de los lazos cortos y en la comparación del jacobiano exponencial, se encuentra en el Capítulo 1, sección *Local volume and the injectivity radius*, de [104].

**Lema 22.1.5.** (Propagación local del radio de inyectividad) Dados $m \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $\iota_0 > 0$ y $0 \le K < \infty$, existe $\iota = \iota(m, R, \iota_0, K) > 0$ con la propiedad siguiente. Si $(N^m, \mathbf{h}, p)$ es una variedad riemanniana completa y sin frontera,

$$\mathrm{inj}_{\mathbf{h}}(p) \ge \iota_0, \qquad |\mathrm{Rm}_{\mathbf{h}}|_{\mathbf{h}} \le K \quad \text{en } B_{\mathbf{h}}(p, 2R+2),$$

entonces

$$\mathrm{inj}_{\mathbf{h}}(x) \ge \iota \qquad \text{para todo } x \in B_{\mathbf{h}}(p, R).$$

*Demostración.* Después de aumentar $K$ por una constante que depende sólo de la dimensión, podemos suponer que

$$\mathrm{Sec}_{\mathbf{h}} \le K, \qquad \mathrm{Ric}_{\mathbf{h}} \ge -(m-1)K\mathbf{h}$$

en la bola indicada. Elegimos

$$0 < r_0 < \min\left\{\frac{\iota_0}{2}, 1, \frac{\pi}{4\sqrt{K+1}}\right\}.$$

El mapeo exponencial en $p$ es un difeomorfismo sobre la bola tangente de radio $2r_0$. El argumento local con campos de Jacobi usado en la prueba del Teorema 13.1.8, aplicado en esa bola, proporciona una constante $c_0 = c_0(m, K, r_0) > 0$ tal que

$$\mathrm{Vol}_{\mathbf{h}}\, B_{\mathbf{h}}(p, r_0) \ge c_0 r_0^m.$$

Sea $x \in B_{\mathbf{h}}(p,R)$. Como $B_{\mathbf{h}}(p,r_0) \subseteq B_{\mathbf{h}}(x,R+r_0)$, se tiene

$$\operatorname{Vol}_{\mathbf{h}} B_{\mathbf{h}}(x,R+r_0) \geq c_0 r_0^m.$$

Denotemos por $V_{-K}(s)$ el volumen de una bola de radio $s$ en el espacio simplemente conexo de curvatura seccional constante $-K$. La comparación relativa de Bishop–Gromov, válida porque $\operatorname{Ric}_{\mathbf{h}} \geq -(m-1)K\mathbf{h}$, da

$$\frac{\operatorname{Vol}_{\mathbf{h}} B_{\mathbf{h}}(x,\rho)}{V_{-K}(\rho)} \geq \frac{\operatorname{Vol}_{\mathbf{h}} B_{\mathbf{h}}(x,R+r_0)}{V_{-K}(R+r_0)}$$

para $0 < \rho \leq R+r_0$. Esta forma de la comparación puede consultarse en [104, Capítulo 1]. Tomamos

$$\rho := \min\{1, (K+1)^{-1/2}, R+r_0\}.$$

La estimación anterior implica

$$\operatorname{Vol}_{\mathbf{h}} B_{\mathbf{h}}(x,\rho) \geq v\rho^m$$

con $v = v(m,R,\iota_0,K) > 0$. Además, $B_{\mathbf{h}}(x,\rho) \subseteq B_{\mathbf{h}}(p,R+1)$ y $|\operatorname{Rm}_{\mathbf{h}}| \leq K \leq \rho^{-2}$ en esa bola. El Lema 22.1.4 proporciona

$$\operatorname{inj}_{\mathbf{h}}(x) \geq c(m,v)\rho.$$

La constante del miembro derecho no depende de $x$ ni de la variedad. □

La versión de las estimaciones de Shi demostrada en el capítulo anterior se formuló para variedades cerradas. Para la compactación necesitaremos la versión completa no compacta.

**Teorema 22.1.6.** (Estimaciones de Shi para flujos completos) Sea $(M^m, \mathbf{g}(t))$, $t \in [s_0, s_1]$, un flujo de Ricci completo y supongamos que

$$\sup_{t\in[s_0,s_1]} \|\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}(t)}\|_{L^\infty(M,\mathbf{g}(t))} \leq K < \infty.$$

Para cada $q \in \mathbb{N}$ y cada $\delta \in (0, s_1 - s_0]$ existe una constante $C_q = C_q(m,q,K,s_1-s_0,\delta) > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[s_0+\delta,s_1]} \|\nabla^q_{\mathbf{g}(t)} \operatorname{Rm}_{\mathbf{g}(t)}\|_{L^\infty(M,\mathbf{g}(t))} \leq C_q.$$

En particular, si $J \Subset I$ y existe $s < \min J$ tal que $[s, \max J] \subseteq I$, una cota uniforme de la curvatura en ese intervalo proporciona cotas uniformes de todas sus derivadas covariantes en $M \times J$.

Usaremos este teorema en su versión completa, demostrada mediante estimaciones locales en [104, Capítulo 3, Sección 7]. Las cantidades de Bernstein son las de la Proposición 21.5.3; la localización permite aplicar el principio del máximo en dominios compactos antes de hacer tender su radio a infinito. El margen temporal $\delta > 0$ es esencial: la constante puede diverger cuando $\delta \to 0^+$. En particular, una cota de curvatura sin cotas iniciales de sus derivadas sólo proporciona convergencia suave en tiempos posteriores al inicial.

Separaremos del argumento parabólico el teorema de compacidad para una sola métrica.

**Teorema 22.1.7.** (Compactación suave apuntada de Cheeger–Gromov) Sea $(M_i^m, \mathbf{h}_i, p_i)$ una sucesión de

variedades riemannianas completas y sin frontera. Supongamos que existe $\iota_0 > 0$ tal que

$$\operatorname{inj}_{\mathbf{h}_i}(p_i) \geq \iota_0 \qquad \text{para todo } i,$$

y que, para cada $R > 0$ y $q \in \mathbb{N}_0$, existe $C_{q,R} < \infty$ tal que

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \|\nabla^q_{\mathbf{h}_i} \operatorname{Rm}_{\mathbf{h}_i}\|_{L^\infty(B_{\mathbf{h}_i}(p_i,R),\mathbf{h}_i)} \leq C_{q,R}.$$

Entonces existe una variedad riemanniana completa y sin frontera $(M_\infty, \mathbf{h}_\infty, p_\infty)$ y una subsucesión que converge suavemente en sentido apuntado a ella. Los encajes de convergencia pueden elegirse compatibles sobre una exhaustión

$$p_\infty \in U_1 \Subset U_2 \Subset \cdots \Subset M_\infty$$

que satisface la propiedad de agotamiento de bolas (22.1).

*Demostración.* Podemos reemplazar cada $M_i$ por la componente conexa de $p_i$. Fijemos $R > 0$. La hipótesis con radio $2R+4$ y el Lema 22.1.5 proporcionan $\iota_R > 0$ tal que

$$\operatorname{inj}_{\mathbf{h}_i}(x) \geq \iota_R \qquad \big(x \in B_{\mathbf{h}_i}(p_i, R+1)\big)$$

para todo $i$. Las cotas de las derivadas de la curvatura en la bola de radio $R+2$, junto con la parte local de la prueba del Teorema 13.1.8, permiten elegir un radio $\rho_R > 0$, independiente de $i$ y del centro $x \in B_{\mathbf{h}_i}(p_i, R+1)$, tal que las coordenadas normales de radio $4\rho_R$ están definidas y, en ellas, los coeficientes de $\mathbf{h}_i$, de su inversa y todos sus jets están uniformemente acotados. Las mismas cotas valen para los cambios entre dos de estas cartas.

Elegimos en $B_{\mathbf{h}_i}(p_i, R)$ una red maximal de puntos separados por $\rho_R$. Las bolas de radio $\rho_R$ centradas en la red cubren la bola apuntada, mientras que las bolas concéntricas de radio $\rho_R/2$ son disjuntas. El argumento de Bishop–Gromov utilizado en el lema anterior proporciona una cota inferior uniforme para el volumen de cada una de estas bolas pequeñas. La cota de Ricci inferior proporciona, por la misma comparación, una cota superior uniforme para el volumen de $B_{\mathbf{h}_i}(p_i, R+1)$. Por consiguiente, el número de puntos de la red está acotado por una constante $N_R$ independiente de $i$. Obtenemos así, para cada $R$, un atlas finito con una cantidad uniformemente acotada de cartas, radio común y cotas uniformes de todos los jets de las métricas y de las transiciones.

Para convertir estos atlas uniformes en una variedad límite aplicamos el teorema de convergencia geométrica de [104, Teorema 5.6]. En el caso completo que estamos considerando, sus hipótesis son: un punto base no degenerado, cotas superiores de volumen en bolas de radio fijo, cotas de todas las derivadas de la curvatura en esas bolas y cotas inferiores de volumen a radios pequeños. La cota de inyectividad verifica la primera; la comparación de Bishop–Gromov y la construcción del párrafo anterior verifican la segunda y la cuarta; la tercera es nuestra hipótesis. La completitud garantiza además que las bolas cerradas de cada aproximante son compactas.

El teorema proporciona una variedad suave de Hausdorff $M_\infty$, una métrica $\mathbf{h}_\infty$, abiertos relativamente compactos $U_1 \Subset U_2 \Subset \cdots$ y, después de elegir una subsucesión, encajes $\Phi_i \colon U_{a_i} \to M_i$, con $a_i \to \infty$. Para

cada $a \in \mathbb{N}$, las restricciones $\Phi_{i,a} = \Phi_i|_{U_a}$ satisfacen

$$\Phi_{i,a}^{*}\mathbf{h}_i \longrightarrow \mathbf{h}_\infty \quad \text{en } C^\infty(U_a).$$

La parte topológica de ese teorema construye simultáneamente los dominios de las transiciones y los encajes; por ello también conserva el agotamiento de las bolas de los aproximantes. Es la forma completa de la compactación de Cheeger–Gromov formulada en [104, Teorema 5.9].
En la construcción citada, los atlas de radio $R+1$ cubren la bola $B_{\mathbf{h}_i}(p_i, R+1)$ antes de restringir las cartas. Reindexando la exhaustión, para cada $R \in \mathbb{N}$ y todo $i$ suficientemente grande se obtiene

$$\overline{B_{\mathbf{h}_\infty}(p_\infty, R)} \subseteq U_{R+1}, \qquad B_{\mathbf{h}_i}(p_i, R) \subseteq \Phi_{i,R+1}(U_{R+1}). \tag{22.3}$$

La segunda inclusión se obtiene conservando todas las cartas de la red que intersectan la bola de radio $R$; la unidad de margen permite restringir sus dominios sin dejar puntos de esa bola fuera de la imagen. Así se verifica (22.1). La primera inclusión muestra además que toda bola cerrada y acotada de $(M_\infty, \mathbf{h}_\infty)$ es compacta. El teorema de Hopf–Rinow implica que $\mathbf{h}_\infty$ es completa. □

La siguiente estimación compara las distintas rebanadas temporales de un flujo.

**Lema 22.1.8.** (Distorsión métrica y de distancias) Sea $(M, \mathbf{g}(t))$, $t \in J$, un flujo de Ricci y supongamos que

$$|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)} \le K \qquad \text{en } M \times J.$$

Para $s, t \in J$ se tiene

$$e^{-2K|t-s|}\mathbf{g}(s) \le \mathbf{g}(t) \le e^{2K|t-s|}\mathbf{g}(s), \tag{22.4}$$

y, si las distancias son finitas,

$$e^{-K|t-s|}d_{\mathbf{g}(s)}(x,y) \le d_{\mathbf{g}(t)}(x,y) \le e^{K|t-s|}d_{\mathbf{g}(s)}(x,y). \tag{22.5}$$

En particular,

$$B_{\mathbf{g}(s)}\big(x, e^{-K|t-s|}r\big) \subseteq B_{\mathbf{g}(t)}(x,r) \subseteq B_{\mathbf{g}(s)}\big(x, e^{K|t-s|}r\big). \tag{22.6}$$

Si una de las métricas $\mathbf{g}(s)$ es completa, todas las métricas de la familia son completas.

*Demostración.* Fijemos $v \in T_xM \setminus \{0\}$. Como $\partial_t \mathbf{g} = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}$,

$$\left|\frac{d}{dt}\log \mathbf{g}(t)(v,v)\right| = 2\frac{|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}(v,v)|}{\mathbf{g}(t)(v,v)} \le 2K.$$

Al integrar entre $s$ y $t$ se obtiene

$$-2K|t-s| \le \log \frac{\mathbf{g}(t)_x(v,v)}{\mathbf{g}(s)_x(v,v)} \le 2K|t-s|.$$

La función exponencial es creciente. Al aplicarla y multiplicar por $\mathbf{g}(s)_x(v,v) > 0$, resulta

$$e^{-2K|t-s|}\mathbf{g}(s)_x(v,v) \le \mathbf{g}(t)_x(v,v) \le e^{2K|t-s|}\mathbf{g}(s)_x(v,v).$$

Para $v = 0$ también se cumple la desigualdad. Puesto que las constantes no dependen de $x$ ni de $v$, esto es precisamente (22.4) con la interpretación de la Definición 2.1.5.
Tomar raíces cuadradas da

$$e^{-K|t-s|}|v|_{\mathbf{g}(s)} \le |v|_{\mathbf{g}(t)} \le e^{K|t-s|}|v|_{\mathbf{g}(s)}.$$

Para una curva suave a trozos $\gamma\colon [a,b] \to M$ aplicamos esta cota a $v = \dot\gamma(r)$ en cada tramo suave e integramos respecto de $r$. La identidad $L_{\mathbf{g}(t)}(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(r)|_{\mathbf{g}(t)}\, dr$ produce

$$e^{-K|t-s|}L_{\mathbf{g}(s)}(\gamma) \le L_{\mathbf{g}(t)}(\gamma) \le e^{K|t-s|}L_{\mathbf{g}(s)}(\gamma).$$

Tomando el ínfimo sobre las curvas que unen $x$ con $y$ se obtiene (22.5); las inclusiones de bolas son una consecuencia inmediata.
Supongamos que $\mathbf{g}(s)$ es completa. Una sucesión de Cauchy para $d_{\mathbf{g}(t)}$ es de Cauchy para $d_{\mathbf{g}(s)}$ por (22.5), y por lo tanto converge respecto de $d_{\mathbf{g}(s)}$. Las dos distancias inducen la misma topología y la segunda desigualdad de (22.5) da la convergencia respecto de $d_{\mathbf{g}(t)}$. Así, $\mathbf{g}(t)$ es completa. □

También necesitaremos convertir las cotas covariantes de Shi en cotas de los coeficientes respecto de coordenadas que no dependan del tiempo.

**Lema 22.1.9.** (Control respecto de una conexión de referencia) Sea $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo compacto que contiene a 0 y sean $\mathbf{g}_i(t)$ flujos de Ricci definidos en abiertos $V_i$, con $\mathbf{h}_i := \mathbf{g}_i(0)$. Supongamos que las métricas $\mathbf{h}_i$ poseen, en cartas fijadas sobre $V_i$, cotas uniformes de todos los jets de sus coeficientes y de sus inversas. Supongamos además que, para cada $q \in \mathbb{N}_0$, existe $C_q$ tal que

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{t\in J} \|\nabla^q_{\mathbf{g}_i(t)} \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_i(t)}\|_{L^\infty(V_i,\mathbf{g}_i(t))} \le C_q.$$

Entonces, en cada subdominio coordenado cuya cerradura esté contenida en las cartas fijadas, todos los coeficientes de $\mathbf{g}_i(t)$ y de $\mathbf{g}_i(t)^{-1}$, así como todas sus derivadas espaciales y temporales, están uniformemente acotados en $J$.

*Demostración.* La cota de orden cero para la curvatura da $|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_i(t)}|_{\mathbf{g}_i(t)} \le K := \sqrt{m}\, C_0$ para todos los índices y tiempos. Como $0 \in J$, el Lema 22.1.8 implica, con $Q = e^{2K \operatorname{diam} J}$,

$$Q^{-1}(\mathbf{h}_i)_x(v,v) \le \mathbf{g}_i(t)_x(v,v) \le Q(\mathbf{h}_i)_x(v,v) \qquad (i \in \mathbb{N},\ t \in J,\ x \in V_i,\ v \in T_xV_i).$$

Por la Proposición 7.1.9, las normas de un mismo tensor de tipo fijo son comparables con constantes independientes de $i, x, t$. Esta conclusión permite cambiar la métrica usada en una cota tensorial; para cambiar las derivadas covariantes estudiaremos la diferencia de conexiones. Sean $\nabla^i(t)$ y $\nabla^{i,0}$ sus conexiones de Levi–Civita y pongamos

$$\mathbf{A}_i(t) := \nabla^i(t) - \nabla^{i,0}.$$

Entonces $\mathbf{A}_i(0) = 0$ y la identidad (21.37) toma la forma

$$\partial_t \mathbf{A}_i = -\mathbf{g}_i(t)^{-1} * \nabla^i(t)\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_i(t)}. \tag{22.7}$$

Además,

$$\nabla^{i,0}\mathbf{T} = \nabla^i(t)\mathbf{T} + \mathbf{A}_i * \mathbf{T}, \qquad \nabla^{i,0}\mathbf{g}_i(t) = \mathbf{A}_i * \mathbf{g}_i(t). \tag{22.8}$$

Escribamos $D_i = \nabla^{i,0}$ y $\nabla_i = \nabla^i(t)$. La diferencia de conexiones actúa en cada lugar tensorial como en el Capítulo 9. Aplicaremos la fórmula ya demostrada en (21.77): para todo entero $r \geq 1$,

$$D_i^r\mathbf{T} = \nabla_i^r\mathbf{T} + \sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{C}_{i,r,j} * \nabla_i^j\mathbf{T}. \tag{22.9}$$

Cada coeficiente $\mathbf{C}_{i,r,j}$ es una suma finita de productos de $D_i^b\mathbf{A}_i$ con $b \in \{0,\dots,r-j-1\}$; la cantidad de términos sólo depende de $r$, de la dimensión y del tipo de $\mathbf{T}$. La regla de Leibniz de la Proposición 9.1.40 y las estimaciones de contracciones del capítulo de haces permiten acotar esos productos con las normas de sus factores.

La inducción empieza en $r = 0$. La evolución de $\mathbf{A}_i$ y la cota de $\nabla_i \mathrm{Ric}$ dan $\|\partial_t\mathbf{A}_i(t)\|_{L^\infty(V_i,T^{(1,2)}(TV_i);\mathbf{h}_i)} \leq C$. Integrando desde 0, y usando $\mathbf{A}_i(0) = 0$, obtenemos $\|\mathbf{A}_i(t)\|_{L^\infty(V_i,T^{(1,2)}(TV_i);\mathbf{h}_i)} \leq C|J|$.

Sea ahora $r \geq 1$ y supongamos acotadas, uniformemente en $i$ y en $t \in J$, las derivadas $D_i^b\mathbf{A}_i$ para $b \in \{0,\dots,r-1\}$. Definamos $\mathbf{F}_i = \partial_t\mathbf{A}_i$. La ecuación (22.7) expresa $\mathbf{F}_i$ como contracciones de $\mathbf{g}_i^{-1}$ y $\nabla_i \mathrm{Ric}$. Puesto que $\nabla_i\mathbf{g}_i = 0$, para cada $j \in \{0,\dots,r\}$, $\nabla_i^j\mathbf{F}_i$ sólo contiene derivadas de Ricci de orden $j+1$, contraídas con la métrica inversa. Todas están acotadas por la hipótesis de curvatura. Aplicando (22.9) a $\mathbf{T} = \mathbf{F}_i$, los coeficientes adicionales sólo contienen derivadas de $\mathbf{A}_i$ de orden a lo más $r-1$. Por la hipótesis inductiva,

$$\|\partial_t D_i^r\mathbf{A}_i(t)\|_{L^\infty(V_i,T^{(1,r+2)}(TV_i);\mathbf{h}_i)} = \|D_i^r\mathbf{F}_i(t)\|_{L^\infty(V_i,T^{(1,r+2)}(TV_i);\mathbf{h}_i)} \leq C_r, \qquad i \in \mathbb{N}, \quad t \in J.$$

Como $D_i^r\mathbf{A}_i(0) = 0$, la integración, hacia cualquiera de los dos extremos de $J$, da $\|D_i^r\mathbf{A}_i(t)\|_{L^\infty(V_i,T^{(1,r+2)}(TV_i);\mathbf{h}_i)} \leq C_r|J|$. Esto prueba el paso de $r-1$ a $r$ sin introducir una derivada de $\mathbf{A}_i$ de orden superior al que se controla.

Aplicamos ahora (22.9) a $\mathbf{T} = \mathbf{g}_i$ y a $\mathbf{T} = \mathbf{g}_i^{-1}$. Todas sus derivadas respecto de $\nabla_i$ de orden positivo son cero. Por tanto, $D_i^r\mathbf{g}_i$ y $D_i^r\mathbf{g}_i^{-1}$ se expresan mediante $\mathbf{C}_{i,r,0}$ y tensores de orden cero ya acotados. La expresión local de las derivadas covariantes de orden superior del Lema 9.1.28, aplicada a la conexión fija $D_i$, convierte estas cotas en cotas de derivadas coordenadas. Sus coeficientes son uniformes porque los jets de $\mathbf{h}_i$ y de $\mathbf{h}_i^{-1}$ lo son por hipótesis.

Para las derivadas temporales usamos la expresión coordenada de Ricci: es una suma finita de productos de coeficientes de $\mathbf{g}_i^{-1}$, primeras derivadas de $\mathbf{g}_i$ y segundas derivadas de $\mathbf{g}_i$. Supongamos controladas todas las derivadas espaciales de $\partial_t^b\mathbf{g}_i$ y $\partial_t^b\mathbf{g}_i^{-1}$ para $b \in \{0,\dots,a\}$. Al aplicar $\partial_t^a$ a $\partial_t\mathbf{g}_i = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_i}$, cada producto de $d$ factores se deriva mediante

$$\partial_t^a(F_1\cdots F_d) = \sum_{\substack{(b_1,\dots,b_d)\in\mathbb{N}_0^d \\ b_1+\cdots+b_d=a}} \frac{a!}{b_1!\cdots b_d!}(\partial_t^{b_1}F_1)\cdots(\partial_t^{b_d}F_d).$$

Todos los índices temporales del miembro derecho son a lo más $a$. La hipótesis inductiva acota así todas las derivadas espaciales de $\partial_t^{a+1}\mathbf{g}_i$. Derivando la identidad matricial $\mathbf{g}_i^{-1}\mathbf{g}_i = I$ obtenemos después

$$\partial_t^{a+1}\mathbf{g}_i^{-1} = -\sum_{b=0}^{a}\binom{a+1}{b}(\partial_t^b\mathbf{g}_i^{-1})(\partial_t^{a+1-b}\mathbf{g}_i)\mathbf{g}_i^{-1}.$$

También aquí todos los factores están controlados, incluso después de aplicar derivadas espaciales. El caso inicial $a = 0$ es el control espacial ya probado. Quedan establecidas las cotas de todos los órdenes mixtos. □

**Teorema 22.1.10.** (Compactación de Hamilton) Sean $M_i$ variedades suaves sin frontera de dimensión $m$ y sean $(M_i, \mathbf{g}_i(t), p_i)$ flujos de Ricci completos, definidos en un intervalo común $I$, abierto por la izquierda, con $0 \in I$ y $\inf I < 0$. Se permite que $I$ contenga su extremo derecho, en particular $I = (a, 0]$ con $-\infty \le a < 0$. En este enunciado, $J \Subset I$ denota un intervalo compacto contenido en $I$; puede incluir el extremo derecho si éste pertenece a $I$. Supongamos

$$\operatorname{inj}_{\mathbf{g}_i(0)}(p_i) \ge \iota_0 > 0.$$

Supongamos además que, para todo $J \Subset I$, existe $C(J) < \infty$ tal que

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{t\in J} \|\operatorname{Rm}_{\mathbf{g}_i(t)}\|_{L^\infty(M_i,\mathbf{g}_i(t))} \le C(J).$$

Entonces una subsucesión converge suavemente, en sentido apuntado y sobre compactos espacio–temporales, a un flujo de Ricci completo

$$(M_\infty, \mathbf{g}_\infty(t), p_\infty), \qquad t \in I,$$

donde $M_\infty$ es una variedad suave sin frontera y $\mathbf{g}_\infty(t)$ es completa para cada $t$.

*Demostración.* Pongamos $\mathbf{h}_i := \mathbf{g}_i(0)$. Primero extraeremos un límite de las rebanadas temporales en $t = 0$. Fijemos $q \in \mathbb{N}_0$ y elijamos $s < 0$ con $[s, 0] \subseteq I$. La hipótesis proporciona una cota uniforme de la curvatura en $M_i \times [s, 0]$. Si $q \ge 1$, aplicamos el Teorema 22.1.6 al flujo trasladado que comienza en $s$ y evaluamos en $t = 0$; para $q = 0$ usamos directamente la hipótesis. Obtenemos una constante $C_q$, independiente de $i$, tal que

$$\|\nabla^q_{\mathbf{h}_i} \operatorname{Rm}_{\mathbf{h}_i}\|_{L^\infty(M_i,\mathbf{h}_i)} \le C_q, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Junto con la cota del radio de inyectividad en $p_i$, estas estimaciones verifican las hipótesis del Teorema 22.1.7. Después de pasar a una subsucesión, existen una variedad riemanniana completa $(M_\infty, \mathbf{h}_\infty, p_\infty)$, una exhaustión

$$p_\infty \in U_1 \Subset U_2 \Subset \cdots \Subset M_\infty$$

y encajes compatibles

$$\Phi_{i,a} \colon U_a \longrightarrow M_i, \qquad \Phi_{i,a}(p_\infty) = p_i,$$

tales que

$$\Phi^*_{i,a}\mathbf{h}_i \longrightarrow \mathbf{h}_\infty \quad \text{en } C^\infty(U_a). \tag{22.10}$$

Fijemos ahora $a \in \mathbb{N}$, un compacto $K \Subset U_a$ y un intervalo compacto $J \Subset I$. Sea $\widetilde{J} \Subset I$ un intervalo compacto que contiene a $J \cup \{0\}$. Elegimos $s < \min \widetilde{J}$ de modo que $[s, \max \widetilde{J}] \subseteq I$. La cota de curvatura en ese intervalo y el Teorema 22.1.6 proporcionan, para todo $q \in \mathbb{N}_0$, constantes $C_{q,\widetilde{J}}$ tales que

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\widetilde{J}} \|\nabla^q_{\mathbf{g}_i(t)} \operatorname{Rm}_{\mathbf{g}_i(t)}\|_{L^\infty(M_i,\mathbf{g}_i(t))} \le C_{q,\widetilde{J}}. \tag{22.11}$$

Consideremos en $U_a$ las métricas

$$\widehat{\mathbf{g}}_{i,a}(t) := \Phi_{i,a}^{*}\mathbf{g}_i(t), \qquad \widehat{\mathbf{h}}_{i,a} := \widehat{\mathbf{g}}_{i,a}(0).$$

Por (22.10), en cualquier atlas finito que cubra $K$, los coeficientes de $\widehat{\mathbf{h}}_{i,a}$ y de sus inversas poseen cotas uniformes de todos los órdenes. Las estimaciones (22.11) se conservan por pullback. El Lema 22.1.9, aplicado en $\widetilde{J}$, muestra entonces que, en $K \times J$, todos los coeficientes de $\widehat{\mathbf{g}}_{i,a}(t)$ y todas sus derivadas espaciales y temporales están uniformemente acotados. La distorsión métrica garantiza, además, una cota uniforme inferior de esos tensores positivos definidos.

Tomamos exhaustiones de cada $U_a$ por compactos y de $I$ por intervalos compactos. El teorema de Arzelà–Ascoli, aplicado sucesivamente a todas las derivadas de los coeficientes en una cantidad finita de cartas, y un argumento diagonal proporcionan una subsucesión para la cual

$$\Phi_{i,a}^{*}\mathbf{g}_i(t) \longrightarrow \mathbf{g}_\infty(t) \quad \text{en } C^\infty(K \times J) \tag{22.12}$$

para todo $a$, todo $K \Subset U_a$ y todo $J \Subset I$. La compatibilidad de los encajes $\Phi_{i,a}$ hace que los límites obtenidos en $U_a$ y $U_{a+1}$ coincidan sobre $U_a$; por ello definen una familia global de métricas suaves $\mathbf{g}_\infty(t)$ en $M_\infty$. En $t = 0$, la identidad (22.10) da $\mathbf{g}_\infty(0) = \mathbf{h}_\infty$. El Lema 22.1.3, aplicado a (22.12), muestra que

$$\partial_t \mathbf{g}_\infty(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_\infty(t)}.$$

Verifiquemos también el agotamiento uniforme de las bolas. Fijemos $J \Subset I$ y $R > 0$. Sea $\widehat{J}$ el intervalo compacto que une $J$ con $0$. La cota de curvatura en $M_i \times \widehat{J}$ acota $|\mathrm{Ric}|$ por una constante $K_J$ independiente de $i$. Por (22.5), para todo $t \in J$,

$$B_{\mathbf{g}_i(t)}(p_i, R) \subseteq B_{\mathbf{h}_i}(p_i, e^{K_J|t|}R).$$

La propiedad de agotamiento del límite estático permite elegir un mismo $U_a$ cuya imagen contenga las bolas del miembro derecho para todos $t \in J$. Al pasar al límite, la desigualdad análoga entre $\mathbf{g}_\infty(t)$ y $\mathbf{h}_\infty$ muestra que el mismo $U_a$ contiene $\overline{B_{\mathbf{g}_\infty(t)}(p_\infty, R)}$. Se cumple así (22.2), y queda establecida la convergencia suave apuntada sobre compactos espacio–temporales.

Resta probar la completitud de cada rebanada. Fijemos $t \in I$ y elijamos un intervalo compacto $J \Subset I$ que contenga a $0$ y a $t$. La cota de curvatura proporciona $K_J < \infty$ tal que

$$|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_i(\rho)}|_{\mathbf{g}_i(\rho)} \le K_J \qquad ((x,\rho) \in M_i \times J)$$

para todo $i$. Por el Lema 22.1.8,

$$e^{-2K_J|t|}\mathbf{h}_i \le \mathbf{g}_i(t) \le e^{2K_J|t|}\mathbf{h}_i.$$

Hacemos pullback mediante $\Phi_{i,a}$ y pasamos al límite. Como los $U_a$ cubren $M_\infty$, resulta

$$e^{-2K_J|t|}\mathbf{h}_\infty \le \mathbf{g}_\infty(t) \le e^{2K_J|t|}\mathbf{h}_\infty \quad \text{en } M_\infty.$$

La métrica $\mathbf{h}_\infty$ es completa por el teorema de compactación estática; la última afirmación del Lema 22.1.8 implica que $\mathbf{g}_\infty(t)$ también es completa. $\square$

## 22.2 Reescalamientos y modelos de singularidad

La compactación anterior se vuelve útil después de elegir la escala correcta. En un punto donde $|\mathrm{Rm}| = Q$, la métrica $Q\mathbf{g}$ hace que la curvatura tenga tamaño uno. El tiempo debe multiplicarse por el mismo factor para conservar la ecuación de Ricci. Las siguientes fórmulas fijan todas las convenciones que se usarán en los límites de singularidad.

**Definición 22.2.1.** (Tipos temporales de solución) Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\mathbf{g}(t)$ una solución del flujo de Ricci sobre $M$. Para un problema con dato inicial en $t = 0$, la solución es *maximal hacia adelante* si no admite una prolongación suave más allá de su extremo temporal derecho. Éste es el sentido de maximalidad que usaremos para flujos en $[0, T)$. Independientemente de esa propiedad, una solución se llama *antigua* si su intervalo temporal tiene extremo izquierdo $-\infty$, por ejemplo $(-\infty, T]$; *eterna* si está definida en $\mathbb{R}$ e *inmortal* si lo está en $[0, \infty)$. Un *modelo límite de reescalamiento* es un límite suave apuntado no plano de reescalamientos parabólicos alrededor de puntos cuya curvatura tiende a infinito.

Supongamos que el flujo original está definido en $[0, T)$. Sean $(x_i, t_i) \in M \times [0, T)$, con $i \in \mathbb{N}$, y pongamos

$$Q_i := |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t_i)}|_{\mathbf{g}(t_i)}(x_i) > 0.$$

El reescalamiento parabólico centrado en $(x_i, t_i)$ es

$$\mathbf{g}_i(s) := Q_i\, \mathbf{g}\Big(t_i + \frac{s}{Q_i}\Big), \qquad s \in \big[-Q_i t_i, Q_i(T - t_i)\big). \tag{22.13}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}_0$, las leyes de escala son

$$\begin{aligned}
s &= Q_i(t - t_i), & \mathbf{g}_i &= Q_i \mathbf{g}, & d_{\mathbf{g}_i} &= Q_i^{1/2} d_{\mathbf{g}},\\
d\lambda_{\mathbf{g}_i} &= Q_i^{m/2} d\lambda_{\mathbf{g}}, & \mathrm{inj}_{\mathbf{g}_i} &= Q_i^{1/2}\, \mathrm{inj}_{\mathbf{g}}, & R_{\mathbf{g}_i} &= Q_i^{-1} R_{\mathbf{g}},\\
\mathrm{Rm}^{(1,3)}_{\mathbf{g}_i} &= \mathrm{Rm}^{(1,3)}_{\mathbf{g}}, & \mathrm{Rm}^{(0,4)}_{\mathbf{g}_i} &= Q_i\, \mathrm{Rm}^{(0,4)}_{\mathbf{g}}, & \mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_i} &= \mathrm{Ric}_{\mathbf{g}},\\
|\nabla^q_{\mathbf{g}_i(s)} \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_i(s)}|_{\mathbf{g}_i(s)} &= Q_i^{-1-q/2} |\nabla^q_{\mathbf{g}(t_i + s/Q_i)} \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t_i+s/Q_i)}|_{\mathbf{g}(t_i+s/Q_i)}.
\end{aligned} \tag{22.14}$$

En particular, $|\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_i(0)}|_{\mathbf{g}_i(0)}(x_i) = 1$. Además,

$$\partial_s \mathbf{g}_i = Q_i \frac{1}{Q_i} \partial_t \mathbf{g}\Big(t_i + \frac{s}{Q_i}\Big) = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t_i+s/Q_i)} = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_i},$$

de modo que el flujo es invariante.

La selección de puntos no puede ser arbitraria. Si

$$Q_i = |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t_i)}|_{\mathbf{g}(t_i)}(x_i) = \max_{(x,t) \in M \times [0, t_i]} |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)}(x), \qquad t_i \nearrow T, \tag{22.15}$$

entonces

$$|\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_i(s)}|_{\mathbf{g}_i(s)} \le 1 \quad \text{para } -Q_i t_i \le s \le 0, \qquad |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_i(0)}|_{\mathbf{g}_i(0)}(x_i) = 1.$$

Las estimaciones de Shi controlan todas las derivadas en subintervalos compactos de $(-\infty, 0]$. Falta todavía una cota inferior del radio de inyectividad; la obtendremos del no colapso de Perelman. La compactación de Hamilton

producirá entonces una solución antigua completa y no plana.

## 22.3 Calor con métrica dependiente del tiempo

Las cantidades monótonas de Perelman se construyen acoplando el flujo de Ricci con una ecuación de calor que corre hacia atrás. Como la medida riemanniana también depende del tiempo, el adjunto espacio–temporal no es $-\partial_t - \Delta$; aparece un término de curvatura escalar que compensa la variación del volumen.

Para un flujo de Ricci definimos

$$\Box := \partial_t - \Delta_{\mathbf{g}(t)}.$$

La evolución de la medida, demostrada en (21.36), es $\partial_t d\lambda_{\mathbf{g}(t)} = -R_{\mathbf{g}(t)}\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)}$.

**Proposición 22.3.1.** (Adjunto espacio–temporal) Si $u, v$ son suaves y $M$ es cerrada, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_M v\,\Box u\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)}dt = \Big[\int_M uv\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)}\Big]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_M u\,\Box^* v\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)}dt, \tag{22.16}$$

donde

$$\Box^* := -\partial_t - \Delta_{\mathbf{g}(t)} + R_{\mathbf{g}(t)}. \tag{22.17}$$

Por lo tanto, la ecuación conjugada es

$$\Box^* u = 0, \qquad \partial_t u = -\Delta_{\mathbf{g}(t)} u + R_{\mathbf{g}(t)} u.$$

Toda solución positiva de esta ecuación conserva $\int_M u\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)}$.

*Demostración.* Derivando el apareamiento temporal se obtiene

$$\frac{d}{dt}\int_M uv\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)} = \int_M \big(u_t v + u v_t - R_{\mathbf{g}(t)} uv\big)\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)}.$$

La autoadjunción espacial de $\Delta_{\mathbf{g}(t)}$ y una integración temporal dan (22.16). Si $\Box^* u = 0$, entonces

$$\frac{d}{dt}\int_M u\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)} = \int_M \big(-\Delta_{\mathbf{g}(t)} u + R_{\mathbf{g}(t)} u - R_{\mathbf{g}(t)} u\big)\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)} = 0.$$

□

La dependencia temporal impide utilizar un semigrupo autónomo. Para $s \le t$ escribimos $U(t,s)$ para el propagador de $\partial_t u = \Delta_{\mathbf{g}(t)} u$. Satisface

$$U(t,r)U(r,s) = U(t,s), \qquad s \le r \le t,$$

pero no depende sólo de $t - s$. Su núcleo de dos tiempos $H(x,t;y,s)$ satisface la misma ley de composición integrando en la rebanada intermedia. El adjunto de $U(t,s)$ propaga hacia atrás mediante $\Box^*$; en general no existe simetría al intercambiar simultáneamente $(x,t)$ y $(y,s)$. La construcción se obtiene aplicando la teoría parabólica del Capítulo 20 en intervalos cortos y componiendo los operadores de evolución.

## 22.4 El funcional $\mathcal{F}$

La descripción variacional de Perelman considera simultáneamente una métrica y una densidad. La función auxiliar $f$ permite fijar la medida ponderada e introducir una energía cuya derivada a lo largo del flujo es un cuadrado.

Sea $M$ cerrada. Para $f \in C^\infty(M)$ definimos

$$\mathcal{F}(\mathbf{g}, f) := \int_M \left(R_{\mathbf{g}} + |\nabla f|^2_{\mathbf{g}}\right) e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{22.18}$$

La normalización natural es $\int_M e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 1$.

Antes de derivar $\mathcal{F}$ reunimos las integraciones por partes que explican los términos de Hessiana que aparecerán.

**Lema 22.4.1.** (Integración por partes con la medida ponderada) Sea $M$ una variedad suave cerrada, sea $f \in C^\infty(M)$ y sea $\mathbf{h}$ un tensor simétrico covariante de orden dos. Entonces

$$\int_M \operatorname{div}^2_{\mathbf{g}} \mathbf{h}\, e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \left[-\langle \mathbf{h}, \nabla^2_{\mathbf{g}} f\rangle_{\mathbf{g}} + \mathbf{h}(\nabla^{\mathbf{g}} f, \nabla^{\mathbf{g}} f)\right] e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \tag{22.19}$$

$$-\int_M \Delta_{\mathbf{g}}(\operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}) e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}\left(\Delta_{\mathbf{g}} f - |\nabla f|^2_{\mathbf{g}}\right) e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \tag{22.20}$$

$$2\int_M \langle \nabla^{\mathbf{g}} f, \nabla^{\mathbf{g}} \varphi\rangle_{\mathbf{g}} e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = -2\int_M \varphi\left(\Delta_{\mathbf{g}} f - |\nabla f|^2_{\mathbf{g}}\right) e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{22.21}$$

*Demostración.* Para la primera identidad integramos sucesivamente las dos divergencias:

$$\begin{aligned}\int_M \sum_{i,j=1}^m \nabla^i \nabla^j h_{ij}\, e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}} &= \int_M \sum_{i,j=1}^m (\nabla^j h_{ij}) \nabla^i f\, e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \\ &= -\int_M \sum_{i,j=1}^m h_{ij} \nabla^j (\nabla^i f\, e^{-f})\, d\lambda_{\mathbf{g}}.\end{aligned}$$

Como $\nabla^j(\nabla^i f\, e^{-f}) = (\nabla^2 f)^{ij} e^{-f} - \nabla^i f \nabla^j f\, e^{-f}$, se obtiene (22.19). Si $q = \operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}$, entonces

$$-\int_M (\Delta_{\mathbf{g}} q) e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = -\int_M \langle \nabla q, \nabla f\rangle_{\mathbf{g}} e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Integrar la divergencia de $q e^{-f} \nabla^{\mathbf{g}} f$ da (22.20). La misma cuenta con $q = 2\varphi$ prueba (22.21). □

**Proposición 22.4.2.** (Primera variación de $\mathcal{F}$) Sea $M$ una variedad suave cerrada. Para una métrica $\mathbf{g}$, una función $f \in C^\infty(M)$ y variaciones $\mathbf{h} = \delta\mathbf{g}$, $\varphi = \delta f$, se tiene

$$D\mathcal{F}_{(\mathbf{g},f)}[\mathbf{h}, \varphi] = \int_M \left[-\langle \mathbf{h}, \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + \nabla^2_{\mathbf{g}} f\rangle_{\mathbf{g}} + \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h} - \varphi\right)\left(2\Delta_{\mathbf{g}} f - |\nabla f|^2_{\mathbf{g}} + R_{\mathbf{g}}\right)\right] e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{22.22}$$

*Demostración.* Las fórmulas de variación del capítulo anterior dan

$$\delta R_{\mathbf{g}} = -\langle \mathbf{h}, \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}\rangle_{\mathbf{g}} + \operatorname{div}^2_{\mathbf{g}} \mathbf{h} - \Delta_{\mathbf{g}} \operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h},$$

$$\delta|\nabla f|^2_{\mathbf{g}} = -\mathbf{h}(\nabla^{\mathbf{g}} f, \nabla^{\mathbf{g}} f) + 2\langle \nabla^{\mathbf{g}} f, \nabla^{\mathbf{g}} \varphi\rangle_{\mathbf{g}},$$
$$\delta(e^{-f} d\lambda_{\mathbf{g}}) = \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h} - \varphi\right) e^{-f} d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Al sustituir en (22.18), la suma de los términos que contienen derivadas de $\mathbf{h}$ se transforma, por (22.19) y (22.20), en

$$-\langle \mathbf{h}, \nabla^2 f\rangle + \mathbf{h}(\nabla f, \nabla f) + \operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}(\Delta f - |\nabla f|^2).$$

El segundo sumando cancela exactamente la variación de la métrica en $|\nabla f|^2$. Por (22.21), el término que contiene $\nabla\varphi$ se convierte en $-2\varphi(\Delta f - |\nabla f|^2)$. Al añadir la variación de la medida, los coeficientes de $\operatorname{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}$ y de $\varphi$ son, respectivamente,

$$\frac{1}{2}(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R), \qquad -(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R).$$

Esto prueba (22.22). □

**Teorema 22.4.3.** (Monotonía de $\mathcal{F}$) Sea $M$ una variedad suave cerrada y supongamos que

$$\partial_t \mathbf{g} = -2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)}, \qquad \partial_t f = -\Delta_{\mathbf{g}(t)} f + |\nabla f|^2_{\mathbf{g}(t)} - R_{\mathbf{g}(t)}. \tag{22.23}$$

Entonces $u = e^{-f}$ satisface $\Box^* u = 0$ y

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\mathbf{g}(t), f(t)) = 2\int_M |\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}(t)} + \nabla^2_{\mathbf{g}(t)} f|^2_{\mathbf{g}(t)} e^{-f}\, d\lambda_{\mathbf{g}(t)} \geq 0. \tag{22.24}$$

La igualdad en un intervalo caracteriza, módulo difeomorfismos, un solitón gradiente estacionario. En una variedad cerrada, tal solitón es Ricci–plano y $f$ es constante en cada componente conexa.

*Demostración.* La ecuación de $f$ implica

$$\partial_t(e^{-f}) = (\Delta f - |\nabla f|^2 + R)e^{-f} = -\Delta(e^{-f}) + Re^{-f},$$

de modo que $\Box^* u = 0$. Sean $\varphi_t$ los difeomorfismos generados por $-\nabla^{\mathbf{g}(t)} f$. Por la naturalidad de Ricci y de la Hessiana, el pullback de $(\mathbf{g}, f)$ satisface

$$\partial_t \mathbf{g} = -2(\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + \nabla^2_{\mathbf{g}} f), \qquad \partial_t f = -\Delta_{\mathbf{g}} f - R_{\mathbf{g}}.$$

En este calibre, $\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\partial_t \mathbf{g}) - \partial_t f = 0$; por tanto, la medida $e^{-f} d\lambda_{\mathbf{g}}$ permanece fija punto a punto. Aplicamos (22.22) con $\mathbf{h} = -2(\operatorname{Ric} + \nabla^2 f)$ y $\varphi = -\Delta f - R$. El segundo término de la variación se anula y el primero es el miembro derecho de (22.24). La invariancia de $\mathcal{F}$ bajo difeomorfismos devuelve la fórmula al flujo original. Si hay igualdad, entonces $\operatorname{Ric} + \nabla^2 f = 0$. Al trazar e integrar se obtiene $\displaystyle\int_M R\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0$. La naturalidad de la curvatura escalar y su ecuación de evolución dan

$$\Delta_f R := \Delta R - \langle \nabla f, \nabla R\rangle = -2|\operatorname{Ric}|^2.$$

La medida $e^{-f} d\lambda_{\mathbf{g}}$ hace simétrico a $\Delta_f$, y por ello la integral del miembro izquierdo es cero. Se concluye que $\operatorname{Ric} = 0$ y después $\nabla^2 f = 0$. Una función con Hessiana nula en una variedad cerrada es constante en cada

componente conexa. □

## 22.5 La entropía $\mathcal{W}$ y la cantidad $\mu$

El funcional $\mathcal{F}$ no es invariante bajo los reescalamientos parabólicos. La entropía $\mathcal{W}$ incorpora una escala temporal $\tau > 0$ y un término de entropía de Boltzmann de manera que toda la expresión permanezca invariante cuando $\mathbf{g}$ y $\tau$ se multiplican por la misma constante.

Sean

$$u = (4\pi\tau)^{-m/2} e^{-f}, \qquad \int_M u \, d\lambda_{\mathbf{g}} = 1,$$

y definamos

$$\mathcal{W}(\mathbf{g}, f, \tau) := \int_M \left[\tau(R_{\mathbf{g}} + |\nabla f|^2_{\mathbf{g}}) + f - m\right] u \, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{22.25}$$

**Lema 22.5.1.** (Entropía de Boltzmann y $\mathcal{F}$) Supongamos que $\mathbf{g}(t)$ resuelve el flujo de Ricci y que una función positiva $u$ satisface $\square^* u = 0$ y $\int_M u \, d\lambda_{\mathbf{g}(t)} = 1$. Si

$$\mathcal{B}(t) := \int_M u \log u \, d\lambda_{\mathbf{g}(t)}, \qquad \mathcal{F}(t) := \int_M \left(\frac{|\nabla u|^2}{u} + Ru\right) d\lambda_{\mathbf{g}(t)},$$

entonces $\mathcal{B}'(t) = \mathcal{F}(t)$.

*Demostración.* Usamos $u_t = -\Delta u + Ru$ y $\partial_t d\lambda_{\mathbf{g}} = -R \, d\lambda_{\mathbf{g}}$. La derivación bajo la integral da

$$\mathcal{B}'(t) = \int_M \left[u_t(1 + \log u) - Ru \log u\right] d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \left[-\Delta u(1 + \log u) + Ru\right] d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La integral de $\Delta u$ es cero y $-\int_M (\Delta u) \log u = \int_M |\nabla u|^2/u$. Esto prueba la identidad. □

**Teorema 22.5.2.** (Monotonía de $\mathcal{W}$) Sea $M^m$ una variedad suave cerrada. Supongamos que

$$\partial_t \mathbf{g} = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)}, \qquad \tau' = -1, \qquad \partial_t f = -\Delta_{\mathbf{g}(t)} f + |\nabla f|^2_{\mathbf{g}(t)} - R_{\mathbf{g}(t)} + \frac{m}{2\tau}, \tag{22.26}$$

y que $\tau(t) > 0$. Supongamos además que la densidad $u = (4\pi\tau)^{-m/2} e^{-f}$ tiene masa uno en algún tiempo del intervalo. Entonces $u$ resuelve $\square^* u = 0$, conserva esa normalización y

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(\mathbf{g}(t), f(t), \tau(t)) = 2\tau \int_M \left|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}(t)} + \nabla^2_{\mathbf{g}(t)} f - \frac{1}{2\tau}\mathbf{g}(t)\right|^2_{\mathbf{g}(t)} u \, d\lambda_{\mathbf{g}(t)} \geq 0. \tag{22.27}$$

La igualdad en un intervalo equivale a la ecuación de un solitón gradiente contractivo.

*Demostración.* De $\log u = -\frac{m}{2}\log(4\pi\tau) - f$ y (22.26) se obtiene $u_t = -\Delta u + Ru$. La masa se conserva por la Proposición 22.3.1.

Escribamos

$$\mathcal{F}_u(t) := \int_M (R + |\nabla f|^2) u \, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \mathcal{B}(t) := \int_M u \log u \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Como $u = (4\pi\tau)^{-m/2} e^{-f}$ y su masa es uno,

$$\mathcal{W} = \tau \mathcal{F}_u - \mathcal{B} - \frac{m}{2}\log(4\pi\tau) - m. \tag{22.28}$$

El Lema 22.5.1 da $\mathcal{B}' = \mathcal{F}_u$. Para calcular la derivada del primer término no aplicamos directamente el Teorema 22.4.3 a $f$, pues su ecuación contiene el sumando $m/(2\tau)$. Definimos

$$\widetilde{f} := f + \frac{m}{2}\log(4\pi\tau) = -\log u.$$

Como $\tau' = -1$, se tiene

$$\partial_t \widetilde{f} = -\Delta \widetilde{f} + |\nabla \widetilde{f}|^2 - R, \qquad e^{-\widetilde{f}} = u.$$

Además, $d\widetilde{f} = df$ y $\nabla^2 \widetilde{f} = \nabla^2 f$. Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}(\mathbf{g}, \widetilde{f}), \qquad \mathcal{F}_u' = 2\int_M |\mathrm{Ric} + \nabla^2 f|^2 u \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

por el Teorema 22.4.3. Al derivar (22.28) y usar $\tau' = -1$ resulta

$$\mathcal{W}' = 2\tau \int_M |\mathrm{Ric} + \nabla^2 f|^2 u \, d\lambda_{\mathbf{g}} - 2\mathcal{F}_u + \frac{m}{2\tau}. \tag{22.29}$$

La integración por partes ponderada da

$$\int_M (\Delta f) u \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M |\nabla f|^2 u \, d\lambda_{\mathbf{g}};$$

por consiguiente, $\mathcal{F}_u = \displaystyle\int_M (R + \Delta f) u = \int_M \mathrm{tr}_{\mathbf{g}}(\mathrm{Ric} + \nabla^2 f) u$. Si $\mathbf{A} = \mathrm{Ric} + \nabla^2 f$, entonces

$$2\tau \left| \mathbf{A} - \frac{1}{2\tau}\mathbf{g} \right|^2 = 2\tau |\mathbf{A}|^2 - 2\,\mathrm{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{A} + \frac{m}{2\tau}.$$

Integrar esta identidad y compararla con (22.29) prueba (22.27). La igualdad equivale a $\mathrm{Ric} + \nabla^2 f = \mathbf{g}/(2\tau)$. □

**Definición 22.5.3.** (La cantidad $\mu$) Sea $M^m$ una variedad suave cerrada, sea $\mathbf{g}$ una métrica riemanniana y sea $\tau > 0$. Ponemos

$$\mu(\mathbf{g}, \tau) := \inf \left\{ \mathcal{W}(\mathbf{g}, f, \tau) \,\middle|\, f \in C^\infty(M), \quad (4\pi\tau)^{-m/2} \int_M e^{-f} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = 1 \right\}. \tag{22.30}$$

**Lema 22.5.4.** (Principio fuerte para la no linealidad entrópica) Sea $\Omega$ un dominio conexo de una variedad riemanniana sin frontera y sea $w \in C^2(\Omega)$ no negativa. Supongamos que existe $s_0 > 0$ tal que, cuando $0 \le w \le s_0$,

$$\Delta w \le \beta(w), \qquad \beta(s) = C_0 s - C_1 s \log s^2, \quad C_1 > 0.$$

Entonces $w$ es idénticamente nula o es estrictamente positiva. La misma alternativa vale para una función no negativa $w \in W^{2,p_0}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con $p_0 > \max\{2, \dim \Omega\}$, tomando su representante de clase $C^1$, si la desigualdad

se cumple casi en todas partes en $\{0 \le w \le s_0\}$.

*Demostración.* Probemos primero la afirmación para $w \in C^2(\Omega)$. Prolongamos $\beta$ por $\beta(0) = 0$ y reducimos $s_0 > 0$ si es necesario. Así, $\beta$ es continua, no negativa y creciente en $[0, s_0]$, porque $\beta'(s) = C_0 - C_1(\log s^2 + 2) > 0$ para $s$ suficientemente pequeño. Podemos suponer además que $s_0 < 1$ y que $\beta$ es estrictamente creciente.
Supongamos que $w$ tiene un cero y un punto positivo. Por conexidad, el abierto $\{w > 0\}$ tiene un punto de frontera en $\Omega$. Tomamos un punto $p$ de ese abierto suficientemente próximo a su frontera y ponemos $R = d(p, \{w = 0\}) > 0$. Podemos elegirlo de modo que la bola cerrada $\overline{B(p,R)}$ esté contenida en una vecindad normal relativamente compacta de $\Omega$ y que $R$ sea menor que el radio de inyectividad en $p$. Existe entonces $q \in \partial B(p,R)$ con $w(q) = 0$, mientras que $w > 0$ en $B(p,R)$. La existencia de $q$ se obtiene minimizando la distancia en un compacto de esa vecindad; al elegir $p$ suficientemente cerca de la frontera, los puntos fuera de la vecindad están a distancia mayor que $R$.
La función $r(x) = d(p,x)$ es suave en el anillo $\mathcal{A} = \{R/2 < r < R\}$. Fijemos $C \ge 0$ tal que $\Delta r \le C$ en su cerradura y pongamos $L = R/2$. Para $0 < \epsilon < 1$, definimos

$$k_\epsilon = C + \sqrt{|C_0| + 2C_1|\log\epsilon| + 2\frac{C_1}{e} + 1}, \qquad z_\epsilon(t) = \epsilon(e^{k_\epsilon t} - 1), \quad 0 \le t \le L.$$

Como $k_\epsilon = O(\sqrt{|\log\epsilon|})$, $z_\epsilon(L) \to 0$ cuando $\epsilon \to 0^+$. Elegimos $\epsilon$ tan pequeño que

$$0 < z_\epsilon(L) < \min\left\{s_0, \min_{r=R/2} w\right\}.$$

Sea $\varphi(x) = z_\epsilon(R - r(x))$. En las dos componentes de $\partial\mathcal{A}$ se cumple $\varphi \le w$.
Verifiquemos la desigualdad diferencial para la barrera. Para $t > 0$, escribimos $y = e^{k_\epsilon t} - 1 > 0$. Como $\dfrac{y}{1+y}\max\{-\log y, 0\} \le 1/e$, resulta

$$\beta(z_\epsilon(t)) \le \epsilon e^{k_\epsilon t}\big(|C_0| + 2C_1|\log\epsilon| + 2C_1/e\big).$$

Por otro lado, $|dr| = 1$ y la elección de $k_\epsilon$ dan

$$\Delta\varphi = z_\epsilon''(R-r) - z_\epsilon'(R-r)\Delta r \ge \epsilon e^{k_\epsilon(R-r)}(k_\epsilon^2 - Ck_\epsilon) \ge \beta(\varphi).$$

Si $\varphi - w$ tuviera un máximo positivo en $\mathcal{A}$, en ese punto se cumpliría $0 \le w < \varphi < s_0$ y

$$0 \ge \Delta(\varphi - w) \ge \beta(\varphi) - \beta(w) > 0,$$

una contradicción. Por tanto $w \ge \varphi$ en el anillo. Sea $\gamma(t)$ la geodésica radial que parte de $q$ hacia $p$, parametrizada por longitud. Para $0 < t < L$ tenemos $w(\gamma(t)) \ge z_\epsilon(t)$ y ambas funciones valen cero en $t = 0$. Su derivada por la derecha satisface

$$dw_q(\dot\gamma(0)) \ge z_\epsilon'(0) = \epsilon k_\epsilon > 0.$$

Esto contradice $dw_q = 0$, pues $w \ge 0$ y $w(q) = 0$ en un punto interior de $\Omega$. Queda demostrada la alternativa.
Consideremos ahora $w \in W^{2,p_0}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con $p_0 > \max\{2, \dim\Omega\}$. El encaje local de Sobolev–Morrey, obtenido aplicando el Teorema 3.5.7 en cartas después de multiplicar por cortes, proporciona un representante de clase $C^1$. Supongamos de nuevo que $w$ tiene un cero y un punto positivo. La elección de la bola, del anillo

y de la barrera $\varphi$ sólo utiliza la continuidad de $w$ y sigue siendo válida. Para comparar $w$ con $\varphi$, ponemos $h := \varphi - w$ y, dado $\delta > 0$,

$$\psi_\delta := (h - \delta)_+.$$

Como $h \le 0$ en $\partial\mathcal{A}$, el soporte de $\psi_\delta$ está contenido en el compacto $\{x \in \overline{\mathcal{A}} \mid h(x) \ge \delta\} \subseteq \mathcal{A}$. La regla de la cadena del Teorema 9.1.49 da $\psi_\delta \in W^{1,2}(\mathcal{A})$ y

$$d\psi_\delta = \mathbf{1}_{\{h>\delta\}}\, dh \qquad \text{casi en todas partes.}$$

Podemos aproximar $\psi_\delta$ en $W^{1,2}$ por funciones suaves con soporte compacto en $\mathcal{A}$: aplicamos el Teorema 9.1.48 al haz trivial y multiplicamos las aproximaciones por un corte fijo de soporte compacto en $\mathcal{A}$ e igual a uno cerca del soporte de $\psi_\delta$. Además, $\Delta h \in L^{p_0}(\mathcal{A}) \subseteq L^2(\mathcal{A})$, porque $p_0 > 2$ y el anillo tiene volumen finito. Por ello la identidad débil de integración por partes admite $\psi_\delta$ como función de prueba. Donde $\psi_\delta > 0$ se tiene $0 \le w < \varphi < s_0$, y obtenemos

$$-\int_{\mathcal{A}} |d\psi_\delta|^2_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\mathcal{A}} (\Delta h)\psi_\delta\, d\lambda_{\mathbf{g}} \ge \int_{\mathcal{A}} \big(\beta(\varphi) - \beta(w)\big)\psi_\delta\, d\lambda_{\mathbf{g}} \ge 0.$$

El último integrando es estrictamente positivo donde $\psi_\delta > 0$. Así, ese conjunto tiene medida cero y, al ser abierto, es vacío. Resulta $h \le \delta$ para todo $\delta > 0$, de donde $w \ge \varphi$ en $\mathcal{A}$. La contradicción con $dw_q = 0$ se obtiene ahora mediante la misma geodésica radial, pues el representante de $w$ es de clase $C^1$. Esto demuestra la afirmación débil.

La barrera anterior realiza, para esta no linealidad, el criterio del principio fuerte de Vázquez [151]. En efecto, con $B(s) = \displaystyle\int_0^s \beta(r)\, dr$,

$$\int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{B(s)}} = \infty.$$

En nuestro caso la integración da $B(s) = (C_0 + C_1)\frac{s^2}{2} - C_1 s^2 \log s$. En consecuencia, $B(s) \le Cs^2(1 + |\log s|)$ cerca de cero. Al hacer $z = -\log s$, la integral que sirve de cota inferior es un múltiplo de $\displaystyle\int_{-\log s_0}^{\infty} (1+z)^{-1/2}\, dz$, que diverge. La divergencia explica por qué el término logarítmico todavía permite el principio fuerte, aunque $\beta(s)/s$ no esté acotado cerca de cero. □

**Proposición 22.5.5.** (Minimizadores e invariancias de $\mu$) En una variedad suave cerrada y conexa el ínfimo de (22.30) se alcanza en una función suave. Si

$$v = (4\pi\tau)^{-m/4} e^{-f/2}, \qquad \int_M v^2\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 1,$$

el minimizador puede elegirse positivo y satisface

$$-4\tau\Delta_{\mathbf{g}} v + \tau R_{\mathbf{g}} v - v\log v^2 - \frac{m}{2}\log(4\pi\tau)v - mv = \mu(\mathbf{g},\tau)v. \tag{22.31}$$

Equivalentemente,

$$2\tau\Delta_{\mathbf{g}} f - \tau|\nabla f|^2_{\mathbf{g}} + \tau R_{\mathbf{g}} + f - m = \mu(\mathbf{g},\tau). \tag{22.32}$$

Además, para todo difeomorfismo $\varphi$ y todo $c > 0$,

$$\mu(\varphi^*\mathbf{g}, \tau) = \mu(\mathbf{g}, \tau), \qquad \mu(c\mathbf{g}, c\tau) = \mu(\mathbf{g}, \tau). \tag{22.33}$$

*Demostración.* En la variable $v$, el problema consiste en minimizar

$$\mathcal{J}_{\mathbf{g},\tau}(v) := \int_M \left[4\tau|\nabla v|_{\mathbf{g}}^2 + \tau R_{\mathbf{g}} v^2 - v^2 \log v^2 - \frac{m}{2}\log(4\pi\tau)v^2 - mv^2\right] d\lambda_{\mathbf{g}} \tag{22.34}$$

sobre la esfera de $H^1(M)$ dada por $\|v\|_{L^2(M)} = 1$, con la convención $0 \log 0 = 0$. Esta ampliación del conjunto admisible no cambia el ínfimo. Para verlo, aproximamos $|v|$ en $H^1$ por funciones suaves no negativas, mediante el calor de la métrica fija; añadimos una constante positiva que tiende a cero y normalizamos en $L^2$. Obtenemos funciones suaves estrictamente positivas que convergen a $|v|$ en $H^1$. Por los encajes de Sobolev también convergen en algún $L^q$ con $q > 2$. La estimación de potencias que se detalla a continuación y el teorema de Vitali dan la convergencia de sus términos entrópicos. Los términos cuadráticos convergen directamente. Por último, $\mathcal{J}(|v|) = \mathcal{J}(v)$, pues $|d|v|| = |dv|$ casi en todas partes para funciones reales de $H^1$.
Fijemos $q > 2$ para el cual $H^1(M) \hookrightarrow L^q(M)$ sea continuo. La desigualdad de Jensen, aplicada a la medida de probabilidad $v^2 d\lambda_{\mathbf{g}}$, da

$$\int_M v^2 \log v^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} \le \frac{2q}{q-2} \log \|v\|_{L^q(M)}.$$

El encaje de Sobolev y la desigualdad $\log(1 + a) \le \varepsilon a^2 + C_\varepsilon$ implican, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\int_M v^2 \log v^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} \le \varepsilon \|dv\|_{L^2(M,T^*M)}^2 + C_\varepsilon \qquad (\|v\|_{L^2(M)} = 1). \tag{22.35}$$

Tomando $0 < \varepsilon < 4\tau$ y usando que $R_{\mathbf{g}}$ está acotada, obtenemos una cota inferior para $\mathcal{J}_{\mathbf{g},\tau}$ y una cota uniforme en $H^1$ para toda sucesión minimizante $(v_j)$.
Podemos reemplazar $v_j$ por $|v_j|$. Tras extraer una subsucesión,

$$v_j \rightharpoonup v \quad \text{en } H^1(M), \qquad v_j \to v \quad \text{en } L^{q_0}(M)$$

para algún $2 < q_0 < q$, y también casi en todas partes. En particular, $\|v\|_{L^2(M)} = 1$. La energía de Dirichlet es semicontinua inferiormente y el término de curvatura converge por la convergencia fuerte en $L^2$.
Para el término entrópico elegimos $\eta \in (0, 1)$ con $2(1 + \eta) < q_0$. La desigualdad

$$a|\log a| \le C_\eta (a^{1-\eta} + a^{1+\eta}), \qquad a \ge 0,$$

aplicada a $a = v_j^2$, muestra que $(v_j^2 \log v_j^2)$ es uniformemente integrable: la potencia alta está acotada en un espacio $L^p$ con $p > 1$ por la convergencia en $L^{q_0}$, y la potencia baja está acotada en $L^{1/(1-\eta)}$ por la normalización en $L^2$. El teorema de Vitali da

$$\int_M v_j^2 \log v_j^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow \int_M v^2 \log v^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por lo tanto, $v$ es un minimizador no negativo.
La función real $s \mapsto s^2 \log s^2$, prolongada por cero en $s = 0$, es $C^1$ y su derivada tiene crecimiento menor que cualquier potencia $|s|^{1+\varepsilon}$ en el infinito. Los encajes anteriores permiten diferenciar (22.34) en direcciones de

$H^1$. El método de multiplicadores de Lagrange produce

$$-4\tau\Delta v + \tau R v - v\log v^2 - v - \frac{m}{2}\log(4\pi\tau)v - mv = \lambda v$$

en sentido débil. Al multiplicar por $v$ e integrar se obtiene $\lambda = \mu(\mathbf{g},\tau) - 1$, y por ello resulta (22.31).
Precisemos la regularidad antes de usar positividad. La ecuación débil tiene la forma

$$-\Delta v = F(x,v), \qquad |F(x,a)| \le C_\varepsilon(1+|a|^{1+\varepsilon}), \quad x \in M, \quad a \in \mathbb{R},$$

para cada $\varepsilon > 0$. El término $a\log a^2$, prolongado por cero, es acotado cerca de $a = 0$, lo que explica el sumando constante.
Si $m \ge 3$, partimos de $v \in L^{q_0}(M)$ con $q_0 = 2m/(m-2)$. Fijemos $0 < \varepsilon < \min\{q_0 - 1, q_0/m\}$. Si $v \in L^{q_j}$, entonces $F(\cdot, v) \in L^{p_j}$, donde $p_j = q_j/(1+\varepsilon) > 1$, y la regularidad elíptica da $v \in W^{2,p_j}$. Mientras $p_j < m/2$, el encaje de Sobolev proporciona el siguiente exponente:

$$\frac{1}{q_{j+1}} = \frac{1+\varepsilon}{q_j} - \frac{2}{m}, \qquad j \in \mathbb{N}_0 \text{ con } p_j < m/2.$$

Como $q_j \ge q_0$, la elección de $\varepsilon$ implica $\varepsilon/q_j < 1/m$ y, por tanto, $1/q_{j+1} < 1/q_j - 1/m$. Los recíprocos disminuyen al menos $1/m$ en cada paso, de modo que esta alternativa sólo puede repetirse una cantidad finita de veces. Si se alcanza $p_j = m/2$, el encaje crítico da $v \in L^q$ para todo $q < \infty$; elegimos entonces $q > (1+\varepsilon)m/2$ y aplicamos nuevamente la ecuación. En ambos casos se llega a $W^{2,p}$ con $p > m/2$, y de aquí a $C^{0,\alpha}$ para algún $\alpha \in (0,1)$.
Si $m = 2$, el encaje de $H^1$ proporciona $v \in L^q$ para cada $q < \infty$. Elegimos $q > 2(1+\varepsilon)$; la ecuación da $v \in W^{2,q/(1+\varepsilon)} \hookrightarrow C^{1,\alpha}$ para algún $\alpha > 0$. Si $m = 1$, el encaje de $H^1$ ya da una función continua y acotada. Así, en todas las dimensiones $v$ es acotada.
La función $F(\cdot, v)$ pertenece ahora a $L^p$ para cada $1 < p < \infty$. Otra aplicación de la regularidad elíptica da $v \in W^{2,p}$ para todos esos exponentes y, tomando $p > m$, $v \in C^{1,\alpha}$. En particular, $v$ es Lipschitz. Tomamos $p > \max\{2, m\}$ para aplicar la versión débil del principio fuerte que acabamos de demostrar.
De (22.31) se obtiene, casi en todas partes, $\Delta v \le C_0 v - C_1 v\log v^2$, donde podemos tomar

$$C_1 = \frac{1}{4\tau}, \qquad C_0 = \frac{1}{4\tau}\left\|\tau R_{\mathbf{g}} - \frac{m}{2}\log(4\pi\tau) - m - \mu(\mathbf{g},\tau)\right\|_\infty.$$

El Lema 22.5.4, en su versión débil, y la normalización excluyen la solución nula; como $M$ es conexa, se sigue que $v > 0$. La compacidad de $M$ da $\min_{x\in M} v(x) > 0$. Por lo tanto, $F$ es suave en una vecindad del compacto $\{(x, v(x)) \mid x \in M\}$. Partimos de $v \in H^2(M)$. Si $v \in H^r(M)$ para un entero $r \ge 2$, la estimación de composición (20.9) implica $F(\cdot, v) \in H^r(M)$; la ecuación y el Teorema 11.4.2 dan entonces $v \in H^{r+2}(M)$, usando una cubierta finita de $M$. La inducción proporciona todos los órdenes pares y, por los encajes de Sobolev–Morrey, $v \in C^\infty(M)$. La sustitución $v = (4\pi\tau)^{-m/4}e^{-f/2}$ produce (22.32).
La invariancia por difeomorfismos es la fórmula de cambio de variables. Bajo $\mathbf{g} \mapsto c\mathbf{g}$ se tiene $R \mapsto c^{-1}R$, $|\nabla f|^2 \mapsto c^{-1}|\nabla f|^2$ y $d\lambda \mapsto c^{m/2}d\lambda$; el factor $(4\pi c\tau)^{-m/2}$ compensa el cambio de volumen. Esto prueba (22.33). □

Si $M$ tiene componentes conexas $M_1, \dots, M_N$, pongamos $a_\alpha = \int_{M_\alpha} v^2\, d\lambda_{\mathbf{g}}$ para $\alpha \in \{1, \dots, N\}$. En las componen-

tes con $a_\alpha > 0$ escribimos $v = \sqrt{a_\alpha}\, w_\alpha$, con $\|w_\alpha\|_{L^2(M_\alpha)} = 1$. Entonces

$$\mathcal{J}_{\mathbf{g},\tau}(v) = \sum_{\substack{\alpha\in\{1,\dots,N\}\\ a_\alpha>0}} a_\alpha \mathcal{J}_{\mathbf{g}|_{M_\alpha},\tau}(w_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha \log a_\alpha, \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha = 1.$$

El último término es no negativo. Concentrando la masa en una componente que minimice su cantidad $\mu$, y aproximando si se exige positividad en todas las componentes, se obtiene $\mu(\mathbf{g},\tau) = \min_{\alpha\in\{1,\dots,N\}} \mu(\mathbf{g}|_{M_\alpha},\tau)$. Por ello los argumentos siguientes se aplican componente por componente.

**Corolario 22.5.6.** (Monotonía de $\mu$) Sea $M$ una variedad suave cerrada y conexa. Si $\mathbf{g}(t)$ resuelve el flujo de Ricci, $\tau' = -1$ y $\tau(t) > 0$, entonces $t \mapsto \mu(\mathbf{g}(t), \tau(t))$ es no decreciente. Si permanece constante en un intervalo, el flujo es, módulo difeomorfismos y reescalamiento, un solitón gradiente contractivo.

*Demostración.* Sean $t_1 < t_2$ y elijamos un minimizador positivo para $(\mathbf{g}(t_2), \tau(t_2))$. Su densidad final determina una solución positiva de la ecuación conjugada hacia atrás hasta $t_1$; por conservación de la masa puede escribirse como $(4\pi\tau)^{-m/2} e^{-f}$. El Teorema 22.5.2 da

$$\mu(\mathbf{g}(t_2),\tau(t_2)) = \mathcal{W}(t_2) \geq \mathcal{W}(t_1) \geq \mu(\mathbf{g}(t_1),\tau(t_1)).$$

Si los extremos son iguales, ambas desigualdades son igualdades y el cuadrado de (22.27) se anula en todo el intervalo. Ésta es la ecuación del solitón gradiente contractivo. □

## 22.6 Longitud, distancia y volumen reducidos

La entropía $\mathcal{W}$ proporciona el no colapso de los flujos suaves. Para estudiar con mayor precisión la geometría espacio–temporal, Perelman introdujo una segunda cantidad monótona basada en un problema variacional de curvas. Su integrando combina la energía cinética con la curvatura escalar y utiliza el tiempo hacia atrás como parámetro.

En esta sección $M$ es cerrada y conexa. Fijemos $p \in M$, un tiempo $t_0$ y $\tau_{\max} > 0$ de modo que $[t_0 - \tau_{\max}, t_0]$ esté contenido en el intervalo suave del flujo. Para $0 \leq s \leq \tau_{\max}$ escribimos

$$\mathbf{g}_s := \mathbf{g}(t_0 - s), \qquad R_s := R_{\mathbf{g}_s}, \qquad \mathrm{Ric}_s := \mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_s}.$$

Denotaremos por $\nabla^{(s)}$ y $\Delta_s$ la conexión de Levi–Civita y el laplaciano de $\mathbf{g}_s$. Como $s$ es el tiempo hacia atrás, $\partial_s \mathbf{g}_s = 2\,\mathrm{Ric}_s$.

Para derivar un campo a lo largo de una curva, usaremos en cada instante la conexión correspondiente a ese tiempo. Si $\mathbf{X}(s) = \dot\gamma(s)$ y $\mathbf{Z}(s) \in T_{\gamma(s)}M$, escribimos $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} = D_s\mathbf{Z}$ para la derivada total covariante. En coordenadas,

$$(D_s\mathbf{Z})^k = \frac{dZ^k}{ds} + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k(s,\gamma(s)) X^i Z^j, \qquad k \in \{1,\dots,m\}. \tag{22.36}$$

En particular, $D_s^2\mathbf{Z}$ incluye la derivada temporal de los símbolos de Christoffel que aparecen en $D_s\mathbf{Z}$. Para dos

campos $\mathbf{Z}, \mathbf{W}$ a lo largo de la curva, la compatibilidad métrica en cada rebanada da

$$\frac{d}{ds}\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{g}_s} = \langle D_s\mathbf{Z}, \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{g}_s} + \langle \mathbf{Z}, D_s\mathbf{W}\rangle_{\mathbf{g}_s} + 2\,\mathrm{Ric}_s(\mathbf{Z}, \mathbf{W}). \tag{22.37}$$

Las derivadas de tensores que sólo llevan una dirección espacial, como $\nabla_{\mathbf{Y}}\,\mathrm{Ric}_s$, se toman con la conexión $\nabla^{(s)}$ a tiempo $s$ fijo.

Para una curva absolutamente continua $\gamma\colon [0, \bar\tau] \to M$, con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(\bar\tau) = q$, definimos

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_0^{\bar\tau} \sqrt{s}\,\big(R_s(\gamma(s)) + |\dot\gamma(s)|^2_{\mathbf{g}_s}\big)\,ds. \tag{22.38}$$

La distancia de $\mathcal{L}$ y la distancia reducida basadas en $(p, t_0)$ son

$$L(q, \bar\tau) := \inf_{\gamma \in \mathcal{A}_{p,q}(\bar\tau)} \mathcal{L}(\gamma), \qquad l(q, \bar\tau) := \frac{L(q, \bar\tau)}{2\sqrt{\bar\tau}}. \tag{22.39}$$

Aquí $\mathcal{A}_{p,q}(\bar\tau)$ es el conjunto de curvas absolutamente continuas de $[0, \bar\tau]$ en $M$ con esos extremos y con energía ponderada finita, es decir, $\int_0^{\bar\tau} \sqrt{s}\,|\dot\gamma(s)|^2_{\mathbf{g}_s}\,ds < \infty$.

La singularidad aparente del integrando en $s = 0$ desaparece después de reparametrizar por la raíz cuadrada del tiempo. Esta observación permite aplicar directamente el método variacional y la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Lema 22.6.1.** (Reparametrización regular y existencia de minimizantes) Sea $M$ cerrada. Si $\alpha(r) = \gamma(r^2)$ y $\mathbf{A}(r) = \alpha'(r)$, entonces

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\bar\tau}} \left(\frac{1}{2}|\mathbf{A}(r)|^2_{\mathbf{g}_{r^2}} + 2r^2 R_{r^2}(\alpha(r))\right) dr. \tag{22.40}$$

Para todo $q \in M$ y todo $0 < \bar\tau \le \tau_{\max}$ existe una curva minimizante de $\mathcal{L}$ de $(p, 0)$ a $(q, \bar\tau)$. Toda minimizante es suave en la variable $r$ y satisface

$$\nabla^{(r^2)}_{\mathbf{A}}\mathbf{A} - 2r^2\nabla^{\mathbf{g}_{r^2}} R_{r^2} + 4r\,\mathrm{Ric}_{r^2}(\mathbf{A}, \cdot)^{\sharp_{\mathbf{g}_{r^2}}} = 0. \tag{22.41}$$

En la variable original, con $\mathbf{X} = \dot\gamma$, esta ecuación se convierte en

$$\nabla^{(s)}_{\mathbf{X}}\mathbf{X} - \frac{1}{2}\nabla^{\mathbf{g}_s} R_s + \frac{1}{2s}\mathbf{X} + 2\,\mathrm{Ric}_s(\mathbf{X}, \cdot)^{\sharp_{\mathbf{g}_s}} = 0. \tag{22.42}$$

*Demostración.* El cambio $s = r^2$ da $ds = 2r\,dr$ y $\mathbf{X}(r^2) = \mathbf{A}(r)/(2r)$. La sustitución directa en (22.38) produce (22.40).

Fijemos una métrica de referencia $\mathbf{h}$ en $M$. En el intervalo compacto considerado, las métricas $\mathbf{g}_{r^2}$ son uniformemente equivalentes a $\mathbf{h}$ y $R_{r^2}$ está uniformemente acotada. Por ello existen $c, C > 0$ tales que

$$\mathcal{L}(\alpha) \ge c\int_0^{\sqrt{\bar\tau}} |\alpha'(r)|^2_{\mathbf{h}}\,dr - C. \tag{22.43}$$

Elegimos un encaje suave $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. La estimación anterior y la equivalencia uniforme entre la métrica inducida por $\iota$ y $\mathbf{h}$ acotan a $\iota \circ \alpha_j$ en $H^1([0, \sqrt{\bar\tau}], \mathbb{R}^N)$ para toda sucesión minimizante. Después de extraer

una subsucesión, estas curvas convergen débilmente en $H^1$ y uniformemente a una curva $a$. Como $\iota(M)$ es cerrada y cada $\iota\circ\alpha_j$ toma valores en $\iota(M)$, también $a$ toma valores en $\iota(M)$; escribimos $a=\iota\circ\alpha$. Los extremos se conservan por la convergencia uniforme.

En cartas alrededor de la imagen compacta de $\alpha$, los coeficientes de $\mathbf{g}_{r^2}$ evaluados en $\alpha_j$ convergen uniformemente a los evaluados en $\alpha$. El integrando cinético es convexo en la velocidad; por la semicontinuidad inferior de las integrales convexas,

$$\int_0^{\sqrt{\bar\tau}} |\alpha'|^2_{\mathbf{g}_{r^2}}\,dr \le \liminf_{j\to\infty}\int_0^{\sqrt{\bar\tau}} |\alpha_j'|^2_{\mathbf{g}_{r^2}}\,dr.$$

El término de curvatura converge por la convergencia uniforme y el teorema de convergencia dominada. Por lo tanto, $\alpha$ alcanza el ínfimo.

La primera variación de (22.40) da la ecuación de Euler–Lagrange en sentido débil. Para justificar su regularidad, consideremos un subintervalo cuya imagen esté en una carta y definamos los momentos

$$P_i(r)=\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(r^2,\alpha(r))\alpha'^{j}(r),\qquad i\in\{1,\dots,m\}.$$

La ecuación débil es

$$P_i'(r)=\frac12\sum_{j,k=1}^{m}\partial_i g_{jk}(r^2,\alpha(r))\alpha'^{j}(r)\alpha'^{k}(r)+2r^2\partial_i R_{r^2}(\alpha(r)).$$

El miembro derecho pertenece a $L^1$, porque $\alpha'\in L^2$. Así, cada $P_i$ tiene un representante absolutamente continuo y continuo. La identidad $\alpha'^{j}=\sum_{i=1}^{m} g^{ji}(r^2,\alpha)P_i$ muestra entonces que $\alpha$ es $C^1$. El miembro derecho de la ecuación para $P_i'$ es ahora continuo, de modo que $P_i$ es $C^1$ y $\alpha$ es $C^2$. El sistema ordinario resultante tiene coeficientes suaves, incluso en $r=0$, y la regularidad ordinaria da suavidad hasta los extremos. Al escribirlo con la conexión de $\mathbf{g}_{r^2}$ se obtiene (22.41). Finalmente, $\mathbf{A}=2\sqrt{s}\,\mathbf{X}$ y

$$\nabla^{(r^2)}_{\mathbf{A}}\mathbf{A}=2\mathbf{X}+4r^2\nabla^{(s)}_{\mathbf{X}}\mathbf{X}.$$

Sustituir esta identidad en (22.41) prueba (22.42). □

**Lema 22.6.2.** (El mapeo exponencial de $\mathcal{L}$) Para cada $v\in T_pM$ existe una única solución de (22.41) con

$$\alpha_v(0)=p,\qquad \alpha_v'(0)=2v.$$

Está definida en todo $[0,\sqrt{\tau_{\max}}]$ y depende suavemente de $(v,r)$. Si $\gamma_v(s)=\alpha_v(\sqrt{s})$, entonces

$$\lim_{s\to0^+}\sqrt{s}\,\dot\gamma_v(s)=v.$$

Definimos

$$\mathcal{L}\exp_p^{\tau}(v):=\gamma_v(\tau). \tag{22.44}$$

*Demostración.* La existencia, unicidad y dependencia suave cerca de $r = 0$ se siguen del teorema usual para sistemas ordinarios aplicado a (22.41). Para excluir una explosión de la velocidad en un intervalo finito, tomamos el producto de esa ecuación con $\mathbf{A}$. Las cotas uniformes de $\nabla R$ y de Ric dan

$$\frac{d}{dr}|\mathbf{A}|^2_{\mathbf{g}_{r^2}} \le C\big(1 + |\mathbf{A}|^2_{\mathbf{g}_{r^2}}\big).$$

La desigualdad de Grönwall mantiene acotada la velocidad. Como $M$ es compacta, la solución se prolonga hasta $\sqrt{\tau_{\max}}$. La identidad $\mathbf{A}(r) = 2r\mathbf{X}(r^2)$ da la última afirmación. □

**Definición 22.6.3.** (Dominio de inyectividad y lugar de corte de $\mathcal{L}$) Para $\tau > 0$, sea $\widetilde{U}_p(\tau) \subseteq T_pM$ el conjunto de los vectores $v$ que satisfacen las dos condiciones siguientes:

(a) $d(\mathcal{L}\exp_p^\tau)_v$ es un isomorfismo;

(b) existe una vecindad $\mathcal{V}$ de $v$ en $T_pM$ tal que, para todo $w \in \mathcal{V}$, la curva $\gamma_w|_{[0,\tau]}$ es la única minimizante de $\mathcal{L}$ entre sus extremos.

Ponemos

$$U_p(\tau) := \mathcal{L}\exp_p^\tau(\widetilde{U}_p(\tau)), \qquad \mathrm{Cut}_{\mathcal{L}}(p,\tau) := M \setminus U_p(\tau).$$

El segundo conjunto se llama *lugar de corte de* $\mathcal{L}$ basado en $(p, t_0)$ a tiempo hacia atrás $\tau$.

Por definición, $\widetilde{U}_p(\tau)$ es abierto. La restricción de $\mathcal{L}\exp_p^\tau$ a este conjunto es inyectiva: dos preimágenes de un mismo punto determinarían dos minimizantes, pero cada una es única. El teorema de la función inversa muestra, por tanto, que esa restricción es un difeomorfismo sobre el abierto $U_p(\tau)$. En particular, $L(\cdot,\tau)$ y $l(\cdot,\tau)$ son suaves en $U_p(\tau)$.

**Lema 22.6.4.** (Primera variación) Sea $\gamma_u$ una variación de una $\mathcal{L}$–geodésica $\gamma = \gamma_0$, suave en $(u, r)$ con $r = \sqrt{s}$, que mantiene fijo el extremo inicial $\gamma_u(0) = p$, y sea $\mathbf{Y} = \partial_u\gamma_u\big|_{u=0}$. Entonces $\mathbf{Y}(0) = 0$ y

$$\delta\mathcal{L}(\gamma) = 2\sqrt{s}\langle \mathbf{Y}, \mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}_s}\Big|_0^{\bar\tau} + \int_0^{\bar\tau} \sqrt{s}\left\langle \mathbf{Y}, \nabla R_s - \frac{1}{s}\mathbf{X} - 2\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X} - 4\,\mathrm{Ric}_s(\mathbf{X},\cdot)^\sharp \right\rangle_{\mathbf{g}_s} ds. \tag{22.45}$$

En particular, si $q \in U_p(\tau)$ y $\gamma$ es la minimizante regular que termina en $q$, entonces

$$\nabla^{\mathbf{g}_\tau} L(q,\tau) = 2\sqrt{\tau}\,\mathbf{X}(\tau), \qquad \partial_\tau L(q,\tau) = \sqrt{\tau}\big(R_\tau(q) - |\mathbf{X}(\tau)|^2_{\mathbf{g}_\tau}\big). \tag{22.46}$$

Consecuentemente,

$$\nabla^{\mathbf{g}_\tau} l = \mathbf{X}(\tau), \qquad \partial_\tau l = -\frac{l}{2\tau} + \frac{1}{2}\big(R_\tau - |\nabla l|^2_{\mathbf{g}_\tau}\big) \tag{22.47}$$

en el conjunto regular.

*Demostración.* Sea $\gamma_u$ una variación y sea $\mathbf{Y} = \partial_u\gamma_u|_{u=0}$. Como $\partial_s\mathbf{g}_s = 2\,\mathrm{Ric}_s$ y los campos coordenados de la variación conmutan,

$$\partial_u|\mathbf{X}|^2_{\mathbf{g}_s} = 2\langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}_s}.$$

Al integrar por partes debemos derivar también la métrica dependiente de $s$:

$$\frac{d}{ds}\big(2\sqrt{s}\langle \mathbf{Y},\mathbf{X}\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{s}}\langle \mathbf{Y},\mathbf{X}\rangle + 2\sqrt{s}\langle \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{X}\rangle + 2\sqrt{s}\langle \mathbf{Y},\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}\rangle + 4\sqrt{s}\,\mathrm{Ric}_s(\mathbf{Y},\mathbf{X}).$$

Sustituir esta identidad en la derivada de (22.38) da (22.45). El término de extremo en $s=0$ se anula porque $\mathbf{Y}(0)=0$ y $\sqrt{s}\,\mathbf{X}(s)$ tiene límite.

En el conjunto regular, el teorema de la función inversa aplicado a $\mathcal{L}\exp_p^\tau$ produce una familia suave de minimizantes al variar el extremo. La parte de frontera de (22.45) da la primera identidad de (22.46). A lo largo de la propia minimizante,

$$\frac{d}{d\tau}L(\gamma(\tau),\tau) = \sqrt{\tau}(R_\tau + |\mathbf{X}(\tau)|^2).$$

Por la regla de la cadena, el miembro izquierdo también es $\partial_\tau L + \langle \nabla L, \mathbf{X}(\tau)\rangle$. La identidad para el gradiente da la segunda fórmula. Dividir por $2\sqrt{\tau}$ prueba (22.47). □

**Lema 22.6.5.** (Campos de Jacobi e índice de $\mathcal{L}$) Sea $\mathbf{C}_s = \partial_s \nabla^{(s)}$ el tensor de variación de la conexión. A lo largo de una $\mathcal{L}$–geodésica, la linealización de (22.42), con la derivada total de (22.36), es

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mathcal{L}}\mathbf{Y} := {} & D_s^2\mathbf{Y} + \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_s}(\mathbf{Y},\mathbf{X})\mathbf{X} - \mathbf{C}_s(\mathbf{Y},\mathbf{X}) - \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla R_s) + \frac{1}{2s}D_s\mathbf{Y} \\ & + 2(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{X},\cdot)^\sharp + 2\,\mathrm{Ric}_s(D_s\mathbf{Y},\cdot)^\sharp. \end{aligned} \tag{22.48}$$

Los campos que satisfacen $\mathcal{J}_{\mathcal{L}}\mathbf{Y}=0$, son suaves en $r=\sqrt{s}$ y se anulan en $s=0$ son precisamente las derivadas de familias de $\mathcal{L}$–geodésicas con punto inicial $p$ fijo.

Para campos $\mathbf{Y},\mathbf{Z}$ suaves en $r=\sqrt{s}$ y nulos en $s=0$, definimos

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{L}}(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) := \int_0^\tau \sqrt{s}\Big\{ & \mathrm{Hess}_{\mathbf{g}_s} R_s(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) + 2\langle \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_s}(\mathbf{Y},\mathbf{X})\mathbf{Z},\mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}_s} \\ & + 2\langle D_s\mathbf{Y}, D_s\mathbf{Z}\rangle_{\mathbf{g}_s} + 2(\nabla_{\mathbf{X}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) - 2(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{X},\mathbf{Z}) \\ & - 2(\nabla_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{X},\mathbf{Y})\Big\}\,ds. \end{aligned} \tag{22.49}$$

Si $\gamma_u$ es una variación de una minimizante, suave en $(u,\sqrt{s})$, con punto inicial fijo y campo $\mathbf{Y}$, entonces

$$\left.\frac{d^2}{du^2}\right|_{u=0} \mathcal{L}(\gamma_u) = 2\sqrt{\tau}\,\langle \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Y},\mathbf{X}\rangle_{\mathbf{g}_\tau}\Big|_{s=\tau} + I_{\mathcal{L}}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}). \tag{22.50}$$

En un punto regular,

$$\mathrm{Hess}_{\mathbf{g}_\tau} L(\mathbf{Y}(\tau),\mathbf{Y}(\tau)) \le I_{\mathcal{L}}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}). \tag{22.51}$$

Además, $d(\mathcal{L}\exp_p^\tau)_v$ es singular si y sólo si existe un campo de Jacobi no nulo que se anula en los dos extremos.

*Demostración.* La fórmula de variación de la conexión del capítulo anterior, aplicada a $\partial_s \mathbf{g}_s = 2\,\mathrm{Ric}_s$, da

$$\langle \mathbf{C}_s(\mathbf{U},\mathbf{V}),\mathbf{W}\rangle_{\mathbf{g}_s} = (\nabla_{\mathbf{U}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{V},\mathbf{W}) + (\nabla_{\mathbf{V}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{U},\mathbf{W}) - (\nabla_{\mathbf{W}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{U},\mathbf{V}). \tag{22.52}$$

Aquí $\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{W}$ son vectores tangentes en un mismo punto y todas las derivadas del miembro derecho son

espaciales.

Sobre una variación $\gamma(u,s)$ escribimos $D_u$ para la derivada covariante en la dirección $\mathbf{Y} = \partial_u\gamma$, a $s$ fijo. La ausencia de torsión da $D_u\mathbf{X} = D_s\mathbf{Y}$. Para un campo $\mathbf{Z}$ sobre la variación, el conmutador es

$$D_u D_s\mathbf{Z} - D_s D_u\mathbf{Z} = \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_s}(\mathbf{Y},\mathbf{X})\mathbf{Z} - \mathbf{C}_s(\mathbf{Y},\mathbf{Z}). \tag{22.53}$$

Para comprobar el término temporal, se escribe cada derivada como en (22.36). Los términos que contienen derivadas espaciales de $\Gamma_{ij}^k$ y productos de dos símbolos de Christoffel se agrupan en la curvatura. Al derivar $D_u\mathbf{Z}$ respecto de $s$ aparece además $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{m}(\partial_s\Gamma_{ij}^k)Y^iZ^j$, para cada $k\in\{1,\dots,m\}$, con signo negativo en el conmutador. Éste es exactamente el último sumando de (22.53).

En particular,

$$D_u(D_s\mathbf{X}) = D_s^2\mathbf{Y} + \mathrm{Rm}(\mathbf{Y},\mathbf{X})\mathbf{X} - \mathbf{C}_s(\mathbf{Y},\mathbf{X}).$$

La derivada de $\mathrm{Ric}_s(\mathbf{X},\cdot)^\sharp$ en la dirección $u$ es $(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{X},\cdot)^\sharp + \mathrm{Ric}_s(D_s\mathbf{Y},\cdot)^\sharp$. Derivar los restantes términos de (22.42) produce (22.48).

La ecuación en $r=\sqrt{s}$ es un sistema lineal ordinario regular de segundo orden. Si $\mathbf{Y}(0)=0$, queda determinada por $\lim_{s\to0^+}\sqrt{s}\,D_s\mathbf{Y}$. En efecto, para una familia de datos iniciales $v(u)$, $D_r\mathbf{Y}(0) = 2v'(0)$ y este límite es $v'(0)$. La dependencia suave y la unicidad del problema inicial establecen la correspondencia con las variaciones de $\mathcal{L}$–geodésicas.

Diferenciemos ahora (22.45) sobre la curva central. Su ecuación de Euler–Lagrange anula el integrando de la primera variación. Resulta

$$\delta^2\mathcal{L} = 2\sqrt{\tau}\big(\langle\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Y},\mathbf{X}\rangle + \langle D_s\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle\big)_{s=\tau} - 2\int_0^\tau \sqrt{s}\,\langle\mathcal{J}_{\mathcal{L}}\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle\,ds.$$

Para integrar el último término usamos (22.37) con $\mathbf{Z} = D_s\mathbf{Y}$ y $\mathbf{W}=\mathbf{Y}$:

$$\frac{d}{ds}\langle D_s\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle_{\mathbf{g}_s} = \langle D_s^2\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle_{\mathbf{g}_s} + |D_s\mathbf{Y}|^2_{\mathbf{g}_s} + 2\,\mathrm{Ric}_s(D_s\mathbf{Y},\mathbf{Y}). \tag{22.54}$$

Por otra parte, al poner $\mathbf{U}=\mathbf{W}=\mathbf{Y}$ y $\mathbf{V}=\mathbf{X}$ en (22.52), los dos términos con $\nabla_{\mathbf{Y}}\mathrm{Ric}_s$ se cancelan:

$$\langle\mathbf{C}_s(\mathbf{Y},\mathbf{X}),\mathbf{Y}\rangle = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{Y},\mathbf{Y}).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}-2\sqrt{s}\,\langle\mathcal{J}_{\mathcal{L}}\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle = {}& -\frac{d}{ds}\big(2\sqrt{s}\langle D_s\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle\big)\\ &+\sqrt{s}\Big\{\mathrm{Hess}\,R_s(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) + 2\langle\mathrm{Rm}(\mathbf{Y},\mathbf{X})\mathbf{Y},\mathbf{X}\rangle + 2|D_s\mathbf{Y}|^2\\ &\qquad + 2(\nabla_{\mathbf{X}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) - 4(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{X},\mathbf{Y})\Big\}.\end{aligned}$$

El término total derivado cancela el sumando $2\sqrt{\tau}\langle D_s\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle$ del extremo final. En el extremo inicial, la suavidad en $r$ y $\mathbf{Y}(0)=0$ implican $\mathbf{Y}=O(\sqrt{s})$ y $D_s\mathbf{Y}=O(s^{-1/2})$; por ello $2\sqrt{s}\langle D_s\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle\to0$. Estas mismas cotas justifican la convergencia de las integrales impropias. Queda probada (22.50), y su polarización da (22.49).

Si ambos campos se anulan también en $s=\tau$, la integración por partes bilineal da

$$I_{\mathcal{L}}(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = -2\int_0^\tau \sqrt{s}\,\langle \mathcal{J}_{\mathcal{L}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}\rangle\,ds.$$

La simetría de esta expresión se sigue también directamente de (22.49) y de las simetrías de la curvatura. Para estimar la Hessiana, realizamos $\mathbf{Y}$ mediante una variación con punto inicial fijo y extremo final $q(u)$. Se tiene $L(q(u),\tau)\le \mathcal{L}(\gamma_u)$, con igualdad en $u=0$. La segunda derivada de la diferencia es no negativa. Al usar $\nabla L = 2\sqrt{\tau}\,\mathbf{X}(\tau)$, el término que contiene la aceleración de $q(u)$ es el mismo en ambos miembros y se cancela. Esto prueba (22.51). Finalmente, $d(\mathcal{L}\exp_p^\tau)_v(w)=\mathbf{Y}_w(\tau)$, donde $\lim_{s\to 0^+}\sqrt{s}D_s\mathbf{Y}_w = w$. La unicidad del sistema regular implica que $w\neq 0$ corresponde a un campo no nulo, lo cual prueba la afirmación sobre el diferencial del exponencial. □

**Lema 22.6.6.** (Identidades de $K$ y estimación de la Hessiana) Sea $q\in U_p(\tau)$ y sea $\gamma$ la minimizante regular que termina en $q$. Definamos, a lo largo de $\gamma$,

$$\mathcal{H}(\mathbf{X}) := -\partial_s R_s - \frac{R_s}{s} - 2\langle \nabla R_s,\mathbf{X}\rangle + 2\,\mathrm{Ric}_s(\mathbf{X},\mathbf{X}), \tag{22.55}$$

$$K(\tau) := \int_0^\tau s^{3/2}\mathcal{H}(\mathbf{X}(s))\,ds. \tag{22.56}$$

Entonces

$$\partial_\tau l = R_\tau - \frac{l}{\tau} + \frac{K(\tau)}{2\tau^{3/2}}, \tag{22.57}$$

$$|\nabla^{\mathbf{g}_\tau} l|^2_{\mathbf{g}_\tau} = -R_\tau + \frac{l}{\tau} - \frac{K(\tau)}{\tau^{3/2}}, \tag{22.58}$$

$$\Delta_\tau l \le \frac{m}{2\tau} - R_\tau - \frac{K(\tau)}{2\tau^{3/2}}. \tag{22.59}$$

Por consiguiente, en el conjunto regular,

$$\partial_\tau l - \Delta_\tau l + |\nabla l|^2_{\mathbf{g}_\tau} - R_\tau + \frac{m}{2\tau} \ge 0. \tag{22.60}$$

*Demostración.* Derivamos $R_s(\gamma(s))+|\mathbf{X}(s)|^2$. La variación temporal de la métrica aporta $2\,\mathrm{Ric}_s(\mathbf{X},\mathbf{X})$ y la ecuación (22.42) da

$$\frac{d}{ds}\left(R_s+|\mathbf{X}|^2\right) = -\mathcal{H}(\mathbf{X}) - \frac{1}{s}(R_s+|\mathbf{X}|^2). \tag{22.61}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{ds}\left[s^{3/2}(R_s+|\mathbf{X}|^2)\right] = \frac{1}{2}\sqrt{s}(R_s+|\mathbf{X}|^2) - s^{3/2}\mathcal{H}(\mathbf{X}).$$

La integración entre 0 y $\tau$, junto con $\lim_{s\to 0^+} s^{3/2}(R_s+|\mathbf{X}|^2)=0$, produce

$$\tau^{3/2}(R_\tau+|\mathbf{X}(\tau)|^2) = \frac{1}{2}L(q,\tau) - K(\tau). \tag{22.62}$$

La segunda fórmula de (22.46) y la identidad $\nabla l=\mathbf{X}(\tau)$ convierten (22.62) en (22.57) y (22.58).
Resta estimar la traza de la Hessiana. Sea $(\mathbf{e}_a)_{a=1}^m$ una base ortonormal de $T_qM$ y sea $\mathbf{Y}_a$ el campo de compa-

ración determinado por

$$\mathbf{Y}_a(\tau)=\mathbf{e}_a,\qquad \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}_a=-\mathrm{Ric}_s(\mathbf{Y}_a,\cdot)^\sharp+\frac{1}{2s}\mathbf{Y}_a. \tag{22.63}$$

La derivada de $\langle \mathbf{Y}_a,\mathbf{Y}_b\rangle_{\mathbf{g}_s}$, usando $\partial_s\mathbf{g}_s=2\,\mathrm{Ric}_s$, da

$$\langle \mathbf{Y}_a(s),\mathbf{Y}_b(s)\rangle_{\mathbf{g}_s}=\frac{s}{\tau}\delta_{ab}.$$

Así, los campos se anulan en $s=0$ y $\mathbf{W}_a(s)=\sqrt{\tau/s}\,\mathbf{Y}_a(s)$ forman un marco ortonormal que satisface $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{W}_a=-\mathrm{Ric}_s(\mathbf{W}_a,\cdot)^\sharp$ para $a\in\{1,\dots,m\}$. En la variable $r=\sqrt{s}$, esta ecuación es $D_r\mathbf{W}_a=-2r\,\mathrm{Ric}_{r^2}(\mathbf{W}_a,\cdot)^\sharp$; sus coeficientes son suaves hasta $r=0$. Por ello los campos $\mathbf{W}_a$ se prolongan suavemente y $\mathbf{Y}_a=(r/\sqrt{\tau})\mathbf{W}_a$ son variaciones admisibles. La desigualdad (22.51) implica

$$\Delta_\tau L(q,\tau)\le\sum_{a=1}^{m} I_{\mathcal{L}}(\mathbf{Y}_a,\mathbf{Y}_a).$$

Sustituimos $\mathbf{Y}_a=\sqrt{s/\tau}\,\mathbf{W}_a$ en (22.49). Las contracciones necesarias son

$$\sum_{a=1}^{m}\mathrm{Hess}\,R_s(\mathbf{W}_a,\mathbf{W}_a)=\Delta_s R_s,$$

$$\sum_{a=1}^{m}\langle \mathrm{Rm}(\mathbf{W}_a,\mathbf{X})\mathbf{W}_a,\mathbf{X}\rangle=-\mathrm{Ric}_s(\mathbf{X},\mathbf{X}),$$

$$\sum_{a=1}^{m}\left|\frac{1}{2s}\mathbf{W}_a-\mathrm{Ric}_s(\mathbf{W}_a,\cdot)^\sharp\right|^2=\frac{m}{4s^2}-\frac{R_s}{s}+|\mathrm{Ric}_s|^2,$$

$$\sum_{a=1}^{m}(\nabla_{\mathbf{W}_a}\mathrm{Ric}_s)(\mathbf{X},\mathbf{W}_a)=\frac{1}{2}\langle\nabla R_s,\mathbf{X}\rangle.$$

La última igualdad es Bianchi contraída. Junto con $\partial_s R_s=-\Delta_s R_s-2|\mathrm{Ric}_s|^2$, estas identidades dan, término por término,

$$\sum_{a=1}^{m} I_{\mathcal{L}}(\mathbf{Y}_a,\mathbf{Y}_a)=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\left[\frac{m}{2\sqrt{s}}-2\sqrt{s}R_s-s^{3/2}\partial_s R_s-2s^{3/2}\,\mathrm{Ric}_s(\mathbf{X},\mathbf{X})\right]ds. \tag{22.64}$$

Aquí todas las cantidades se evalúan en $\gamma(s)$. Ahora

$$\frac{d}{ds}\big(2s^{3/2}R_s(\gamma(s))\big)=3\sqrt{s}R_s+2s^{3/2}(\partial_s R_s+\langle\nabla R_s,\mathbf{X}\rangle).$$

La definición de $\mathcal{H}$ permite reescribir la parte no dimensional de la integral anterior como

$$-2\tau^{3/2}R_\tau(q)-K(\tau).$$

Como $\displaystyle\int_0^\tau m/(2\sqrt{s})\,ds=m\sqrt{\tau}$, concluimos

$$\Delta_\tau L(q,\tau)\le\frac{m}{\sqrt{\tau}}-2\sqrt{\tau}R_\tau(q)-\frac{K(\tau)}{\tau}.$$

Dividir entre $2\sqrt{\tau}$ prueba (22.59). La combinación de las tres fórmulas da (22.60). □

La desigualdad anterior se obtuvo donde la minimizante es única y el mapeo exponencial no tiene puntos conjugados. Para integrarla sobre toda la variedad necesitamos controlar la función reducida en su lugar de corte.

**Definición 22.6.7.** (Semiconcavidad local) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto. Una función continua $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es *localmente semiconcava* si cada punto tiene una vecindad convexa $V \subseteq \Omega$ en la que, para alguna constante $C \geq 0$, la función

$$x \longmapsto u(x) - \frac{C}{2}|x|^2$$

es cóncava. En una variedad suave, esta condición se exige a las representaciones de $u$ en cartas. Las constantes pueden depender de la carta y de la vecindad elegidas; no se exige una constante global.

La concavidad de una función $v$ en $V$ significa que

$$v((1-t)x+ty) \geq (1-t)v(x)+tv(y), \qquad x,y \in V, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Para una función continua basta comprobar esta desigualdad en los puntos medios: la aplicación sucesiva de esa desigualdad da todos los coeficientes diádicos, y la continuidad permite pasar a cualquier $t \in [0,1]$. Utilizaremos esta observación tanto para reconocer la semiconcavidad como para comprobar que la definición no depende de las coordenadas.

**Lema 22.6.8.** (Apoyos superiores y cambios de coordenadas) Sea $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto y convexo, y sea $u \in C(V)$. Supongamos que para cada $x \in V$ existe $\varphi_x \in C^2(V)$ tal que $u \leq \varphi_x$ en $V$, $u(x) = \varphi_x(x)$ y

$$D^2\varphi_x(y)[e,e] \leq C|e|^2, \qquad y \in V, \quad e \in \mathbb{R}^m,$$

con una misma constante $C \geq 0$. Entonces $u - C|x|^2/2$ es cóncava en $V$. Además, toda función localmente semiconcava es localmente Lipschitz, y la semiconcavidad local se conserva al componer con un cambio de coordenadas de clase $C^2$.

*Demostración.* Sean $x-h, x+h \in V$. Como $V$ es convexo, el segmento entre esos puntos está en $V$. La fórmula de Taylor con resto integral, aplicada a $t \mapsto \varphi_x(x+th)$, da

$$\varphi_x(x+h)+\varphi_x(x-h)-2\varphi_x(x) = \int_{-1}^{1}(1-|t|)D^2\varphi_x(x+th)[h,h]\,dt \leq C|h|^2.$$

Las propiedades del apoyo superior implican

$$u(x+h)+u(x-h)-2u(x) \leq C|h|^2.$$

Al restar $C|x|^2/2$, esta desigualdad se convierte en la concavidad en puntos medios. La observación anterior prueba la primera afirmación.

Veamos la regularidad local Lipschitz. Basta probarla para una función continua y cóncava $v$, porque el término cuadrático es suave. Elijamos $\overline{B(x_0,2r)} \subset V$ y pongamos $M_r = \max_{\overline{B(x_0,2r)}} |v|$. Si $x,y \in B(x_0,r)$ y $x \neq y$, definimos $d = |y-x|$ y $e = (y-x)/d$. Los puntos $x - re$ y $y + re$ pertenecen a $B(x_0,2r)$. La concavidad sobre la

recta que contiene a esos cuatro puntos da

$$\frac{v(x)-v(x-re)}{r} \geq \frac{v(y)-v(x)}{d} \geq \frac{v(y+re)-v(y)}{r}.$$

Ambos cocientes exteriores tienen valor absoluto a lo sumo $2M_r/r$. Por lo tanto, $|v(y)-v(x)| \leq (2M_r/r)|y-x|$. Sea ahora $\kappa$ un cambio de coordenadas de clase $C^2$. Reducimos sus dominios de modo que $u$ sea $L$–Lipschitz en un abierto convexo que contenga la imagen considerada, que $u - C|x|^2/2$ sea cóncava allí y que $\|D\kappa\| \leq K_0$ y $\|D^2\kappa\| \leq K_1$. Esto es posible al trabajar en vecindades con cerradura compacta contenida en los dominios. Para $x-h, x+h$ en una bola convexa del dominio reducido, pongamos

$$z_\pm = \kappa(x \pm h), \qquad z_0 = \kappa(x), \qquad z_* = (z_+ + z_-)/2.$$

La semiconcavidad en los puntos $z_-, z_+$ y la cota Lipschitz dan

$$u(z_+) + u(z_-) - 2u(z_0) \leq \frac{C}{4}|z_+ - z_-|^2 + 2L|z_* - z_0|.$$

El teorema del valor medio y la misma fórmula de Taylor implican

$$|z_+ - z_-| \leq 2K_0|h|, \qquad |z_* - z_0| \leq \frac{K_1}{2}|h|^2.$$

En consecuencia, el segundo incremento de $u \circ \kappa$ está acotado superiormente por $(CK_0^2 + LK_1)|h|^2$. El criterio de puntos medios prueba su semiconcavidad. Al aplicar lo mismo a $\kappa^{-1}$ se obtiene la independencia de la carta afirmada en la definición. □

**Lema 22.6.9.** (Regularidad y lugar de corte de la distancia reducida) Para cada intervalo compacto $[\tau_0, \tau_1] \subset (0, \tau_{\max}]$, las funciones $L$ y $l$ son localmente Lipschitz en $M \times [\tau_0, \tau_1]$. Para cada $\tau > 0$, $U_p(\tau)$ es abierto, $L$ y $l$ son suaves en él y $\mathrm{Cut}_{\mathcal{L}}(p, \tau)$ tiene medida nula. Además, la restricción $l(\cdot, \tau)$ es localmente semiconcava.

*Demostración.* Fijemos un compacto espacio–temporal $K \times [\tau_0, \tau_1] \subset M \times (0, \tau_{\max}]$. Una curva de comparación obtenida al recorrer una geodésica de una métrica fija, reparametrizada por $r = \sqrt{s}$, da una cota uniforme superior para $L$ en ese compacto. La coercividad (22.43) implica entonces

$$\int_0^{\sqrt{\tau}} |\mathbf{A}(r)|^2_{\mathbf{g}_{r^2}}\, dr \leq C_K \tag{22.65}$$

para toda minimizante con extremo en el compacto. Como $\sqrt{\tau} \geq \sqrt{\tau_0}$, existe $r_* \in [\sqrt{\tau}/2, 3\sqrt{\tau}/4]$ tal que $|\mathbf{A}(r_*)|^2 \leq C_K$. La ecuación (22.41) y la identidad $\partial_r \mathbf{g}_{r^2} = 4r\,\mathrm{Ric}_{r^2}$ dan, para $E(r) = |\mathbf{A}(r)|^2_{\mathbf{g}_{r^2}}$,

$$E'(r) = 4r^2\langle \nabla R_{r^2}, \mathbf{A}\rangle - 4r\,\mathrm{Ric}_{r^2}(\mathbf{A}, \mathbf{A}), \qquad |E'(r)| \leq C_K(1 + E(r)).$$

Integramos desde $r_*$ en ambas direcciones. Grönwall acota $E$ en todo $[0, \sqrt{\tau}]$, incluidos el dato inicial y la velocidad final. Como $\tau \geq \tau_0$, también $|\mathbf{X}(\tau)| = |\mathbf{A}(\sqrt{\tau})|/(2\sqrt{\tau})$ está acotada uniformemente. Los datos iniciales $\mathbf{A}(0)/2 \in T_pM$ quedan en una bola compacta que no depende de la minimizante.

Fijemos ahora una minimizante $\gamma$ hasta $(q, \tau)$. Elegimos un número $d > 0$, menor que $\tau_0/4$, y ponemos $s_0 = \tau - d$. Reduciremos $d$ una sola vez, en función de las cotas uniformes anteriores. En el intervalo $[s_0, \tau]$

la Lagrangiana

$$(x, V, s) \longmapsto \sqrt{s}\left(R_s(x) + |V|^2_{\mathbf{g}_s}\right)$$

es suave y uniformemente convexa respecto de $V$. En coordenadas normales para una métrica fija alrededor de $q$, la ecuación de Euler–Lagrange es un sistema ordinario regular. Por la dependencia suave de sus soluciones y por el teorema de la función inversa, si $d$ es suficientemente pequeño, el mapeo que envía la velocidad inicial en $s_0$ al extremo en $\tau$ es un difeomorfismo entre vecindades. En coordenadas, su diferencial es $dI + O(d^2)$, uniformemente sobre el conjunto compacto de posiciones, tiempos y velocidades considerado. Por ello la elección de $d$ y las cotas de las derivadas de la inversa pueden hacerse uniformes. En particular, el tramo $\gamma|_{[s_0,\tau]}$ es la única extremal corta que une sus extremos, no tiene un punto conjugado y depende suavemente del extremo final y del tiempo final.

Precisemos el control del dominio de la inversa. En una carta fija, denotemos por $E_\sigma(w)$ el extremo en el tiempo $\sigma$ de la solución que parte de $\gamma(s_0)$ con velocidad $w$, y sea $w_0$ la velocidad del tramo elegido. Las velocidades $w_0$ permanecen en un conjunto acotado. Elegimos un radio $b > 0$ y reducimos $d$ de modo que, en $\overline{B(w_0, b)}$, todas esas soluciones estén en la carta y

$$\left\| d^{-1} D_w E_\tau(w) - I \right\| \le \frac{1}{4}.$$

La elección puede hacerse uniforme: las posiciones, los tiempos y las velocidades recorren compactos en un atlas finito, y las derivadas del sistema ordinario están acotadas en una vecindad de esos compactos. Por continuidad uniforme, para $|\sigma - \tau|$ suficientemente pequeño la cota anterior sigue siendo a lo sumo $1/2$ y $|E_\sigma(w_0) - E_\tau(w_0)| < db/8$. Si además $|y - E_\tau(w_0)| < db/8$, el mapeo

$$w \longmapsto w + d^{-1}(y - E_\sigma(w))$$

es una contracción de constante $1/2$ que lleva $\overline{B(w_0, b)}$ en sí misma: su distancia a $w_0$ es a lo sumo $b/2 + b/4$. Su punto fijo resuelve $E_\sigma(w) = y$. Así se obtiene una vecindad espacio–temporal de radio uniforme donde está definida la inversa. Sus dos primeras derivadas están uniformemente acotadas al reducir una vez más esa vecindad, por la fórmula de la derivada de la inversa y las cotas de las dos primeras derivadas de $E_\sigma$. En particular, al fijar un punto espacio–temporal y reducir una vecindad convexa en coordenadas alrededor de él, todos los apoyos construidos desde puntos de esa vecindad estarán definidos en ella. Los cambios entre las cartas del atlas finito conservan las cotas, pues sus dos primeras derivadas están acotadas en los compactos considerados.

Después de reducir una vecindad de $(q, \tau)$, denotemos por $L_{(\gamma(s_0),s_0)}(y, \sigma)$ la acción de esa extremal corta y pongamos

$$\Phi_{s_0}(y, \sigma) := \mathcal{L}(\gamma|_{[0,s_0]}) + L_{(\gamma(s_0),s_0)}(y, \sigma).$$

La concatenación de la primera porción de $\gamma$ con la extremal corta que termina en $(y, \sigma)$ es una curva admisible; por lo tanto, $L(y, \sigma) \le \Phi_{s_0}(y, \sigma)$, y hay igualdad en $(q, \tau)$. La dependencia suave de esa extremal respecto de los extremos y las cotas uniformes del sistema ordinario y de su inversa dan cotas de sus dos primeras derivadas respecto de $(y, \sigma)$. Al derivar la integral de acción sobre el intervalo corto, se obtiene una cota uniforme para la Hessiana espacial de $\Phi_{s_0}$ y para sus primeras derivadas espaciales y temporales. El intervalo queda separado de $s = 0$ y su longitud tiene una cota inferior positiva en la vecindad elegida, por lo que esas constantes permanecen finitas.

Trabajemos en una de las vecindades convexas comunes obtenidas arriba, y escribamos $z = (x, \tau)$ para sus

coordenadas espacio–temporales. Denotemos por $\Phi_z$ el apoyo construido desde $z$. Si $z'$ está en esa misma vecindad, la cota uniforme $|D\Phi_z| \le A$ implica

$$L(z') - L(z) \le \Phi_z(z') - \Phi_z(z) \le A|z' - z|.$$

Al intercambiar $z$ y $z'$ obtenemos la desigualdad opuesta. Esto prueba la regularidad local Lipschitz de $L$ y, en particular, su continuidad. En cada rebanada temporal, los apoyos tienen una misma cota hessiana y están definidos en un dominio común. El Lema 22.6.8 da entonces la semiconcavidad de $L(\cdot,\tau)$. Como $\tau \ge \tau_0 > 0$, multiplicar por $1/(2\sqrt{\tau})$ conserva la regularidad local Lipschitz espacio–temporal y la semiconcavidad espacial. Las constantes de ambas propiedades para $l$ pueden elegirse uniformes en compactos separados de $\tau = 0$.

Resta identificar el tamaño del lugar de corte. Ya observamos después de la Definición 22.6.3 que $U_p(\tau)$ es abierto y que las funciones son suaves allí. Sea ahora $q \notin U_p(\tau)$ y supongamos que $q$ no es un valor crítico de $\mathcal{L}\exp_p^\tau$. Si $L(\cdot,\tau)$ fuera diferenciable en $q$, la primera variación obligaría a que todas las minimizantes que terminan en $q$ tuvieran la misma velocidad final. La unicidad de (22.42) hacia atrás mostraría que sólo existe una minimizante, con dato inicial $v$ regular.

Esa unicidad persiste en una vecindad. En efecto, si no fuera así, existirían $q_j \to q$ y minimizantes con datos iniciales fuera de una vecindad de $v$, o dos datos distintos con el mismo extremo. Las cotas (22.65) y el argumento de Grönwall anterior hacen compacta la familia de esos datos iniciales. Una subsucesión convergería a un dato que determina una minimizante hasta $q$; por unicidad, el límite sería $v$. Para $j$ grande todos los datos quedarían entonces en una vecindad donde $\mathcal{L}\exp_p^\tau$ es un difeomorfismo, lo que da una contradicción. Así, $q$ pertenecería a $U_p(\tau)$.

El mismo argumento de compacidad para los datos iniciales se aplica cuando varían a la vez el extremo y el tiempo final. Por tanto, la unicidad de una minimizante no conjugada persiste en una vecindad espacio–temporal. El teorema de la función inversa con parámetro temporal muestra que $\mathcal{U} = \{(q,\tau) \in M \times (0,\tau_{\max}] \mid q \in U_p(\tau)\}$ es abierto en ese espacio y que $L$ y $l$ son suaves en $\mathcal{U}$.

Hemos probado que el lugar de corte está contenido en la unión de los valores críticos de $\mathcal{L}\exp_p^\tau$ y del conjunto de no diferenciabilidad de $L(\cdot,\tau)$. El primer conjunto tiene medida cero por el teorema de Sard y el segundo por el teorema de Rademacher. Esto completa la prueba. □

**Lema 22.6.10.** (Semiconcavidad y Hessiana distribucional) Sea $(N^m, \mathbf{h})$ una variedad riemanniana suave sin frontera y sea $u$ localmente semiconcava. Entonces $u \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(N)$, su Hessiana distribucional es un tensor simétrico con valores en medidas de Radon y la parte singular de $\mathrm{Hess}_{\mathbf{h}}\, u$ es negativa semidefinida. En particular, la parte singular de $\Delta_{\mathbf{h}} u$ es una medida no positiva.

*Demostración.* Fijemos una carta y escribamos $\widehat{u} = u \circ \varphi^{-1}$. Reducimos su imagen a un abierto convexo $V$ en el que $v(x) = \widehat{u}(x) - C|x|^2/2$ es cóncava. Por el Lema 22.6.8, $\widehat{u}$ es localmente Lipschitz. El Teorema 7.2.1 da sus derivadas casi en todas partes, localmente acotadas. Son también sus derivadas débiles: para una prueba $\psi \in C_c^\infty(V)$, trasladamos a $\psi$ el cociente $[\widehat{u}(x + te_j) - \widehat{u}(x)]/t$ mediante un cambio de variables. La cota Lipschitz y la convergencia dominada permiten hacer $t \to 0$ y dan

$$\int_V D_j \widehat{u}\, \psi \, d\lambda_m = -\int_V \widehat{u}\, \partial_j \psi \, d\lambda_m.$$

Esto demuestra que $u \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(N)$.

Probemos que las segundas derivadas de $v$ son medidas. Para un vector constante $e \in \mathbb{R}^m$, la concavidad implica $v(x+te)+v(x-te)-2v(x) \le 0$ siempre que el segmento esté en $V$. Si $\psi \in C_c^\infty(V)$ es no negativa y $t \neq 0$ es suficientemente pequeño, integramos esta desigualdad multiplicada por $\psi/t^2$. Al trasladar los incrementos a la prueba resulta

$$\int_V v(x)\frac{\psi(x+te)+\psi(x-te)-2\psi(x)}{t^2}\,d\lambda_m(x) \le 0.$$

El cociente converge uniformemente a $D_{ee}\psi$, con soporte en un compacto fijo. Como $v$ es localmente integrable, al pasar al límite obtenemos

$$\langle D_{ee}v, \psi\rangle \le 0.$$

Por lo tanto, $-D_{ee}v$ es una distribución positiva. El Teorema 4.6.3 la representa mediante una medida de Radon positiva. En particular, si $K \subset V$ es compacto y $0 \le \chi \in C_c^\infty(V)$ es igual a uno cerca de $K$, la positividad da la cota de orden cero

$$|\langle D_{ee}v, \psi\rangle| \le \|\psi\|_\infty \langle -D_{ee}v, \chi\rangle, \qquad \operatorname{supp}(\psi) \subseteq K.$$

Aquí se aplica la positividad a $\|\psi\|_\infty\chi + \psi$ y a $\|\psi\|_\infty\chi - \psi$.

Las derivadas distribucionales conmutan. La identidad de polarización

$$2D_{ij}v = D_{e_i+e_j,e_i+e_j}v - D_{ii}v - D_{jj}v$$

muestra que todos los $D_{ij}v$ son medidas de Radon con signo locales, en el sentido de la Definición B.5.22. Denotémoslas por $\mu_{ij}$. La matriz $(\mu_{ij})$ es simétrica y, para todo $e \in \mathbb{R}^m$,

$$\sum_{i,j=1}^m e_i e_j \mu_{ij} = D_{ee}v \le 0.$$

Esta desigualdad también determina el signo para direcciones que varían con el punto. Para verlo, en un abierto $V_0$ con cerradura compacta contenida en $V$ tomemos la medida positiva finita

$$\nu = \lambda_m \restriction_{V_0} + \sum_{i,j=1}^m |\mu_{ij}| \restriction_{V_0}.$$

El Teorema B.6.29, aplicado a las variaciones positivas y negativas, proporciona densidades $a_{ij} = d\mu_{ij}/d\nu$ y $r = d\lambda_m/d\nu$. Para cada vector $e \in \mathbb{Q}^m$ se cumple $\sum_{i,j=1}^m e_i e_j a_{ij} \le 0$ fuera de un conjunto $\nu$–nulo. Como $\mathbb{Q}^m$ es numerable, podemos excluir un solo conjunto nulo para todas esas direcciones. Por densidad, la matriz simétrica $\mathbf{a} = (a_{ij})$ es negativa semidefinida para $\nu$–casi todo punto.

Pongamos $S = \{x \in V_0 \mid r(x) = 0\}$. Entonces $\lambda_m(S) = 0$ y, en $V_0 \setminus S$, las medidas anteriores tienen densidades $a_{ij}/r$ respecto de $\lambda_m$. Así, su descomposición en partes absolutamente continua y singular es

$$\mu_{ij} = \mathbf{1}_{V_0\setminus S}\frac{a_{ij}}{r}\,d\lambda_m + \mathbf{1}_S a_{ij}\,d\nu.$$

Las medidas de esta igualdad se restringen a $V_0$, y el primer coeficiente se prolonga por cero en $S$. El

segundo sumando es la parte singular, y su matriz tiene el signo ya probado. Como $D_{ij}\widehat{u} = \mu_{ij} + C\delta_{ij}\,d\lambda_m$, el término cuadrático no modifica esa parte singular.

Pasemos a la Hessiana riemanniana, cuidando la medida empleada para identificar las funciones con distribuciones. En esta carta, $D_{ij}\widehat{u}$ es una medida escrita con la convención euclidiana, mientras que $d\lambda_{\mathbf{h}} = \sqrt{\det(\mathbf{h})}\,d\lambda_m$. Si $\mathrm{H}_{ij}$ denota el coeficiente de la Hessiana distribucional cuando ésta se representa por medidas, entonces

$$\mathrm{H}_{ij} = \sqrt{\det(\mathbf{h})}\,D_{ij}\widehat{u} - \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^{k} D_k \widehat{u}\right) d\lambda_{\mathbf{h}}.$$

En efecto, para una función suave ésta es la fórmula coordenada $\mathrm{Hess}_{\mathbf{h}}\,u = \nabla du$ multiplicada por el elemento de volumen. Para la función actual, regularizamos $\widehat{u}$ por convolución en una carta reducida. Las aproximaciones convergen en $W^{1,1}$ en compactos, y sus segundas derivadas convergen distribucionalmente a $D_{ij}\widehat{u}$. La continuidad de la derivación distribucional y de la multiplicación por coeficientes suaves permite pasar al límite en la fórmula. En los solapamientos se pasa al límite también en la ley tensorial de las Hessianas suaves, pues los cambios de coordenadas y sus coeficientes son suaves. Las medidas obtenidas representan, por tanto, el tensor intrínseco $\nabla du$ y no dependen de la carta.

El término que contiene los símbolos de Christoffel tiene densidad localmente acotada. Además, $\lambda_m$ y $\lambda_{\mathbf{h}}$ tienen los mismos conjuntos nulos. Por consiguiente,

$$\mathrm{H}^{\mathrm{s}}_{ij} = \sqrt{\det(\mathbf{h})}\,\mathbf{1}_S a_{ij}\,d\nu.$$

La raíz del determinante es positiva y $\mathbf{a}$ es negativa semidefinida; esto prueba la afirmación sobre la Hessiana singular. Su contracción con la métrica inversa es

$$(\Delta_{\mathbf{h}} u)^{\mathrm{s}} = \sqrt{\det(\mathbf{h})}\,\mathbf{1}_S \left(\sum_{i,j=1}^{m} h^{ij} a_{ij}\right) d\nu \le 0.$$

El signo se sigue de que la traza del producto de una matriz positiva definida y una matriz negativa semidefinida es no positiva.

Registramos también el control local que necesitaremos al variar el tiempo. Si una familia de funciones $u_\tau$ tiene cotas uniformes de $\|\widehat{u}_\tau\|_\infty$, de su constante Lipschitz y de su constante de semiconcavidad en una misma carta, las variaciones totales de las medidas hessianas están uniformemente acotadas sobre cada compacto interior. En efecto, para $v_\tau = \widehat{u}_\tau - C|x|^2/2$ y el corte $\chi$ anterior,

$$(-D_{ee}v_\tau)(K) \le \langle -D_{ee}v_\tau, \chi\rangle \le \|v_\tau\|_{L^\infty(\operatorname{supp}\chi)}\|D_{ee}\chi\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}.$$

Aplicamos esta cota a las finitísimas direcciones $e_i$ y $e_i + e_j$ y usamos la polarización. El término cuadrático y los términos de Christoffel se controlan por las cotas ya indicadas. El control sigue siendo uniforme para una familia suave de métricas en un intervalo compacto, porque sus coeficientes, sus inversas y sus primeras derivadas están acotados en la carta reducida. □

**Proposición 22.6.11.** (Geometría variacional de $\mathcal{L}$) Sea $M$ una variedad suave cerrada y conexa, y sea $\mathbf{g}(t)$ un flujo de Ricci suave en un intervalo que contiene $[t_0 - \tau_{\max}, t_0]$. Para cada $q \in M$ y $0 < \tau \le \tau_{\max}$ existe una minimizante de $\mathcal{L}$. En el conjunto regular se cumplen (22.46), (22.57)–(22.59). En toda la variedad, la

función reducida satisface, en sentido distribucional,

$$\partial_\tau l - \Delta_\tau l + |\nabla^{\mathbf{g}_\tau} l|^2_{\mathbf{g}_\tau} - R_\tau + \frac{m}{2\tau} \geq 0. \tag{22.66}$$

*Demostración.* La existencia y las fórmulas en el conjunto regular se demostraron en los lemas anteriores. Por el Lema 22.6.9, $l$ es localmente Lipschitz en espacio–tiempo y el lugar de corte tiene medida nula en cada rebanada. El teorema de Fubini muestra entonces que (22.60) vale casi en todas partes en $M\times(0,\tau_{\max}]$. Fijemos un intervalo compacto $J \subset (0,\tau_{\max})$. Para casi todo $\tau \in J$, escribimos la medida laplaciana de $l(\cdot,\tau)$ como

$$\Delta_\tau l = (\Delta_\tau l)_{\mathrm{ac}}\, d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} + \mu^{\mathrm{s}}_\tau.$$

El Lema 22.6.10 da $\mu^{\mathrm{s}}_\tau \leq 0$. En el abierto regular la densidad $(\Delta_\tau l)_{\mathrm{ac}}$ coincide con el laplaciano clásico. Como el complemento de ese abierto tiene medida de volumen cero, la desigualdad casi en todas partes obtenida antes implica

$$\partial_\tau l - (\Delta_\tau l)_{\mathrm{ac}} + |\nabla^{\mathbf{g}_\tau} l|^2_{\mathbf{g}_\tau} - R_\tau + \frac{m}{2\tau} \geq 0$$

para casi todo punto de cada una de esas rebanadas.

Sea $\psi \geq 0$ una función suave con soporte compacto contenido en $M \times \mathrm{Int}(J)$. Al integrar en una rebanada, el signo de $-\mu^{\mathrm{s}}_\tau$ da

$$\int_M \left(\partial_\tau l + |\nabla^{\mathbf{g}_\tau} l|^2_{\mathbf{g}_\tau} - R_\tau + \frac{m}{2\tau}\right)\psi\, d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} - \langle \Delta_\tau l, \psi(\cdot,\tau)\rangle \geq 0.$$

El emparejamiento laplaciano se escribe sin separar sus dos partes:

$$\langle \Delta_\tau l, \psi(\cdot,\tau)\rangle = -\int_M \langle \nabla^{\mathbf{g}_\tau} l, \nabla^{\mathbf{g}_\tau}\psi\rangle_{\mathbf{g}_\tau}\, d\lambda_{\mathbf{g}_\tau}.$$

Esta identidad es la definición débil del laplaciano y vale porque $l(\cdot,\tau)$ es localmente Lipschitz. Su lado derecho depende mediblemente de $\tau$ y es integrable en $J$: el gradiente débil de $l$ es conjuntamente medible y está uniformemente acotado en el soporte de $\psi$, y los coeficientes de la métrica son suaves. Lo mismo ocurre con los restantes términos. El control uniforme de las medidas sobre compactos, probado al final del lema anterior, se aplica también aquí, pues las cotas de semiconcavidad y de Lipschitz de $l$ son uniformes en $J$. Por tanto, la integración temporal se justifica directamente por Fubini, sin presuponer la medibilidad de una elección de las medidas singulares por separado. Resulta

$$\int_J \left\{ \int_M \left(\partial_\tau l + |\nabla^{\mathbf{g}_\tau} l|^2_{\mathbf{g}_\tau} - R_\tau + \frac{m}{2\tau}\right)\psi\, d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} + \int_M \langle \nabla^{\mathbf{g}_\tau} l, \nabla^{\mathbf{g}_\tau}\psi\rangle_{\mathbf{g}_\tau}\, d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} \right\} d\tau \geq 0.$$

Finalmente, la derivada temporal débil también coincide con la derivada casi en todas partes de $l$. Con la medida espacio–temporal que usamos, $\partial_\tau d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} = R_\tau d\lambda_{\mathbf{g}_\tau}$; por ello la integración por partes temporal se expresa como

$$\int_J \int_M (\partial_\tau l)\psi\, d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} d\tau = -\int_J \int_M l(\partial_\tau \psi + R_\tau \psi)\, d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} d\tau.$$

La desigualdad anterior es, pues, exactamente (22.66) en sentido distribucional. Como el intervalo $J$ y la prueba eran arbitrarios, queda justificada la formulación utilizada en lo sucesivo; corresponde a la extensión desarrollada en [104, Teorema 7.13]. □

**Definición 22.6.12.** (Volumen reducido) El volumen reducido basado en $(p, t_0)$ es

$$\widetilde{V}(\tau) := \int_M (4\pi\tau)^{-m/2} e^{-l(q,\tau)}\, d\lambda_{\mathbf{g}(t_0-\tau)}(q). \tag{22.67}$$

Para identificar el valor inicial del volumen reducido se necesita una comparación cuantitativa con el modelo euclidiano.

**Lema 22.6.13.** (Comportamiento gaussiano para tiempos pequeños) Fijemos $A > 0$. Existen $C_A > 0$ y $\tau_A > 0$ tales que, en coordenadas normales de $\mathbf{g}(t_0)$ centradas en $p$,

$$\left| l(\exp_p(\sqrt{\tau}\, z), \tau) - \frac{|z|^2_{\mathbf{g}(t_0)}}{4} \right| \le C_A \tau \tag{22.68}$$

para $|z| \le A$ y $0 < \tau \le \tau_A$. Además, existen $c, C > 0$ tales que

$$l(q,\tau) \ge c \frac{d_{\mathbf{g}(t_0)}(p,q)^2}{\tau} - C\tau \tag{22.69}$$

para todo $q \in M$ y todo $\tau$ suficientemente pequeño.

*Demostración.* La cota de curvatura en un intervalo corto proporciona una cota uniforme para $|\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}_s}|_{\mathbf{g}_s}$ y para $|R_s|$. El Lema 22.1.8 compara $\mathbf{g}_s$ con $\mathbf{g}(t_0)$ mediante factores $e^{\pm 2Ks}$. En un intervalo acotado, las desigualdades $e^{-2Ks} \ge 1 - 2Ks$ y $e^{2Ks} \le 1 + 2Ke^{2K\tau_0}s$ permiten elegir $C, \tau_0 > 0$ tales que

$$(1 - C\tau)\mathbf{g}(t_0) \le \mathbf{g}_s \le (1 + C\tau)\mathbf{g}(t_0), \qquad |R_s| \le C, \quad 0 \le s \le \tau \le \tau_0.$$

Reducimos $\tau_0$ para que $C\tau_0 \le 1/2$. La primera desigualdad significa, en cada punto y para cada vector,

$$(1 - C\tau)|v|^2_{\mathbf{g}(t_0)} \le |v|^2_{\mathbf{g}_s}.$$

Por tanto, $|v|_{\mathbf{g}(t_0)} \le \sqrt{2}\,|v|_{\mathbf{g}_s}$, con una constante independiente de $s$ y $\tau$. Sea $d_0 = d_{\mathbf{g}(t_0)}$. Para cualquier curva admisible,

$$d_0(p,q) \le \int_0^\tau |\dot\gamma(s)|_{\mathbf{g}(t_0)}\, ds \le \sqrt{2} \int_0^\tau s^{1/4} |\dot\gamma(s)|_{\mathbf{g}_s} s^{-1/4}\, ds.$$

Cauchy–Schwarz con los pesos $s^{1/4}$ y $s^{-1/4}$ da

$$d_0(p,q)^2 \le C \left( \int_0^\tau \sqrt{s}\, |\dot\gamma|^2_{\mathbf{g}_s} ds \right) \left( \int_0^\tau s^{-1/2} ds \right).$$

Como la segunda integral es $2\sqrt{\tau}$ y el término de curvatura está acotado por $C\tau^{3/2}$, obtenemos (22.69). Para la estimación local usamos la variable $r = \sqrt{s}$. Si $q = \exp_p(\sqrt{\tau} z)$, la curva radial $\alpha(r) = \exp_p(rz)$ proporciona, por (22.40),

$$L(q,\tau) \le \frac{\sqrt{\tau}}{2} |z|^2 + C_A \tau^{3/2}.$$

Sea ahora $\alpha$ una minimizante. Como el término escalar está acotado inferiormente y la cota superior ante-

rior es $O_A(\sqrt{\tau})$, se obtiene la estimación más precisa

$$\int_0^{\sqrt{\tau}} |\alpha'(r)|^2_{\mathbf{g}(t_0)}\, dr \le C_A\sqrt{\tau}. \tag{22.70}$$

Por Cauchy–Schwarz, para $0 \le r \le \sqrt{\tau}$,

$$d_{\mathbf{g}(t_0)}(p, \alpha(r)) \le \int_0^r |\alpha'(\rho)|_{\mathbf{g}(t_0)}\, d\rho \le C_A\sqrt{\tau}.$$

La minimizante permanece, por tanto, en la bola normal de radio $C_A\sqrt{\tau}$. En esas coordenadas, la matriz de coeficientes de $\mathbf{g}(t_0)$ difiere de su valor en $p$ por $O_A(\tau)$ a lo largo de la curva, mientras que la ecuación del flujo da $\mathbf{g}_{r^2} = \mathbf{g}(t_0) + O(\tau)$. En consecuencia, los coeficientes de $\mathbf{g}_{r^2}$ difieren de los de la forma euclidiana $\mathbf{g}(t_0)|_p$ por $O_A(\tau)$ uniformemente sobre la minimizante. La desigualdad de energía euclidiana proporciona entonces

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\tau}} |\alpha'(r)|^2_{\mathbf{g}_{r^2}}\, dr \ge \frac{\sqrt{\tau}}{2}|z|^2 - C_A\tau^{3/2}.$$

El término de curvatura tiene valor absoluto a lo más $C\tau^{3/2}$. Junto con la cota superior radial, esto da

$$\left| L(\exp_p(\sqrt{\tau}z), \tau) - \frac{\sqrt{\tau}}{2}|z|^2 \right| \le C_A\tau^{3/2},$$

y dividir entre $2\sqrt{\tau}$ prueba (22.68). □

**Teorema 22.6.14.** (Monotonía del volumen reducido) Sea $M$ una variedad suave cerrada y conexa, y sea $\mathbf{g}(t)$ un flujo de Ricci suave sobre un intervalo que contiene $[t_0 - \tau_{\max}, t_0]$. El volumen reducido es localmente Lipschitz y no creciente en $(0, \tau_{\max}]$. En particular,

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{V}(\tau) \le 0 \quad \text{para casi todo } \tau \in (0, \tau_{\max}), \qquad \lim_{\tau\to 0^+} \widetilde{V}(\tau) = 1.$$

Además, $\widetilde{V}$ es invariante bajo reescalamientos parabólicos.

*Demostración.* Pongamos $v(q,\tau) = (4\pi\tau)^{-m/2}e^{-l(q,\tau)}$. Expliquemos el paso a $e^{-l}$ en presencia de la parte singular de la Hessiana. Para casi todo $\tau$, escribimos

$$\Delta_\tau l = (\Delta_\tau l)_{\mathrm{ac}}\, d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} + \mu^{\mathrm{s}}_\tau, \qquad \mu^{\mathrm{s}}_\tau \le 0.$$

La regla débil de la cadena da $\nabla(e^{-l}) = -e^{-l}\nabla l$. Para una función de prueba suave $\varphi$ con soporte compacto en una carta, aplicamos la definición de la medida $\Delta_\tau l$ a $\varphi e^{-l}$:

$$\int_M \varphi e^{-l}\, d(\Delta_\tau l) = -\int_M e^{-l}\langle\nabla\varphi, \nabla l\rangle\, d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} + \int_M \varphi e^{-l}|\nabla l|^2\, d\lambda_{\mathbf{g}_\tau}.$$

Este uso de una función de prueba Lipschitz se justifica aproximándola uniformemente y en $W^{1,2}$ por funciones suaves; la convergencia uniforme controla el apareamiento con la medida. Comparando con la

definición de $\Delta_\tau(e^{-l})$ obtenemos

$$\Delta_\tau(e^{-l}) = e^{-l}\bigl(-(\Delta_\tau l)_{\mathrm{ac}} + |\nabla l|^2\bigr)\,d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} - e^{-l}\mu_\tau^{\mathrm{s}}. \tag{22.71}$$

La parte absolutamente continua de $(\partial_\tau - \Delta_{\mathbf{g}_\tau} + R_\tau)v$ es el producto de $-v$ con el miembro izquierdo de (22.66); su parte singular es $v\mu_\tau^{\mathrm{s}}$, que también es no positiva. Por consiguiente,

$$(\partial_\tau - \Delta_{\mathbf{g}_\tau} + R_\tau)v \le 0 \tag{22.72}$$

en sentido de distribuciones. Como $\partial_\tau d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} = R_\tau d\lambda_{\mathbf{g}_\tau}$ y $M$ es cerrada, probar (22.72) contra la función espacial constante uno da

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{V}(\tau) = \int_M (\partial_\tau v + R_\tau v)\,d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} \le 0$$

en distribuciones. Como $l$ es Lipschitz en cada intervalo temporal compacto separado de cero y $M$ es compacta, la integral que define $\widetilde{V}$ es localmente Lipschitz. Su representante continuo es, por tanto, no creciente, y su derivada ordinaria es no positiva casi en todas partes.

Para el límite inicial, fijemos $A \ge 1$ y usemos $q = \exp_p(\sqrt{\tau}z)$. En cada bola $|z| \le A$, (22.68) da $l(q,\tau) \to |z|^2/4$ uniformemente. Además,

$$d\lambda_{\mathbf{g}_\tau}(q) = \tau^{m/2} J_\tau(z)\,dz, \qquad J_\tau(z) \longrightarrow 1$$

uniformemente en esa bola. La compacidad de $M$ y la suavidad de la métrica inicial dan $\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}(t_0)} B(p,r) \le C r^m$ para todo $r > 0$: para radios pequeños se usan las cartas normales y para los restantes se usa el volumen total. Las medidas de $\mathbf{g}_\tau$ y $\mathbf{g}(t_0)$ son uniformemente comparables para $\tau$ pequeño. Dividimos el complemento de $B(p, A\sqrt{\tau})$ en las coronas

$$\{q \in M \mid 2^k A\sqrt{\tau} \le d_0(p,q) < 2^{k+1}A\sqrt{\tau}\}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

La cota (22.69) da entonces

$$\int_{M \setminus B_{\mathbf{g}(t_0)}(p, A\sqrt{\tau})} v\,d\lambda_{\mathbf{g}_\tau} \le C \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+1}A)^m e^{-c4^k A^2}.$$

Esta serie tiende a cero cuando $A \to \infty$, uniformemente para $\tau$ pequeño: la exponencial absorbe el factor polinómico y domina la serie por un múltiplo de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(c/2)4^k A^2}$. Primero hacemos $\tau \to 0^+$ con $A$ fijo y después $A \to \infty$. La convergencia dominada da

$$\lim_{\tau \to 0^+} \widetilde{V}(\tau) = (4\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|z|^2/4}\,dz = 1.$$

Finalmente, para $Q > 0$ sea $\widehat{\mathbf{g}}(\sigma) = Q\mathbf{g}(t_0 + \sigma/Q)$. Un cambio de variable en (22.38) muestra que $l_{\widehat{\mathbf{g}}}(q, Q\tau) = l_{\mathbf{g}}(q,\tau)$, mientras que $d\lambda_{\widehat{\mathbf{g}}(-Q\tau)} = Q^{m/2} d\lambda_{\mathbf{g}(t_0-\tau)}$. Este factor cancela $(Q\tau)^{-m/2}$ y prueba la invariancia. □

## 22.7 El teorema de no colapso

Una cota de curvatura no basta, por sí sola, para obtener un límite suave: una sucesión puede perder volumen en la escala que se observa. La entropía $\mu$ impide este fenómeno durante un intervalo temporal finito. La idea es

comparar dos estimaciones de la misma cantidad. Su monotonía proporciona una cota inferior determinada por la métrica inicial; una función de prueba concentrada en una bola muestra, en cambio, que una razón de volumen muy pequeña haría que $\mu$ fuese arbitrariamente negativa.

**Definición 22.7.1.** (No colapso a escala $r$) Sea $M$ una variedad suave sin frontera y sea $\mathbf{g}(t)$ un flujo de Ricci definido en un intervalo $I$. Siempre que $[t_0 - r^2, t_0] \subseteq I$, ponemos

$$P^-(x_0, t_0, r) := B_{\mathbf{g}(t_0)}(x_0, r) \times [t_0 - r^2, t_0]. \tag{22.73}$$

Decimos que el flujo es $\kappa$–no colapsado a escala $r$ en $(x_0, t_0)$ si la implicación

$$|\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)} \le r^{-2} \text{ en } P^-(x_0, t_0, r) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Vol}_{\mathbf{g}(t_0)} B_{\mathbf{g}(t_0)}(x_0, r) \ge \kappa r^m$$

se cumple.

Primero aislamos los dos ingredientes funcionales y geométricos de la prueba.

**Lema 22.7.2.** (Cota inferior de $\mu$ en escalas acotadas) Sea $(M^m, \mathbf{h})$ una variedad riemanniana cerrada. Para cada $A > 0$ existe $C = C(\mathbf{h}, A) < \infty$ tal que

$$\mu(\mathbf{h}, \sigma) \ge -C \qquad (0 < \sigma \le A).$$

*Demostración.* Para obtener una cota uniforme cuando $\sigma$ tiende a cero necesitamos conservar el coeficiente dimensional del término logarítmico. Elijamos $q > 2$ en el rango del encaje de $H^1$ en $L^q$: si $m \ge 3$, tomamos $q < 2m/(m-2)$; si $m \le 2$, basta cualquier $q < \infty$. La forma euclidiana de Gagliardo–Nirenberg que necesitamos es

$$\|w\|_{L^q(\mathbb{R}^m)} \le C \|dw\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^m)} \|w\|^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \qquad \theta = m\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right), \quad w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Se obtiene del encaje euclidiano $H^1 \hookrightarrow L^q$ del capítulo de Sobolev aplicándolo a $w(\lambda \cdot)$: para cada $\lambda > 0$,

$$\|w\|_{L^q(\mathbb{R}^m)} \le C\left(\lambda^{1-\theta} \|dw\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \lambda^{-\theta} \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}\right).$$

Si $w \neq 0$, elegimos $\lambda = \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} / \|dw\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$; el caso $w = 0$ es inmediato. Al aplicar esta desigualdad a las localizaciones de $v$ en un atlas finito de $(M, \mathbf{h})$, obtenemos

$$\|v\|_{L^q(M)} \le C\left(\|dv\|^{\theta}_{L^2(M, T^*M)} \|v\|^{1-\theta}_{L^2(M)} + \|v\|_{L^2(M)}\right), \qquad \theta = m\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \in (0, 1).$$

Las derivadas de la partición de la unidad aportan el segundo sumando; la cantidad finita de cartas permite tomar una misma constante $C$. Con $\|v\|_{L^2(M)} = 1$ y $E = \|dv\|^2_{L^2(M, T^*M)}$, la desigualdad de Jensen utilizada en (22.35) implica

$$\begin{aligned} \int_M v^2 \log v^2 \, d\lambda_{\mathbf{h}} &\le \frac{2q}{q-2} \log \|v\|_{L^q(M)} \\ &\le \frac{q\theta}{q-2} \log(1 + E) + C = \frac{m}{2} \log(1 + E) + C. \end{aligned}$$

Para $0 < \eta \le 1$, ponemos $z = \eta(1+E) > 0$. Entonces

$$\frac{m}{2}\log(1+E) - \eta E = -\frac{m}{2}\log\eta + \frac{m}{2}\log z - z + \eta \le -\frac{m}{2}\log\eta + C_m,$$

pues la función $z \mapsto (m/2)\log z - z$ alcanza su máximo en $z = m/2$. Obtenemos, por tanto, una constante $C_0 = C_0(M, \mathbf{h})$ tal que

$$\int_M v^2 \log v^2 \, d\lambda_{\mathbf{h}} \le \eta \int_M |dv|^2_{\mathbf{h}} \, d\lambda_{\mathbf{h}} - \frac{m}{2}\log\eta + C_0. \tag{22.74}$$

La expresión variacional de $\mu$ es

$$\mathcal{J}_{\mathbf{h},\sigma}(v) = 4\sigma \int_M |dv|^2_{\mathbf{h}} \, d\lambda_{\mathbf{h}} + \sigma \int_M R_{\mathbf{h}} v^2 \, d\lambda_{\mathbf{h}} - \int_M v^2 \log v^2 \, d\lambda_{\mathbf{h}} - \frac{m}{2}\log(4\pi\sigma) - m.$$

Si $0 < \sigma \le 1/2$, tomamos $\eta = 2\sigma$ en (22.74). El coeficiente de la energía queda igual a $2\sigma \ge 0$, y la diferencia entre $\frac{m}{2}\log(2\sigma)$ y $\frac{m}{2}\log(4\pi\sigma)$ es constante. Como $R_{\mathbf{h}}$ está acotada inferiormente, obtenemos una cota independiente de $\sigma$. Para $1/2 \le \sigma \le A$, usamos $\eta = 1$; entonces $4\sigma - 1 \ge 1$ y los demás términos están uniformemente acotados inferiormente en ese intervalo compacto. Tomar el ínfimo sobre $\|v\|_{L^2(M)} = 1$ prueba el lema. □

**Lema 22.7.3.** (Función de corte en una bola con curvatura acotada) Existen constantes $c_m, C_m > 0$ con la propiedad siguiente. Si $(N^m, \mathbf{h})$ es completa y $|\mathrm{Rm}_{\mathbf{h}}|_{\mathbf{h}} \le r^{-2}$ en $B_{\mathbf{h}}(x,r)$, existe una función Lipschitz $\zeta \colon N \to [0,1]$ tal que

$$\zeta = 1 \text{ en } B_{\mathbf{h}}(x, r/2), \qquad \operatorname{supp}\zeta \subseteq \overline{B_{\mathbf{h}}(x,r)}, \qquad |d\zeta|_{\mathbf{h}} \le \frac{C_m}{r}$$

casi en todas partes. Si $V = \mathrm{Vol}_{\mathbf{h}} B_{\mathbf{h}}(x,r)$ y $Z = \displaystyle\int_N \zeta^2 \, d\lambda_{\mathbf{h}}$, entonces

$$c_m V \le Z \le V. \tag{22.75}$$

*Demostración.* Sea $\eta \colon [0,\infty) \to [0,1]$ una función Lipschitz que vale uno en $[0,1/2]$, se anula en $[1,\infty)$ y satisface $|\eta'| \le 3$. Tomamos $\zeta(y) = \eta(d_{\mathbf{h}}(x,y)/r)$. Las propiedades de soporte y gradiente se siguen de que la función distancia es 1–Lipschitz. Además,

$$\mathrm{Vol}_{\mathbf{h}} B_{\mathbf{h}}(x, r/2) \le Z \le V.$$

La hipótesis de curvatura implica $\mathrm{Ric}_{\mathbf{h}} \ge -(m-1)r^{-2}\mathbf{h}$ en la bola. La comparación relativa de Bishop–Gromov entre los radios $r/2$ y $r$ da $\mathrm{Vol}\, B(x, r/2) \ge c_m \,\mathrm{Vol}\, B(x,r)$, después de reescalar para que $r = 1$. Esto prueba (22.75). □

**Teorema 22.7.4.** ($\kappa$–no colapso en escalas acotadas) Sea $(M^m, \mathbf{g}(t))$, $t \in [0,T)$, un flujo de Ricci sobre una variedad suave cerrada, con $T < \infty$. Para cada $\rho > 0$ existe $\kappa = \kappa(m, \mathbf{g}(0), T, \rho) > 0$ tal que el flujo es $\kappa$–no colapsado en todo $(x_0, t_0)$ y toda escala

$$0 < r \le \min\{\rho, \sqrt{t_0}\}$$

para la cual se cumple la cota de curvatura de la Definición 22.7.1.

*Demostración.* Como una variedad cerrada tiene una cantidad finita de componentes, basta trabajar en la componente de $x_0$ y, al final, tomar el mínimo de las constantes obtenidas. Supondremos, por tanto, que $M$ es conexa.

Aplicamos el Corolario 22.5.6 en el intervalo $[0, t_0]$ con $\tau(s) = t_0 + r^2 - s$. Como $\tau(t_0) = r^2$ y $\tau(0) = t_0 + r^2 \le T + \rho^2$, el Lema 22.7.2 da una constante $\mu_* > -\infty$, independiente de $(x_0, t_0, r)$, tal que

$$\mu(\mathbf{g}(t_0), r^2) \ge \mu(\mathbf{g}(0), t_0 + r^2) \ge \mu_*. \tag{22.76}$$

Pongamos $\mathbf{h} = \mathbf{g}(t_0)$, $B = B_{\mathbf{h}}(x_0, r)$ y $V = \mathrm{Vol}_{\mathbf{h}} B$. La hipótesis parabólica implica, en particular, $|\mathrm{Rm}_{\mathbf{h}}| \le r^{-2}$ en $B$. Sea $\zeta$ la función del Lema 22.7.3, sea $Z = \displaystyle\int_M \zeta^2 \, d\lambda_{\mathbf{h}}$ y definamos $v = Z^{-1/2}\zeta$. Entonces $v \in H^1(M)$, $v \ge 0$ y $\|v\|_{L^2(M)} = 1$. La ampliación de la fórmula variacional a la esfera de $H^1$, justificada en la Proposición 22.5.5, permite usar esta función de prueba.

Estimamos ahora cada término de $\mathcal{J}_{\mathbf{h}, r^2}(v)$. Por (22.75),

$$4r^2 \int_M |dv|^2_{\mathbf{h}} \, d\lambda_{\mathbf{h}} = \frac{4r^2}{Z} \int_M |d\zeta|^2_{\mathbf{h}} \, d\lambda_{\mathbf{h}} \le C_m \frac{V}{Z} \le C_m.$$

Además, $|R_{\mathbf{h}}| \le C_m r^{-2}$ en el soporte de $v$, de modo que

$$\left| r^2 \int_M R_{\mathbf{h}} v^2 \, d\lambda_{\mathbf{h}} \right| \le C_m.$$

Para la entropía usamos $v^2 = \zeta^2 / Z$:

$$\begin{aligned} -\int_M v^2 \log v^2 \, d\lambda_{\mathbf{h}} &= \log Z - \frac{1}{Z} \int_M \zeta^2 \log \zeta^2 \, d\lambda_{\mathbf{h}} \\ &\le \log V + C_m, \end{aligned}$$

pues $0 \le -\zeta^2 \log \zeta^2 \le e^{-1}$ y $Z \ge c_m V$. Por lo tanto,

$$\mu(\mathbf{g}(t_0), r^2) \le \mathcal{J}_{\mathbf{h}, r^2}(v) \le \log \frac{V}{r^m} + C_m. \tag{22.77}$$

La combinación de (22.76) y (22.77) produce

$$V \ge e^{\mu_* - C_m} r^m.$$

Podemos tomar $\kappa = e^{\mu_* - C_m}$, reducido si es necesario para que $0 < \kappa \le 1$. □

**Corolario 22.7.5.** (Radio de inyectividad no degenerado) Sea $(M^m, \mathbf{g}(t))$, $t \in [0, T)$, un flujo de Ricci sobre una variedad suave cerrada. Si es $\kappa$–no colapsado a escala $r$ en $(x_0, t_0)$ y $|\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)} \le r^{-2}$ en $P^-(x_0, t_0, r)$, entonces existe $c = c(m, \kappa) > 0$ tal que

$$\mathrm{inj}_{\mathbf{g}(t_0)}(x_0) \ge cr.$$

*Demostración.* En la rebanada final se cumplen $|\mathrm{Rm}| \le r^{-2}$ en $B(x_0, r)$ y $\mathrm{Vol}\, B(x_0, r) \ge \kappa r^m$. El Lema 22.1.4 da directamente la cota $\mathrm{inj}(x_0) \ge c(m, \kappa) r$. □

Junto con las estimaciones de Shi, este corolario proporciona las dos familias de cotas necesarias para aplicar la compactación de Hamilton a reescalamientos de curvatura: control de todos los jets de la curvatura y una cota inferior del radio de inyectividad en el punto base.

## 22.8 Pinzamiento de Hamilton–Ivey y $\kappa$–soluciones

En dimensión tres, el operador de curvatura puede tener inicialmente una parte negativa. El pinzamiento de Hamilton–Ivey muestra que esa parte se vuelve despreciable frente a la curvatura positiva cuando la escala de curvatura tiende a infinito. Ésta es la razón por la que los modelos límite de una singularidad tridimensional poseen operador de curvatura no negativo.

Denotemos por $\nu(x,t)$ el menor autovalor de $\mathcal{R}_{\mathbf{g}(t)}\colon \Lambda^2 T_xM \to \Lambda^2 T_xM$, con la normalización $\operatorname{tr}_{\Lambda^2}\mathcal{R} = R/2$.

**Teorema 22.8.1.** (Pinzamiento de Hamilton–Ivey) Sea $(M^3, \mathbf{g}(t))$, $0 \le t < T < \infty$, un flujo de Ricci sobre una variedad suave cerrada. Existen constantes $A, B > 0$, determinadas por $\mathbf{g}(0)$, tales que, en todo punto donde $\nu < 0$ y $-\nu \ge B/(1+Bt)$,

$$R \ge 2(-\nu)\left[\log\left(\frac{-\nu}{B}\right) + \log(1+Bt) - A\right]. \tag{22.78}$$

En particular, para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon = C_\varepsilon(\mathbf{g}(0), T)$ tal que

$$\nu \ge -\varepsilon |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t)}|_{\mathbf{g}(t)} - C_\varepsilon \quad \text{en } M \times [0,T). \tag{22.79}$$

La estimación logarítmica es el teorema de Hamilton–Ivey, en la normalización $\operatorname{tr}\mathcal{R} = R/2$ de [104, Teorema 4.26]. Puede tomarse $A = 3$ y $B \ge \max\{1, \|\max\{-\nu(\cdot,0),0\}\|_\infty\}$. En efecto, al sustituir $\mathbf{g}$ por $B\mathbf{g}$ y $t$ por $Bt$, el menor autovalor inicial es al menos $-1$; deshacer esa normalización produce (22.78). El principio del máximo se aplica mediante funciones de apoyo espectrales, de manera que no requiere que $\nu$ sea diferenciable en puntos de multiplicidad.

Obtengamos la consecuencia que usaremos en los límites. Fijemos $\varepsilon > 0$ y una constante dimensional $c_3$ tal que $|R| \le c_3 |\mathrm{Rm}|$. Si $a = -\nu > B\exp(A + c_3/(2\varepsilon))$, entonces se cumple el umbral del teorema y $\log(1+Bt) \ge 0$ implica

$$\frac{c_3}{\varepsilon} a \le 2a\big(\log(a/B) - A\big) \le R \le c_3 |\mathrm{Rm}|.$$

Así, $a \le \varepsilon |\mathrm{Rm}|$. En los puntos restantes, la parte negativa de $\nu$ está acotada por $C_\varepsilon = B\exp(A + c_3/(2\varepsilon))$. Ambas alternativas dan (22.79).

**Definición 22.8.2.** ($\kappa$–solución tridimensional) Una $\kappa$–solución es un flujo de Ricci $(N^3, \mathbf{h}(s))$, $s \in (-\infty, 0]$, sobre una variedad suave, conexa y sin frontera, que satisface las propiedades siguientes:

(a) cada $(N, \mathbf{h}(s))$ es completa y la curvatura está uniformemente acotada en $N \times [a,b]$ para cada $-\infty < a \le b \le 0$;

(b) el flujo no es plano y su operador de curvatura es no negativo;

(c) el flujo es $\kappa$–no colapsado a todas las escalas.

En la última condición se entiende que, para todo $(x,s)$ y todo $r > 0$ tal que el cilindro parabólico correspondiente esté contenido en el intervalo temporal y $|\mathrm{Rm}| \le r^{-2}$ en él, se cumple $\operatorname{Vol}_{\mathbf{h}(s)} B_{\mathbf{h}(s)}(x,r) \ge \kappa r^3$.

El no colapso se conserva al tomar límites suaves. Escribimos este paso porque será necesario para verificar que el límite de los reescalamientos sigue siendo una $\kappa$–solución.

**Lema 22.8.3.** (Estabilidad del no colapso bajo convergencia suave) Sea $(M_i^m, \mathbf{g}_i(t), p_i) \to (M_\infty^m, \mathbf{g}_\infty(t), p_\infty)$ una convergencia suave apuntada sobre compactos espacio–temporales. Supongamos que existen números $R_i \to \infty$ tales que cada flujo $\mathbf{g}_i$ es $\kappa$–no colapsado, en todos sus puntos, para toda escala $0 < r \le R_i$ cuyo cilindro parabólico retrógrado esté contenido en su intervalo temporal. Entonces el flujo límite es $\kappa$–no colapsado a toda escala finita para la cual está definido el cilindro correspondiente.

*Demostración.* Fijemos $x_\infty \in M_\infty$, un tiempo $t_0$ y $r > 0$ para los cuales esté definido $P^-(x_\infty, t_0, r)$ y se cumpla $|\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_\infty}| \le r^{-2}$ en él. Sean $0 < \rho < \sigma < r$. Por completitud, la bola cerrada de radio $\sigma$ en la rebanada final es compacta. Tomamos un encaje de convergencia $\Phi_i$ definido en una vecindad de esa bola y en un abierto mayor que contiene las curvas consideradas a continuación; escribimos $x_i = \Phi_i(x_\infty)$. La propiedad de agotamiento de las bolas asegura que su imagen contiene las bolas apuntadas de radio fijo que necesitamos. Para $i$ grande se tiene

$$B_{\mathbf{g}_i(t_0)}(x_i, \rho) \subseteq \Phi_i\big(B_{\mathbf{g}_\infty(t_0)}(x_\infty, \sigma)\big). \tag{22.80}$$

En efecto, sea $\gamma_i$ una geodésica minimizante, de longitud menor que $\rho$, que parte de $x_i$. Se puede levantar mediante $\Phi_i$ mientras permanezca en la imagen de la bola de radio $\sigma$. Si la curva levantada saliera por primera vez de esa bola, su longitud en la métrica límite hasta ese instante sería al menos $\sigma$. La convergencia uniforme de las métricas en la bola cerrada implica que la longitud correspondiente de $\gamma_i$ es al menos $(1-\varepsilon_i)\sigma$, con $\varepsilon_i \to 0$. Para $i$ grande esto es mayor que $\rho$, una contradicción. Queda probada la inclusión.
La convergencia de las curvaturas en el compacto $\overline{B_{\mathbf{g}_\infty(t_0)}(x_\infty, \sigma)} \times [t_0 - \rho^2, t_0]$ y el margen estricto $r^{-2} < \rho^{-2}$ dan

$$|\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_i}| \le \rho^{-2} \quad \text{en } P^-(x_i, t_0, \rho)$$

para $i$ grande, usando (22.80). Además, $\rho < R_i$ para todos esos índices. El no colapso de los aproximantes proporciona

$$\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}_i(t_0)} B_{\mathbf{g}_i(t_0)}(x_i, \rho) \ge \kappa \rho^m. \tag{22.81}$$

Por la inclusión de bolas y la convergencia de las densidades de volumen en un dominio fijo,

$$\begin{aligned} \kappa\rho^m &\le \liminf_{i\to\infty} \mathrm{Vol}_{\mathbf{g}_i(t_0)} B_{\mathbf{g}_i(t_0)}(x_i, \rho) \\ &\le \mathrm{Vol}_{\mathbf{g}_\infty(t_0)} B_{\mathbf{g}_\infty(t_0)}(x_\infty, \sigma). \end{aligned}$$

Hacemos primero $\rho \to \sigma^-$ y después $\sigma \to r^-$. La continuidad desde abajo de la medida da $\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}_\infty(t_0)} B(x_\infty, r) \ge \kappa r^m$. □

**Teorema 22.8.4.** (Límite de reescalamiento en tiempo singular) Sea $(M^3, \mathbf{g}(t))$, $0 \le t < T < \infty$, una solución maximal sobre una variedad suave cerrada. Sean $(x_i, t_i)$ máximos espacio–temporales como en (22.15), con $t_i \nearrow T$, y sea $Q_i = |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}(t_i)}|_{\mathbf{g}(t_i)}(x_i)$. Entonces $Q_i \to \infty$ y una subsucesión de los flujos reescalados

$$\mathbf{g}_i(s) := Q_i \mathbf{g}(t_i + s/Q_i), \qquad -Q_i t_i \le s \le 0,$$

apuntados en $x_i$, converge suavemente sobre compactos de $M_\infty \times (-\infty, 0]$ a una $\kappa$–solución $(M_\infty, \mathbf{g}_\infty(s), x_\infty)$,

para alguna $\kappa > 0$.

*Demostración.* El criterio de continuación del capítulo anterior implica que $Q_i \to \infty$; como $t_i \to T > 0$, también $Q_i t_i \to \infty$. Por la elección de los máximos espacio–temporales,

$$|\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_i(s)}|_{\mathbf{g}_i(s)} \le 1 \quad (-Q_i t_i \le s \le 0), \qquad |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_i(0)}|_{\mathbf{g}_i(0)}(x_i) = 1. \tag{22.82}$$

Fijemos $A > 0$. Para $i$ grande, el flujo $\mathbf{g}_i$ está definido en $[-A-1, 0]$. Las estimaciones de Shi aplicadas en ese intervalo proporcionan cotas uniformes para todas las derivadas de la curvatura en $[-A, 0]$. Tomemos ahora la escala unitaria en $(x_i, 0)$. En las variables originales corresponde al radio $Q_i^{-1/2}$. Para $i$ grande, ese radio es menor que $\rho$ y que $\sqrt{t_i}$, y (22.82) verifica la hipótesis parabólica del Teorema 22.7.4. La invariancia de la razón de volumen bajo reescalamiento da

$$\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}_i(0)} B_{\mathbf{g}_i(0)}(x_i, 1) \ge \kappa$$

con una misma constante $\kappa > 0$. El Corolario 22.7.5 produce $\mathrm{inj}_{\mathbf{g}_i(0)}(x_i) \ge c(3, \kappa)$.

La primera parte de la prueba del Teorema 22.1.10, aplicada a las métricas $\mathbf{g}_i(0)$, proporciona una única variedad límite $M_\infty$ y encajes espaciales sobre una exhaustión. Fijamos esos encajes. Para cada $A \in \mathbb{N}$, las estimaciones en $[-A-1, 0]$ permiten aplicar la segunda parte de esa prueba en $[-A, 0]$. Elegimos las subsucesiones anidadas al aumentar $A$ y tomamos su diagonal. Los límites temporales coinciden en las intersecciones porque se calculan con los mismos encajes y sobre la misma variedad. Resulta un flujo antiguo completo $(M_\infty, \mathbf{g}_\infty(s), x_\infty)$ para todo $s \le 0$. El valor unitario de la curvatura en el punto base pasa al límite, por lo que el flujo no es plano. La cota de (22.82) también pasa al límite y muestra que cada rebanada tiene curvatura acotada.

Verifiquemos las dos propiedades restantes. Fijemos, por ejemplo, el rango original $\rho = 1$ en el Teorema 22.7.4. En el intervalo reescalado $[-A, 0]$, una escala $r$ corresponde al radio $rQ_i^{-1/2}$ y al tiempo original $t_i + s/Q_i$. Por ello el teorema se aplica simultáneamente en todos los puntos de ese intervalo siempre que

$$0 < r \le R_{i,A} := \min\left\{\sqrt{Q_i}, \sqrt{Q_i t_i - A}\right\}.$$

Como $Q_i \to \infty$ y $Q_i t_i \to \infty$, se tiene $R_{i,A} \to \infty$. La misma constante $\kappa$ sirve para todos los flujos reescalados y para todo radio acotado. Aplicando el Lema 22.8.3 en cada intervalo $[-A, 0]$ y después dejando $A \to \infty$, concluimos que el límite es $\kappa$–no colapsado a todas las escalas.

Finalmente, los autovalores del operador de curvatura se multiplican por $Q_i^{-1}$. La desigualdad (22.79) se transforma en

$$\nu_{\mathbf{g}_i(s)} \ge -\varepsilon |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_i(s)}|_{\mathbf{g}_i(s)} - \frac{C_\varepsilon}{Q_i}.$$

Al hacer $i \to \infty$ obtenemos $\nu_{\mathbf{g}_\infty(s)} \ge -\varepsilon |\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}_\infty(s)}|$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, el operador de curvatura del límite es no negativo. Se cumplen, por tanto, todas las condiciones de la Definición 22.8.2. □

## 22.9 Teoremas estructurales de cirugía y conclusión topológica

Los resultados anteriores describen los límites que aparecen al ampliar una región de gran curvatura. Para continuar el flujo más allá de una singularidad es necesario identificar esas regiones con modelos canónicos, cortar a

lo largo de cuellos casi cilíndricos y colocar casquetes cuya geometría sea compatible con el pinzamiento y el no colapso.

La construcción completa comprende la solución estándar, la persistencia de los casquetes, el no colapso a través de las cirugías, el teorema de vecindades canónicas y la elección inductiva de los parámetros. Estos argumentos ocupan los Capítulos 12–17 de [104]. Utilizaremos sus teoremas de estructura y existencia para determinar el efecto geométrico y topológico de cada cirugía. El paso final consistirá en reconstruir la variedad inicial a partir de las componentes que desaparecen.

El modelo de un cuello es el cilindro redondo contractivo $S^2 \times \mathbb{R}$. Si $\mathbf{g}_{S^2(1)}$ es la métrica de la esfera unitaria, ponemos

$$\mathbf{g}_{\mathrm{cil}}(s) = (2 - 2s)\mathbf{g}_{S^2(1)} + (\mathbf{d}z)^2, \qquad -1 \le s \le 0.$$

La curvatura escalar de la rebanada $s = 0$ es igual a uno.

**Definición 22.9.1.** (Cuellos, casquetes y componentes canónicas) Fijemos $0 < \varepsilon < 1$ y $k = \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor$. Sea $(M^3, \mathbf{g}(t))$ un flujo de Ricci y sea $(x, t_0)$ un punto.
Un abierto $U \subseteq M$ es un *$\varepsilon$–cuello de escala $h > 0$* centrado en $x$ si existe un difeomorfismo

$$\Psi\colon S^2 \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}) \longrightarrow U, \qquad x \in \Psi(S^2 \times \{0\}),$$

tal que

$$\left\| h^{-2}\Psi^*\mathbf{g}(t_0) - \mathbf{g}_{\mathrm{cil}}(0) \right\|_{C^k(\mathbf{g}_{\mathrm{cil}}(0))} < \varepsilon.$$

Es un *$\varepsilon$–cuello fuerte* si $\Psi$ se prolonga a una identificación espacio–temporal con mapeo espacial independiente de $s$, en la que, después de poner $s = h^{-2}(t - t_0)$, se cumple

$$\left\| h^{-2}\Psi^*\mathbf{g}(t_0 + h^2 s) - \mathbf{g}_{\mathrm{cil}}(s) \right\|_{C^k} < \varepsilon.$$

Esta última norma se toma en $S^2 \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}) \times [-1, 0]$, con la métrica de referencia $\mathbf{g}_{\mathrm{cil}}(0) + (\mathbf{d}s)^2$ para calcular las derivadas. La región considerada debe existir durante todo ese intervalo temporal.
Un *$(C, \varepsilon)$–casquete* es un abierto $U$ difeomorfo a una bola abierta $B^3$ o a $\mathbb{RP}^3 \setminus \overline{B^3}$ que se descompone en un núcleo compacto $K$ y un extremo que es un $\varepsilon$–cuello. Si $x \in K$, se exige $R(x, t_0) > 0$ y, en la métrica normalizada $\widehat{\mathbf{g}} = R(x, t_0)\mathbf{g}(t_0)$,

$$\operatorname{diam}_{\widehat{\mathbf{g}}} K \le C, \qquad \operatorname{Vol}_{\widehat{\mathbf{g}}} K \ge C^{-1}, \qquad C^{-1} \le \frac{R(y, t_0)}{R(x, t_0)} \le C \quad (y \in K).$$

Una *$C$–componente* es una componente compacta de curvatura positiva que, al normalizar por la curvatura escalar de cualquiera de sus puntos, tiene diámetro a lo más $C$, curvatura escalar entre $C^{-1}$ y $C$, y volumen entre $C^{-1}$ y $C$. Una *$\varepsilon$–componente redonda* es una componente que, después de esa normalización, está a distancia menor que $\varepsilon$ en $C^k$ de una forma espacial esférica redonda de curvatura escalar uno.

**Definición 22.9.2.** (Vecindad canónica fuerte) Fijados $C < \infty$ y $\varepsilon > 0$, un punto $(x, t)$ de curvatura escalar positiva posee una vecindad canónica fuerte $(C, \varepsilon)$ si ocurre una de las alternativas siguientes:

(a) $x$ es el centro de un $\varepsilon$–cuello fuerte cuya escala es comparable con $R(x, t)^{-1/2}$;

(b) $x$ pertenece al núcleo de un $(C, \varepsilon)$–casquete;

(c) la componente de $x$ es una $C$–componente;

(d) la componente de $x$ es $\varepsilon$–redonda.

En todos los casos se incluyen las estimaciones cuantitativas

$$|\nabla R|(x,t) \le CR(x,t)^{3/2}, \qquad |\partial_t R|(x,t) \le CR(x,t)^2, \tag{22.83}$$

y una cota inferior de volumen, a la escala $R(x,t)^{-1/2}$, de la forma $c(C,\varepsilon)R(x,t)^{-3/2}$.

Para cerrar un cuello se fija una métrica rotacionalmente simétrica $\mathbf{g}_{\mathrm{std}}$ en $\mathbb{R}^3$, con operador de curvatura no negativo y curvatura escalar positiva, que coincide fuera de un compacto con el cilindro normalizado. Su flujo constituye el modelo de los casquetes que se insertan.

**Teorema 22.9.3.** (Solución estándar) Fijada la métrica estándar $\mathbf{g}_{\mathrm{std}}$, existe una única solución completa del flujo de Ricci que parte de ella, definida en $[0,1)$ y con curvatura uniformemente acotada en cada $\mathbb{R}^3\times[0,T_0]$, $T_0<1$. En esos intervalos es asintótica en todos los órdenes, al alejarse del casquete, al cilindro redondo de curvatura escalar $1/(1-t)$.
Existen $r_{\mathrm{std}}>0$ y $\kappa_{\mathrm{std}}>0$ tales que es $\kappa_{\mathrm{std}}$–no colapsada en escalas menores que $r_{\mathrm{std}}$ cuyos cilindros estén contenidos en $[0,1)$. Para cada $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño existen $C_\varepsilon<\infty$ y $R_\varepsilon<\infty$ tales que los puntos con $R(x,t)\ge R_\varepsilon$ poseen vecindades canónicas fuertes $(C_\varepsilon,\varepsilon)$. Las constantes se eligen después de fijar $\varepsilon$ y la métrica estándar.

La existencia, la simetría rotacional, el comportamiento en el infinito y la unicidad se demuestran en [104, Teorema 12.5 y Teoremas 12.28 y 12.32]. La unicidad utiliza un flujo armónico de mapeos y es la versión no compacta del mecanismo de calibre estudiado en el Capítulo 21.

**Definición 22.9.4.** (Flujo de Ricci con cirugía) Un flujo de Ricci con cirugía, definido inicialmente hasta un tiempo $T_*\le\infty$, consta de tiempos de cirugía estrictamente crecientes $t_j$, con $j$ en un subconjunto inicial de $\mathbb{N}$, y de $t_0=0$. La lista puede ser finita, vacía o infinita. En el último caso puede, a priori, acumularse en $T_*$. Entre dos tiempos sucesivos se tienen variedades cerradas $M_j$ y flujos suaves $\mathbf{g}_j(t)$ en $M_j\times[t_j,t_{j+1})$; si hay un último tiempo de cirugía, el intervalo restante termina en $T_*$. En un tiempo de cirugía $t_{j+1}$ se eligen colecciones finitas y disjuntas de cuellos fuertes; se corta a lo largo de sus esferas centrales, se eliminan los extremos y las componentes prescritos por el procedimiento y se cierran las nuevas fronteras con casquetes obtenidos de la solución estándar a la misma escala. Existe un abierto, llamado región que continúa, que se identifica isométricamente antes y después de la cirugía, y la métrica nueva coincide allí con el límite de la métrica anterior. El flujo se extingue en $T_{\mathrm{ext}}$ si todas las componentes han sido descartadas y se adopta $M(t)=\varnothing$ para $t\ge T_{\mathrm{ext}}$.

La operación de corte debe realizarse en escalas suficientemente separadas de la escala de vecindad canónica. Los parámetros siguientes registran esa elección y las propiedades que deben conservarse al repetirla.

**Definición 22.9.5.** (Control estándar de los parámetros de cirugía) Fijemos $\varepsilon>0$ pequeño y la constante $C$ de las vecindades canónicas. Un control estándar consiste en funciones positivas no crecientes

$$r(t), \qquad \kappa(t), \qquad \delta(t)$$

y en una escala de cirugía

$$\rho(t) = \delta(t) r(t), \qquad h(t) = h(\rho(t), \delta(t)) \le \delta(t)^2 r(t).$$

Un flujo con cirugía está sometido a este control si satisface:

(a) el pinzamiento de Hamilton–Ivey;

(b) el no colapso con constante $\kappa(t)$ para las escalas $0 < \rho \le \rho_*$, donde $\rho_* > 0$ es fijo, en los cilindros que sobreviven sin cirugía durante todo su intervalo temporal; en la normalización de la fuente puede tomarse $\rho_* = \varepsilon$;

(c) la hipótesis de vecindades canónicas fuertes para todo punto con $R(x,t) \ge r(t)^{-2}$;

(d) cada cirugía se realiza en cuellos fuertes de precisión $\delta(t)$, centrados en puntos con $R = h(t)^{-2}$, y la métrica posterior se construye con el casquete estándar de escala $h(t)$;

(e) las funciones $r$, $\kappa$ y $\delta$ son positivas y no crecientes; en particular, para cada $T < \infty$, sus valores en $[0,T]$ están acotados inferiormente por los números positivos $r(T)$, $\kappa(T)$ y $\delta(T)$. La selección de la escala $h$ satisface asimismo $h_T := \inf_{t\in[0,T]} h(t) > 0$.

La formulación completa incluye las siete condiciones de compatibilidad del espacio–tiempo, de las regiones que continúan y desaparecen, y de la maximalidad entre dos tiempos de cirugía de [104, Capítulo 15, Secciones 1 y 3].

El primer resultado estructural describe los modelos antiguos que aparecen en la escala de la curvatura.

**Teorema 22.9.6.** (Estructura de las $\kappa$–soluciones tridimensionales) Existe $\overline{\varepsilon} > 0$ tal que, para cada $\kappa > 0$ y $0 < \varepsilon \le \overline{\varepsilon}$, puede elegirse $C = C(\kappa, \varepsilon)$ con la propiedad siguiente. En una $\kappa$–solución tridimensional orientable, todo punto posee, a la escala de su curvatura, un $\varepsilon$–cuello, un $(C,\varepsilon)$–casquete, una $C$–componente o una componente $\varepsilon$–redonda. Las aproximaciones incluyen las estimaciones de curvatura, derivadas y volumen de la Definición 22.9.2. Cuando la alternativa es un cuello, puede elegirse fuerte. La curvatura escalar es positiva en todo punto: si se anulara, el principio fuerte del máximo para $\partial_s R = \Delta R + 2|\mathrm{Ric}|^2$, la conexidad y la unicidad del flujo completo de curvatura acotada forzarían la solución plana, excluida por definición.

Ésta es la descripción cualitativa obtenida en [104, Capítulo 9, en particular Teorema 9.93 y Corolarios 9.94–9.95]. La orientabilidad excluye el cociente cilíndrico $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}$.

**Teorema 22.9.7.** (Teorema de vecindades canónicas) Fijemos una métrica inicial suave $\mathbf{g}_0$ en una variedad cerrada, orientable y tridimensional, un horizonte temporal $T < \infty$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Existen $r = r(\mathbf{g}_0, T, \varepsilon) > 0$ y $C = C(\mathbf{g}_0, T, \varepsilon) < \infty$ tales que, en el flujo suave que parte de $\mathbf{g}_0$, todo punto anterior a $T$ con $R(x,t) \ge r^{-2}$ posee una vecindad canónica fuerte $(C,\varepsilon)$. El umbral también se elige para que los cuellos fuertes dispongan del intervalo temporal requerido.
En los flujos con cirugía del Teorema 22.9.8, esta propiedad se conserva con el umbral temporal $r(t)$ seleccionado junto con los parámetros de cirugía. Las regiones de curvatura grande se aproximan, tras normalizarlas por $R(x,t)$, por regiones de $\kappa$–soluciones o por regiones de la solución estándar que modela una cirugía reciente.

La prueba es por contradicción. Se eligen los primeros puntos donde falla la conclusión, se normaliza su curvatura y se aplican el no colapso, el control de curvatura a distancia acotada y la compactación de Hamilton. Si los tiempos reescalados se prolongan hasta $-\infty$, el límite es una $\kappa$–solución y la descripción de sus vecindades da la contradicción. Si una cirugía impide esa prolongación, el límite está modelado por la solución estándar y se obtiene la misma contradicción. El argumento completo, incluida la estimación de curvatura a distancia acotada y el caso próximo a un casquete de cirugía, se desarrolla en [104, Capítulos 10–12 y 17].

**Teorema 22.9.8.** (Existencia y control del flujo con cirugía) Sea $M$ una variedad suave cerrada, conexa, orientable y tridimensional, y sea $\mathbf{g}_0$ una métrica suave. Existen parámetros de control $r(t)$, $\kappa(t)$, $\delta(t)$ y $h(t)$, y un flujo de Ricci con cirugía que parte de $\mathbf{g}_0$, definido para todo $t \geq 0$ hasta una posible extinción. El flujo satisface el pinzamiento de Hamilton–Ivey, el no colapso y el Teorema 22.9.7; cada cirugía se realiza en una colección finita de cuellos fuertes de escala $h(t)$. Los tiempos de cirugía no se acumulan en ningún intervalo temporal compacto.

Para aplicar la formulación de [104, Teorema 15.9 y Corolario 15.10] a una métrica arbitraria, primero se multiplica $\mathbf{g}_0$ por una constante para normalizar la curvatura y el volumen de las bolas unitarias. La invariancia parabólica del flujo permite después deshacer esa normalización. La persistencia del no colapso a través de los casquetes se prueba en el Capítulo 16, y la hipótesis fuerte de vecindades canónicas y la ausencia de acumulación de cirugías se completan en el Capítulo 17 de la misma fuente. Precisemos la ausencia de acumulación, tal como se utiliza en [104, Lema 17.12]. Fijemos $T < \infty$. El pinzamiento proporciona una cota $R \geq -C_T$, y por ello el volumen total $V(t)$ satisface $V'(t) \leq C_T V(t)$ durante los intervalos suaves. La construcción de los casquetes y la cota $h(t) \geq h_T > 0$ dan un número $v_T > 0$ tal que cada corte de un cuello disminuye el volumen neto al menos en $v_T$, después de añadir el volumen de los casquetes. Al multiplicar por $e^{-C_T t}$, la evolución suave hace no creciente el volumen ponderado y cada corte produce una disminución de al menos $e^{-C_T T} v_T$. Así, el número total $S(T)$ de cortes satisface

$$S(T) \leq \frac{e^{C_T T} V(0)}{v_T}.$$

Puede haber también tiempos en que sólo se descarten componentes, sin cortar un cuello. Cada corte aumenta el número de componentes a lo más en uno. Si inicialmente había $N_0$ componentes, el número $D(T)$ de componentes descartadas satisface $D(T) \leq N_0 + S(T)$. Todo tiempo de cirugía contiene un corte o un descarte, de modo que hay a lo más $S(T) + D(T)$ de esos tiempos en $[0, T]$.

El efecto topológico de cada cirugía también está completamente controlado: se corta a lo largo de esferas y se descartan únicamente componentes cubiertas por cuellos y casquetes.

**Teorema 22.9.9.** (Reconstrucción topológica de las cirugías) Sea $M$ una variedad suave cerrada, conexa, orientable y tridimensional. Si un flujo con cirugía sometido al control del Teorema 22.9.8 se extingue, entonces $M$ es difeomorfa a una suma conexa finita de formas espaciales esféricas y de copias de $S^2 \times S^1$.

*Demostración.* Al cortar una esfera encajada y cerrar con bolas las dos fronteras resultantes se presentan dos casos. Si la esfera separa la componente, se obtienen dos variedades cerradas cuya suma conexa reconstruye la componente original. Si no la separa, el resultado es una variedad cerrada $N$ y la componente original es $N \# (S^2 \times S^1)$; la orientabilidad excluye el fibrado no orientable de esfera sobre el círculo.

La clasificación de las componentes descartadas por el procedimiento estándar da formas espaciales esféricas, $S^2 \times S^1$ y $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$. Este último caso ya es una suma conexa de dos formas espaciales esféricas. El

control de estas alternativas, incluidas las regiones que desaparecen al alcanzar el tiempo singular, es la Proposición 15.3 y el Corolario 15.4 de [104]. Por tanto, en cada paso la variedad anterior se reconstruye a partir de las componentes posteriores añadiendo sólo sumandos de los tipos indicados.

Sea $t_N$ el tiempo de extinción. El teorema de existencia y control da sólo una cantidad finita de tiempos de cirugía en $[0, t_N]$. Comenzamos con la rebanada vacía posterior a $t_N$: las componentes descartadas en ese paso tienen la descomposición descrita. Supongamos reconstruidas todas las componentes inmediatamente posteriores a $t_j$, con $j \in \{1, \dots, N\}$. Invertimos los cortes de $t_j$ mediante las dos operaciones del primer párrafo y añadimos las componentes descartadas en ese tiempo. El resultado vuelve a ser una suma conexa finita de formas espaciales esféricas y copias de $S^2 \times S^1$. Esto prueba el paso hacia la rebanada anterior. Al llegar a $t_0 = 0$ obtenemos la descomposición de $M$. □

Para la Conjetura de Poincaré falta saber que, bajo la hipótesis correspondiente sobre el grupo fundamental, el flujo desaparece en tiempo finito.

**Teorema 22.9.10.** (Extinción en tiempo finito) Sea $M$ una variedad suave cerrada, conexa, orientable y tridimensional, y sea $(M(t), \mathbf{g}(t))$ un flujo con cirugía sometido al control del Teorema 22.9.8. Si

$$\pi_1(M) \cong G_1 * \cdots * G_a * \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{b \text{ factores}}, \qquad a, b \in \mathbb{N}_0, \quad |G_j| < \infty \ (j \in \{1, \dots, a\}), \tag{22.84}$$

entonces el flujo se extingue en un tiempo finito.

La prueba completa se encuentra en los Capítulos 18–19 de [104], junto con la corrección a su Sección 19.2 en [105]. Primero se controla el área mínima de esferas no triviales en $\pi_2$ mediante una desigualdad diferencial de diferencia hacia adelante. Después, cuando las componentes restantes tienen $\pi_2 = 0$ y grupo fundamental finito, se utiliza una clase no trivial de $\pi_3$ representada por familias de lazos y áreas mínimas de discos. La misma estructura diferencial obliga a que la cantidad minimax se vuelva negativa en tiempo finito si la componente persistiera, lo que es imposible. Las modificaciones en un tiempo de cirugía son compatibles con estas cantidades por semicontinuidad.

**Teorema 22.9.11.** (Conjetura de Poincaré) Toda variedad suave cerrada y simplemente conexa de dimensión tres es difeomorfa a $S^3$.

$$M^3 \text{ cerrada y simplemente conexa} \quad \Longrightarrow \quad M^3 \cong S^3.$$

*Demostración.* Sea $M$ una variedad como en el enunciado. Es orientable: de lo contrario, su cubierta de orientación sería una cubierta conexa de dos hojas y daría un cociente no trivial de $\pi_1(M)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Elegimos una métrica suave $\mathbf{g}_0$ y aplicamos el Teorema 22.9.8. Como $\pi_1(M) = 0$, la hipótesis (22.84) se cumple con el producto libre vacío. El Teorema 22.9.10 muestra que el flujo se extingue en tiempo finito.

Por el Teorema 22.9.9, existen formas espaciales esféricas $N_j = S^3/\Gamma_j$ y un entero $b \geq 0$ tales que

$$M \cong N_1 \# \cdots \# N_a \# \underbrace{(S^2 \times S^1) \# \cdots \# (S^2 \times S^1)}_{b \text{ sumandos}}.$$

El teorema de Seifert–van Kampen da

$$\pi_1(M) \cong \Gamma_1 * \cdots * \Gamma_a * \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{b \text{ factores}}.$$

Por el teorema de la forma normal de los productos libres, este grupo sólo puede ser trivial si $b = 0$ y cada $\Gamma_j$ es trivial. En consecuencia, cada $N_j$ es difeomorfa a $S^3$. Como $S^3$ es la unidad de la suma conexa de variedades tridimensionales cerradas y orientables, se concluye que $M \cong S^3$. □

Parte VI

# Geometría en dimensión infinita

# Preámbulo de la Parte VI

Hay un cambio de perspectiva que aparece de manera natural en muchos problemas del análisis geométrico. Hasta ahora hemos estudiado funciones, secciones, métricas o conexiones como objetos definidos sobre una variedad. A partir de esta parte, los consideraremos también como puntos de espacios que poseen su propia estructura geométrica. Un espacio de mapeos, el conjunto de métricas riemannianas o el espacio de conexiones puede comportarse, bajo hipótesis adecuadas, como una variedad de dimensión infinita.

Para trabajar rigurosamente con estos espacios es necesario elegir con cuidado la regularidad. Los espacios de Banach permiten utilizar versiones del teorema de la función inversa, del rango y de la preimagen regular. Los espacios de Hilbert añaden una estructura de producto interno y la identificación de Riesz. Las estructuras Banach–Finsler proporcionan normas tangentes y distancias que serán útiles al estudiar flujos y deformaciones. Cuando una operación pierde derivadas, una sola completación de Sobolev deja de ser suficiente y aparecen las escalas de Hilbert y las estructuras ILH.

En dimensión finita muchas identificaciones son automáticas; aquí dejan de serlo. El tangente cinemático debe distinguirse del operacional, el dual topológico del dual algebraico y una métrica fuerte de una métrica débil. Estas diferencias no son detalles terminológicos: determinan si existe una conexión de Levi–Civita, si el mapeo musical es invertible o si un teorema de cálculo diferencial puede aplicarse. Los capítulos finales muestran cómo esta teoría se concreta en espacios de mapeos, conexiones, grupos gauge, difeomorfismos y problemas como mapeos armónicos, Yang–Mills y la ecuación de Euler.

### Espacios funcionales como variedades

Fréchet abrió el camino hacia un cálculo en espacios abstractos y Banach proporcionó un marco completo en el que los teoremas fundamentales del análisis podían formularse con precisión. Más tarde, Eells y Palais desarrollaron herramientas globales para variedades infinitodimensionales. Ebin y Marsden mostraron la utilidad de las completaciones de Sobolev al estudiar grupos de difeomorfismos y las ecuaciones de fluidos. Con estas ideas, muchos espacios de funciones dejaron de verse únicamente como conjuntos de posibles soluciones y comenzaron a estudiarse como objetos geométricos por derecho propio.

# 23

# Cálculo diferencial en espacios de Banach

Los espacios de Sobolev construidos en las partes anteriores son, a su vez, espacios donde podemos hacer cálculo. Una función, una sección o una métrica se convierte entonces en un punto de un espacio de dimensión infinita, y un funcional de energía se comporta como una función definida sobre ese espacio. Para estudiar sus variaciones necesitamos una noción de derivada que conserve la aproximación lineal y la continuidad propias del caso euclidiano.

La derivada de Fréchet proporciona ese lenguaje en espacios de Banach. Permitirá formular reglas de la cadena, desarrollos de Taylor, teoremas de la función inversa e implícita y multiplicadores de Lagrange. En los capítulos posteriores, estas herramientas describirán variedades de funciones y restricciones variacionales; al final del libro, los puntos críticos de energías definidas sobre espacios de Sobolev volverán a interpretarse como soluciones débiles de ecuaciones diferenciales.

Salvo indicación contraria, en este capítulo todos los espacios vectoriales normados se considerarán sobre el campo de los números reales.

Una referencia general para los resultados y ejercicios de cálculo diferencial y análisis no lineal de este capítulo es [45, Capítulos 3, 4 y 6].

**Fréchet y Banach: ampliar el dominio del cálculo**

Maurice Fréchet introdujo a comienzos del siglo XX estructuras capaces de medir convergencia más allá de los espacios euclidianos. Stefan Banach mostró después la fuerza de trabajar en espacios normados completos, donde los argumentos de aproximación y de punto fijo disponen de límites dentro del propio espacio. El cálculo de Fréchet combina ambas ideas: la derivada es un operador lineal continuo y la completitud permite convertir estimaciones locales en teoremas de existencia [62, 18].

## 23.1 Diferenciabilidad de Fréchet

La noción de derivada de Fréchet generaliza el concepto de derivada de funciones entre espacios euclidianos al contexto de espacios normados. La idea fundamental es la misma que en dimensión finita: una función es diferenciable en un punto si, en una vecindad de éste, puede aproximarse por un mapeo lineal continuo de tal manera que, al dividir el error de aproximación entre la norma del incremento, el cociente converge a cero.

La definición siguiente conserva la idea de aproximación lineal, pero exige que el error sea pequeño de manera uniforme respecto de todas las direcciones medidas por la norma. Esa uniformidad distingue la derivada de Fréchet de nociones meramente direccionales y sostiene los teoremas fundamentales del cálculo en dimensión infinita.

Para un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ escribiremos $d_X(x,y) := \|x-y\|_X$; así, $B_{d_X}(x,r)$ denota la bola de centro $x$ y radio $r$ para la métrica inducida por la norma.

**Definición 23.1.1.** (Derivada de Fréchet) Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios vectoriales normados, sea $U \subseteq X$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow Y$. Decimos que $f$ es **Fréchet diferenciable** en $x_0 \in U$ si existe un operador lineal continuo $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\lim_{h\to 0} \dfrac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$. El operador $L$ se denomina **derivada de Fréchet** de $f$ en $x_0$ y se denota por $Df(x_0)$.

Equivalentemente, $f$ es Fréchet diferenciable en $x_0$ si existen $\rho > 0$ y una función $r\colon B_{d_X}(0,\rho) \longrightarrow Y$ tales que $B_{d_X}(x_0,\rho) \subseteq U$, $f(x_0+h) = f(x_0) + Df(x_0)(h) + r(h)$ para todo $h \in B_{d_X}(0,\rho)$ y $\lim_{h\to 0} \dfrac{\|r(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$.

**Proposición 23.1.2.** La derivada de Fréchet de una función, cuando existe, es única.

*Demostración.* Supongamos que $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ satisfacen la condición de la Definición 23.1.1. Como $U$ es abierto, existe $\rho > 0$ tal que $B_{d_X}(x_0,\rho) \subseteq U$. Sea $v \in X \setminus \{0\}$. Para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < \dfrac{\rho}{\|v\|_X}$ se tiene

$$\frac{\|(L_1-L_2)(v)\|_Y}{\|v\|_X} = \frac{\|(L_1-L_2)(tv)\|_Y}{\|tv\|_X} \leq \frac{\|f(x_0+tv)-f(x_0)-L_1(tv)\|_Y}{\|tv\|_X} + \frac{\|f(x_0+tv)-f(x_0)-L_2(tv)\|_Y}{\|tv\|_X}.$$

Al hacer $t \to 0$, el miembro derecho converge a cero, por lo que $(L_1 - L_2)(v) = 0$. La igualdad también es inmediata para $v = 0$ y, por lo tanto, $L_1 = L_2$. □

La diferenciabilidad de Fréchet implica, en particular, continuidad en el punto considerado.

**Proposición 23.1.3.** Sean $X$ y $Y$ espacios normados, sea $U \subseteq X$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow Y$. Si $f$ es Fréchet diferenciable en $x_0 \in U$, entonces $f$ es continua en $x_0$.

*Demostración.* Por la caracterización anterior, existen $\rho > 0$ y una función $r\colon B_{d_X}(0,\rho) \longrightarrow Y$ tales que $B_{d_X}(x_0,\rho) \subseteq U$, $f(x_0+h) - f(x_0) = Df(x_0)(h) + r(h)$ para todo $h \in B_{d_X}(0,\rho)$ y

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta \in (0,\rho)$ tal que $\|r(h)\|_Y < \varepsilon\|h\|_X$ siempre que $0 < \|h\|_X < \delta$. Para estos incrementos,

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|_Y \leq \big(\|Df(x_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \varepsilon\big)\|h\|_X.$$

El miembro derecho converge a cero cuando $h \to 0$. Por lo tanto, $f(x_0+h) \to f(x_0)$ y $f$ es continua en $x_0$. □

**Definición 23.1.4.** Sean $X$ y $Y$ espacios normados, sea $U \subseteq X$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow Y$. Decimos que $f$ es **Fréchet diferenciable en** $U$ si es Fréchet diferenciable en cada punto de $U$. En este caso queda definido el mapeo derivada $Df\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$. Decimos que $f$ es de **clase** $C^1$ en $U$ si es Fréchet diferenciable en $U$ y

$Df$ es continua respecto de la norma de operadores de $\mathcal{L}(X,Y)$.

La derivada direccional estudia el comportamiento de una función únicamente a lo largo de una dirección fija. La existencia de todas las derivadas direccionales es, en general, una condición más débil que la diferenciabilidad de Fréchet.

**Definición 23.1.5.** (Derivadas direccionales y de Gâteaux) Sean $(X,\|\cdot\|_X)$ y $(Y,\|\cdot\|_Y)$ espacios vectoriales normados, sea $U\subseteq X$ abierto y sea $f\colon U\longrightarrow Y$. Dados $x_0\in U$ y $v\in X$, decimos que $f$ es **diferenciable en $x_0$ en la dirección de $v$** si existe el límite $D_vf(x_0):=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$. A este valor se le denomina **derivada direccional** de $f$ en $x_0$ en la dirección de $v$.
Si $D_vf(x_0)$ existe para toda $v\in X$ y el mapeo $\delta f(x_0)\colon X\longrightarrow Y$, definido por $\delta f(x_0)(v):=D_vf(x_0)$, es lineal y continuo, decimos que $f$ es **Gâteaux diferenciable** en $x_0$. En este caso, $\delta f(x_0)$ se denomina **derivada de Gâteaux** de $f$ en $x_0$.

La mera existencia de todas las derivadas direccionales no basta para garantizar la diferenciabilidad de Gâteaux, pues la dependencia respecto de la dirección puede no ser lineal ni continua.

**Ejercicio 23.1.6.** Considere la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Pruebe que $f$ posee derivada direccional en $(0,0)$ en toda dirección $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ y que

$$D_vf(0,0)=\begin{cases}\dfrac{a^2}{b}, & \text{si } b\neq 0,\\ 0, & \text{si } b=0.\end{cases}$$

Muestre que el mapeo $v\longmapsto D_vf(0,0)$ no es lineal ni continuo y concluya que $f$ no es Gâteaux diferenciable en $(0,0)$.

La diferenciabilidad de Fréchet sí garantiza la diferenciabilidad de Gâteaux y ambas derivadas coinciden.

**Proposición 23.1.7.** Sean $X$ y $Y$ espacios vectoriales normados, sea $U\subseteq X$ abierto y sea $f\colon U\longrightarrow Y$ Fréchet diferenciable en $x_0\in U$. Entonces $f$ es Gâteaux diferenciable en $x_0$ y

$$\delta f(x_0)=Df(x_0).$$

*Demostración.* Pongamos $L:=Df(x_0)$. Por la diferenciabilidad de Fréchet existe una función $r$, definida para incrementos suficientemente pequeños, tal que

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Lh+r(h),\qquad \frac{\|r(h)\|_Y}{\|h\|_X}\longrightarrow 0\quad (h\longrightarrow 0).$$

Fijemos $v \in X$. Para $t \neq 0$ suficientemente pequeño se tiene

$$\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - Lv = \frac{r(tv)}{t}.$$

Si $v = 0$, el miembro izquierdo es idénticamente cero. Si $v \neq 0$, entonces

$$\left\| \frac{r(tv)}{t} \right\|_Y = \|v\|_X \frac{\|r(tv)\|_Y}{\|tv\|_X} \longrightarrow 0 \qquad (t \longrightarrow 0).$$

Por consiguiente, $D_v f(x_0) = Lv$ para todo $v \in X$. Como $L$ es lineal y continuo, $f$ es Gâteaux diferenciable en $x_0$ y $\delta f(x_0) = L = Df(x_0)$. □

El recíproco es falso, incluso para funciones escalares definidas en espacios euclidianos de dimensión finita.

**Ejercicio 23.1.8.** Considere la función $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pruebe que $D_v g(0,0) = 0$ para toda dirección $v \in \mathbb{R}^2$. Concluya que $g$ es Gâteaux diferenciable en $(0,0)$ y que $\delta g(0,0) = 0$. Muestre, sin embargo, que $g(t,t^3) = \dfrac{1}{2}$ para todo $t \neq 0$, por lo que $g$ no es continua en $(0,0)$. Deduzca de la Proposición 23.1.3 que $g$ no es Fréchet diferenciable en dicho punto.

En espacios de Hilbert, los funcionales lineales continuos pueden identificarse con vectores mediante el Teorema B.3.12. Esto permite representar la derivada de un funcional escalar mediante su gradiente.

**Definición 23.1.9.** (Gradiente) Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ un espacio de Hilbert real, sea $U \subseteq H$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux diferenciable en $x \in U$. Por el Teorema B.3.12, existe un único vector $\nabla f(x) \in H$ tal que $\delta f(x)(v) = \langle v, \nabla f(x)\rangle_H$ para todo $v \in H$. Este vector se denomina **gradiente** de $f$ en $x$. Si $f$ es Fréchet diferenciable en $x$, entonces $Df(x)(v) = \langle v, \nabla f(x)\rangle_H$ para todo $v \in H$.

Antes de estudiar las fórmulas del valor medio, recordemos que, por el Corolario B.2.30, para todo espacio normado real $Y$ y cada $y \in Y \setminus \{0\}$ existe $\varphi \in Y'$ tal que $\|\varphi\|_{Y'} = 1$ y $\varphi(y) = \|y\|_Y$. En particular, el dual continuo de todo espacio normado separa sus puntos.

El siguiente resultado proporciona estimaciones del incremento de una función mediante sus derivadas direccionales a lo largo del segmento que une los puntos considerados. La segunda desigualdad ofrece, además, una estimación cuantitativa del error cometido al aproximar dicho incremento mediante la derivada direccional en el punto inicial.

**Teorema 23.1.10.** (Desigualdades del valor medio) Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados reales, sea $U \subseteq X$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow Y$. Sean $x, y \in U$ tales que el segmento $[x,y] := \{x + t(y-x) \mid t \in [0,1]\}$ está contenido en $U$. Supongamos que, para cada $t \in [0,1]$, existe la derivada direccional $D_{y-x} f(x + t(y-x))$. Entonces

$$\|f(y) - f(x)\|_Y \leq \sup_{t\in[0,1]} \|D_{y-x} f(x + t(y-x))\|_Y.$$

Además,

$$\|f(y)-f(x)-D_{y-x}f(x)\|_Y \le \sup_{t\in[0,1]} \|D_{y-x}f(x+t(y-x))-D_{y-x}f(x)\|_Y.$$

Si, además, $f$ es Fréchet diferenciable en cada punto de $[x,y]$, entonces

$$\|f(y)-f(x)\|_Y \le \sup_{t\in[0,1]} \big\|Df(x+t(y-x))(y-x)\big\|_Y \le \left(\sup_{t\in[0,1]} \|Df(x+t(y-x))\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right)\|y-x\|_X,$$

y

$$\|f(y)-f(x)-Df(x)(y-x)\|_Y \le \sup_{t\in[0,1]} \big\|\big(Df(x+t(y-x))-Df(x)\big)(y-x)\big\|_Y$$

$$\le \left(\sup_{t\in[0,1]} \|Df(x+t(y-x))-Df(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right)\|y-x\|_X.$$

En particular, si $U$ es convexo, $f$ es Fréchet diferenciable en cada punto de $U$ y existe una constante $C\ge 0$ tal que $\|Df(z)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\le C$ para todo $z\in U$, entonces $f$ es Lipschitz en $U$ y

$$\|f(y)-f(x)\|_Y \le C\|y-x\|_X$$

para cualesquiera $x,y\in U$.

*Demostración.* Si $f(y)=f(x)$, la primera desigualdad es inmediata. Supongamos que $f(y)\neq f(x)$. Por el Corolario B.2.30, existe $\varphi\in Y'$ tal que $\|\varphi\|_{Y'}=1$ y $\varphi(f(y)-f(x))=\|f(y)-f(x)\|_Y$.
Definamos $g\colon [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ por $g(t):=\varphi(f(x+t(y-x)))$. La existencia de $D_{y-x}f(x+t(y-x))$ para cada $t\in[0,1]$ implica que $g$ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$. Para cada $t\in(0,1)$, la continuidad de $\varphi$ permite escribir

$$g'(t)=\lim_{s\to 0}\varphi\left(\frac{f(x+(t+s)(y-x))-f(x+t(y-x))}{s}\right)=\varphi\big(D_{y-x}f(x+t(y-x))\big).$$

Por el teorema clásico del valor medio, existe $\theta\in(0,1)$ tal que $g(1)-g(0)=g'(\theta)$. Por consiguiente,

$$\|f(y)-f(x)\|_Y=\varphi(f(y)-f(x))=\varphi\big(D_{y-x}f(x+\theta(y-x))\big)$$

$$\le\Big|\varphi\big(D_{y-x}f(x+\theta(y-x))\big)\Big|\le\|D_{y-x}f(x+\theta(y-x))\|_Y.$$

De aquí se sigue que

$$\|f(y)-f(x)\|_Y\le\sup_{t\in[0,1]}\|D_{y-x}f(x+t(y-x))\|_Y.$$

Para demostrar la segunda desigualdad, si $f(y)-f(x)-D_{y-x}f(x)=0$, el resultado es inmediato. Supongamos que $f(y)-f(x)-D_{y-x}f(x)\neq 0$. Por el Corolario B.2.30, existe $\psi\in Y'$ tal que $\|\psi\|_{Y'}=1$ y

$$\psi\big(f(y)-f(x)-D_{y-x}f(x)\big)=\|f(y)-f(x)-D_{y-x}f(x)\|_Y.$$

Definamos $q\colon[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ por $q(t):=\psi(f(x+t(y-x))-f(x)-tD_{y-x}f(x))$. La función $q$ es continua en $[0,1]$, derivable en $(0,1)$ y, para cada $t\in(0,1)$,

$$q'(t)=\psi\big(D_{y-x}f(x+t(y-x))-D_{y-x}f(x)\big).$$

Por el teorema clásico del valor medio, existe $\vartheta \in (0,1)$ tal que $q(1)-q(0)=q'(\vartheta)$. Como $q(0)=0$, se obtiene

$$\|f(y)-f(x)-D_{y-x}f(x)\|_Y = \psi\big(D_{y-x}f(x+\vartheta(y-x))-D_{y-x}f(x)\big)$$

$$\leq \Big|\psi\big(D_{y-x}f(x+\vartheta(y-x))-D_{y-x}f(x)\big)\Big| \leq \|D_{y-x}f(x+\vartheta(y-x))-D_{y-x}f(x)\|_Y.$$

Por lo tanto,

$$\|f(y)-f(x)-D_{y-x}f(x)\|_Y \leq \sup_{t\in[0,1]} \|D_{y-x}f(x+t(y-x))-D_{y-x}f(x)\|_Y.$$

Supongamos ahora que $f$ es Fréchet diferenciable en cada punto de $[x,y]$. Por el Proposición 23.1.7, para cada $t\in[0,1]$ se tiene $D_{y-x}f(x+t(y-x))=Df(x+t(y-x))(y-x)$. La primera desigualdad ya demostrada implica entonces que

$$\|f(y)-f(x)\|_Y \leq \sup_{t\in[0,1]} \big\|Df(x+t(y-x))(y-x)\big\|_Y.$$

Por otra parte, para cada $t\in[0,1]$,

$$\big\|Df(x+t(y-x))(y-x)\big\|_Y \leq \|Df(x+t(y-x))\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|y-x\|_X.$$

Al tomar el supremo respecto de $t\in[0,1]$, se obtiene

$$\|f(y)-f(x)\|_Y \leq \left(\sup_{t\in[0,1]} \|Df(x+t(y-x))\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right)\|y-x\|_X.$$

Asimismo, $D_{y-x}f(x)=Df(x)(y-x)$ y, para cada $t\in[0,1]$, se tiene

$$D_{y-x}f(x+t(y-x))-D_{y-x}f(x)=\big(Df(x+t(y-x))-Df(x)\big)(y-x).$$

La segunda desigualdad ya demostrada implica que

$$\|f(y)-f(x)-Df(x)(y-x)\|_Y \leq \sup_{t\in[0,1]} \big\|\big(Df(x+t(y-x))-Df(x)\big)(y-x)\big\|_Y.$$

Para cada $t\in[0,1]$,

$$\big\|\big(Df(x+t(y-x))-Df(x)\big)(y-x)\big\|_Y \leq \|Df(x+t(y-x))-Df(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|y-x\|_X.$$

Al tomar nuevamente el supremo respecto de $t\in[0,1]$, se obtiene

$$\|f(y)-f(x)-Df(x)(y-x)\|_Y \leq \left(\sup_{t\in[0,1]} \|Df(x+t(y-x))-Df(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right)\|y-x\|_X.$$

Finalmente, supongamos que $U$ es convexo y que $\|Df(z)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\leq C$ para todo $z\in U$. Para cualesquiera $x,y\in U$, el segmento $[x,y]$ está contenido en $U$ y $\sup_{t\in[0,1]}\|Df(x+t(y-x))\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\leq C$. Por la primera estimación, $\|f(y)-f(x)\|_Y\leq C\|y-x\|_X$, por lo que $f$ es Lipschitz en $U$. □

Las desigualdades anteriores proporcionan estimaciones del incremento de la función sin requerir continuidad de las derivadas direccionales. Bajo la hipótesis adicional de que dichas derivadas varían continuamente a lo

largo del segmento y de que el espacio de llegada es completo, puede obtenerse una identidad integral para el incremento.

**Teorema 23.1.11.** (Fórmula integral del valor medio) Sean $(X,\|\cdot\|_X)$ un espacio normado real, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ un espacio de Banach real, sea $U\subseteq X$ abierto y sea $f\colon U\longrightarrow Y$. Sean $x,y\in U$ tales que el segmento $[x,y]:=\{x+t(y-x)\mid t\in[0,1]\}$ está contenido en $U$. Supongamos que $f$ posee derivada direccional en la dirección $y-x$ en cada punto de $[x,y]$ y que el mapeo $F\colon[0,1]\longrightarrow Y$, definido por $F(t):=D_{y-x}f(x+t(y-x))$, es continuo. Entonces

$$f(y)-f(x)=\int_0^1 D_{y-x}f(x+t(y-x))\,dt.$$

*Demostración.* Por la continuidad de $F$ y el Teorema B.6.2, la integral de Riemann $\displaystyle\int_0^1 F(t)\,dt$ está bien definida. Sea $\varphi\in Y'$ y definamos $g_\varphi\colon[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ por $g_\varphi(t):=\varphi(f(x+t(y-x)))$. Para cada $t\in[0,1]$, entendiendo en los extremos las derivadas laterales, la continuidad de $\varphi$ permite escribir

$$g'_\varphi(t)=\lim_{s\to 0}\varphi\left(\frac{f(x+(t+s)(y-x))-f(x+t(y-x))}{s}\right)=\varphi(F(t)).$$

Como $F$ es continua, también lo es $g'_\varphi$. Por el Teorema B.6.5 y la Proposición B.6.4,

$$\varphi(f(y)-f(x))=g_\varphi(1)-g_\varphi(0)=\int_0^1\varphi(F(t))\,dt=\varphi\left(\int_0^1 F(t)\,dt\right).$$

Por lo tanto, $\displaystyle\varphi\left(f(y)-f(x)-\int_0^1 F(t)\,dt\right)=0$ para toda $\varphi\in Y'$. El Corolario B.2.30 implica que $\displaystyle f(y)-f(x)-\int_0^1 F(t)\,dt=0$, lo cual demuestra la fórmula. □

Las propiedades usuales de la derivada se cumplen también en este contexto.

**Teorema 23.1.12.** (propiedades de la derivada direccional) Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados reales, $U\subseteq X$ un conjunto abierto, $x_0\in U$, $v\in X$ y $f,g\colon U\longrightarrow Y$. Si $D_vf(x_0)$ y $D_vg(x_0)$ existen, entonces:

(a) $D_v(f+g)(x_0)$ existe y $D_v(f+g)(x_0)=D_vf(x_0)+D_vg(x_0)$.

(b) Si $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces $D_v(\lambda f)(x_0)$ existe y $D_v(\lambda f)(x_0)=\lambda D_vf(x_0)$.

(c) Si $B\colon Y\times Y\longrightarrow Z$ es un mapeo bilineal continuo, entonces la función $B(f,g)\colon U\longrightarrow Z$, definida por $B(f,g)(x)=B(f(x),g(x))$, posee derivada direccional en $x_0$ en la dirección $v$, y

$$D_v\big(B(f,g)\big)(x_0)=B\big(D_vf(x_0),g(x_0)\big)+B\big(f(x_0),D_vg(x_0)\big).$$

(d) Si $Y=\mathbb{R}$, $g$ es continua en $x_0$ y $g(x_0)\neq 0$, entonces $\displaystyle D_v\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$ existe y

$$D_v\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)=\frac{D_vf(x_0)g(x_0)-f(x_0)D_vg(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

*Demostración.* Para los dos primeros incisos basta aplicar, término a término, la linealidad del límite en el espacio normado $Y$.
Probemos el tercero. Para abreviar, escribamos

$$f_t := f(x_0 + tv), \qquad g_t := g(x_0 + tv), \qquad f_0 := f(x_0), \qquad g_0 := g(x_0).$$

La existencia de las derivadas direccionales implica $f_t \to f_0$ y $g_t \to g_0$ cuando $t \to 0$. Por la bilinealidad de $B$,

$$\frac{B(f_t, g_t) - B(f_0, g_0)}{t} = B\left(\frac{f_t - f_0}{t}, g_t\right) + B\left(f_0, \frac{g_t - g_0}{t}\right).$$

La continuidad de $B$ permite pasar al límite y produce exactamente la fórmula anunciada.
Finalmente, supongamos que $Y = \mathbb{R}$ y $g(x_0) \neq 0$. La continuidad de $g$ en $x_0$ garantiza que $g_t \neq 0$ para $t$ suficientemente pequeño. Entonces

$$\frac{f_t/g_t - f_0/g_0}{t} = \frac{g_0(f_t - f_0) - f_0(g_t - g_0)}{t\, g_t g_0}.$$

Al hacer $t \to 0$, usando $g_t \to g_0$ y la existencia de ambas derivadas direccionales, se obtiene

$$D_v\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{D_v f(x_0) g(x_0) - f(x_0) D_v g(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

□

**Teorema 23.1.13.** (regla de la cadena para derivadas direccionales) Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados reales, sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ conjuntos abiertos, y sean $f\colon U \longrightarrow Y$ y $g\colon V \longrightarrow Z$ funciones tales que $f(U) \subseteq V$. Sean $x_0 \in U$ y $v \in X$. Si $g$ es Fréchet diferenciable en $f(x_0)$ y $D_v f(x_0)$ existe, entonces $D_v(g \circ f)(x_0)$ existe y

$$D_v(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))\big(D_v f(x_0)\big).$$

*Demostración.* Como $U$ y $V$ son abiertos, existen $\delta_0 > 0$ y $\rho > 0$ tales que $x_0 + tv \in U$ para todo $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < \delta_0$ y $B_{d_Y}(f(x_0), \rho) \subseteq V$. Procederemos por casos.

(a) Caso 1: $D_v f(x_0) \neq 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $g$ es Fréchet diferenciable en $f(x_0)$, existe $\delta_1 \in (0, \rho)$ tal que si $0 < \|h\|_Y < \delta_1$, entonces

$$\frac{\|g(f(x_0) + h) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(h)\|_Z}{\|h\|_Y} < \frac{\varepsilon}{2\big(1 + \|D_v f(x_0)\|_Y\big)}.$$

Por otro lado, como $D_v f(x_0)$ existe, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |t| < \delta_2$, entonces

$$\left\| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - D_v f(x_0) \right\|_Y < \min\left\{1, \frac{\|D_v f(x_0)\|_Y}{2}, \frac{\varepsilon}{2\big(1 + \|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\big)}\right\}.$$

Sean $\delta = \min\left\{\delta_0, \delta_2, \dfrac{\delta_1}{1+\|D_v f(x_0)\|_Y}\right\} > 0$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < \delta$. Primero notemos que

$$\frac{\|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y}{|t|} \leq \left\|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - D_v f(x_0)\right\|_Y + \|D_v f(x_0)\|_Y < 1 + \|D_v f(x_0)\|_Y.$$

Por otro lado, por la desigualdad triangular inversa,

$$\frac{\|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y}{|t|} \geq \|D_v f(x_0)\|_Y - \left\|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - D_v f(x_0)\right\|_Y > \frac{\|D_v f(x_0)\|_Y}{2} > 0.$$

En consecuencia, $f(x_0+tv) \neq f(x_0)$ y $0 < \|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y < |t|\big(1+\|D_v f(x_0)\|_Y\big) < \delta_1$.

Sumando y restando $\dfrac{Dg(f(x_0))\big(f(x_0+tv)-f(x_0)\big)}{t}$ y usando la desigualdad triangular, la cantidad

$$\left\|\frac{g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))}{t} - Dg(f(x_0))\big(D_v f(x_0)\big)\right\|_Z$$

es menor o igual que la suma de

$$\frac{\|g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))-Dg(f(x_0))(f(x_0+tv)-f(x_0))\|_Z}{|t|}$$

y

$$\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\left\|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - D_v f(x_0)\right\|_Y.$$

El primer sumando es igual a

$$\frac{\|g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))-Dg(f(x_0))(f(x_0+tv)-f(x_0))\|_Z}{\|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y}\,\frac{\|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y}{|t|},$$

por lo que

$$\frac{\|g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))-Dg(f(x_0))(f(x_0+tv)-f(x_0))\|_Z}{|t|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Asimismo,

$$\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\left\|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - D_v f(x_0)\right\|_Y \leq \frac{\varepsilon\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}}{2\big(1+\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\big)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\frac{g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))}{t} - Dg(f(x_0))\big(D_v f(x_0)\big)\right\|_Z < \varepsilon.$$

En consecuencia, $D_v(g\circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))\big(D_v f(x_0)\big)$.

(b) Caso 2: $D_v f(x_0) = 0$.

En este caso debemos demostrar que $D_v(g\circ f)(x_0) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $g$ es Fréchet diferenciable en $f(x_0)$, existe $\delta_1 \in (0,\rho)$ tal que si $0 < \|h\|_Y < \delta_1$, entonces

$$\frac{\|g(f(x_0)+h)-g(f(x_0))-Dg(f(x_0))(h)\|_Z}{\|h\|_Y} < 1.$$

Por otro lado, como $D_v f(x_0) = 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |t| < \delta_2$, entonces

$$\frac{\|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y}{|t|} < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}}\right\}.$$

Sean $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} > 0$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < \delta$. Si $f(x_0+tv) = f(x_0)$, entonces

$$\left\|\frac{g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))}{t}\right\|_Z = 0 < \varepsilon.$$

Supongamos ahora que $f(x_0+tv) \neq f(x_0)$. En ese caso, $0 < \|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y < |t| < \delta \leq \delta_1$.

Sumando y restando $\dfrac{Dg(f(x_0))\big(f(x_0+tv)-f(x_0)\big)}{t}$ y usando la desigualdad triangular, la cantidad

$$\left\|\frac{g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))}{t}\right\|_Z$$

es menor o igual que la suma de

$$\frac{\|g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))-Dg(f(x_0))(f(x_0+tv)-f(x_0))\|_Z}{|t|}$$

y

$$\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\frac{\|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y}{|t|}.$$

El primer sumando es igual a

$$\frac{\|g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))-Dg(f(x_0))(f(x_0+tv)-f(x_0))\|_Z}{\|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y}\,\frac{\|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y}{|t|},$$

por lo que

$$\frac{\|g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))-Dg(f(x_0))(f(x_0+tv)-f(x_0))\|_Z}{|t|} < \frac{\varepsilon}{1+\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}}.$$

Asimismo,

$$\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\frac{\|f(x_0+tv)-f(x_0)\|_Y}{|t|} \leq \frac{\varepsilon\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}}{1+\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\frac{g(f(x_0+tv))-g(f(x_0))}{t}\right\|_Z < \varepsilon.$$

En consecuencia, $D_v(g\circ f)(x_0) = 0 = Dg(f(x_0))\big(D_v f(x_0)\big)$.

□

La regla de la cadena para derivadas direccionales permite obtener de manera inmediata la correspondiente regla para la derivada de Gâteaux. La versión para la derivada de Fréchet requiere comprobar, además, que la aproximación lineal es uniforme respecto de los incrementos.

**Corolario 23.1.14.** (regla de la cadena para las derivadas de Gâteaux y de Fréchet) Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados, sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ conjuntos abiertos, y sean $f\colon U \longrightarrow Y$ y $g\colon V \longrightarrow Z$ funciones tales que $f(U) \subseteq V$. Sea $x_0 \in U$ y supongamos que $g$ es Fréchet diferenciable en $f(x_0)$.
Si $f$ es Gâteaux diferenciable en $x_0$, entonces $g \circ f$ es Gâteaux diferenciable en $x_0$ y

$$\delta(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ \delta f(x_0).$$

Si $f$ es Fréchet diferenciable en $x_0$, entonces $g \circ f$ es Fréchet diferenciable en $x_0$ y

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

*Demostración.* Supongamos primero que $f$ es Gâteaux diferenciable en $x_0$. Para cada $v \in X$, el Teorema 23.1.13 implica que

$$D_v(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))\big(D_v f(x_0)\big) = Dg(f(x_0))\big(\delta f(x_0)(v)\big).$$

Como $Dg(f(x_0)) \circ \delta f(x_0) \in \mathcal{L}(X,Z)$, se concluye que $g \circ f$ es Gâteaux diferenciable en $x_0$ y $\delta(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ \delta f(x_0)$.
Supongamos ahora que $f$ es Fréchet diferenciable en $x_0$. Por el Proposición 23.1.7, la primera parte muestra que $g \circ f$ es Gâteaux diferenciable en $x_0$ y que el único candidato a derivada de Fréchet es $Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$. Para cada $h \in X \setminus \{0\}$ tal que $x_0 + h \in U$, sumando y restando $Dg(f(x_0))(f(x_0+h) - f(x_0))$ y usando la desigualdad triangular, la cantidad

$$\frac{\big\|g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))\big(Df(x_0)(h)\big)\big\|_Z}{\|h\|_X}$$

es menor o igual que la suma de

$$\frac{\big\|g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)\big\|_Z}{\|h\|_X}$$

y

$$\|Dg(f(x_0))\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X}.$$

Si $f(x_0+h) \neq f(x_0)$, el primer cociente puede escribirse como

$$\frac{\big\|g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)\big\|_Z}{\|f(x_0+h) - f(x_0)\|_Y} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0)\|_Y}{\|h\|_X}.$$

Si $f(x_0+h) = f(x_0)$, dicho cociente es igual a cero. Además,

$$\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0)\|_Y}{\|h\|_X} \leq \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X} + \|Df(x_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Por la diferenciabilidad de Fréchet de $f$ en $x_0$, este último cociente permanece acotado cuando $h \to 0$, mientras que $f(x_0+h) \to f(x_0)$ por la Proposición 23.1.3. La diferenciabilidad de Fréchet de $g$ en $f(x_0)$ implica entonces que el primer sumando converge a cero, y la diferenciabilidad de $f$ implica lo mismo para

el segundo. Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left\| g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))\big(Df(x_0)(h)\big)\right\|_Z}{\|h\|_X} = 0.$$

En consecuencia, $g\circ f$ es Fréchet diferenciable en $x_0$ y $D(g\circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))\circ Df(x_0)$. □

**Corolario 23.1.15.** (composición con un operador lineal continuo) Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados, sea $U\subseteq X$ abierto, sea $f: U\longrightarrow Y$ y sea $A\in\mathcal{L}(Y,Z)$. Dados $x_0\in U$ y $v\in X$, se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) Si $D_v f(x_0)$ existe, entonces $D_v(A\circ f)(x_0)$ existe y $D_v(A\circ f)(x_0) = A\big(D_v f(x_0)\big)$.

(b) Si $f$ es Gâteaux diferenciable en $x_0$, entonces $A\circ f$ es Gâteaux diferenciable en $x_0$ y $\delta(A\circ f)(x_0) = A\circ \delta f(x_0)$.

(c) Si $f$ es Fréchet diferenciable en $x_0$, entonces $A\circ f$ es Fréchet diferenciable en $x_0$ y $D(A\circ f)(x_0) = A\circ Df(x_0)$.

*Demostración.* Para cada $y\in Y$ y cada $h\in Y\setminus\{0\}$ se tiene

$$\frac{\|A(y+h)-A(y)-A(h)\|_Z}{\|h\|_Y} = 0.$$

Por lo tanto, $A$ es Fréchet diferenciable en cada punto de $Y$ y $DA(y) = A$. Las tres afirmaciones se siguen del Teorema 23.1.13 y del Corolario 23.1.14. □

La existencia de la derivada de Gâteaux no garantiza por sí sola la diferenciabilidad de Fréchet. Sin embargo, la continuidad de la derivada de Gâteaux respecto de la norma de operadores proporciona una condición suficiente.

**Proposición 23.1.16.** (continuidad de la derivada de Gâteaux) Sean $X$ y $Y$ espacios normados, sea $U\subseteq X$ abierto, sea $x_0\in U$ y sea $f: U\longrightarrow Y$. Supongamos que existe $r>0$ tal que $B_{d_X}(x_0,r)\subseteq U$, que $f$ es Gâteaux diferenciable en cada punto de $B_{d_X}(x_0,r)$ y que el mapeo $\delta f: B_{d_X}(x_0,r)\longrightarrow\mathcal{L}(X,Y)$ es continuo en $x_0$. Entonces $f$ es Fréchet diferenciable en $x_0$ y $Df(x_0) = \delta f(x_0)$.

*Demostración.* Sea $\varepsilon>0$. Por la continuidad de $\delta f$ en $x_0$, existe $\delta\in(0,r)$ tal que $\|\delta f(z)-\delta f(x_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}<\varepsilon$ para todo $z\in B_{d_X}(x_0,\delta)$.
Sea $h\in X$ tal que $0<\|h\|_X<\delta$. Para cada $t\in[0,1]$ se tiene $\|x_0+th-x_0\|_X = t\|h\|_X<\delta$, por lo que $x_0+th\in B_{d_X}(x_0,\delta)$.
Aplicando la segunda estimación del Teorema 23.1.10 a los puntos $x_0$ y $x_0+h$, obtenemos

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)-D_h f(x_0)\|_Y \leq \sup_{t\in[0,1]} \|D_h f(x_0+th)-D_h f(x_0)\|_Y.$$

Como $f$ es Gâteaux diferenciable en cada punto del segmento, para cada $t\in[0,1]$ se tiene $D_h f(x_0+th) =$

$\delta f(x_0+th)(h)$ y $D_h f(x_0) = \delta f(x_0)(h)$. Por lo tanto,

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - \delta f(x_0)(h)\|_Y \leq \sup_{t\in[0,1]} \left\|\left(\delta f(x_0+th) - \delta f(x_0)\right)(h)\right\|_Y.$$

Por la definición de la norma de operadores y la elección de $\delta$, para cada $t \in [0,1]$ se tiene

$$\left\|\left(\delta f(x_0+th) - \delta f(x_0)\right)(h)\right\|_Y \leq \|\delta f(x_0+th) - \delta f(x_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|h\|_X < \varepsilon\|h\|_X.$$

En consecuencia, $\|f(x_0+h) - f(x_0) - \delta f(x_0)(h)\|_Y \leq \varepsilon\|h\|_X$ y, por lo tanto,

$$\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - \delta f(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X} \leq \varepsilon.$$

Esto demuestra que $f$ es Fréchet diferenciable en $x_0$ y que $Df(x_0) = \delta f(x_0)$. □

La proposición anterior permite caracterizar las funciones de clase $C^1$ mediante la derivada de Gâteaux y la noción de diferenciabilidad ya definida.

**Corolario 23.1.17.** (caracterización de las funciones de clase $C^1$) Sean $X$ y $Y$ espacios normados, sea $U \subseteq X$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow Y$. Entonces $f \in C^1(U,Y)$ si y sólo si $f$ es Gâteaux diferenciable en cada punto de $U$ y el mapeo $\delta f\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ es continuo. En este caso, $Df(x) = \delta f(x)$ para todo $x \in U$.

*Demostración.* Si $f \in C^1(U,Y)$, entonces la Proposición 23.1.7 implica que $f$ es Gâteaux diferenciable en cada punto de $U$ y que $\delta f = Df$. La continuidad de $\delta f$ se sigue de la continuidad de $Df$.
Recíprocamente, supongamos que $f$ es Gâteaux diferenciable en cada punto de $U$ y que $\delta f\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ es continua. Sea $x \in U$. Como $U$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_{d_X}(x,r) \subseteq U$. La Proposición 23.1.16 implica que $f$ es Fréchet diferenciable en $x$ y que $Df(x) = \delta f(x)$. Como $x \in U$ fue arbitrario, $f$ es Fréchet diferenciable en $U$ y $Df = \delta f$. La continuidad de $\delta f$ implica entonces que $Df$ es continua. Por la Definición 23.1.4, se concluye que $f \in C^1(U,Y)$. □

La noción de derivada parcial también se extiende naturalmente al contexto de espacios normados. En este caso conviene distinguir entre derivadas parciales de Gâteaux y de Fréchet, según la noción de diferenciabilidad empleada al fijar las demás variables. En el espacio producto $X \times Y$ consideraremos la norma $\|(h,k)\|_{X\times Y} := \|h\|_X + \|k\|_Y$.

**Definición 23.1.18.** (Derivadas parciales de Gâteaux y de Fréchet) Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados, sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos, sea $f\colon U \times V \longrightarrow Z$ y sea $(x,y) \in U \times V$.
Si la función $f(\cdot,y)\colon U \longrightarrow Z$ es Gâteaux diferenciable en $x$, se define la **derivada parcial de Gâteaux de $f$ respecto de la primera variable** por $\delta_1 f(x,y) := \delta(f(\cdot,y))(x) \in \mathcal{L}(X,Z)$. Si $f(x,\cdot)\colon V \longrightarrow Z$ es Gâteaux diferenciable en $y$, se define la **derivada parcial de Gâteaux respecto de la segunda variable** por $\delta_2 f(x,y) := \delta(f(x,\cdot))(y) \in \mathcal{L}(Y,Z)$.
Si $f(\cdot,y)$ es Fréchet diferenciable en $x$, se define la **derivada parcial de Fréchet de $f$ respecto de la primera variable** por $D_1 f(x,y) := D(f(\cdot,y))(x) \in \mathcal{L}(X,Z)$. Si $f(x,\cdot)$ es Fréchet diferenciable en $y$, se define la **derivada parcial de Fréchet respecto de la segunda variable** por $D_2 f(x,y) := D(f(x,\cdot))(y) \in \mathcal{L}(Y,Z)$.

Las derivadas parciales se obtienen restringiendo la derivada total a las direcciones correspondientes a cada

factor del producto.

**Proposición 23.1.19.** Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados, sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos, sea $f : U \times V \longrightarrow Z$ y sea $(x,y) \in U \times V$.
Si $f$ es Gâteaux diferenciable en $(x,y)$, entonces existen $\delta_1 f(x,y)$ y $\delta_2 f(x,y)$ y, para todo $(h,k) \in X \times Y$,

$$\delta f(x,y)(h,k) = \delta_1 f(x,y)(h) + \delta_2 f(x,y)(k). \tag{23.1}$$

Si $f$ es Fréchet diferenciable en $(x,y)$, entonces existen $D_1 f(x,y)$ y $D_2 f(x,y)$ y, para todo $(h,k) \in X \times Y$,

$$Df(x,y)(h,k) = D_1 f(x,y)(h) + D_2 f(x,y)(k). \tag{23.2}$$

*Demostración.* Supongamos primero que $f$ es Gâteaux diferenciable en $(x,y)$. Sea $h \in X$. Al variar únicamente la primera componente, el incremento $th$ de $x$ corresponde al incremento $(th,0) = t(h,0)$ del punto $(x,y)$. Por lo tanto,

$$\delta_1 f(x,y)(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th,y) - f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x,y) + t(h,0)\big) - f(x,y)}{t} = \delta f(x,y)(h,0).$$

Esto demuestra que $\delta_1 f(x,y)$ existe y coincide con la restricción de $\delta f(x,y)$ al subespacio $X \times \{0\}$. Para la segunda variable, variar únicamente esa componente corresponde al incremento $(0,tk) = t(0,k)$. Por ello, para cada $k \in Y$ se tiene

$$\delta_2 f(x,y)(k) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,y+tk) - f(x,y)}{t} = \delta f(x,y)(0,k).$$

Como $(h,k) = (h,0) + (0,k)$ y $\delta f(x,y)$ es lineal, se sigue que

$$\delta f(x,y)(h,k) = \delta f(x,y)(h,0) + \delta f(x,y)(0,k) = \delta_1 f(x,y)(h) + \delta_2 f(x,y)(k),$$

lo cual demuestra (23.1).
Supongamos ahora que $f$ es Fréchet diferenciable en $(x,y)$. Para cada $h \in X \setminus \{0\}$ tal que $x+h \in U$, se tiene

$$\frac{\|f(x+h,y) - f(x,y) - Df(x,y)(h,0)\|_Z}{\|h\|_X} = \frac{\|f\big((x,y)+(h,0)\big) - f(x,y) - Df(x,y)(h,0)\|_Z}{\|(h,0)\|_{X\times Y}}.$$

El miembro derecho converge a cero cuando $h \to 0$, pues $(h,0) \to (0,0)$ en $X \times Y$. Por consiguiente, $f(\cdot,y)$ es Fréchet diferenciable en $x$ y $D_1 f(x,y)(h) = Df(x,y)(h,0)$ para todo $h \in X$.
Para la segunda variable, si $k \in Y \setminus \{0\}$ y $y + k \in V$, entonces

$$\frac{\|f(x,y+k) - f(x,y) - Df(x,y)(0,k)\|_Z}{\|k\|_Y} = \frac{\|f\big((x,y)+(0,k)\big) - f(x,y) - Df(x,y)(0,k)\|_Z}{\|(0,k)\|_{X\times Y}}.$$

El último cociente converge a cero cuando $k \to 0$. Por lo tanto, $D_2 f(x,y)(k) = Df(x,y)(0,k)$ para todo $k \in Y$. La linealidad de $Df(x,y)$ implica entonces

$$Df(x,y)(h,k) = Df(x,y)(h,0) + Df(x,y)(0,k) = D_1 f(x,y)(h) + D_2 f(x,y)(k),$$

lo cual demuestra (23.2). □

El recíproco no se obtiene, en general, de la mera existencia de las derivadas parciales. Sin embargo, la continuidad de una de ellas respecto de la norma de operadores permite recuperar la diferenciabilidad total.

**Proposición 23.1.20.** (Diferenciabilidad mediante derivadas parciales) Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados, sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos, sea $f : U \times V \longrightarrow Z$ y sea $(x_0, y_0) \in U \times V$. Supongamos que $\delta_1 f(x_0, y_0)$ existe, que $\delta_2 f$ está definida en una vecindad abierta $W \subseteq U \times V$ de $(x_0, y_0)$ y que el mapeo

$$(x, y) \longmapsto \delta_2 f(x, y), \qquad W \longrightarrow \mathcal{L}(Y, Z),$$

es continuo en $(x_0, y_0)$. Entonces $f$ es Gâteaux diferenciable en $(x_0, y_0)$ y la identidad (23.1) se cumple con $(x, y) = (x_0, y_0)$.
Si, además, $D_1 f(x_0, y_0)$ existe, entonces $f$ es Fréchet diferenciable en $(x_0, y_0)$ y la identidad (23.2) se cumple con $(x, y) = (x_0, y_0)$. En este caso,

$$D_2 f(x_0, y_0) = \delta_2 f(x_0, y_0).$$

*Demostración.* Sea $W \subseteq U \times V$ la vecindad abierta del enunciado. Tomemos $r > 0$ tal que $B_{d_{X\times Y}}((x_0, y_0), r) \subseteq W$.
Fijemos $(h, k) \in X \times Y$. El caso $(h, k) = (0, 0)$ es inmediato. Supongamos que $(h, k) \neq (0, 0)$ y que $0 < |t| < \dfrac{r}{\|h\|_X + \|k\|_Y}$. Para cada $\tau \in [0, 1]$ se tiene $\|(th, \tau tk)\|_{X\times Y} \leq |t|(\|h\|_X + \|k\|_Y) < r$; por lo tanto, el segmento que une $(x_0 + th, y_0)$ con $(x_0 + th, y_0 + tk)$ está contenido en $W$.
Sumando y restando $f(x_0 + th, y_0)$, obtenemos

$$\frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t} - \delta_1 f(x_0, y_0)(h) - \delta_2 f(x_0, y_0)(k)$$

$$= \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0 + th, y_0) - \delta_2 f(x_0, y_0)(tk)}{t} + \frac{f(x_0 + th, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} - \delta_1 f(x_0, y_0)(h).$$

Para estimar el primer término, aplicamos la primera desigualdad del valor medio del Teorema 23.1.10 al mapeo $v \longmapsto f(x_0 + th, v) - \delta_2 f(x_0, y_0)(v - y_0)$, entre los puntos $y_0$ y $y_0 + tk$. Su derivada direccional en la dirección $tk$ es $\big(\delta_2 f(x_0 + th, v) - \delta_2 f(x_0, y_0)\big)(tk)$. Al dividir la estimación resultante entre $|t|$, se obtiene

$$\left\| \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0 + th, y_0) - \delta_2 f(x_0, y_0)(tk)}{t} \right\|_Z \leq \sup_{\tau\in[0,1]} \|\delta_2 f(x_0 + th, y_0 + \tau tk) - \delta_2 f(x_0, y_0)\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|k\|_Y.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de $\delta_2 f$ en $(x_0, y_0)$, existe $\eta \in (0, r)$ tal que $\|\delta_2 f(u, v) - \delta_2 f(x_0, y_0)\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} < \varepsilon$ siempre que $(u, v) \in W$ y $\|(u - x_0, v - y_0)\|_{X\times Y} < \eta$. Si $0 < |t| < \dfrac{\eta}{\|h\|_X + \|k\|_Y}$, entonces $\|(th, \tau tk)\|_{X\times Y} < \eta$ para todo $\tau \in [0, 1]$ y, en consecuencia,

$$\left\| \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0 + th, y_0)}{t} - \delta_2 f(x_0, y_0)(k) \right\|_Z \leq \varepsilon \|k\|_Y.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\to 0} \left( \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0 + th, y_0)}{t} - \delta_2 f(x_0, y_0)(k) \right) = 0.$$

Por otra parte, la existencia de $\delta_1 f(x_0, y_0)$ implica

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x_0+th, y_0)-f(x_0,y_0)}{t} - \delta_1 f(x_0,y_0)(h)\right) = 0.$$

Al combinar ambos límites, se concluye que la derivada direccional de $f$ en $(x_0, y_0)$ y en la dirección $(h,k)$ existe y es igual a

$$\delta_1 f(x_0,y_0)(h) + \delta_2 f(x_0,y_0)(k).$$

El mapeo $(h,k) \longmapsto \delta_1 f(x_0,y_0)(h) + \delta_2 f(x_0,y_0)(k)$ es lineal. Además,

$$\|\delta_1 f(x_0,y_0)(h) + \delta_2 f(x_0,y_0)(k)\|_Z \leq \max\left\{\|\delta_1 f(x_0,y_0)\|_{\mathcal{L}(X,Z)}, \|\delta_2 f(x_0,y_0)\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\right\}\|(h,k)\|_{X\times Y},$$

por lo que es continuo. Así, $f$ es Gâteaux diferenciable en $(x_0, y_0)$ y se cumple (23.1).
Supongamos ahora que $D_1 f(x_0, y_0)$ existe y definamos el operador $L\colon X \times Y \longrightarrow Z$ por

$$L(h,k) := D_1 f(x_0,y_0)(h) + \delta_2 f(x_0,y_0)(k).$$

El operador $L$ es lineal y continuo. Demostraremos que constituye la aproximación de Fréchet de $f$ en $(x_0, y_0)$.
Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de $\delta_2 f$ en $(x_0, y_0)$, existe $\eta \in (0, r)$ tal que $\|\delta_2 f(u,v) - \delta_2 f(x_0,y_0)\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ siempre que $(u,v) \in W$ y $\|(u-x_0, v-y_0)\|_{X\times Y} < \eta$. Como $D_1 f(x_0, y_0)$ existe, existe $\rho > 0$ tal que

$$\|f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - D_1 f(x_0,y_0)(h)\|_Z \leq \frac{\varepsilon}{2}\|h\|_X$$

siempre que $0 < \|h\|_X < \rho$; para $h = 0$ ambos miembros son cero.
Sea $\delta := \min\{\eta, \rho\}$ y supongamos que $0 < \|h\|_X + \|k\|_Y < \delta$. Entonces, para todo $\tau \in [0,1]$, se tiene $\|(h, \tau k)\|_{X\times Y} < \eta < r$, de modo que el segmento que une $(x_0 + h, y_0)$ con $(x_0 + h, y_0 + k)$ está contenido en $W$. Sumando y restando $f(x_0 + h, y_0)$, obtenemos

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - L(h,k)$$

$$= f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) - \delta_2 f(x_0,y_0)(k) \quad + f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - D_1 f(x_0,y_0)(h).$$

Aplicamos nuevamente la primera desigualdad del valor medio, ahora al mapeo $v \longmapsto f(x_0 + h, v) - \delta_2 f(x_0, y_0)(v - y_0)$, entre $y_0$ y $y_0 + k$. De este modo se obtiene

$$\|f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) - \delta_2 f(x_0,y_0)(k)\|_Z \leq \sup_{\tau\in[0,1]} \|\delta_2 f(x_0+h, y_0+\tau k) - \delta_2 f(x_0,y_0)\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|k\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2}\|k\|_Y.$$

Por consiguiente,

$$\|f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - L(h,k)\|_Z \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\|h\|_X + \|k\|_Y\right).$$

De aquí se sigue que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - L(h,k)\|_Z}{\|h\|_X + \|k\|_Y} = 0.$$

Así, $f$ es Fréchet diferenciable en $(x_0, y_0)$, $Df(x_0, y_0) = L$ y se cumple (23.2).

Finalmente, la Proposición 23.1.19 implica que $D_2 f(x_0, y_0)$ existe y que, para todo $k \in Y$,

$$D_2 f(x_0, y_0)(k) = Df(x_0, y_0)(0, k) = \delta_2 f(x_0, y_0)(k).$$

Por lo tanto, $D_2 f(x_0, y_0) = \delta_2 f(x_0, y_0)$. □

**Corolario 23.1.21.** (Caracterización de las funciones de clase $C^1$ mediante derivadas parciales) Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados, sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos y sea $f\colon U \times V \longrightarrow Z$. Entonces $f \in C^1(U \times V, Z)$ si y sólo si $\delta_1 f$ y $\delta_2 f$ existen en $U \times V$ y son continuas como mapeos con valores en $\mathcal{L}(X, Z)$ y $\mathcal{L}(Y, Z)$, respectivamente. En este caso, $D_1 f = \delta_1 f$, $D_2 f = \delta_2 f$ y, para todo $(x, y) \in U \times V$ y todo $(h, k) \in X \times Y$,

$$Df(x, y)(h, k) = \delta_1 f(x, y)(h) + \delta_2 f(x, y)(k).$$

*Demostración.* Supongamos primero que $f \in C^1(U \times V, Z)$. Sean $\iota_X\colon X \longrightarrow X \times Y$ e $\iota_Y\colon Y \longrightarrow X \times Y$ los operadores lineales continuos definidos por $\iota_X(h) := (h, 0)$ e $\iota_Y(k) := (0, k)$. Por la Proposición 23.1.19, para cada $(x, y) \in U \times V$ se tiene $D_1 f(x, y) = Df(x, y) \circ \iota_X$ y $D_2 f(x, y) = Df(x, y) \circ \iota_Y$. Como $Df\colon U \times V \longrightarrow \mathcal{L}(X \times Y, Z)$ es continua, también lo son $D_1 f$ y $D_2 f$. Además, la diferenciabilidad de Fréchet implica la diferenciabilidad de Gâteaux y, por lo tanto, $D_j f = \delta_j f$ para $j \in \{1, 2\}$.
Recíprocamente, supongamos que $\delta_1 f$ y $\delta_2 f$ existen y son continuas. Fijado $y \in V$, el mapeo $x \longmapsto f(x, y)$ tiene derivada de Gâteaux $\delta_1 f(x, y)$, continua en norma de operadores respecto de $x$. El Corolario 23.1.17 muestra que este mapeo es de clase $C^1$; en particular, $D_1 f(x, y)$ existe y coincide con $\delta_1 f(x, y)$. Ahora se cumplen todas las hipótesis de la Proposición 23.1.20. Al aplicarla en cada punto de $U \times V$, obtenemos que $f$ es Fréchet diferenciable y que

$$Df(x, y)(h, k) = \delta_1 f(x, y)(h) + \delta_2 f(x, y)(k).$$

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U \times V$. Para todo $(h, k) \in X \times Y$ con $\|(h, k)\|_{X \times Y} \leq 1$ se tiene

$$\big\| \big(Df(x_1, y_1) - Df(x_2, y_2)\big)(h, k) \big\|_Z \leq \|\delta_1 f(x_1, y_1) - \delta_1 f(x_2, y_2)\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \|h\|_X + \|\delta_2 f(x_1, y_1) - \delta_2 f(x_2, y_2)\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|k\|_Y.$$

Al tomar el supremo sobre la bola unitaria de $X \times Y$, obtenemos

$$\|Df(x_1, y_1) - Df(x_2, y_2)\|_{\mathcal{L}(X \times Y, Z)} \leq \|\delta_1 f(x_1, y_1) - \delta_1 f(x_2, y_2)\|_{\mathcal{L}(X,Z)} + \|\delta_2 f(x_1, y_1) - \delta_2 f(x_2, y_2)\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}.$$

La continuidad de las derivadas parciales implica, entonces, la continuidad de $Df$. □

## 23.2 Derivadas de orden superior y fórmula de Taylor

La primera derivada toma valores en $\mathcal{L}(X, Y)$. Al derivarla nuevamente aparecen operadores que dependen linealmente de dos direcciones, y las iteraciones posteriores conducen a operadores multilineales. Por ello, antes de definir derivadas de orden superior, conviene fijar la estructura normada de estos espacios y su relación con los espacios de operadores lineales ya introducidos.

**Definición 23.2.1.** (Operadores multilineales continuos) Sean $X_1,\dots,X_m$ y $Y$ espacios normados, con $m\in\mathbb{N}$. Denotamos por $\mathcal{L}^m(X_1,\dots,X_m;Y)$ el espacio vectorial de los mapeos $m$-lineales continuos $A\colon X_1\times\cdots\times X_m\longrightarrow Y$. Para cada $A\in\mathcal{L}^m(X_1,\dots,X_m;Y)$ definimos

$$\|A\|_{\mathcal{L}^m}:=\sup\big\{\|A(h_1,\dots,h_m)\|_Y\mid h_j\in X_j,\ \|h_j\|_{X_j}\le 1 \text{ para } 1\le j\le m\big\}.$$

Si $X_1=\cdots=X_m=X$, escribimos $\mathcal{L}^m(X;Y)$. En particular, $\mathcal{L}^1(X;Y)=\mathcal{L}(X,Y)$. Denotamos por $\mathcal{L}^m_s(X;Y)$ el subespacio de los operadores simétricos, es decir, de aquellos $A\in\mathcal{L}^m(X;Y)$ tales que $A(h_{\sigma(1)},\dots,h_{\sigma(m)})=A(h_1,\dots,h_m)$ para toda permutación $\sigma$ de $\{1,\dots,m\}$. Por convenio, $\mathcal{L}^0(X;Y):=Y$.

**Proposición 23.2.2.** (Caracterización de la continuidad multilineal) Un mapeo $m$-lineal $A\colon X_1\times\cdots\times X_m\longrightarrow Y$ es continuo si y sólo si existe una constante $C\ge 0$ tal que

$$\|A(h_1,\dots,h_m)\|_Y\le C\prod_{j=1}^m\|h_j\|_{X_j} \tag{23.3}$$

para todos $h_j\in X_j$. En este caso, la menor constante para la cual se cumple (23.3) es $\|A\|_{\mathcal{L}^m}$.

*Demostración.* Supongamos primero que se cumple (23.3). Si $h_j\longrightarrow 0$ en $X_j$ para cada $j$, entonces el miembro derecho de (23.3) converge a cero, por lo que $A$ es continuo en el origen. Sean ahora $x_j,h_j\in X_j$. Por multilinealidad,

$$A(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m)-A(x_1,\dots,x_m)=\sum_{\varnothing\neq I\subseteq\{1,\dots,m\}}A(z_1^I,\dots,z_m^I),$$

donde $z_j^I=h_j$ si $j\in I$ y $z_j^I=x_j$ si $j\notin I$. La desigualdad (23.3), aplicada a cada sumando, muestra que la diferencia converge a cero cuando $(h_1,\dots,h_m)\longrightarrow(0,\dots,0)$. Por lo tanto, $A$ es continuo en todo punto.
Recíprocamente, supongamos que $A$ es continuo en el origen. Existe $\rho>0$ tal que $\|A(u_1,\dots,u_m)\|_Y<1$ siempre que $\|u_j\|_{X_j}<\rho$ para todo $j$. Si ninguno de los vectores $h_j$ es nulo, definamos $u_j:=\dfrac{\rho h_j}{2\|h_j\|_{X_j}}$. Entonces $\|u_j\|_{X_j}=\dfrac{\rho}{2}$ y, por multilinealidad,

$$\|A(h_1,\dots,h_m)\|_Y<\left(\frac{2}{\rho}\right)^m\prod_{j=1}^m\|h_j\|_{X_j}.$$

Si alguno de los vectores es nulo, ambos miembros de (23.3) son nulos. Esto prueba la existencia de una constante $C$.
Finalmente, si (23.3) se cumple con la constante $C$, entonces $\|A\|_{\mathcal{L}^m}\le C$. Por otra parte, para vectores no nulos, al aplicar la definición de la norma a $\dfrac{h_j}{\|h_j\|_{X_j}}$ se obtiene

$$\|A(h_1,\dots,h_m)\|_Y\le\|A\|_{\mathcal{L}^m}\prod_{j=1}^m\|h_j\|_{X_j}.$$

Por lo tanto, $\|A\|_{\mathcal{L}^m}$ es la menor constante posible. □

**Proposición 23.2.3.** (Completitud y asociación de operadores multilineales) Si $Y$ es Banach, entonces $\mathcal{L}^m(X_1,\dots,X_m;Y)$ es Banach. Además, el mapeo

$$\mathfrak{C}:\mathcal{L}^{m+1}(X_1,\dots,X_m,X_{m+1};Y)\longrightarrow\mathcal{L}\big(X_{m+1},\mathcal{L}^m(X_1,\dots,X_m;Y)\big),$$

definido por

$$\mathfrak{C}(A)(h_{m+1})(h_1,\dots,h_m):=A(h_1,\dots,h_m,h_{m+1}),$$

es un isomorfismo lineal isométrico. En particular, si $Y$ es Banach, entonces $\mathcal{L}^m_s(X;Y)$ es un subespacio cerrado y, por lo tanto, un espacio de Banach.

*Demostración.* Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^m(X_1,\dots,X_m;Y)$. Para cada $(h_1,\dots,h_m)\in X_1\times\cdots\times X_m$ se tiene

$$\|(A_j-A_k)(h_1,\dots,h_m)\|_Y\le\|A_j-A_k\|_{\mathcal{L}^m}\prod_{i=1}^m\|h_i\|_{X_i}.$$

Por lo tanto, $(A_j(h_1,\dots,h_m))_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $Y$. Definamos $A(h_1,\dots,h_m):=\lim_{j\to\infty}A_j(h_1,\dots,h_m)$. El paso al límite en cada variable muestra que $A$ es $m$-lineal.
Como $(A_j)$ es de Cauchy, existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que $\|A_j-A_k\|_{\mathcal{L}^m}<1$ para todos $j,k\ge j_0$. Al hacer $k\to\infty$ en la estimación anterior se obtiene

$$\|(A_j-A)(h_1,\dots,h_m)\|_Y\le\prod_{i=1}^m\|h_i\|_{X_i}$$

para todo $j\ge j_0$. La Proposición 23.2.2 implica que $A_j-A$ es continuo. Además, dado $\varepsilon>0$, existe $j_1\in\mathbb{N}$ tal que $\|A_j-A_k\|_{\mathcal{L}^m}<\varepsilon$ para todos $j,k\ge j_1$. Al hacer $k\to\infty$ y tomar el supremo sobre las bolas unitarias, se obtiene $\|A_j-A\|_{\mathcal{L}^m}\le\varepsilon$ para todo $j\ge j_1$. Así, $A_j\longrightarrow A$ y el espacio es completo.
Es inmediato que $\mathfrak{C}$ es lineal. Para cada $A$ se tiene

$$\|\mathfrak{C}(A)\|=\sup_{\substack{h_{m+1}\in X_{m+1}\\ \|h_{m+1}\|_{X_{m+1}}\le1}}\ \sup_{\substack{h_i\in X_i,\ 1\le i\le m\\ \|h_i\|_{X_i}\le1}}\|A(h_1,\dots,h_m,h_{m+1})\|_Y=\|A\|_{\mathcal{L}^{m+1}},$$

por lo que es una isometría. Si $T\in\mathcal{L}(X_{m+1},\mathcal{L}^m(X_1,\dots,X_m;Y))$, el mapeo $A_T(h_1,\dots,h_{m+1}):=T(h_{m+1})(h_1,\dots,h_m)$ es $(m+1)$-lineal continuo y satisface $\mathfrak{C}(A_T)=T$. Por lo tanto, $\mathfrak{C}$ es suprayectivo.
Finalmente, si una sucesión de operadores simétricos converge en norma a $A$, el paso al límite en la identidad de simetría muestra que $A$ también es simétrico. Así, $\mathcal{L}^m_s(X;Y)$ es cerrado. □

Para $A\in\mathcal{L}^m(X;Y)$ escribiremos $A[h_1,\dots,h_m]:=A(h_1,\dots,h_m)$ y $A[h]^m:=A(h,\dots,h)$.

**Proposición 23.2.4.** (Diferenciabilidad de los operadores multilineales) Sean $X_1,\dots,X_m$ y $Y$ espacios normados, y sea $A\in\mathcal{L}^m(X_1,\dots,X_m;Y)$. Considerado como mapeo sobre el espacio producto, $A$ es suave y

$$DA(x_1,\dots,x_m)(h_1,\dots,h_m)=\sum_{j=1}^m A(x_1,\dots,x_{j-1},h_j,x_{j+1},\dots,x_m).$$

*Demostración.* Por multilinealidad,

$$A(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m)-A(x_1,\dots,x_m)$$

es la suma de los términos en los que al menos una de las variables $x_j$ ha sido sustituida por $h_j$. Los términos que contienen exactamente un incremento forman el mapeo lineal indicado en el enunciado. Los restantes contienen al menos dos incrementos. Si $\max_{j\in\{1,\dots,m\}}\|h_j\|_{X_j}<1$, la Proposición 23.2.2 permite estimar la norma de la suma restante por

$$\|A\|_{\mathcal{L}^m}\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,m\}\\ \#I\geq 2}}\prod_{j\in I}\|h_j\|_{X_j}\prod_{j\in\{1,\dots,m\}\setminus I}\max\{1,\|x_j\|_{X_j}\}.$$

Al dividir entre $\sum_{j=1}^{m}\|h_j\|_{X_j}$, cada sumando converge a cero cuando $(h_1,\dots,h_m)\longrightarrow 0$. Esto prueba la fórmula de la primera derivada. Para precisar las derivadas sucesivas, escribamos $E:=X_1\times\cdots\times X_m$, con la norma suma, y fijemos $k\in\{1,\dots,m\}$. Sea $\mathcal{I}_k$ el conjunto de los mapeos inyectivos $\sigma\colon\{1,\dots,k\}\longrightarrow\{1,\dots,m\}$. Para $x=(x_1,\dots,x_m)\in E$ y $h^{(a)}=(h_1^{(a)},\dots,h_m^{(a)})\in E$, con $a\in\{1,\dots,k\}$, pongamos

$$z_i^\sigma:=\begin{cases}h_i^{(a)}, & i=\sigma(a)\text{ para algún }a\in\{1,\dots,k\},\\ x_i, & i\in\{1,\dots,m\}\setminus\operatorname{im}(\sigma).\end{cases}$$

La inyectividad de $\sigma$ hace inequívoca esta definición. Definimos la forma $k$–lineal continua

$$B_k(x)[h^{(1)},\dots,h^{(k)}]:=\sum_{\sigma\in\mathcal{I}_k}A(z_1^\sigma,\dots,z_m^\sigma).$$

La fórmula ya demostrada dice que $DA=B_1$. Supongamos ahora $1\leq k<m$. Para calcular el incremento de $B_k$ al reemplazar $x$ por $x+u$, expandimos cada sumando por multilinealidad. Los términos lineales en $u$ se obtienen eligiendo un índice $i\in\{1,\dots,m\}\setminus\operatorname{im}(\sigma)$ y sustituyendo $x_i$ por $u_i$. A cada par $(\sigma,i)$ le corresponde exactamente un mapeo de $\mathcal{I}_{k+1}$, que coincide con $\sigma$ en $\{1,\dots,k\}$ y envía $k+1$ en $i$. La suma de esos términos es, por lo tanto, $B_{k+1}(x)[h^{(1)},\dots,h^{(k)},u]$.

Los términos restantes contienen al menos dos componentes de $u$. Si $\|u\|_E\leq 1$, la cota multilineal los estima, en conjunto, por

$$C_{A,x,k}\|u\|_E^2\prod_{a=1}^{k}\|h^{(a)}\|_E,$$

donde $C_{A,x,k}$ es finita: sólo intervienen un número finito de sumandos, la norma de $A$ y los factores $\max\{1,\|x_i\|_{X_i}\}$, con $i\in\{1,\dots,m\}$. Al tomar el supremo sobre $\|h^{(a)}\|_E\leq 1$ para $a\in\{1,\dots,k\}$ y dividir entre $\|u\|_E$, obtenemos que $B_k$ es Fréchet diferenciable como mapeo con valores en $\mathcal{L}^k(E;Y)$. Su derivada corresponde a $B_{k+1}$ mediante la Proposición 23.2.3. La misma expansión, conservando todos los términos con al menos un incremento, prueba la continuidad en norma de cada $B_k$.

Esto completa el paso de orden $k$ a orden $k+1$. Para $k=m$, todos los índices han sido ocupados por los incrementos $h^{(a)}$, de modo que $B_m$ es independiente de $x$ y su derivada es cero. Las derivadas posteriores también son cero. En consecuencia, $A$ es suave. □

**Definición 23.2.5.** (Derivadas superiores de Gâteaux) Sea $U \subseteq X$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow Y$. Definimos $\delta^0 f := f$. Supongamos que $\delta^{m-1} f$ está definida en una vecindad de $x \in U$ como mapeo con valores en $\mathcal{L}^{m-1}(X;Y)$ y que es Gâteaux diferenciable en $x$. Mediante el isomorfismo de la Proposición 23.2.3, identificamos

$$\delta(\delta^{m-1} f)(x) \in \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}^{m-1}(X;Y)\big)$$

con un elemento $\delta^m f(x) \in \mathcal{L}^m(X;Y)$, denominado **derivada de Gâteaux de orden** $m$ de $f$ en $x$. Con el orden de asociación fijado por $\mathfrak{C}$, se tiene

$$\delta^m f(x)[h_1,\dots,h_m] = D_{h_m}\big(D_{h_{m-1}} \cdots D_{h_1} f\big)(x)$$

siempre que las derivadas iteradas del miembro derecho estén definidas en una vecindad de $x$.

**Definición 23.2.6.** (Derivadas superiores de Fréchet y funciones de clase $C^k$) Sea $U \subseteq X$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow Y$. Definimos $D^0 f := f$. Supongamos que $D^{m-1} f$ está definida en una vecindad de $x \in U$ como mapeo con valores en $\mathcal{L}^{m-1}(X;Y)$ y que es Fréchet diferenciable en $x$. Identificamos $D(D^{m-1} f)(x)$ con un elemento $D^m f(x) \in \mathcal{L}^m(X;Y)$ mediante la Proposición 23.2.3; éste se denomina **derivada de Fréchet de orden** $m$ de $f$ en $x$.
Para $k \in \mathbb{N}$, decimos que $f$ es de **clase** $C^k$ en $U$, y escribimos $f \in C^k(U,Y)$, si $D^j f$ existe en cada punto de $U$ y es continua como mapeo $U \longrightarrow \mathcal{L}^j(X;Y)$ para todo $j \in \{1,\dots,k\}$. Decimos que $f$ es **suave**, y escribimos $f \in C^\infty(U,Y)$, si $f \in C^k(U,Y)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

**Observación 23.2.7.** La continuidad de todas las derivadas hasta el orden $k$ puede sustituirse en la definición por la existencia de $D^k f$ y la continuidad de esta última. Para cada $j < k$, el mapeo $D^j f$ es Fréchet diferenciable y, por la Proposición 23.1.3, es continuo. No obstante, la formulación anterior hace explícita toda la regularidad disponible y resulta más conveniente al aplicar reglas de la cadena de orden superior.

La regularidad de una composición se obtiene a partir de la regla de la cadena de primer orden y de la continuidad de la composición de operadores. Conviene formular este hecho con valores en espacios normados, pues las propias derivadas toman valores en espacios de operadores.

**Corolario 23.2.8.** (Composición de mapeos de clase $C^k$) Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados, $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos y $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $f \in C^k(U,Y)$, $f(U) \subseteq V$ y $g \in C^k(V,Z)$, entonces $g \circ f \in C^k(U,Z)$.

*Demostración.* La regla de la cadena de primer orden proporciona

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x), \qquad x \in U.$$

La composición de operadores

$$\mathcal{C}\colon \mathcal{L}(Y,Z) \times \mathcal{L}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{L}(X,Z), \qquad \mathcal{C}(B,A) := B \circ A,$$

es bilineal continua, pues $\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\|$. Si $f$ y $g$ son de clase $C^1$, los mapeos $Dg \circ f$ y $Df$ son continuos. La identidad anterior muestra entonces que $D(g \circ f)$ es continuo, lo que prueba el caso $k = 1$.
Supongamos demostrada la afirmación para un entero $r \geq 1$, en cualesquiera espacios normados, y sean

ahora $f$ y $g$ de clase $C^{r+1}$. El mapeo $Dg$ es de clase $C^r$; por la hipótesis inductiva, $Dg \circ f$ también lo es. Además, $Df$ es de clase $C^r$. El mapeo $x \longmapsto (Dg(f(x)), Df(x))$ es, por tanto, de clase $C^r$: en un producto de dos espacios normados la derivación y la continuidad se comprueban componente a componente, usando la norma suma. Por la Proposición 23.2.4, $\mathcal{C}$ es suave. Aplicando nuevamente la hipótesis inductiva a la composición con $\mathcal{C}$, concluimos que $D(g \circ f)$ es de clase $C^r$. Así, $g \circ f$ es de clase $C^{r+1}$. La inducción prueba todos los órdenes finitos; el caso $k = \infty$ se obtiene aplicando la conclusión a cada uno de ellos. □

**Teorema 23.2.9.** (Caracterización mediante derivadas de Gâteaux) Sean $X$ y $Y$ espacios normados, sea $U \subseteq X$ abierto y sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces $f \in C^k(U,Y)$ si y sólo si, para cada $j \in \{1,\dots,k\}$, la derivada de Gâteaux $\delta^j f(x) \in \mathcal{L}^j(X;Y)$ existe para todo $x \in U$ y el mapeo $\delta^j f : U \longrightarrow \mathcal{L}^j(X;Y)$ es continuo. En este caso, $D^j f = \delta^j f$ para todo $j \in \{1,\dots,k\}$.

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre $k$. Para $k = 1$, la afirmación es el Corolario 23.1.17. Supongamos que el resultado es válido para $k-1$.
Si $f \in C^k(U,Y)$, entonces $D^{k-1}f : U \longrightarrow \mathcal{L}^{k-1}(X;Y)$ es de clase $C^1$. El Corolario 23.1.17, aplicado a este mapeo, muestra que su derivada de Gâteaux existe, es continua y coincide con su derivada de Fréchet. Mediante la identificación de la Proposición 23.2.3, esto significa que $\delta^k f = D^k f$. Para los órdenes menores, la conclusión se sigue de la hipótesis inductiva.
Recíprocamente, supongamos que las derivadas de Gâteaux del enunciado existen y son continuas. Por la hipótesis inductiva, $f \in C^{k-1}(U,Y)$ y $D^{k-1}f = \delta^{k-1}f$. El mapeo $D^{k-1}f$ es Gâteaux diferenciable, su derivada es $\delta^k f$ y ésta es continua. El Corolario 23.1.17, aplicado con espacio de llegada $\mathcal{L}^{k-1}(X;Y)$, implica que $D^{k-1}f$ es de clase $C^1$ y que su derivada de Fréchet coincide con $\delta^k f$. Por lo tanto, $f \in C^k(U,Y)$ y $D^k f = \delta^k f$. □

**Teorema 23.2.10.** (Simetría de las derivadas superiores) Si $f \in C^m(U,Y)$, con $m \geq 2$, entonces $D^m f(x) \in \mathcal{L}^m_s(X;Y)$ para todo $x \in U$.

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre $m$. Para $m = 2$, fijemos $x \in U$, $h,k \in X$ y $\varphi \in Y'$. Definamos $g(s,t) := \varphi(f(x+sh+tk))$ para $(s,t)$ en una vecindad de $(0,0)$. La regla de la cadena implica que $g$ es de clase $C^2$ y que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s\,\partial t}(0,0) = \varphi(D^2 f(x)[k,h]), \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial s}(0,0) = \varphi(D^2 f(x)[h,k]).$$

El teorema clásico de igualdad de las derivadas parciales mixtas y el hecho de que $Y'$ separa puntos implican $D^2 f(x)[h,k] = D^2 f(x)[k,h]$.
Supongamos ahora que la afirmación es válida para el orden $m-1$, con $m \geq 3$. Como $D^{m-1}f(x)$ es simétrica, el operador $D^m f(x)$ es simétrico en sus primeros $m-1$ argumentos. Para cada $v \in X$, la función

$$x \longmapsto D^{m-1}f(x)[h_{\sigma(1)},\dots,h_{\sigma(m-1)}] - D^{m-1}f(x)[h_1,\dots,h_{m-1}]$$

es idénticamente nula para toda permutación $\sigma$ de $\{1,\dots,m-1\}$; al derivarla en la dirección $v$ se obtiene la simetría indicada.
Resta probar que pueden intercambiarse los dos últimos argumentos. Fijemos $h_1,\dots,h_{m-2} \in X$ y consideremos

$$G(z) := D^{m-2}f(z)[h_1,\dots,h_{m-2}].$$

La evaluación de un operador multilineal en vectores fijos es un mapeo lineal y continuo; por lo tanto, $G$ es de clase $C^2$. El caso $m = 2$, aplicado a $G$, da

$$D^m f(x)[h_1,\dots,h_{m-2},h_{m-1},h_m] = D^m f(x)[h_1,\dots,h_{m-2},h_m,h_{m-1}].$$

Las permutaciones de los primeros $m-1$ argumentos, junto con la transposición de los dos últimos, generan todas las permutaciones de $m$ elementos. Por lo tanto, $D^m f(x)$ es simétrica. □

La regla de Leibniz admite una formulación especialmente útil para la segunda derivada. Esta identidad será empleada en el capítulo siguiente al comparar las nociones cinemática y operacional de espacio tangente.

**Proposición 23.2.11.** (Regla de Leibniz para la segunda derivada) Sean $X$ un espacio normado, $U \subseteq X$ abierto y $f, g \in C^2(U,\mathbb{R})$. Entonces, para todo $x \in U$ y $h,k \in X$,

$$D^2(fg)(x)[h,k] = f(x)D^2g(x)[h,k] + g(x)D^2f(x)[h,k] + Df(x)(h)Dg(x)(k) + Df(x)(k)Dg(x)(h).$$

Equivalentemente,

$$D^2(fg)(x) = f(x)D^2g(x) + g(x)D^2f(x) + Df(x)\otimes Dg(x) + Dg(x)\otimes Df(x).$$

*Demostración.* La regla del producto para la primera derivada da $D(fg)(x) = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$. Derivemos este mapeo con valores en $X'$ en la dirección $k$ y evaluemos el operador resultante en $h$. La regla del producto y la linealidad de la evaluación proporcionan

$$D^2(fg)(x)[h,k] = Df(x)(k)Dg(x)(h) + f(x)D^2g(x)[h,k] + Dg(x)(k)Df(x)(h) + g(x)D^2f(x)[h,k].$$

La simetría de las segundas derivadas, dada por el Teorema 23.2.10, permite ordenar los argumentos como en el enunciado. □

**Teorema 23.2.12.** (Fórmula de Taylor con resto integral) Sean $X$ un espacio normado, $Y$ un espacio de Banach, $U \subseteq X$ abierto, $m \in \mathbb{N}$ y $f \in C^m(U,Y)$. Sean $x \in U$ y $h \in X$ tales que $[x, x+h] \subseteq U$. Entonces

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} D^j f(x)[h]^j + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1} D^m f(x+th)[h]^m\, dt, \tag{23.4}$$

donde $D^0 f(x)[h]^0 := f(x)$.

*Demostración.* Definamos $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow Y$ por $\varphi(t) := f(x+th)$. Como el segmento $[x, x+h]$ está contenido en el abierto $U$, esta fórmula define la curva en un intervalo abierto que contiene a $[0,1]$. La regla de la cadena da $\varphi'(t) = Df(x+th)(h)$. Más generalmente, probaremos que $\varphi^{(j)}(t) = D^j f(x+th)[h]^j$ para todo $j \in \{0,\dots,m\}$. El caso $j = 0$ es la definición de $\varphi$ y el caso $j = 1$ acaba de comprobarse. Supongamos que la fórmula vale para un entero $j$ con $1 \le j < m$. La evaluación $A \longmapsto A[h]^j$ es un operador lineal continuo de $\mathcal{L}^j(X;Y)$ en $Y$, de norma a lo sumo $\|h\|_X^j$. Podemos, por tanto, derivar la identidad inductiva mediante la regla de la cadena. La derivada de $D^j f(x+th)$ respecto de $t$ es $D(D^j f)(x+th)(h)$. Evaluando en los $j$ vectores $h$ y usando la asociación de la Proposición 23.2.3, obtenemos $D^{j+1} f(x+th)[h]^{j+1}$. Queda probado el paso inductivo. La

continuidad de estas expresiones se sigue de la continuidad de cada $D^j f$.
Probaremos por inducción que toda función $\varphi \in C^m([0,1], Y)$ satisface

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(t)\, dt. \tag{23.5}$$

Para $m = 1$, esta identidad es el Teorema B.6.5. Supongamos que es válida para $m-1$. La hipótesis inductiva da

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{m-2} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{1}{(m-2)!} \int_0^1 (1-t)^{m-2} \varphi^{(m-1)}(t)\, dt.$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes de la Proposición B.6.6 a la función escalar $a(t) := -\dfrac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!}$ y a la función vectorial $\varphi^{(m-1)}$. Como $a'(t) = \dfrac{(1-t)^{m-2}}{(m-2)!}$, se obtiene

$$\frac{1}{(m-2)!} \int_0^1 (1-t)^{m-2} \varphi^{(m-1)}(t)\, dt = \frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(t)\, dt.$$

Al sustituir esta igualdad en la hipótesis inductiva, se obtiene (23.5). Finalmente, al reemplazar cada $\varphi^{(j)}(t)$ por $D^j f(x+th)[h]^j$, se concluye (23.4). □

**Corolario 23.2.13.** (Estimación del resto de Taylor) Bajo las hipótesis del Teorema 23.2.12, supongamos que $r > 0$ satisface $B_{d_X}(x, r) \subseteq U$. Entonces, para cada $h \in X$ con $\|h\|_X < r$,

$$\left\| f(x+h) - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} D^j f(x)[h]^j \right\|_Y \leq \frac{\|h\|_X^m}{m!} \sup_{t\in[0,1]} \|D^m f(x+th) - D^m f(x)\|_{\mathcal{L}^m}.$$

En particular, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, r)$ tal que

$$\left\| f(x+h) - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} D^j f(x)[h]^j \right\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X^m$$

siempre que $\|h\|_X < \delta$.

*Demostración.* En (23.4) sumamos y restamos $D^m f(x)[h]^m$ dentro de la integral. Como $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{m-1}\, dt = \frac{1}{m}$, se obtiene

$$f(x+h) - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} D^j f(x)[h]^j = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \big(D^m f(x+th) - D^m f(x)\big)[h]^m\, dt.$$

La desigualdad para la integral de Riemann con valores en $Y$ y la caracterización de la norma multilineal implican la primera estimación. Sea ahora $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de $D^m f$ en $x$, existe $\delta \in (0, r)$ tal que

$$\|D^m f(x+u) - D^m f(x)\|_{\mathcal{L}^m} < m!\varepsilon$$

siempre que $\|u\|_X < \delta$. Si $\|h\|_X < \delta$, entonces $\|th\|_X < \delta$ para todo $t \in [0,1]$, y la primera estimación proporciona la desigualdad final. □

### 23.2.1 Ejercicios

**Ejercicio 23.2.14.** Sea $A \in \mathcal{L}_s^m(X;Y)$ y defina $P\colon X \longrightarrow Y$ por $P(x) := A[x]^m$. Pruebe que $P$ es suave y que, para $0 \le j \le m$,

$$D^j P(x)[h_1,\dots,h_j] = \frac{m!}{(m-j)!} A(\underbrace{x,\dots,x}_{m-j \text{ veces}}, h_1,\dots,h_j).$$

Muestre que $D^j P = 0$ para $j > m$.

**Ejercicio 23.2.15.** Sea $H$ un espacio de Hilbert real. Calcule las derivadas de Fréchet de primer y segundo orden de $u \longmapsto \frac{1}{2}\|u\|_H^2$. Para $p > 1$, calcule la primera derivada de $u \longmapsto \frac{1}{p}\|u\|_H^p$ y determine en qué puntos existe la segunda derivada cuando $1 < p < 2$ y cuando $p \ge 2$.

**Ejercicio 23.2.16.** Sea $\ell \in X'$ y sea $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^m$. Pruebe que $f := \varphi \circ \ell$ pertenece a $C^m(X,\mathbb{R})$ y que

$$D^j f(x)[h_1,\dots,h_j] = \varphi^{(j)}(\ell(x)) \prod_{i=1}^{j} \ell(h_i)$$

para todo $1 \le j \le m$.

**Ejercicio 23.2.17.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera suave, sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave con métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y conexión compatible $\nabla^{\mathbf{E}}$. Considere $J(u) := \frac{1}{2}\int_M |\nabla^{\mathbf{E}}_w u|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$ sobre $W_0^{1,2}(M,\mathbf{E})$. Pruebe que $J$ es suave, calcule $DJ(u)$ y $D^2J(u)$, e identifique el operador bilineal continuo asociado a la segunda derivada.

**Ejercicio 23.2.18.** Sea $X$ un álgebra de Banach con unidad. Utilice la fórmula de Taylor para estudiar el mapeo exponencial $\exp(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ cerca del origen. Calcule sus primeras derivadas en 0 y explique qué simplificación ocurre cuando los elementos considerados conmutan.

## 23.3 Teoremas fundamentales del cálculo diferencial

Los resultados locales que siguen convierten información sobre la derivada en información sobre la propia función. El principio de contracción proporciona el mecanismo de existencia y unicidad; el Teorema de la función inversa (Teorema 23.3.3) construye coordenadas no lineales, y el Teorema de la función implícita (Teorema 23.3.8) permite resolver localmente una parte de las variables. Estas herramientas serán la base de las cartas adaptadas y de los conjuntos de nivel regulares utilizados en las variedades de Banach.

**Teorema 23.3.1.** (Principio de contracción) Sea $(M,d)$ un espacio métrico completo no vacío y sea $T\colon M \longrightarrow M$ una contracción, es decir, supongamos que existe $q \in [0,1)$ tal que $d(Tx,Ty) \le q\,d(x,y)$ para todos $x,y \in M$.

Entonces $T$ posee un único punto fijo $x_*$. Además, para cualquier $x_0 \in M$, la sucesión definida por $x_{n+1} := T(x_n)$ converge a $x_*$ y

$$d(x_n, x_*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

*Demostración.* Fijemos $x_0 \in M$. La desigualdad de contracción da $d(x_2, x_1) \leq q d(x_1, x_0)$. Si $d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, al aplicar $T$ a los dos puntos se obtiene $d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq q d(x_{n+1}, x_n) \leq q^{n+1} d(x_1, x_0)$. Por inducción, la estimación vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $m > n$, la desigualdad triangular proporciona

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=n}^{m-1} q^j d(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Por lo tanto, $(x_n)$ es una sucesión de Cauchy. La completitud de $M$ garantiza la existencia de $x_* \in M$ tal que $x_n \longrightarrow x_*$. Como toda contracción es continua, $T(x_*) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_*$. Si $y$ es otro punto fijo, entonces $d(x_*, y) = d(Tx_*, Ty) \leq q d(x_*, y)$; como $q < 1$, se sigue que $d(x_*, y) = 0$. Finalmente, haciendo $m \to \infty$ en la estimación anterior se obtiene la desigualdad del enunciado. □

**Proposición 23.3.2.** (Inversión de operadores) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y sea $\mathrm{Iso}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ el conjunto de los isomorfismos lineales continuos. Entonces $\mathrm{Iso}(X, Y)$ es abierto y el mapeo

$$\mathrm{Inv}\colon \mathrm{Iso}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Iso}(Y, X), \qquad \mathrm{Inv}(A) := A^{-1},$$

es suave. Su derivada está dada por

$$D\,\mathrm{Inv}(A)(H) = -A^{-1} H A^{-1}. \tag{23.6}$$

*Demostración.* Sea $A \in \mathrm{Iso}(X, Y)$. Si $X = \{0\}$, la existencia de $A$ obliga a que $Y = \{0\}$, y todas las afirmaciones se verifican directamente en los espacios reducidos a un punto. Supongamos $X \neq \{0\}$; entonces $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} > 0$. Si $H \in \mathcal{L}(X, Y)$ satisface $\|A^{-1}H\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, la Serie de Neumann del Teorema B.2.10 converge en $\mathcal{L}(X)$ y

$$(A + H)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-A^{-1}H)^j A^{-1}.$$

Por lo tanto, $A + H$ es invertible y $\mathrm{Iso}(X, Y)$ es abierto. Si $\|A^{-1}H\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{2}$, entonces

$$\|(A + H)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}{1 - \|A^{-1}H\|_{\mathcal{L}(X)}} \leq 2\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}.$$

La identidad

$$(A + H)^{-1} - A^{-1} = -(A + H)^{-1} H A^{-1}$$

implica

$$\|(A + H)^{-1} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq 2\|A^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(Y,X)} \|H\|_{\mathcal{L}(X,Y)},$$

por lo que el mapeo de inversión es continuo en $A$.

Además,

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} = A^{-1}HA^{-1}H(A+H)^{-1}.$$

Cuando $0 < \|H\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \dfrac{1}{2\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}$, la estimación anterior da

$$\frac{\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}{\|H\|_{\mathcal{L}(X,Y)}} \leq 2\|A^{-1}\|^3_{\mathcal{L}(Y,X)}\|H\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

El miembro derecho converge a cero cuando $H \to 0$, lo cual demuestra (23.6).
La fórmula de la derivada puede escribirse como $D\operatorname{Inv}(A)(H) = -\operatorname{Inv}(A)H\operatorname{Inv}(A)$. El mapeo que asigna a $(B,C) \in \mathcal{L}(Y,X) \times \mathcal{L}(Y,X)$ el operador $H \longmapsto -BHC$ es bilineal continuo con valores en $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y,X))$, pues su norma es a lo sumo $\|B\|\|C\|$. Por la Proposición 23.2.4, este mapeo es suave. Como Inv es continuo, la fórmula de su derivada prueba primero que $D\operatorname{Inv}$ es continuo; por tanto, Inv es de clase $C^1$. Supongamos ahora que es de clase $C^r$ para algún entero $r \geq 1$. Al componer el mapeo bilineal anterior con $A \longmapsto (\operatorname{Inv}(A), \operatorname{Inv}(A))$, el Corolario 23.2.8 muestra que $D\operatorname{Inv}$ es de clase $C^r$. En consecuencia, Inv es de clase $C^{r+1}$. Este paso inductivo prueba su suavidad. □

**Teorema 23.3.3.** (Función inversa local) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach, sea $U \subseteq X$ abierto y sea $f \in C^1(U,Y)$. Si $a \in U$ y $Df(a)\colon X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo, entonces existen vecindades abiertas $U_0 \subseteq U$ de $a$ y $V_0 \subseteq Y$ de $f(a)$ tales que $f\restriction_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow V_0$ es un difeomorfismo de clase $C^1$. Si $g\colon V_0 \longrightarrow U_0$ es su inversa, entonces

$$Dg(y) = Df(g(y))^{-1} \tag{23.7}$$

para todo $y \in V_0$. Si $f \in C^k(U,Y)$, entonces $g \in C^k(V_0,X)$.

*Demostración.* Si $X = \{0\}$, la invertibilidad de $Df(a)$ implica $Y = \{0\}$ y el resultado es inmediato. Supongamos $X \neq \{0\}$. Denotemos por $A := Df(a)^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. Por la continuidad de $Df$ en $a$, existe $r > 0$ tal que $\overline{B}_{d_X}(a,2r) \subseteq U$ y

$$\|A(Df(x) - Df(a))\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{2} \tag{23.8}$$

para todo $x \in B_{d_X}(a,2r)$. Para cada $y \in Y$, definamos

$$T_y\colon \overline{B}_{d_X}(a,r) \longrightarrow X, \qquad T_y(x) := x - A(f(x) - y).$$

Sean $x_1, x_2 \in \overline{B}_{d_X}(a,r)$. El segmento $[x_1,x_2]$ está contenido en $B_{d_X}(a,2r)$. El mapeo $H(x) := x - Af(x)$ es de clase $C^1$ y, por (23.8),

$$\|DH(x)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|I_X - ADf(x)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|A(Df(a) - Df(x))\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{2}.$$

El Teorema 23.1.10 implica

$$\|T_y(x_1) - T_y(x_2)\|_X \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_X. \tag{23.9}$$

Sea $b := f(a)$ y elijamos $\delta > 0$ tal que $\|A\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\delta < \dfrac{r}{2}$. Si $y \in B_{d_Y}(b,\delta)$, entonces

$$\|T_y(a) - a\|_X = \|A(y-b)\|_X < \frac{r}{2}.$$

Para cada $x \in \overline{B}_{d_X}(a,r)$, la desigualdad (23.9) da

$$\|T_y(x)-a\|_X \le \|T_y(x)-T_y(a)\|_X + \|T_y(a)-a\|_X < \frac{1}{2}\|x-a\|_X + \frac{r}{2} \le r.$$

Por lo tanto, $T_y$ transforma $\overline{B}_{d_X}(a,r)$ en sí misma y es una contracción. El Principio de contracción proporciona un único punto fijo $g(y) \in \overline{B}_{d_X}(a,r)$. La igualdad $T_y(g(y)) = g(y)$ equivale a $f(g(y)) = y$. Además,

$$\|g(y)-a\|_X \le \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\|T_y(a)-a\|_X < r,$$

de modo que $g(y) \in B_{d_X}(a,r)$.
Si $y_1, y_2 \in B_{d_Y}(b,\delta)$, entonces, usando (23.9),

$$\begin{aligned}\|g(y_1)-g(y_2)\|_X &= \|T_{y_1}(g(y_1)) - T_{y_2}(g(y_2))\|_X \\ &\le \|T_{y_1}(g(y_1)) - T_{y_1}(g(y_2))\|_X + \|A(y_1-y_2)\|_X \\ &\le \frac{1}{2}\|g(y_1)-g(y_2)\|_X + \|A\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|y_1-y_2\|_Y.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|g(y_1)-g(y_2)\|_X \le 2\|A\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|y_1-y_2\|_Y. \tag{23.10}$$

En particular, $g$ es continua.
Definamos $V_0 := B_{d_Y}(b,\delta)$ y $U_0 := f^{-1}(V_0) \cap B_{d_X}(a,r)$. Si $x \in U_0$ y $y = f(x)$, entonces $x$ es un punto fijo de $T_y$ en $\overline{B}_{d_X}(a,r)$; por la unicidad del punto fijo, $x = g(y)$. Así, $f \restriction_{U_0}$ es biyectiva sobre $V_0$ y su inversa es $g$.
Para cada $x \in U_0$, la identidad

$$ADf(x) = I_X + A(Df(x) - Df(a))$$

y (23.8) muestran, mediante el Teorema B.2.10, que $ADf(x)$ es invertible. Por lo tanto, $Df(x)$ es un isomorfismo.
Fijemos $y \in V_0$ y escribamos $x := g(y)$. Sea $k \in Y$ tal que $y + k \in V_0$ y definamos $h := g(y+k) - g(y)$. Entonces $k = f(x+h) - f(x)$ y

$$g(y+k) - g(y) - Df(x)^{-1}k = -Df(x)^{-1}\big(f(x+h) - f(x) - Df(x)h\big). \tag{23.11}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por la diferenciabilidad de Fréchet de $f$ en $x$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\|f(x+u) - f(x) - Df(x)u\|_Y < \frac{\varepsilon}{2\big(1+\|A\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\big)\big(1+\|Df(x)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\big)}\|u\|_X$$

siempre que $0 < \|u\|_X < \eta$. Por (23.10), $\|h\|_X \le 2\|A\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|k\|_Y$. En consecuencia, si

$$0 < \|k\|_Y < \frac{\eta}{2\|A\|_{\mathcal{L}(Y,X)}},$$

entonces $\|h\|_X < \eta$ y (23.11) implica

$$\frac{\|g(y+k) - g(y) - Df(x)^{-1}k\|_X}{\|k\|_Y} < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $g$ es Fréchet diferenciable en $y$ y que $Dg(y) = Df(g(y))^{-1}$.
La continuidad de $Dg$ se sigue de la continuidad de $g$, de la continuidad de $Df$ y de la continuidad del mapeo de inversión establecida en la Proposición 23.3.2. Por lo tanto, $g \in C^1(V_0, X)$. Si $f \in C^k(U, Y)$ y $k > 1$, partimos de la regularidad $C^1$ de $g$ que acabamos de obtener. Supongamos que $g$ es de clase $C^j$, donde $j \in \mathbb{N}$ y $1 \leq j < k$. Como $Df$ es de clase $C^{k-1}$, es en particular de clase $C^j$. El Corolario 23.2.8 y la suavidad del mapeo de inversión implican que $\mathrm{Inv} \circ Df \circ g$ es de clase $C^j$. Por (23.7), éste es precisamente $Dg$; por lo tanto, $g$ es de clase $C^{j+1}$. La inducción llega hasta $j = k$ cuando $k$ es finito. Si $k = \infty$, el mismo razonamiento se aplica a cada orden finito y prueba que $g$ es suave. □

**Definición 23.3.4.** (Difeomorfismo entre abiertos de espacios de Banach) Sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos de espacios de Banach. Una biyección $f : U \longrightarrow V$ es un **difeomorfismo de clase** $C^k$ si $f \in C^k(U, Y)$ y $f^{-1} \in C^k(V, X)$.

La invertibilidad de la derivada es una condición local y, por sí sola, no garantiza la inyectividad global. La hipótesis uniforme del resultado siguiente impide que las inversas locales degeneren al prolongarlas a lo largo de caminos.

**Lema 23.3.5.** (Levantamiento de caminos) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y sea $f \in C^1(X, Y)$. Supongamos que $Df(x)$ es un isomorfismo para todo $x \in X$ y que existe $C > 0$ tal que $\|Df(x)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq C$ para todo $x \in X$. Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow Y$ de clase $C^1$ y sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \gamma(0)$. Entonces existe un único mapeo $\widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow X$ de clase $C^1$ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$ y $f \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. Además,

$$\|\widetilde{\gamma}'(t)\|_X \leq C\|\gamma'(t)\|_Y \tag{23.12}$$

para todo $t \in [0,1]$.

*Demostración.* El Teorema 23.3.3, aplicado en $x_0$, proporciona un levantamiento único en un intervalo $[0, \tau_0]$ con $\tau_0 > 0$. Sea

$$\mathcal{A} := \{\tau \in [0,1] \mid \gamma \restriction_{[0,\tau]} \text{ admite un levantamiento de clase } C^1 \text{ que comienza en } x_0\}$$

y sea $\alpha := \sup \mathcal{A}$. Veamos con precisión la unicidad en los intervalos comunes. Si dos levantamientos continuos tienen el mismo valor inicial, el conjunto de tiempos en que coinciden es no vacío y cerrado por continuidad. También es abierto en el intervalo común: en un tiempo de coincidencia ambos caminos permanecen, durante un intervalo pequeño, en una misma vecindad donde $f$ es inyectiva. Como tienen la misma imagen por $f$, allí coinciden. La conexidad del intervalo implica que coinciden en todo él. Por lo tanto, los levantamientos parciales se pegan y definen un único mapeo $\widetilde{\gamma} : [0, \alpha) \longrightarrow X$, de clase $C^1$ en cada intervalo compacto contenido en su dominio.
Al diferenciar $f(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ y aplicar la regla de la cadena, obtenemos

$$Df(\widetilde{\gamma}(t))\widetilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t), \qquad \widetilde{\gamma}'(t) = Df(\widetilde{\gamma}(t))^{-1}\gamma'(t),$$

lo cual prueba (23.12). Si $0 \le t_1 < t_2 < \alpha$, la fórmula integral del valor medio da

$$\|\widetilde{\gamma}(t_2) - \widetilde{\gamma}(t_1)\|_X \le C \left( \max_{t\in[0,1]} \|\gamma'(t)\|_Y \right) |t_2 - t_1|.$$

La estimación muestra que $\widetilde{\gamma}(t)$ es de Cauchy cuando $t \to \alpha^-$. Por la completitud de $X$, existe $x_\alpha := \lim_{t\to\alpha^-} \widetilde{\gamma}(t)$, tanto si $\alpha < 1$ como si $\alpha = 1$. Definimos $\widetilde{\gamma}(\alpha) := x_\alpha$. La extensión es continua y satisface $f(x_\alpha) = \gamma(\alpha)$.
Elijamos una inversa local $g_\alpha \colon V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ de $f$, con $x_\alpha \in U_\alpha$ y $\gamma(\alpha) \in V_\alpha$. Por la convergencia recién probada y la continuidad de $\gamma$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\widetilde{\gamma}(t) \in U_\alpha$ y $\gamma(t) \in V_\alpha$ para $t \in (\alpha - \varepsilon, \alpha]$. En ese intervalo, la inyectividad de $f \restriction_{U_\alpha}$ da

$$\widetilde{\gamma}(t) = g_\alpha(\gamma(t)).$$

Así, la extensión es de clase $C^1$ hasta $\alpha$, con derivada lateral en el extremo. Si $\alpha < 1$, la continuidad de $\gamma$ permite usar esta misma fórmula en $[\alpha, \alpha+\varepsilon']$ para algún $\varepsilon' > 0$ con $\alpha + \varepsilon' \le 1$. Obtendríamos un levantamiento de clase $C^1$ más allá de $\alpha$, contradiciendo la definición del supremo. Luego $\alpha = 1$.
En particular, el valor $\widetilde{\gamma}(1)$ ya está definido y la fórmula con $g_\alpha$ prueba la regularidad $C^1$ en el extremo final. Al diferenciarla, también allí se obtiene $\widetilde{\gamma}'(1) = Df(\widetilde{\gamma}(1))^{-1}\gamma'(1)$, de modo que (23.12) vale en todo $[0,1]$. La unicidad en el intervalo cerrado es la establecida al comienzo de la prueba. □

**Lema 23.3.6.** (Levantamiento de homotopías) Bajo las hipótesis del lema anterior, sea $H \colon [0,1]^2 \longrightarrow Y$ de clase $C^1$ y sea $\eta \colon [0,1] \longrightarrow X$ un camino continuo tal que $f(\eta(s)) = H(0,s)$ para todo $s \in [0,1]$. Entonces existe un único mapeo continuo $\widetilde{H} \colon [0,1]^2 \longrightarrow X$ tal que $f \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(0,s) = \eta(s)$. Para cada $s$, el camino $t \longmapsto \widetilde{H}(t,s)$ es de clase $C^1$.

*Demostración.* Para cada $s \in [0,1]$, el Lema 23.3.5 proporciona un único levantamiento del camino $t \longmapsto H(t,s)$ que comienza en $\eta(s)$; lo denotaremos por $t \longmapsto \widetilde{H}(t,s)$. Debemos probar que el mapeo así definido es continuo en las dos variables.
Sea

$$\mathcal{T} := \{\tau \in [0,1] \mid \widetilde{H} \text{ es continuo en } [0,\tau]\times[0,1]\}.$$

Probaremos que $\mathcal{T} = [0,1]$. Para cada $s_0 \in [0,1]$, el Teorema 23.3.3 proporciona vecindades abiertas $U_{s_0}$ de $\eta(s_0)$ y $V_{s_0}$ de $H(0,s_0)$ tales que $f \restriction_{U_{s_0}} \colon U_{s_0} \longrightarrow V_{s_0}$ es un homeomorfismo. Por la continuidad de $\eta$ y de $H$, existen un intervalo abierto $I_{s_0} \subseteq [0,1]$ que contiene a $s_0$ y un número $\delta_{s_0} > 0$ tales que $\eta(s) \in U_{s_0}$ y $H(t,s) \in V_{s_0}$ para $(t,s) \in [0,\delta_{s_0}] \times I_{s_0}$. En ese rectángulo, la unicidad de los levantamientos implica

$$\widetilde{H}(t,s) = (f \restriction_{U_{s_0}})^{-1}(H(t,s)).$$

La compacidad de $[0,1]$ permite elegir un número finito de intervalos $I_{s_0}$ que lo cubran. Si $\delta$ es el mínimo de los números $\delta_{s_0}$ correspondientes, la fórmula anterior prueba que $\widetilde{H}$ es continuo en $[0,\delta]\times[0,1]$. Por lo tanto, $\mathcal{T}$ no es vacío.
Sea $\tau \in \mathcal{T}$ con $\tau < 1$. El conjunto $\widetilde{H}(\{\tau\}\times[0,1])$ es compacto. Para cada $s_0 \in [0,1]$, apliquemos nuevamente el teorema local en $\widetilde{H}(\tau,s_0)$. La continuidad de $s \longmapsto \widetilde{H}(\tau,s)$ y de $H$ permite encontrar un intervalo $I_{s_0}$ y un número $\delta_{s_0} > 0$ tales que, para $s \in I_{s_0}$ y $t \in [\tau, \tau+\delta_{s_0}] \cap [0,1]$, el levantamiento está dado por una misma inversa local. Una subcubierta finita de $[0,1]$ y el mínimo de los números $\delta_{s_0}$ muestran que existe $\delta > 0$ tal que $\widetilde{H}$ es continuo en $[0, \min\{1, \tau+\delta\}]\times[0,1]$. Así, $\mathcal{T}$ es abierta hacia la derecha.

Para comprobar que no puede detenerse la prolongación, sea $\tau_* := \sup \mathcal{T}$. Como $H$ es de clase $C^1$ sobre el cuadrado compacto, existe

$$M := \max_{(t,s)\in[0,1]^2} \left\| \frac{\partial H}{\partial t}(t,s) \right\|_Y < \infty.$$

Para cada $s \in [0,1]$ y $0 \le t_1 < t_2 < \tau_*$, la estimación (23.12) y la fórmula integral del valor medio proporcionan

$$\|\widetilde{H}(t_2,s) - \widetilde{H}(t_1,s)\|_X \le CM|t_2 - t_1|.$$

La estimación es uniforme respecto de $s$. Por consiguiente, $\widetilde{H}(t,s)$ posee, cuando $t \to \tau_*^-$, un límite uniforme en $s$. Para cada $s$ fijo, el levantamiento individual ya es continuo en $[0,1]$, por lo que ese límite coincide con el valor $\widetilde{H}(\tau_*,s)$ definido al comienzo de la prueba. Además, para todo $t < \tau_*$ existe un elemento de $\mathcal{T}$ mayor que $t$, de modo que $s \longmapsto \widetilde{H}(t,s)$ es continuo. El límite uniforme de estas funciones es continuo. Obtenemos así la continuidad de $s \longmapsto \widetilde{H}(\tau_*,s)$ y, pasando al límite en la estimación,

$$\|\widetilde{H}(t,s) - \widetilde{H}(\tau_*,s_0)\|_X \le CM(\tau_* - t) + \|\widetilde{H}(\tau_*,s) - \widetilde{H}(\tau_*,s_0)\|_X$$

para $t \in [0,\tau_*]$ y $s, s_0 \in [0,1]$. El miembro derecho tiende a cero cuando $(t,s) \longrightarrow (\tau_*,s_0)$ con $t \le \tau_*$. Esto prueba la continuidad conjunta hasta esa arista, es decir, $\tau_* \in \mathcal{T}$. El argumento local del párrafo anterior prolongaría la continuidad más allá de $\tau_*$ si $\tau_* < 1$, lo cual contradice la definición del supremo. Por lo tanto, $\tau_* = 1$ y $\widetilde{H}$ es continuo en todo el cuadrado.

La identidad $f \circ \widetilde{H} = H$ y la condición inicial se cumplen por construcción. La unicidad se obtiene para cada valor fijo de $s$ mediante el argumento para levantamientos continuos dado en la prueba del Lema 23.3.5. □

**Teorema 23.3.7.** (Función inversa global) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y sea $f \in C^1(X,Y)$. Supongamos que $Df(x)$ es un isomorfismo para todo $x \in X$ y que existe $C > 0$ tal que $\|Df(x)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \le C$ para todo $x \in X$. Entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es un difeomorfismo global.

*Demostración.* Fijemos $a \in X$ y sea $b := f(a)$. Dado $y \in Y$, consideremos el segmento $\gamma(t) := (1-t)b + ty$. Por el Lema 23.3.5, existe un levantamiento $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow X$ con $\widetilde{\gamma}(0) = a$. Entonces $f(\widetilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = y$. Como $y$ fue arbitrario, $f$ es suprayectiva.

Para demostrar la inyectividad, supongamos que $f(x_0) = f(x_1) = y_0$. Sea $\sigma(t) := (1-t)x_0 + tx_1$ y sea $\gamma := f \circ \sigma$. El mapeo

$$H(t,s) := (1-s)\gamma(t) + sy_0$$

es una homotopía entre el lazo $\gamma$ y el lazo constante $y_0$, y satisface $H(0,s) = y_0$ para todo $s$. Apliquemos el Lema 23.3.6 con $\eta(s) := x_0$. Para cada $s \in [0,1]$, el punto $\widetilde{H}(1,s)$ pertenece a $f^{-1}(y_0)$. Esta fibra es discreta, pues $f$ es localmente inyectiva en cada uno de sus puntos. Como $s \longmapsto \widetilde{H}(1,s)$ es continuo y $[0,1]$ es conexo, dicho mapeo es constante. Para $s = 0$, la unicidad del levantamiento implica que $\widetilde{H}(t,0) = \sigma(t)$ y, por lo tanto, $\widetilde{H}(1,0) = x_1$. Para $s = 1$, el levantamiento es el camino constante $x_0$, de modo que $\widetilde{H}(1,1) = x_0$. Se concluye que $x_0 = x_1$.

Por lo tanto, $f$ es biyectiva. El Teorema 23.3.3 muestra que su inversa es de clase $C^1$ y satisface $D(f^{-1})(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}$. □

**Teorema 23.3.8.** (Función implícita) Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios de Banach, sea $U \subseteq X \times Y$ abierto y sea $F \in C^k(U, Z)$, con $k \geq 1$. Supongamos que $(a,b) \in U$, $F(a,b) = 0$ y $D_2F(a,b)\colon Y \longrightarrow Z$ es un isomorfismo. Entonces existen vecindades abiertas $U_0 \subseteq X$ de $a$ y $V_0 \subseteq Y$ de $b$, y una única función $\varphi\colon U_0 \longrightarrow V_0$ de clase $C^k$ tal que, para todo $(x,y) \in U_0 \times V_0$,

$$F(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \varphi(x). \tag{23.13}$$

Después de disminuir $U_0$ y $V_0$ si es necesario, $D_2F(x,\varphi(x))$ es un isomorfismo para todo $x \in U_0$ y

$$D\varphi(x) = -D_2F(x,\varphi(x))^{-1} \circ D_1F(x,\varphi(x)). \tag{23.14}$$

*Demostración.* Definamos

$$\Phi\colon U \longrightarrow X \times Z, \qquad \Phi(x,y) := \big(x, F(x,y)\big).$$

La Proposición 23.1.19 implica que

$$D\Phi(a,b)(h,k) = \big(h, D_1F(a,b)h + D_2F(a,b)k\big).$$

Este operador es un isomorfismo de $X \times Y$ sobre $X \times Z$. Su inversa está dada por

$$(u,v) \longmapsto \Big(u, D_2F(a,b)^{-1}\big(v - D_1F(a,b)u\big)\Big).$$

El Teorema 23.3.3 proporciona vecindades abiertas $\mathcal{U} \subseteq U$ de $(a,b)$ y $\mathcal{V} \subseteq X \times Z$ de $(a,0)$ tales que $\Phi\restriction_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un difeomorfismo de clase $C^k$. Elijamos primero una vecindad abierta $V_0 \subseteq Y$ de $b$ tal que exista una vecindad abierta $U_1 \subseteq X$ de $a$ con $U_1 \times V_0 \subseteq \mathcal{U}$. Por la continuidad de $\Phi^{-1}$ en $(a,0)$, existen vecindades abiertas $U_0 \subseteq U_1$ de $a$ y $W_0 \subseteq Z$ de $0$ tales que $U_0 \times W_0 \subseteq \mathcal{V}$ y

$$\Phi^{-1}(U_0 \times W_0) \subseteq U_1 \times V_0.$$

Para cada $x \in U_0$, definamos $(x,\varphi(x)) := \Phi^{-1}(x,0)$. La primera componente de $\Phi$ es la identidad de $X$, de modo que la primera componente de $\Phi^{-1}(x,0)$ es necesariamente $x$, y la elección anterior garantiza que $\varphi(x) \in V_0$. Además,

$$\Phi(x,\varphi(x)) = (x,0) \quad \Longleftrightarrow \quad F(x,\varphi(x)) = 0.$$

Si $(x,y) \in U_0 \times V_0$ y $F(x,y) = 0$, entonces $\Phi(x,y) = (x,0)$; la inyectividad de $\Phi\restriction_{\mathcal{U}}$ implica que $y = \varphi(x)$. Esto prueba (23.13). Como $\varphi$ se obtiene componiendo el mapeo $x \longmapsto (x,0)$, la inversa $\Phi^{-1}$ y la proyección sobre $Y$, pertenece a $C^k(U_0, Y)$.

La continuidad de $D_2F$ y la apertura de $\mathrm{Iso}(Y,Z)$, probada en la Proposición 23.3.2, permiten disminuir las vecindades de modo que $D_2F(x,\varphi(x))$ sea invertible para todo $x \in U_0$. Al derivar la identidad $F(x,\varphi(x)) = 0$ y aplicar la regla de la cadena y (23.2), obtenemos

$$D_1F(x,\varphi(x)) + D_2F(x,\varphi(x)) \circ D\varphi(x) = 0.$$

La composición por la izquierda con $D_2F(x,\varphi(x))^{-1}$ proporciona (23.14). □

## 23.4 Multiplicadores de Lagrange

El Teorema 23.3.8 permite describir un conjunto de nivel regular como una gráfica sobre el núcleo de la derivada de la restricción. En esas coordenadas, un extremo restringido se convierte en un extremo ordinario sobre el espacio tangente. Esta observación conduce al principio de los multiplicadores de Lagrange y explica por qué la derivada del funcional debe ser una combinación de las derivadas de las restricciones.

**Teorema 23.4.1.** (Multiplicadores de Lagrange para un número finito de restricciones) Sean $X$ un espacio de Banach, $U \subseteq X$ abierto, $J \in C^1(U,\mathbb{R})$ y $F = (F_1,\dots,F_m) \in C^1(U,\mathbb{R}^m)$. Sea $x_0 \in U$ un extremo local de $J \restriction_{F^{-1}(F(x_0))}$ y supongamos que $DF(x_0)\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es suprayectivo. Entonces existe un único funcional $\lambda \in (\mathbb{R}^m)'$ tal que

$$DJ(x_0) = \lambda \circ DF(x_0). \tag{23.15}$$

Equivalentemente, existen únicos números $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$DJ(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j DF_j(x_0).$$

*Demostración.* Sea $K := \ker DF(x_0)$. Como $DF(x_0)$ es suprayectivo y $\mathbb{R}^m$ es finito dimensional, para cada vector $e_j$ de la base canónica de $\mathbb{R}^m$ existe $v_j \in X$ tal que $DF(x_0)v_j = e_j$. Definamos $E := \operatorname{span}\{v_1,\dots,v_m\}$. Entonces $E$ es finito dimensional y, por lo tanto, cerrado. Además, $DF(x_0) \restriction_E\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo. Para cada $v \in X$, si

$$w := \big(DF(x_0) \restriction_E\big)^{-1}(DF(x_0)v),$$

entonces $v - w \in K$. Por lo tanto, $X = K \oplus E$.
Consideremos el abierto

$$\mathcal{O} := \{(u,v) \in K \times E \mid x_0 + u + v \in U\}$$

y el mapeo $G\colon \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definido por $G(u,v) := F(x_0+u+v) - F(x_0)$. Además, $G(0,0) = 0$ y

$$D_2G(0,0) = DF(x_0) \restriction_E\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

El Teorema 23.3.8 proporciona una vecindad $W \subseteq K$ de 0 y una función $\psi\colon W \longrightarrow E$ de clase $C^1$ tales que $\psi(0) = 0$ y

$$F(x_0 + u + \psi(u)) = F(x_0)$$

para todo $u \in W$. Al diferenciar esta identidad en $u = 0$, obtenemos

$$DF(x_0)\big(u + D\psi(0)u\big) = 0$$

para todo $u \in K$. Como $DF(x_0)u = 0$ y $D\psi(0)u \in E$, la inyectividad de $DF(x_0) \restriction_E$ implica que $D\psi(0)u = 0$. Por lo tanto, $D\psi(0) = 0$.
Fijemos $u \in K$. Para todo $t$ en una vecindad de 0, la curva $\gamma(t) := x_0 + tu + \psi(tu)$ pertenece a $F^{-1}(F(x_0))$. Como $x_0$ es un extremo local de la restricción de $J$, la función real $J \circ \gamma$ tiene un extremo local en 0. La regla de

Fermat y la regla de la cadena dan

$$0 = (J \circ \gamma)'(0) = DJ(x_0)\big(u + D\psi(0)u\big) = DJ(x_0)u.$$

Así, $K \subseteq \ker DJ(x_0)$.
Sea $R\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow E$ la inversa de $DF(x_0)\restriction_E$ y definamos $\lambda := DJ(x_0) \circ R \in (\mathbb{R}^m)'$. Para cada $v \in X$, el vector $v - R(DF(x_0)v)$ pertenece a $K$; por lo tanto,

$$DJ(x_0)v = DJ(x_0)R(DF(x_0)v) = \lambda(DF(x_0)v).$$

Esto demuestra (23.15). Si $\mu \in (\mathbb{R}^m)'$ satisface también $DJ(x_0) = \mu \circ DF(x_0)$, la suprayectividad de $DF(x_0)$ implica que $\lambda = \mu$. La formulación mediante los números $\lambda_j$ se obtiene identificando $(\mathbb{R}^m)'$ con $\mathbb{R}^m$ mediante la base canónica. □

**Corolario 23.4.2.** (Multiplicadores de Lagrange para una restricción) Sean $X$ un espacio de Banach, $U \subseteq X$ abierto y $J, F \in C^1(U,\mathbb{R})$. Si $x_0$ es un extremo local de $J$ restringido a $\{x \in U \mid F(x) = F(x_0)\}$ y $DF(x_0) \neq 0$, entonces existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $DJ(x_0) = \lambda DF(x_0)$.

*Demostración.* El operador $DF(x_0)\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ es suprayectivo porque es lineal y no nulo. Apliquemos el teorema anterior con $m = 1$ e identifiquemos cada funcional lineal sobre $\mathbb{R}$ con la multiplicación por un único número real. □

### 23.4.1 Ejercicios

**Ejercicio 23.4.3.** Defina $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(0) = 0$ y $f(x) = x + 2x^2 \operatorname{sin}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$. Pruebe que $f'(0) = 1$, pero que $f$ no es inyectiva en ninguna vecindad de 0. Determine cuál hipótesis del Teorema 23.3.3 no se satisface.

**Ejercicio 23.4.4.** Sea $\Phi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$ y sea $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Si $v := u \circ \Phi$, utilice la regla de la cadena de segundo orden para demostrar que

$$(\Delta u) \circ \Phi = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Interprete esta identidad como un primer ejemplo del comportamiento de un operador diferencial bajo un cambio de coordenadas.

**Ejercicio 23.4.5.** Sea $P(z, a_0, \ldots, a_{n-1}) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Suponga que $z_0$ es una raíz simple del polinomio correspondiente a $(a_0^0, \ldots, a_{n-1}^0)$. Aplique el Teorema 23.3.8 para demostrar que esta raíz depende de manera suave de los coeficientes en una vecindad del punto dado. Calcule la derivada respecto de cada coeficiente.

**Ejercicio 23.4.6.** Sea $H$ un espacio de Hilbert real y sea $S := \{u \in H \mid \|u\|_H = 1\}$. Utilice el Teorema 23.3.8 para demostrar que $S$ es una subvariedad de Banach de codimensión uno y que $T_u S = u^{\perp}$. Si $J \in C^1(H,\mathbb{R})$ tiene un extremo local sobre $S$, pruebe que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $DJ(u)(v) = \lambda\langle u, v\rangle_H$ para todo $v \in H$.

**Ejercicio 23.4.7.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera suave y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ compatible con ella. Considere sobre $W_0^{1,2}(M, \mathbf{E})$ los funcionales $J(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\int_M |\nabla^{\mathbf{E}}_w \mathbf{u}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$ y $G(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\int_M |\mathbf{u}|^2_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$. Suponga que $\mathbf{u} \neq 0$ minimiza $J$ bajo la restricción $G(\mathbf{u}) = 1$. Aplique el teorema de multiplicadores de Lagrange para obtener la identidad débil del problema propio asociado al Laplaciano de Bochner.

**Ejercicio 23.4.8.** Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach de secciones de haces vectoriales y sea $\mathcal{F}\colon X \times \mathbb{R} \longrightarrow Y$ de clase $C^1$. Suponga que $\mathcal{F}(\mathbf{u}_0, \lambda_0) = 0$ y que $D_1\mathcal{F}(\mathbf{u}_0, \lambda_0)\colon X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo. Formule y demuestre, mediante el Teorema 23.3.8, la existencia de una rama local $\lambda \longmapsto \mathbf{u}(\lambda)$ de soluciones. Calcule $\mathbf{u}'(\lambda_0)$.

# 24

# Variedades de Banach

Las variedades de dimensión infinita extienden la noción de variedad suave más allá del contexto finito–dimensional. Mientras que una variedad de dimensión finita se describe localmente mediante abiertos de $\mathbb{R}^n$, en dimensión infinita pueden emplearse diversos espacios vectoriales topológicos como modelos locales. Este capítulo trabaja exclusivamente con espacios de Banach; las estructuras de Fréchet e ILH se introducen más adelante sólo cuando resultan necesarias.

Esta extensión no es meramente formal. En análisis global y geometría diferencial aparecen de manera natural espacios funcionales dotados de una estructura geométrica de dimensión infinita. Por ejemplo, si $\mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial sobre una variedad riemanniana, los espacios de Sobolev $W^{m,p}(M,\mathbf{E})$ son espacios de Banach y sirven como espacios de configuración para numerosos problemas variacionales. Otros ejemplos importantes son los espacios de secciones suaves $\Gamma(\mathbf{E})$, los espacios de mapeos suaves $C^\infty(M,N)$, los grupos de difeomorfismos $\mathrm{Diff}(M)$, las variedades de lazos $C^\infty(S^1,M)$ y los espacios de inmersiones o encajes.

Este punto de vista resulta especialmente útil en el estudio variacional de ecuaciones diferenciales parciales. Con frecuencia, las soluciones se caracterizan como puntos críticos de un funcional de energía definido sobre un espacio funcional de dimensión infinita. También es habitual restringir dicho funcional a subconjuntos que poseen estructura de variedad, como las esferas unitarias, las variedades de Nehari, las subvariedades determinadas por restricciones integrales y los conjuntos de nivel de funcionales diferenciables. La geometría de estos espacios proporciona entonces el lenguaje adecuado para formular condiciones de criticidad, aplicar multiplicadores de Lagrange, estudiar flujos de gradiente y analizar problemas de minimización restringida.

Asimismo, ciertos espacios de objetos geométricos pueden entenderse como variedades de dimensión infinita. Entre ellos se encuentran el espacio de métricas riemannianas sobre una variedad fija, el espacio de conexiones sobre un haz principal, diversos espacios de curvas o superficies y algunos cocientes por grupos de simetrías. Este lenguaje ocupa un lugar central en la teoría de Morse, la teoría de gauge, la geometría simpléctica, el cálculo de variaciones y el estudio de ecuaciones geométricas.

El recorrido construye los fundamentos de las variedades de Banach que se utilizarán en el análisis no lineal y en los métodos variacionales. Incluye sus espacios tangentes, las subvariedades determinadas por restricciones diferenciables, las formas locales de las inmersiones y submersiones, el teorema del rango constante y el teorema de la preimagen. También examina las hipótesis bajo las cuales existen funciones bump y particiones suaves de la unidad. Esta última cuestión revela una diferencia esencial con la dimensión finita: la paracompacidad de la

variedad no basta por sí sola si el espacio de Banach modelo carece de las funciones suaves necesarias. El marco obtenido cubre buena parte de las situaciones modeladas sobre espacios de Sobolev y prepara el estudio posterior de problemas variacionales y espacios de mapeos.

**De las variedades finitas a los espacios de configuraciones**

La idea de modelar una variedad sobre un espacio funcional permitió aplicar la geometría diferencial a problemas donde la incógnita completa es una función. Eells y Palais desarrollaron herramientas globales para estos espacios y mostraron que muchas construcciones finito–dimensionales sobreviven bajo hipótesis funcionales precisas. La diferencia esencial es que en dimensión infinita la existencia de complementos, funciones flan o métricas adecuadas ya no es automática. Por ello el capítulo conserva visibles las hipótesis que permiten utilizar cada teorema [85, 111].

## 24.1 Variedades de Banach

Comenzamos estudiando variedades modeladas sobre espacios de Banach. En ellas se conservan el cálculo diferencial y los teoremas locales necesarios para tratar espacios funcionales como objetos geométricos. En particular, los espacios de Sobolev de secciones, las restricciones definidas por funcionales diferenciables y muchos conjuntos de nivel que aparecen en métodos variacionales poseen, bajo hipótesis adecuadas, estructura de variedad de Banach.

Salvo indicación expresa en sentido contrario, los espacios modelo de este capítulo son espacios de Banach reales y la diferenciabilidad se entiende sobre el cuerpo real.

**Definición 24.1.1.** Sea $(M,\tau)$ un espacio topológico de Hausdorff y sea $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, con $k \geq 1$. Una **carta de Banach** sobre $M$ es un par $(U,\varphi)$, donde $U \subseteq M$ es abierto no vacío y $\varphi\colon U \longrightarrow V$ es un homeomorfismo de $U$ sobre un abierto $V$ de un espacio de Banach $X$.

Dos cartas $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ y $(U_\beta,\varphi_\beta)$, modeladas respectivamente sobre espacios de Banach $X_\alpha$ y $X_\beta$, son **$C^k$–compatibles** si $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ o si el cambio de coordenadas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un difeomorfismo de clase $C^k$ entre abiertos de espacios de Banach. La diferenciabilidad se entiende en el sentido de Fréchet, conforme a la Definición 23.2.6, y el concepto de difeomorfismo es el de la Definición 23.3.4. Cuando $k=\infty$, se exige que el cambio de coordenadas y su inverso sean de clase $C^r$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Un **atlas de Banach de clase** $C^k$ sobre $M$ es una familia de cartas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ que cubre a $M$ y cuyas cartas son mutuamente $C^k$–compatibles. Una **variedad de Banach sin frontera de clase** $C^k$ es un espacio topológico de Hausdorff provisto de un atlas maximal de Banach de clase $C^k$. Una variedad de Banach de clase $C^\infty$ se denomina **variedad de Banach suave**.

En este capítulo, y siempre que se invoque la Definición 24.1.1, la expresión *variedad de Banach* se entiende sin frontera, salvo indicación expresa. Adoptamos la misma convención para las variedades de dimensión finita que aparezcan como dominios o codominios de los mapeos estudiados. La hipótesis queda incorporada en los modelos locales: las imágenes de las cartas son abiertas en espacios de Banach.

También existen variedades de Banach con frontera en dimensión infinita. Sus cartas permiten abiertos re-

lativos de semiespacios como $X \times [0,\infty)$, con cambios de coordenadas diferenciables hasta la frontera. El propio producto $X \times [0,\infty)$ es un ejemplo, cuya frontera es $X \times \{0\}$; véase [85, pp. 766–767]. Las formas locales y la construcción tangente que siguen se formulan con la convención anterior.

La frontera de un espacio de configuraciones es distinta de la frontera de la variedad sobre la que están definidas sus funciones. Si una variedad riemanniana $M$ tiene frontera, el espacio $W_0^{1,p}(M)$, con $1 < p < \infty$, sigue siendo un espacio de Banach y, como variedad modelada sobre sí mismo, no tiene frontera. La condición de Dirichlet determina aquí un espacio vectorial de funciones admisibles. Las restricciones dadas por valores regulares de funcionales se describirán mediante subvariedades encajadas de esos espacios.

En la definición anterior permitimos, a priori, que las cartas estén modeladas sobre espacios de Banach distintos. Sin embargo, en cada componente conexa de la variedad el espacio modelo queda determinado salvo isomorfismo de espacios de Banach.

**Lema 24.1.2.** Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^k$, con $k \geq 1$. Si $M$ es conexa, entonces todos los espacios de Banach que modelan sus cartas son lineal y topológicamente isomorfos.

*Demostración.* Si $M = \varnothing$, no hay cartas que comparar. Supongamos $M \neq \varnothing$. Primero observamos que si dos cartas de la estructura diferenciable tienen intersección no vacía, entonces sus espacios modelo son isomorfos como espacios de Banach. Sean $(U,\varphi)$ y $(V,\psi)$ dos cartas tales que $U \cap V \neq \varnothing$, modeladas sobre los espacios de Banach $X$ y $Y$, respectivamente. Fijemos $x \in U \cap V$ y escribamos $\xi := \varphi(x)$. Como el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo de clase al menos $C^1$, el operador

$$d(\psi \circ \varphi^{-1})_\xi : X \longrightarrow Y$$

es lineal y continuo. Al diferenciar las identidades entre los cambios de coordenadas inversos obtenemos

$$d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} \circ d(\psi \circ \varphi^{-1})_\xi = \mathrm{id}_X, \qquad d(\psi \circ \varphi^{-1})_\xi \circ d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} = \mathrm{id}_Y .$$

Por lo tanto, $d(\psi \circ \varphi^{-1})_\xi$ es un isomorfismo lineal continuo cuya inversa también es continua.
Tomemos ahora una carta fija $(U_0,\varphi_0)$, modelada sobre un espacio de Banach $X_0$, y definamos

$$A := \{x \in M \mid \text{existe una carta alrededor de } x \text{ modelada sobre un espacio isomorfo a } X_0\}.$$

El conjunto $A$ es no vacío, pues $U_0 \subseteq A$, y es abierto: si $x \in A$ y $(U,\varphi)$ es una carta alrededor de $x$ modelada sobre un espacio isomorfo a $X_0$, entonces la misma carta sirve alrededor de cada punto de $U$, de modo que $U \subseteq A$.
También $M \setminus A$ es abierto. Sea $y \in M \setminus A$ y sea $(V,\psi)$ una carta alrededor de $y$, modelada sobre un espacio de Banach $Y$. Si existiera $z \in V \cap A$, habría una carta alrededor de $z$ modelada sobre un espacio isomorfo a $X_0$. Esta carta se intersectaría con $(V,\psi)$ en un abierto que contiene a $z$ y, por la primera parte de la prueba, $Y$ sería isomorfo a $X_0$. La carta $(V,\psi)$ mostraría entonces que $y \in A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V \subseteq M \setminus A$.
Así, $A$ es abierto y cerrado. Como $M$ es conexa y $A \neq \varnothing$, se tiene $A = M$. Finalmente, si $(V,\psi)$ es una carta cualquiera, elegimos $y \in V$. Puesto que $y \in A$, existe otra carta alrededor de $y$ cuyo espacio modelo es isomorfo a $X_0$; al comparar ambas cartas en una vecindad de $y$, la primera parte de la prueba muestra que el espacio modelo de $(V,\psi)$ también es isomorfo a $X_0$. Esto concluye la demostración. □

Este resultado justifica que, cuando $M$ es conexa, se hable del espacio modelo de una variedad de Banach salvo isomorfismo de espacios de Banach. Por esta razón, con frecuencia se define desde el inicio una variedad de Banach como una variedad modelada sobre un espacio de Banach fijo $X$.

Antes de introducir el espacio tangente precisamos la regularidad de los mapeos entre variedades de Banach.

**Definición 24.1.3.** Sean $M$ y $N$ variedades de Banach de clases $C^k$ y $C^\ell$, respectivamente, y sea $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que $1 \le r \le k$ y $1 \le r \le \ell$. Un mapeo $F\colon M \longrightarrow N$ es de **clase** $C^r$ **en** $p \in M$ si existen una carta $(U, \varphi)$ de $M$ alrededor de $p$, una carta $(V, \psi)$ de $N$ alrededor de $F(p)$ y una vecindad abierta $U_0 \subseteq U$ de $p$ tales que $F(U_0) \subseteq V$ y

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U_0) \longrightarrow \psi(V)$$

es de clase $C^r$. El mapeo $F$ es de **clase** $C^r$ si lo es en cada punto de $M$. Cuando $r = \infty$, se dice que $F$ es **suave**.

La regularidad anterior no depende de las cartas elegidas. Sean $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ y $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$ otras cartas alrededor de $p$ y $F(p)$, respectivamente. La representación $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es continua y $V \cap \widetilde{V}$ es una vecindad de $F(p)$; por lo tanto, podemos restringir el dominio a una vecindad de $p$ cuya imagen por $F$ esté contenida en $V \cap \widetilde{V}$. Restringiendo también a $U \cap \widetilde{U}$, se tiene

$$\widetilde{\psi} \circ F \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = (\widetilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}).$$

Los mapeos situados a ambos lados de la representación coordenada de $F$ son cambios de coordenadas de clase al menos $C^r$. La regla de la cadena muestra que una representación coordenada de $F$ es de clase $C^r$ si y sólo si cualquier otra lo es.

**Observación 24.1.4.** (La estructura de menor regularidad) Sea $\mathcal{A}^k$ el atlas maximal de una variedad de clase $C^k$ y fijemos $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con $1 \le r \le k$. Los cambios de coordenadas de $\mathcal{A}^k$ son también de clase $C^r$. Este atlas determina, por tanto, una estructura de clase $C^r$ sobre el mismo espacio topológico; denotemos por $\mathcal{A}^r$ su atlas maximal. Sus cartas son las que resultan $C^r$–compatibles con las de $\mathcal{A}^k$. Dos de estas cartas son compatibles entre sí: cerca de cada punto de una intersección se introduce una carta de $\mathcal{A}^k$ y se escribe su cambio de coordenadas como composición de dos difeomorfismos de clase $C^r$.

Cuando $r < k$, el atlas $\mathcal{A}^r$ puede contener más cartas que $\mathcal{A}^k$. Llamaremos *carta de clase $C^r$ de $M$* a una carta de $\mathcal{A}^r$. La clase $C^r$ de un mapeo puede comprobarse en estas cartas, pues el argumento de independencia de las coordenadas sólo utiliza cambios de clase $C^r$. Esta distinción permite construir coordenadas adaptadas a un mapeo con la regularidad que éste posee. En los resultados sobre formas locales de mapeos de clase $C^r$, las cartas construidas pertenecerán a las estructuras de clase $C^r$ subyacentes.

Como $r \ge 1$, todos estos cambios de coordenadas son de clase $C^1$. Por la regla de la cadena, dos curvas tienen la misma velocidad en una carta de $\mathcal{A}^k$ si y sólo si la tienen en una carta de $\mathcal{A}^r$. Así, al pasar a la estructura de menor regularidad se conserva el espacio tangente que definiremos a continuación.

Para estudiar campos vectoriales localmente Lipschitz y sus flujos, utilizaremos también una regularidad intermedia entre $C^1$ y $C^2$.

**Definición 24.1.5.** (Mapeos y variedades de clase $C^{1,1}$) Sean $X, Y$ espacios de Banach y sea $U \subseteq X$ abierto. Un mapeo $f\colon U \longrightarrow Y$ es de **clase** $C^{1,1}$ si es de clase $C^1$ y, para cada $x_0 \in U$, existen $r, L > 0$ tales que $B_X(x_0, r) \subseteq U$ y

$$\|Df(x) - Df(y)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le L\|x - y\|_X, \qquad x, y \in B_X(x_0, r).$$

La condición sobre la derivada es local: no se exige una sola constante $L$ válida en todo $U$. Un difeomorfismo es de clase $C^{1,1}$ si tanto él como su inverso poseen esa regularidad.

Dos cartas de Banach son $C^{1,1}$**–compatibles** si su intersección es vacía o el cambio de coordenadas entre ellas es un difeomorfismo de clase $C^{1,1}$. Un **atlas de clase** $C^{1,1}$ es una cubierta por cartas mutuamente $C^{1,1}$–compatibles. Una **variedad de Banach de clase** $C^{1,1}$ es un espacio de Hausdorff provisto de un atlas maximal de esa clase. Como sus cambios de coordenadas son $C^1$, este atlas determina una estructura de variedad de Banach de clase $C^1$ sobre el mismo espacio.

**Proposición 24.1.6.** (Estabilidad de la regularidad $C^{1,1}$) Todo mapeo de clase $C^2$ entre abiertos de espacios de Banach es de clase $C^{1,1}$. La composición de dos mapeos de clase $C^{1,1}$, cuando está definida, es de clase $C^{1,1}$. Además, si un difeomorfismo de clase $C^1$ es de clase $C^{1,1}$, su inverso también lo es.

*Demostración.* Si $f$ es de clase $C^2$, la continuidad de $D^2 f$ permite acotar su norma por alguna constante $L$ en una bola suficientemente pequeña alrededor de cada punto de su dominio. El Teorema 23.1.10, aplicado al mapeo $Df$ sobre esa bola convexa, da $\|Df(x) - Df(y)\| \leq L\|x - y\|$. Esto prueba la primera afirmación.

Sean ahora $f\colon U \subseteq X \longrightarrow Y$ y $g\colon V \subseteq Y \longrightarrow Z$ de clase $C^{1,1}$, con $f(U) \subseteq V$. Fijemos $x_0 \in U$. Podemos elegir una bola convexa $B \subseteq U$ alrededor de $x_0$ cuya imagen esté contenida en una bola convexa $C \subseteq V$, y constantes $M_f, M_g, L_f, L_g > 0$, tales que $\|Df\| \leq M_f$ en $B$, $\|Dg\| \leq M_g$ en $C$, y las derivadas sean Lipschitz allí con constantes $L_f, L_g$, respectivamente. La desigualdad del valor medio da $\|f(x) - f(y)\| \leq M_f\|x - y\|$ para $x, y \in B$. Por la regla de la cadena,

$$D(g \circ f)(x) - D(g \circ f)(y) = [Dg(f(x)) - Dg(f(y))]Df(x) + Dg(f(y))[Df(x) - Df(y)].$$

Por consiguiente,

$$\|D(g \circ f)(x) - D(g \circ f)(y)\| \leq (L_g M_f^2 + M_g L_f)\|x - y\|, \qquad x, y \in B.$$

La composición es, pues, de clase $C^{1,1}$.

Por último, sea $f\colon U \longrightarrow V$ un difeomorfismo de clase $C^1$ y supongamos que $f$ es de clase $C^{1,1}$. Escribamos $h = f^{-1}$. Alrededor de $y_0 \in V$ elegimos una bola convexa $C$ tal que $h(C)$ esté contenida en una bola donde $Df$ sea $L$–Lipschitz. Como $Dh$ es continua, podemos reducir $C$ de modo que $\|Dh(y)\| \leq M$ allí. Entonces $\|h(y) - h(z)\| \leq M\|y - z\|$ para $y, z \in C$. La identidad $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$, aplicada a $A = Df(h(y))$ y $B = Df(h(z))$, proporciona

$$Dh(y) - Dh(z) = Dh(y)[Df(h(z)) - Df(h(y))]Dh(z).$$

En consecuencia,

$$\|Dh(y) - Dh(z)\| \leq LM^3\|y - z\|, \qquad y, z \in C.$$

Esto demuestra que $h$ es de clase $C^{1,1}$. □

La estabilidad por composición permite completar un atlas $C^{1,1}$ a un único atlas maximal: se añaden todas las cartas compatibles con las dadas. Para comparar dos cartas añadidas alrededor de un punto común, se intercala una carta del atlas original y se aplica la proposición anterior a los dos cambios de coordenadas. Asimismo, un mapeo entre variedades $C^{1,1}$ es de clase $C^{1,1}$ cuando sus representaciones coordenadas lo son; la misma composición de cambios de carta demuestra que basta comprobarlo en una carta alrededor de cada punto.

Toda variedad de clase al menos $C^2$ posee así una estructura $C^{1,1}$ subyacente, obtenida completando su atlas en esta categoría. Al trabajar en regularidad $C^{1,1}$ utilizaremos las cartas de ese atlas elegido, no todas las cartas del atlas $C^1$ subyacente: un cambio meramente $C^1$ no tiene por qué poseer diferencial localmente Lipschitz. Las curvas admisibles y la construcción del espacio tangente que sigue sólo utilizan la regla de la cadena de primer orden, por lo que también se aplican a esta categoría mediante su estructura $C^1$ subyacente.

Si $U \subseteq M$ es abierto, lo consideramos provisto de la estructura de variedad de Banach inducida por la de $M$. Denotamos por $C^r(U,N)$ el conjunto de los mapeos de clase $C^r$ de $U$ en $N$ y escribimos $C^r(U) := C^r(U,\mathbb{R})$. En particular, si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, una curva $\gamma\colon I \longrightarrow M$ es de clase $C^r$ si para cada $t_0 \in I$ existe una carta $(U,\varphi)$ alrededor de $\gamma(t_0)$, modelada sobre $X$, y un intervalo abierto $J \subseteq I$ que contiene a $t_0$ tales que $\gamma(J) \subseteq U$ y $\varphi \circ \gamma\restriction_J\colon J \longrightarrow X$ es de clase $C^r$. Por la independencia de las cartas, basta verificar esta condición en una carta alrededor de cada punto de la curva.

A continuación introducimos la noción de espacio tangente. En dimensión finita existen varias construcciones equivalentes, entre ellas la basada en curvas y la formulada mediante derivaciones sobre gérmenes de funciones suaves. En variedades de Banach ambas construcciones no tienen por qué coincidir mediante la identificación canónica, por lo que conviene distinguirlas antes de fijar la convención que utilizaremos.

**Definición 24.1.7.** Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^k$, con $k \geq 1$, y sea $p \in M$. Una **curva admisible en** $p$ es un mapeo $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ de clase $C^1$ tal que $\gamma(0) = p$, donde $\varepsilon > 0$ puede depender de $\gamma$.
Dos curvas admisibles $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son **equivalentes en** $p$, y escribimos $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$, si existe una carta $(U,\varphi)$ alrededor de $p$ tal que, después de restringir ambas curvas a un intervalo común suficientemente pequeño alrededor de 0,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi \circ \gamma_1)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi \circ \gamma_2)(t).$$

**Proposición 24.1.8.** Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^k$, con $k \geq 1$, y sea $p \in M$. La condición de la Definición 24.1.7 no depende de la carta elegida y define una relación de equivalencia sobre el conjunto de curvas admisibles en $p$.

*Demostración.* Sean $(U,\varphi)$ y $(V,\psi)$ dos cartas alrededor de $p$, y sean $\gamma_1$ y $\gamma_2$ dos curvas admisibles en $p$. Como $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ y las curvas son continuas, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma_j((-\delta,\delta)) \subseteq U \cap V$ para $j \in \{1,2\}$. Cerca de 0 se tiene

$$\psi \circ \gamma_j = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_j),$$

y la regla de la cadena proporciona

$$(\psi \circ \gamma_j)'(0) = d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}\big((\varphi \circ \gamma_j)'(0)\big).$$

El operador $A_{\psi\varphi}(p) := d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ es un isomorfismo lineal continuo, con inverso $d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}$. Por consiguiente,

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \quad \Longleftrightarrow \quad (\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0).$$

Así, dos curvas tienen la misma velocidad en una carta alrededor de $p$ si y sólo si la tienen en cualquier otra. En particular, en la definición anterior la expresión "existe una carta" puede sustituirse equivalentemente por "para toda carta".

La reflexividad y la simetría son inmediatas. Para comprobar la transitividad, supongamos que $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$ y $\gamma_2 \sim_p \gamma_3$, y elijamos una carta cualquiera $(U,\varphi)$ alrededor de $p$. Por la independencia de la carta,

$$(\varphi\circ\gamma_1)'(0) = (\varphi\circ\gamma_2)'(0) = (\varphi\circ\gamma_3)'(0),$$

de modo que $\gamma_1 \sim_p \gamma_3$. □

**Definición 24.1.9.** Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^k$, con $k \geq 1$, y sea $p \in M$. El conjunto de clases de equivalencia de curvas admisibles en $p$ se denomina **espacio tangente cinemático** de $M$ en $p$ y se denota por $T_p^{\mathrm{kin}}M$. La clase de una curva admisible $\gamma$ se denota por $[\gamma]$.

**Proposición 24.1.10.** Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^k$, con $k \geq 1$, sea $p \in M$ y sea $(U,\varphi)$ una carta alrededor de $p$, modelada sobre un espacio de Banach $X$. El mapeo

$$\Theta_{\varphi,p}\colon T_p^{\mathrm{kin}}M \longrightarrow X, \qquad \Theta_{\varphi,p}([\gamma]) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi\circ\gamma)(t),$$

es una biyección. Las operaciones vectoriales transportadas desde $X$ mediante $\Theta_{\varphi,p}$ no dependen de la carta elegida. Cada carta determina además una norma completa sobre $T_p^{\mathrm{kin}}M$, y las normas determinadas por cartas distintas satisfacen las desigualdades explícitas de la prueba.

*Demostración.* Para toda curva admisible $\gamma$ en $p$, la continuidad de $\gamma$ permite restringir su dominio de modo que su imagen quede contenida en $U$. La independencia de la carta demostrada en la Proposición 24.1.8 muestra que $\Theta_{\varphi,p}$ no depende del representante de $[\gamma]$, por lo que está bien definido. Si $\Theta_{\varphi,p}([\gamma_1]) = \Theta_{\varphi,p}([\gamma_2])$, entonces $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$ por la propia definición de la relación; así, $\Theta_{\varphi,p}$ es inyectivo.
Para probar la suprayectividad, sea $v \in X$ y escribamos $a := \varphi(p)$. Como $\varphi(U)$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_X(a,r) \subseteq \varphi(U)$. Si $\varepsilon := \frac{r}{1+\|v\|_X}$, entonces $a + tv \in \varphi(U)$ para $|t| < \varepsilon$. La curva $\gamma_v(t) := \varphi^{-1}(a+tv)$ es admisible en $p$ y satisface $\Theta_{\varphi,p}([\gamma_v]) = v$.
Definimos, para $\xi,\eta \in T_p^{\mathrm{kin}}M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\xi + \eta := \Theta_{\varphi,p}^{-1}\big(\Theta_{\varphi,p}(\xi) + \Theta_{\varphi,p}(\eta)\big), \qquad \lambda\xi := \Theta_{\varphi,p}^{-1}\big(\lambda\Theta_{\varphi,p}(\xi)\big).$$

Sea $(V,\psi)$ otra carta alrededor de $p$, modelada sobre un espacio de Banach $Y$. La regla de la cadena da

$$\Theta_{\psi,p} = A_{\psi\varphi}(p)\circ\Theta_{\varphi,p}, \qquad A_{\psi\varphi}(p) := d(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}.$$

Como $A_{\psi\varphi}(p)$ es lineal, las operaciones obtenidas mediante $\Theta_{\psi,p}$ coinciden con las obtenidas mediante $\Theta_{\varphi,p}$. En particular, $T_p^{\mathrm{kin}}M$ posee una estructura vectorial bien definida; su vector cero es la clase de la curva constante $t \longmapsto p$.
Finalmente, pongamos $\|\xi\|_{\varphi,p} := \|\Theta_{\varphi,p}(\xi)\|_X$. Esta norma es completa porque $\Theta_{\varphi,p}$ es una isometría lineal sobre $X$. Además,

$$\|\xi\|_{\psi,p} \leq \|A_{\psi\varphi}(p)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|\xi\|_{\varphi,p}, \qquad \|\xi\|_{\varphi,p} \leq \|A_{\psi\varphi}(p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|\xi\|_{\psi,p}.$$

Por lo tanto, las dos desigualdades anteriores muestran que las normas asociadas a cartas distintas deter-

minan la misma topología. La estructura lineal y la topología de Banach así obtenidas son independientes de la carta, aunque en general no existe una norma distinguida. □

También existe una construcción algebraica del espacio tangente. Para formularla necesitamos que $M$ sea suave.

**Definición 24.1.11.** Sea $M$ una variedad suave de Banach y sea $p \in M$. Un **germen en $p$ de una función suave real** es una clase de equivalencia de pares $(U, f)$, donde $U \subseteq M$ es una vecindad abierta de $p$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es suave. Dos pares $(U, f)$ y $(V, g)$ son equivalentes si existe una vecindad abierta $W \subseteq U \cap V$ de $p$ tal que $f \restriction_W = g \restriction_W$. El conjunto de estos gérmenes se denota por $C^\infty_p(M)$.

La relación anterior es una relación de equivalencia: la reflexividad y la simetría son inmediatas, y la transitividad se obtiene intersectando dos vecindades en las que los representantes correspondientes coinciden. La suma, el producto y la multiplicación por escalares en $C^\infty_p(M)$ se definen eligiendo representantes, restringiéndolos a una vecindad común de $p$ y realizando allí las operaciones usuales. Estas definiciones no dependen de los representantes, pues representantes equivalentes coinciden en una vecindad suficientemente pequeña de $p$. Así, $C^\infty_p(M)$ es un álgebra real conmutativa con unidad. La evaluación en $p$ está bien definida y es un homomorfismo de álgebras. Como es habitual, utilizaremos el mismo símbolo $f$ para un germen y para cualquiera de sus representantes cuando no haya riesgo de confusión, y escribiremos simplemente $f(p)$.

**Definición 24.1.12.** Sea $M$ una variedad suave de Banach y sea $p \in M$. Un **vector tangente operacional en $p$** es un funcional lineal algebraico

$$D : C^\infty_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface la regla de Leibniz

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty_p(M)$. El espacio de todos los vectores tangentes operacionales en $p$ se denota por $T^{\mathrm{op}}_p M$.

No se impone ninguna condición de continuidad a $D$, pues no se ha elegido una topología sobre el álgebra de gérmenes $C^\infty_p(M)$. Con la suma y la multiplicación por escalares definidas puntualmente, $T^{\mathrm{op}}_p M$ es un espacio vectorial. Toda derivación $D \in T^{\mathrm{op}}_p M$ anula las constantes: de $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1)$ se obtiene $D(1) = 0$, y la linealidad da $D(c) = 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

**Proposición 24.1.13.** Sea $M$ una variedad suave de Banach y sea $p \in M$. Todo vector tangente cinemático determina un vector tangente operacional. Más precisamente, existe un mapeo lineal canónico e inyectivo

$$\mathcal{J}_p : T^{\mathrm{kin}}_p M \longrightarrow T^{\mathrm{op}}_p M, \qquad \mathcal{J}_p([\gamma]) = D_{[\gamma]},$$

donde

$$D_{[\gamma]} f := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)).$$

*Demostración.* La expresión está bien definida respecto del germen. Si dos representantes $f$ y $g$ coinciden en una vecindad $W$ de $p$, la continuidad de $\gamma$ permite restringir su dominio de modo que $\gamma(t) \in W$ cerca de 0; entonces $f(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$ cerca de 0 y ambas derivadas coinciden.
También es independiente de la curva que representa a $[\gamma]$. Fijemos una carta $(U, \varphi)$ alrededor de $p$, modelada sobre un espacio de Banach $X$, y escribamos $a := \varphi(p)$. Después de restringir el representante de $f$ y la carta a una vecindad común de $p$, la regla de la cadena da

$$D_{[\gamma]} f = D(f \circ \varphi^{-1})(a)\big[\Theta_{\varphi,p}([\gamma])\big]. \tag{24.1}$$

El miembro derecho depende únicamente del germen de $f$ y de la clase $[\gamma]$.
La linealidad de $D_{[\gamma]}$ respecto de $f$ se sigue de la linealidad de la derivada, y la regla usual del producto muestra que

$$D_{[\gamma]}(fg) = D_{[\gamma]}(f)g(p) + f(p)D_{[\gamma]}(g).$$

Por lo tanto, $D_{[\gamma]} \in T_p^{\mathrm{op}} M$.
La fórmula (24.1), la linealidad de $D(f \circ \varphi^{-1})(a)$ y la definición de las operaciones vectoriales en $T_p^{\mathrm{kin}} M$ implican que $\mathcal{J}_p$ es lineal. Para probar la inyectividad, sea $\xi \in T_p^{\mathrm{kin}} M$ tal que $\mathcal{J}_p(\xi) = 0$, y pongamos $v := \Theta_{\varphi,p}(\xi)$. Para cada $\ell \in X'$ consideremos la función suave $f_\ell \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_\ell(x) := \ell(\varphi(x) - a)$. Entonces

$$0 = \mathcal{J}_p(\xi)(f_\ell) = \ell(v).$$

Como el dual topológico $X'$ separa puntos de $X$, se sigue que $v = 0$. La inyectividad de $\Theta_{\varphi,p}$ implica que $\xi = 0$, y por lo tanto $\mathcal{J}_p$ es inyectivo. □

En dimensión finita, la identificación de la Definición 1.4.5, completada en el Ejercicio 1.4.13, muestra que $\mathcal{J}_p$ es un isomorfismo. En dimensión infinita puede no ser suprayectivo, pues la regla de Leibniz por sí sola no obliga a una derivación algebraica a depender únicamente de la primera derivada.

**Proposición 24.1.14.** (El tangente operacional puede contener vectores no cinemáticos) Sea $E := \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{R})$, considerado como variedad suave de Banach, y sea $0 \in E$. Entonces el mapeo canónico

$$\mathcal{J}_0 \colon T_0^{\mathrm{kin}} E \longrightarrow T_0^{\mathrm{op}} E$$

no es suprayectivo. En consecuencia, mediante la identificación canónica dada por $\mathcal{J}_0$, el espacio tangente cinemático es un subespacio propio del espacio tangente operacional.

*Demostración.* Sea $\mathcal{L}^2_s(E; \mathbb{R})$ el espacio de las formas bilineales continuas y simétricas sobre $E$, provisto de la norma de la Definición 23.2.1, y denotemos por $\mathcal{F}_s(E)$ el subespacio de las formas simétricas de rango finito. La Proposición B.3.23 identifica isométricamente cada $B \in \mathcal{L}^2_s(E; \mathbb{R})$ con un operador lineal continuo y autoadjunto $A_B \colon E \longrightarrow E$ mediante $B(x, y) = \langle A_B x, y \rangle_E$, y muestra que $\overline{\mathcal{F}_s(E)}$ corresponde al espacio de operadores compactos autoadjuntos.
Consideremos la forma $B_0(x, y) := \langle x, y \rangle_E$. El operador asociado a $B_0$ es la identidad de $E$, que no es compacta porque la base ortonormal canónica $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está contenida en la bola unitaria y satisface $\|e_n - e_m\|_E = \sqrt{2}$ para $n \neq m$. Por lo tanto,

$$B_0 \notin \overline{\mathcal{F}_s(E)}.$$

Formemos el espacio cociente

$$\mathcal{Q} := \mathcal{L}^2_s(E;\mathbb{R})/\overline{\mathcal{F}_s(E)}$$

y sea $\pi\colon \mathcal{L}^2_s(E;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{Q}$ la proyección canónica. Por la Proposición B.2.20, $\mathcal{Q}$ es un espacio normado y

$$\|\pi(B)\|_{\mathcal{Q}} = \operatorname{dist}_{\mathcal{L}^2_s(E;\mathbb{R})}\big(B, \overline{\mathcal{F}_s(E)}\big).$$

En particular, $b_0 := \pi(B_0)$ es no nulo y $\|b_0\|_{\mathcal{Q}} > 0$.
Sobre el subespacio unidimensional $\operatorname{span}\{b_0\}$ definimos

$$\lambda_0\colon \operatorname{span}\{b_0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \lambda_0(tb_0) := t.$$

Esta función está bien definida porque $b_0 \neq 0$: si $tb_0 = sb_0$, entonces $(t-s)b_0 = 0$ y, por lo tanto, $t = s$. Además, $\lambda_0$ es lineal. Por la homogeneidad absoluta de la norma, $\|tb_0\|_{\mathcal{Q}} = |t|\|b_0\|_{\mathcal{Q}}$, y, en consecuencia,

$$|\lambda_0(tb_0)| = |t| = \frac{\|tb_0\|_{\mathcal{Q}}}{\|b_0\|_{\mathcal{Q}}}.$$

En particular, para todo $t \neq 0$,

$$\frac{|\lambda_0(tb_0)|}{\|tb_0\|_{\mathcal{Q}}} = \frac{1}{\|b_0\|_{\mathcal{Q}}}.$$

Como todo elemento no nulo de $\operatorname{span}\{b_0\}$ es de la forma $tb_0$ con $t \neq 0$, se concluye que

$$\|\lambda_0\| = \sup_{\substack{x \in \operatorname{span}\{b_0\} \\ x \neq 0}} \frac{|\lambda_0(x)|}{\|x\|_{\mathcal{Q}}} = \frac{1}{\|b_0\|_{\mathcal{Q}}}.$$

Por lo tanto, $\lambda_0$ es continua. El Corolario B.2.29 proporciona una extensión lineal continua $\widetilde{\lambda}\colon \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ de $\lambda_0$. Definimos

$$\Lambda := \widetilde{\lambda} \circ \pi\colon \mathcal{L}^2_s(E;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Entonces $\Lambda$ es lineal y continua, anula $\overline{\mathcal{F}_s(E)}$ y satisface $\Lambda(B_0) = 1$.
Para un germen $f \in C^\infty_0(E)$ definimos

$$\mathscr{D}(f) := \Lambda(D^2 f(0)).$$

Esta definición no depende del representante, pues dos representantes del mismo germen coinciden en una vecindad de 0 y tienen allí las mismas derivadas. El Teorema 23.2.10 garantiza que $D^2 f(0) \in \mathcal{L}^2_s(E;\mathbb{R})$. La linealidad de la segunda derivada y de $\Lambda$ muestra que $\mathscr{D}$ es lineal.
Sean $f, g \in C^\infty_0(E)$ y elijamos representantes definidos en una vecindad abierta común de 0. Por la Proposición 23.2.11,

$$D^2(fg)(0) = f(0)D^2 g(0) + g(0)D^2 f(0) + Df(0) \otimes Dg(0) + Dg(0) \otimes Df(0).$$

El Corolario B.3.24 muestra que

$$C_{f,g} := Df(0) \otimes Dg(0) + Dg(0) \otimes Df(0)$$

es una forma bilineal simétrica de rango a lo sumo dos. Por lo tanto, $C_{f,g} \in \mathcal{F}_s(E) \subseteq \overline{\mathcal{F}_s(E)}$ y $\Lambda(C_{f,g}) = 0$. Al

aplicar $\Lambda$ a la fórmula anterior obtenemos

$$\mathscr{D}(fg) = f(0)\mathscr{D}(g) + g(0)\mathscr{D}(f).$$

Así, $\mathscr{D} \in T_0^{\mathrm{op}}E$.
Resta probar que $\mathscr{D}$ no pertenece a la imagen de $\mathcal{J}_0$. Consideremos $q\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(x) := \|x\|_E^2$. Para $x, h \in E$ se tiene $q(x+h) - q(x) = 2\langle x, h\rangle_E + \|h\|_E^2$, de donde

$$Dq(x)[h] = 2\langle x, h\rangle_E, \qquad D^2q(x)[h,k] = 2\langle h, k\rangle_E.$$

La segunda derivada es constante y las derivadas de orden mayor son nulas; en particular, $q$ es suave, $Dq(0) = 0$ y $D^2q(0) = 2B_0$. Por consiguiente,

$$\mathscr{D}(q) = 2\Lambda(B_0) = 2.$$

En cambio, si $[\gamma] \in T_0^{\mathrm{kin}}E$ y $v := \gamma'(0)$, la regla de la cadena da

$$\mathcal{J}_0([\gamma])(q) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} q(\gamma(t)) = Dq(0)[v] = 0.$$

Así, $\mathscr{D}$ no coincide con $\mathcal{J}_0([\gamma])$ para ninguna curva admisible $\gamma$, y $\mathcal{J}_0$ no es suprayectivo. □

Como $\mathcal{J}_0$ es inyectivo, permite identificar canónicamente $T_0^{\mathrm{kin}}E$ con el subespacio $\mathcal{J}_0(T_0^{\mathrm{kin}}E)$ de $T_0^{\mathrm{op}}E$; la proposición demuestra que esta inclusión es propia. Esto significa exactamente que existen derivaciones operacionales que no proceden de velocidades de curvas y, por lo tanto, que las dos construcciones del espacio tangente no coinciden de manera canónica en dimensión infinita. La no suprayectividad de $\mathcal{J}_0$ no excluye, por sí sola, la posible existencia de algún isomorfismo lineal abstracto no canónico entre los dos espacios vectoriales: para descartar también esa posibilidad sería necesario comparar, por ejemplo, sus dimensiones algebraicas. Tal afirmación más fuerte no es necesaria aquí; la diferencia geométricamente relevante es que la identificación natural proporcionada por las curvas no agota el espacio de derivaciones.

En lo sucesivo, salvo indicación expresa en sentido contrario, el término "espacio tangente" se referirá al espacio tangente cinemático.

**Definición 24.1.15.** Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^k$, con $k \geq 1$, y sea $p \in M$. El **espacio tangente** de $M$ en $p$ es

$$T_pM := T_p^{\mathrm{kin}}M.$$

Sus elementos son clases de equivalencia de curvas admisibles. Si $(U, \varphi)$ es una carta alrededor de $p$ modelada sobre un espacio de Banach $X$, el isomorfismo lineal bicontinuo asociado a la carta es

$$\Theta_{\varphi,p}\colon T_pM \longrightarrow X, \qquad [\gamma] \longmapsto \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\varphi \circ \gamma)(t).$$

**Definición 24.1.16.** Sea $F\colon M \longrightarrow N$ un mapeo de clase $C^1$ entre variedades de Banach y sea $p \in M$. El

**diferencial de** $F$ **en** $p$ es el mapeo

$$dF_p\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N, \qquad dF_p[\gamma] := [F\circ\gamma].$$

La definición anterior tiene sentido porque $F\circ\gamma$ es una curva de clase $C^1$ y satisface $(F\circ\gamma)(0) = F(p)$. Además, no depende del representante de $[\gamma]$. Sean $(U,\varphi)$ una carta de $M$ alrededor de $p$ y $(V,\psi)$ una carta de $N$ alrededor de $F(p)$. Después de restringir los dominios, para toda curva admisible $\gamma$ en $p$ se tiene

$$(\psi\circ F\circ\gamma)'(0) = d(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\big((\varphi\circ\gamma)'(0)\big).$$

Si $\gamma_1$ y $\gamma_2$ representan el mismo vector de $T_pM$, sus velocidades en la carta $\varphi$ coinciden y la fórmula anterior muestra que $F\circ\gamma_1$ y $F\circ\gamma_2$ tienen la misma velocidad en la carta $\psi$. Por lo tanto, $[F\circ\gamma_1] = [F\circ\gamma_2]$.

La misma fórmula proporciona la representación coordenada

$$\Theta_{\psi,F(p)}\circ dF_p\circ\Theta^{-1}_{\varphi,p} = d(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}.$$

En particular, $dF_p$ es un operador lineal continuo. La regla de la cadena para mapeos entre abiertos de espacios de Banach implica además que, si $G\colon N\longrightarrow P$ es de clase $C^1$, entonces

$$d(G\circ F)_p = dG_{F(p)}\circ dF_p, \qquad d(\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{T_pM}.$$

## 24.2 Complementabilidad y descomposiciones lineales

Las formas locales de las subvariedades y de los mapeos de rango regular dependen de una propiedad lineal que en dimensión finita pasa inadvertida. Un subespacio cerrado de un espacio de Banach no tiene por qué admitir un complemento cerrado. Por ello, antes de estudiar inmersiones y submersiones, conviene precisar la relación entre complementos topológicos, proyecciones continuas e inversas laterales.

**Definición 24.2.1.** Sea $E$ un espacio de Banach y sea $Y\subseteq E$ un subespacio cerrado. Decimos que $Y$ está **complementado** en $E$ si existe un subespacio cerrado $Z\subseteq E$ tal que

$$E = Y\oplus Z.$$

Esto significa que cada $x\in E$ se escribe de manera única como $x = y+z$, con $y\in Y$ y $z\in Z$. El subespacio $Z$ se denomina un **complemento topológico** de $Y$.

La palabra "topológico" se refiere a que los dos sumandos son espacios de Banach con las normas inducidas y a que las proyecciones determinadas por la descomposición son continuas. Esta última propiedad no constituye una hipótesis adicional, como muestra la caracterización siguiente.

**Proposición 24.2.2.** (Caracterización mediante proyecciones continuas) Sean $E$ un espacio de Banach y $Y\subseteq E$ un subespacio cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) El subespacio $Y$ está complementado en $E$.

(b) Existe un operador $P\in\mathcal{L}(E)$ tal que $P^2 = P$ y $\mathrm{Ran}(P) = Y$.

Si se cumple (b), entonces

$$E = Y \oplus \ker(P).$$

*Demostración.* Supongamos que $E = Y \oplus Z$, con $Y$ y $Z$ cerrados. Dotamos a $Y \times Z$ de la norma $\|(y,z)\| := \|y\| + \|z\|$. El operador

$$S : Y \times Z \longrightarrow E, \qquad S(y,z) := y + z,$$

es lineal, continua y biyectiva. Como $Y \times Z$ y $E$ son espacios de Banach, el Teorema B.2.17 asegura que $S^{-1}$ es continua. Si $\mathrm{pr}_Y$ y $\mathrm{pr}_Z$ denotan las proyecciones coordenadas de $Y \times Z$, las proyecciones determinadas por la suma directa son

$$P_Y = \mathrm{pr}_Y \circ S^{-1}, \qquad P_Z = \mathrm{pr}_Z \circ S^{-1}.$$

Por lo tanto, ambas son continuas. En particular, $P_Y^2 = P_Y$ y $\mathrm{Ran}(P_Y) = Y$.
Recíprocamente, sea $P \in \mathcal{L}(E)$ una proyección con rango $Y$. El subespacio $\ker(P)$ es cerrado. Para cada $x \in E$ se tiene

$$x = Px + (x - Px),$$

donde $Px \in Y$ y $P(x - Px) = 0$. Por lo tanto, $E = Y + \ker(P)$. Si $x \in Y \cap \ker(P)$, entonces $x = Py$ para algún $y \in E$ y

$$x = Py = P^2 y = P(Py) = Px = 0.$$

La suma es directa y $E = Y \oplus \ker(P)$. □

**Definición 24.2.3.** (Inversas laterales) Sean $E$ y $F$ espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Un operador $L \in \mathcal{L}(F,E)$ es una **inversa izquierda** de $T$ si $L \circ T = I_E$, y un operador $R \in \mathcal{L}(F,E)$ es una **inversa derecha** de $T$ si $T \circ R = I_F$. Ambos se denominan **inversas laterales** de $T$.

**Proposición 24.2.4.** (Inversas laterales y complementabilidad) Sean $E$ y $F$ espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

(a) Existe $L \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que $L \circ T = I_E$ si y sólo si $T$ es inyectivo y $\mathrm{Ran}(T)$ es un subespacio complementado de $F$.

(b) Existe $R \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que $T \circ R = I_F$ si y sólo si $T$ es suprayectivo y $\ker(T)$ es un subespacio complementado de $E$.

En el primer caso, $T : E \longrightarrow \mathrm{Ran}(T)$ es un isomorfismo de espacios de Banach. En el segundo, si $E = \ker(T) \oplus E_1$, entonces $T\restriction_{E_1} : E_1 \longrightarrow F$ es un isomorfismo.

*Demostración.* Supongamos primero que $L \circ T = I_E$. Entonces $T$ es inyectivo. El operador $P := T \circ L \in \mathcal{L}(F)$ satisface

$$P^2 = T(LT)L = TL = P.$$

Además, $P(F) \subseteq \mathrm{Ran}(T)$ y $P(Tx) = T(LT)x = Tx$ para todo $x \in E$. Por consiguiente, $\mathrm{Ran}(T) = \mathrm{Ran}(P) = \ker(I_F - P)$. Este subespacio es cerrado, y la Proposición 24.2.2 muestra que este rango está complementado. Supongamos ahora que $T$ es inyectivo y que $F = \mathrm{Ran}(T) \oplus Z$. Como el rango es cerrado, $T : E \longrightarrow \mathrm{Ran}(T)$ es un operador lineal continuo y biyectivo entre espacios de Banach. El Teorema B.2.17 implica que su

inversa $T^{-1}\colon \operatorname{Ran}(T) \longrightarrow E$ es continua. Si $P_{\operatorname{Ran}(T)}\colon F \longrightarrow \operatorname{Ran}(T)$ es la proyección continua asociada a la descomposición, entonces

$$L := T^{-1} \circ P_{\operatorname{Ran}(T)}$$

pertenece a $\mathcal{L}(F,E)$ y satisface $L \circ T = I_E$. Esto prueba (a).
Supongamos que $T \circ R = I_F$. En particular, $T$ es suprayectivo. El operador $Q := R \circ T \in \mathcal{L}(E)$ es una proyección, pues

$$Q^2 = R(TR)T = RT = Q.$$

Si $x \in \ker(Q)$, entonces $Tx = T(Qx) = 0$. La inclusión recíproca es inmediata, por lo que $\ker(Q) = \ker(T)$. Asimismo, $\operatorname{Ran}(Q) = \operatorname{Ran}(R)$. Puesto que $Q$ es una proyección continua, su rango y su núcleo son cerrados y la Proposición 24.2.2 proporciona la descomposición topológica

$$E = \ker(T) \oplus \operatorname{Ran}(R).$$

Recíprocamente, supongamos que $T$ es suprayectivo y que $E = \ker(T) \oplus E_1$. La restricción $T_1 := T \restriction_{E_1}\colon E_1 \longrightarrow F$ es inyectiva. También es suprayectiva: dado $y \in F$, elegimos $x \in E$ con $Tx = y$ y escribimos $x = k + x_1$, con $k \in \ker(T)$ y $x_1 \in E_1$; entonces $T_1 x_1 = y$. El Teorema B.2.17 muestra que $T_1^{-1}\colon F \longrightarrow E_1$ es continuo. La composición de esta inversa con la inclusión $E_1 \hookrightarrow E$ proporciona una inversa derecha continua de $T$. □

Las inversas laterales persisten bajo perturbaciones suficientemente pequeñas. Esta propiedad explica por qué las formas locales que aparecerán más adelante se mantienen en una vecindad del punto considerado.

**Corolario 24.2.5.** (Estabilidad de las inversas laterales) Sean $E$ y $F$ espacios de Banach y sean $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$.

(a) Si $L \in \mathcal{L}(F,E)$ satisface $LT = I_E$ y $\|L(S-T)\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, entonces $S$ admite la inversa izquierda continua

$$(LS)^{-1}L.$$

(b) Si $R \in \mathcal{L}(F,E)$ satisface $TR = I_F$ y $\|(S-T)R\|_{\mathcal{L}(F)} < 1$, entonces $S$ admite la inversa derecha continua

$$R(SR)^{-1}.$$

*Demostración.* En el primer caso, $LS = I_E + L(S-T)$ es invertible por el Teorema B.2.10; por lo tanto, $(LS)^{-1}LS = I_E$. En el segundo, $SR = I_F + (S-T)R$ es invertible y $SR(SR)^{-1} = I_F$. □

**Proposición 24.2.6.** (Complementos en los casos finito–dimensional e hilbertiano) Sea $E$ un espacio de Banach.

(a) Todo subespacio finito–dimensional de $E$ está complementado.

(b) Todo subespacio cerrado de codimensión finita en $E$ está complementado.

(c) Si $E$ es un espacio de Hilbert, todo subespacio cerrado de $E$ está complementado.

*Demostración.* Sea $Y \subseteq E$ finito–dimensional y elijamos una base $y_1, \dots, y_m$ de $Y$. Los funcionales coordenados $\ell_j \colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuos. Por el Corolario B.2.29, cada $\ell_j$ posee una extensión continua $\widetilde{\ell}_j \in E'$. El operador

$$P(x) := \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\ell}_j(x) y_j$$

es una proyección continua sobre $Y$. La Proposición 24.2.2 prueba (a).
Sea ahora $Y \subseteq E$ cerrado y de codimensión $m < \infty$. Elegimos $e_1, \dots, e_m \in E$ cuyas clases formen una base algebraica de $E/Y$ y ponemos $Z := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_m\}$. Entonces $Z$ es cerrado, $Y \cap Z = \{0\}$ y cada elemento de $E$ pertenece a $Y + Z$. Por lo tanto, $E = Y \oplus Z$.
Finalmente, si $E$ es un espacio de Hilbert y $Y$ es cerrado, el Corolario B.3.8 proporciona $E = Y \oplus Y^{\perp}$. □

## 24.3 Subvariedades de Banach

Pasamos ahora a la noción de subvariedad. En dimensión finita, un subconjunto es una subvariedad si localmente puede enderezarse mediante un cambio de coordenadas. En espacios de Banach se conserva este principio, pero aparece una condición topológica adicional: el subespacio que describe las direcciones tangentes debe ser complementado. En dimensión infinita, un subespacio cerrado no admite necesariamente un complemento cerrado, de modo que esta propiedad debe formar parte de la definición.

**Definición 24.3.1.** Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^k$ y sea $1 \le r \le k$. Un subconjunto $N \subseteq M$ es una **subvariedad encajada de clase** $C^r$ si, para cada $p \in N$, existe una carta $(U, \varphi)$ de clase $C^r$ de $M$ alrededor de $p$, en el sentido de la Observación 24.1.4, con $\varphi(p) = 0$, y una descomposición topológica $X = Y \oplus Z$ del espacio modelo de la carta en subespacios cerrados, de modo que, al identificar $X$ con $Y \times Z$ mediante $(y, z) \mapsto y + z$, se cumpla

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (Y \times \{0\}).$$

Una carta de clase $C^r$ con estas propiedades se denomina **carta adaptada** para $N$ en $M$. El subespacio $Y$ es el espacio modelo local de $N$ en dicha carta.

La condición de la Definición 24.3.1 no sólo describe la posición local de $N$ dentro de $M$: proporciona de manera canónica una estructura de variedad de Banach sobre $N$.

**Proposición 24.3.2.** (Estructura de variedad inducida en una subvariedad) Sea $N$ una subvariedad encajada de clase $C^r$ de una variedad de Banach $M$. Entonces $N$, con la topología de subespacio, es una variedad de Banach de clase $C^r$. Si $(U, \varphi)$ es una carta adaptada, $X = Y \oplus Z$ es la descomposición correspondiente y $\pi_Y \colon X \longrightarrow Y$ es la proyección canónica, entonces

$$\varphi_N := \pi_Y \circ \varphi \restriction_{U \cap N}$$

es una carta de $N$. La inclusión canónica $\iota \colon N \hookrightarrow M$ es de clase $C^r$ y, para cada $p \in N$, el diferencial $d\iota_p$ identifica $T_p N$ con un subespacio cerrado y complementado de $T_p M$.

*Demostración.* Sea $(U,\varphi)$ una carta adaptada alrededor de $p \in N$, con $\varphi(p) = 0$ y $X = Y \oplus Z$. Definamos

$$V_Y := \{y \in Y \mid (y,0) \in \varphi(U)\}.$$

La inclusión lineal $\iota_Y \colon Y \longrightarrow X$, dada por $\iota_Y(y) = (y,0)$, es continua, y $V_Y = \iota_Y^{-1}(\varphi(U))$. Como $\varphi(U)$ es abierto en $X$, el conjunto $V_Y$ es abierto en $Y$.
Por la condición de carta adaptada, todo punto de $\varphi(U \cap N)$ tiene la forma $(y,0)$ con $y \in V_Y$. En consecuencia, $\varphi_N \colon U \cap N \longrightarrow V_Y$ es biyectiva. Su inversa está dada por

$$\varphi_N^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y,0), \qquad y \in V_Y.$$

La continuidad de $\varphi_N$ se sigue de la continuidad de $\varphi \restriction_{U\cap N}$ y de la Proposición 24.2.2; la continuidad de $\varphi_N^{-1}$ se sigue de la continuidad de $\varphi^{-1}$ y de $\iota_Y$. Por lo tanto, $\varphi_N$ es un homeomorfismo respecto de la topología de subespacio de $N$.
Consideremos dos cartas adaptadas $(U_1,\varphi_1)$ y $(U_2,\varphi_2)$, con descomposiciones $X_1 = Y_1 \oplus Z_1$ y $X_2 = Y_2 \oplus Z_2$. En la intersección correspondiente, el cambio de coordenadas de las cartas inducidas en $N$ puede escribirse como

$$\varphi_{N,2} \circ \varphi_{N,1}^{-1} = \pi_{Y_2} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \circ \iota_{Y_1}.$$

Las inclusiones $\iota_{Y_1}$ y las proyecciones $\pi_{Y_2}$ son lineales continuas, mientras que $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es de clase $C^r$. La regla de la cadena muestra que el cambio de coordenadas es de clase $C^r$. Intercambiando los índices se obtiene la misma regularidad para su inversa. Así, las cartas $\varphi_N$ forman un atlas de Banach de clase $C^r$ sobre $N$. Como $N$ es un subespacio de un espacio de Hausdorff, también es de Hausdorff, y queda demostrada su estructura de variedad de Banach.
En las coordenadas de una carta adaptada, la inclusión canónica $\iota \colon N \hookrightarrow M$ está representada por el operador lineal continuo

$$\iota_Y \colon Y \longrightarrow Y \oplus Z, \qquad \iota_Y(y) = (y,0).$$

Por lo tanto, $\iota$ es de clase $C^r$. Además, $d\iota_p$ queda representado por $\iota_Y$, cuya imagen es $Y \times \{0\}$. Este subespacio es cerrado y está complementado por $\{0\} \times Z$, de modo que $T_pN$ se identifica con un subespacio cerrado y complementado de $T_pM$. □

Las cartas adaptadas también permiten reconocer cuándo un mapeo con imagen en $N$ es diferenciable como mapeo con valores en la propia subvariedad.

**Lema 24.3.3.** (Mapeos con valores en una subvariedad) Sea $N \subseteq M$ una subvariedad encajada de clase $C^r$, sea $P$ una variedad de Banach de clase al menos $C^s$ y supongamos $1 \leq s \leq r$. Si $F \colon P \longrightarrow M$ tiene imagen contenida en $N$, entonces $F$ es de clase $C^s$ si y sólo si su correstricción $\widehat{F} \colon P \longrightarrow N$ es de clase $C^s$.

*Demostración.* Si $\widehat{F}$ es de clase $C^s$, también lo es $F = \iota \circ \widehat{F}$, porque la inclusión $\iota \colon N \longrightarrow M$ es de clase $C^r$. Recíprocamente, supongamos que $F$ es de clase $C^s$. Como $N$ tiene la topología de subespacio, la correstricción $\widehat{F}$ es continua. Dado $p \in P$, elijamos una carta adaptada $(U,\varphi)$ de $M$ alrededor de $F(p)$, con descomposición $X = Y \oplus Z$. En el abierto $F^{-1}(U)$, la representación de $\widehat{F}$ en la carta inducida $\varphi_N$ es

$$\varphi_N \circ \widehat{F} = \pi_Y \circ \varphi \circ F.$$

Al introducir una carta de $P$, el miembro derecho es una composición de mapeos de clase $C^s$, ya que $\varphi$ es de clase $C^r$ y $\pi_Y$ es lineal continua. Por consiguiente, $\widehat{F}$ es de clase $C^s$ cerca de $p$. Como $p$ era arbitrario, lo es en todo $P$. □

**Observación 24.3.4.** Por el Teorema 23.3.8, la descripción mediante cartas adaptadas equivale a representar localmente el subconjunto, después de un cambio de coordenadas, como la gráfica de un mapeo de clase $C^r$ de la forma $h\colon A \longrightarrow Z$, donde $A \subseteq Y$ es abierto. La descripción mediante cartas adaptadas hace visible de manera directa el espacio tangente y su complemento en el espacio ambiente.

Cuando el complemento $Z$ puede elegirse de dimensión finita $m$, decimos que $N$ tiene codimensión $m$. En particular, una subvariedad de codimensión uno está modelada localmente sobre el núcleo de un funcional lineal continuo no nulo. Esta situación aparece de manera natural en los conjuntos de nivel regulares y en las restricciones variacionales.

## 24.4 Ejemplos fundamentales de subvariedades de Banach

Las cartas adaptadas de la Definición 24.3.1 pueden construirse de forma explícita en varios ejemplos básicos. Estos ejemplos muestran, además, cómo la complementabilidad determina la geometría tangente.

**Proposición 24.4.1.** (Subespacios complementados y sus traslaciones) Sea $E$ un espacio de Banach, sea $Y \subseteq E$ un subespacio cerrado y complementado y sea $a \in E$. Entonces $a + Y$ es una subvariedad encajada suave de $E$. Si $\iota\colon a + Y \longrightarrow E$ es la inclusión y $\Theta_{\mathrm{id}_E,x}\colon T_xE \longrightarrow E$ es el isomorfismo lineal bicontinuo de la Proposición 24.1.10, entonces

$$\Theta_{\mathrm{id}_E,x}\big(d\iota_x(T_x(a+Y))\big) = Y$$

para todo $x \in a + Y$.

*Demostración.* Elijamos un complemento cerrado $Z$ tal que $E = Y \oplus Z$. Para cada $x \in a + Y$, la traslación

$$\varphi_x\colon E \longrightarrow E, \qquad \varphi_x(u) := u - x,$$

es un difeomorfismo suave, $\varphi_x(x) = 0$ y

$$\varphi_x(a+Y) = Y \times \{0\},$$

donde se identifica $E$ con $Y \times Z$. Por lo tanto, $\varphi_x$ es una carta adaptada. En estas coordenadas, la inclusión de $a + Y$ en $E$ está representada por $y \mapsto (y, 0)$, cuyo diferencial tiene imagen $Y$. □

**Proposición 24.4.2.** (Espacio tangente a una gráfica) Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, sea $U \subseteq E$ abierto y sea $h \in C^r(U,F)$, con $r \geq 1$. Entonces

$$\mathrm{graf}(h) := \{(x, h(x)) \in E \times F \mid x \in U\}$$

es una subvariedad encajada de clase $C^r$ del abierto $U \times F$. Además, si $\iota\colon \mathrm{graf}(h) \longrightarrow U \times F$ es la inclusión, entonces

$$\Theta_{\mathrm{id}_{U\times F},(x,h(x))}\big(d\iota_{(x,h(x))}(T_{(x,h(x))}\,\mathrm{graf}(h))\big) = \{(v, Dh(x)v) \mid v \in E\}.$$

*Demostración.* La descripción de las subvariedades mediante gráficas de la Observación 24.3.4 puede verse directamente. Fijemos $x_0 \in U$ y consideremos el difeomorfismo

$$\Phi_{x_0} \colon U \times F \longrightarrow (U - x_0) \times F, \qquad \Phi_{x_0}(x, y) := (x - x_0, y - h(x)).$$

El mapeo $\Phi_{x_0}$ es de clase $C^r$, su inversa está dada por

$$\Phi_{x_0}^{-1}(\xi, z) = (\xi + x_0, z + h(\xi + x_0)),$$

y satisface

$$\Phi_{x_0}(x_0, h(x_0)) = (0, 0), \qquad \Phi_{x_0}(\operatorname{graf}(h)) = (U - x_0) \times \{0\}.$$

Por lo tanto, $\Phi_{x_0}$ es una carta de clase $C^r$ compatible con la estructura $C^r$ subyacente de $U \times F$, y es adaptada en $(x_0, h(x_0))$. El diferencial de la parametrización $x \mapsto (x, h(x))$ en $x_0$ está dado por $v \mapsto (v, Dh(x_0)v)$, lo cual proporciona la fórmula del espacio tangente, pues $x_0$ era arbitrario. Este espacio es complementado por $\{0\} \times F$, ya que, para cada $(u, w) \in E \times F$,

$$(u, w) = (u, Dh(x_0)u) + (0, w - Dh(x_0)u).$$

□

**Ejemplo 24.4.3.** (Hiperplanos y esferas) Sea $E$ un espacio de Banach real.

(a) Si $\ell \in E'$ es no nulo y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\ell^{-1}(c)$ es una subvariedad encajada suave de codimensión uno. En efecto, si $e \in E$ satisface $\ell(e) = 1$, entonces $E = \ker(\ell) \oplus \mathbb{R}e$ y

$$\ell^{-1}(c) = ce + \ker(\ell).$$

La Proposición 24.4.1 muestra que este hiperplano afín es una subvariedad encajada. Si $\iota_c \colon \ell^{-1}(c) \longrightarrow E$ es la inclusión, para todo $x \in \ell^{-1}(c)$ se tiene

$$\Theta_{\mathrm{id}_E, x}\big(d(\iota_c)_x(T_x\ell^{-1}(c))\big) = \ker(\ell).$$

(b) Sea $r \geq 1$ y supongamos que la norma de $E$ es de clase $C^r$ en $E \setminus \{0\}$. Pongamos

$$S_E := \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\}.$$

Para cada $x \in S_E$, la homogeneidad de la norma implica

$$D\|\cdot\|_E(x)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \|(1+t)x\|_E = \|x\|_E.$$

Por lo tanto, $D\|\cdot\|_E(x) \neq 0$ sobre la esfera unitaria. Para obtener una carta adaptada fijemos $x \in S_E$ y pongamos $Y := \ker(D\|\cdot\|_E(x))$. Se tiene $E = Y \oplus \mathbb{R}x$. El mapeo

$$F_x \colon \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F_x(y, t) := \|x + y + tx\|_E - 1,$$

donde $\mathcal{O}_x$ es una vecindad abierta suficientemente pequeña de $(0,0)$ en $Y \times \mathbb{R}$ para que $x + y + tx \neq 0$, es de clase $C^r$ y satisface $F_x(0,0) = 0$ y $D_2F_x(0,0)(s) = s$. El Teorema 23.3.8 representa localmente el conjunto $F_x^{-1}(0)$ como la gráfica de una función de clase $C^r$ sobre $Y$. Si $h$ denota esta función, la fórmula para la derivada de la función implícita da

$$Dh(0) = -D_2F_x(0,0)^{-1} \circ D_1F_x(0,0) = 0,$$

pues $D_1F_x(0,0)$ es la restricción de $D\|\cdot\|_E(x)$ a $Y$. En particular, la gráfica tiene espacio tangente $Y \times \{0\}$ en el origen. El cambio de coordenadas que resta dicha función en la segunda variable endereza la gráfica sobre $Y \times \{0\}$. Por lo tanto, $S_E$ es una subvariedad encajada de clase $C^r$. Al diferenciar la identidad que define la esfera se obtiene, si $\iota_S \colon S_E \longrightarrow E$ denota la inclusión,

$$\Theta_{\mathrm{id}_E,x}\big(d(\iota_S)_x(T_xS_E)\big) = \ker\big(D\|\cdot\|_E(x)\big).$$

Si $E$ es un espacio de Hilbert real, puede tomarse $q(x) := \|x\|_E^2$; entonces $Dq(x)v = 2\langle x, v\rangle_E$ y $\Theta_{\mathrm{id}_E,x}\big(d(\iota_S)_x(T_xS_E)\big) = x^\perp$.

**Ejemplo 24.4.4.** (El grupo de operadores invertibles) Sea $E$ un espacio de Banach. El conjunto

$$\mathrm{GL}(E) := \{A \in \mathcal{L}(E) \mid A \text{ es invertible}\}$$

es abierto en el espacio de Banach $\mathcal{L}(E)$ por la Proposición 23.3.2. Por lo tanto, $\mathrm{GL}(E)$ es una variedad de Banach suave y

$$\Theta_{\mathrm{id}_{\mathrm{GL}(E)},A} \colon T_A\,\mathrm{GL}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

es un isomorfismo lineal bicontinuo para todo $A \in \mathrm{GL}(E)$. La composición de operadores es bilineal continua y, por la Proposición 23.2.4, es suave. El mapeo $A \mapsto A^{-1}$ también es suave y satisface

$$D(A \mapsto A^{-1})(A)H = -A^{-1}HA^{-1}.$$

## 24.5 Inmersiones, submersiones y encajes

En dimensión finita, la inyectividad o la suprayectividad del diferencial proporcionan por sí solas las formas locales de inclusión y de proyección. En variedades de Banach es necesario conservar también la información topológica contenida en una inversa lateral. La Proposición 24.2.4 permite expresar esta condición mediante núcleos e imágenes complementados. Las formas locales resultantes son las que se utilizan habitualmente en la geometría diferencial de dimensión infinita; para formulaciones más generales pueden consultarse [67, 2, 91].

**Definición 24.5.1.** Sean $M$ y $N$ variedades de Banach de clase $C^k$, sea $f \colon M \longrightarrow N$ un mapeo de clase $C^r$, con $1 \leq r \leq k$, y sea $p \in M$.

(a) Decimos que $f$ es una **inmersión débil en** $p$ si $df_p \colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ es inyectivo.

(b) Decimos que $f$ es una **inmersión split en** $p$ si $df_p$ admite una inversa izquierda lineal continua.

(c) Decimos que $f$ es una **submersión débil en** $p$ si $df_p$ es suprayectivo.

(d) Decimos que $f$ es una **submersión split en** $p$ si $df_p$ admite una inversa derecha lineal continua.

El mapeo $f$ es una inmersión débil, una inmersión split, una submersión débil o una submersión split si posee la propiedad correspondiente en cada punto de $M$. En lo sucesivo, dentro de la categoría de variedades de Banach, los términos **inmersión** y **submersión** se referirán a las versiones split, salvo indicación expresa en sentido contrario.

La condición es intrínseca: los diferenciales de los cambios de coordenadas son isomorfismos lineales continuos, y la existencia de una inversa lateral se conserva al componer por ambos lados con isomorfismos. La Proposición 24.2.4 proporciona las caracterizaciones

$$\begin{aligned} f \text{ es una inmersión split en } p &\iff df_p \text{ es inyectivo y } \operatorname{Ran}(df_p) \text{ está complementado,} \\ f \text{ es una submersión split en } p &\iff df_p \text{ es suprayectivo y } \ker(df_p) \text{ está complementado.} \end{aligned}$$

En la primera equivalencia, la imagen es automáticamente cerrada. Por lo tanto, la mera inyectividad, la inyectividad con imagen cerrada y la inyectividad con imagen cerrada y complementada son condiciones genuinamente distintas.

**Teorema 24.5.2.** (Forma local de las inmersiones split) Sea $f: M \longrightarrow N$ un mapeo de clase $C^r$ entre variedades de Banach, con $r \geq 1$, y sea $p \in M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) El mapeo $f$ es una inmersión split en $p$.

(b) Existen cartas de clase $C^r$, $(U, \varphi)$ de $M$ alrededor de $p$ y $(V, \psi)$ de $N$ alrededor de $f(p)$, espacios de Banach $E$ y $Z$ y una identificación del espacio modelo de $V$ con $E \oplus Z$, tales que $\varphi(p) = 0$, $\psi(f(p)) = (0,0)$ y

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0)$$

para todo $x \in \varphi(U)$.

En particular, si $f$ es una inmersión split en $p$, después de disminuir $U$ el mapeo $f \restriction_U$ es inyectivo y es una inmersión split en cada punto de $U$.

*Demostración.* Supongamos (a). Tomemos cartas iniciales alrededor de $p$ y de $f(p)$. Al componerlas con traslaciones podemos reducirnos a un mapeo $F: \Omega \subseteq E \longrightarrow \Theta \subseteq H$ de clase $C^r$, donde $\Omega$ y $\Theta$ son abiertos que contienen al origen, tal que $F(0) = 0$ y $A := DF(0)$ admite una inversa izquierda continua. Por la Proposición 24.2.4, el subespacio $R := \operatorname{Ran}(A)$ es cerrado y existe un subespacio cerrado $Z \subseteq H$ tal que $H = R \oplus Z$. Denotemos por $P_R: H \longrightarrow R$ y $P_Z: H \longrightarrow Z$ las proyecciones continuas.
El operador $A: E \longrightarrow R$ es un isomorfismo. Consideremos

$$G: \Omega \longrightarrow R, \qquad G(x) := P_R F(x).$$

Se tiene $DG(0) = A$. El Teorema 23.3.3 proporciona abiertos $\Omega_0 \subseteq \Omega$ y $W \subseteq R$, que contienen al origen, tales que $G \restriction_{\Omega_0}: \Omega_0 \longrightarrow W$ es un difeomorfismo de clase $C^r$. En la nueva coordenada $y = G(x)$ escribimos

$$F\big(G^{-1}(y)\big) = y + h(y), \qquad h(y) := P_Z F\big(G^{-1}(y)\big) \in Z.$$

Como $h(0) = 0$ y $\Theta$ es abierto, existen vecindades abiertas $W_0 \subseteq W$ y $Z_0 \subseteq Z$ del origen tales que

$$W_0 \times Z_0 \subseteq \Theta, \qquad h(W_0) \subseteq Z_0.$$

Disminuimos $\Omega_0$ a $G^{-1}(W_0)$. El mapeo triangular

$$\Xi\colon W_0 \times Z \longrightarrow W_0 \times Z, \qquad \Xi(y,z) := (y, z - h(y)),$$

es un difeomorfismo de clase $C^r$, con inversa $\Xi^{-1}(y,z) = (y, z + h(y))$. Después de restringirlo a una vecindad abierta $W_0 \times Z_0$ del origen, su imagen $\Xi(W_0 \times Z_0)$ es abierta y $\Xi \restriction_{W_0 \times Z_0}$ es un difeomorfismo sobre dicha imagen. La inclusión $h(W_0) \subseteq Z_0$ garantiza que los puntos de la imagen de $F$ considerados pertenecen al dominio de esta nueva carta, y se obtiene

$$\Xi\left(F\left(G^{-1}(y)\right)\right) = (y, 0).$$

Finalmente, el isomorfismo $A\colon E \longrightarrow R$ permite postcomponer la coordenada $G$ con $A^{-1}$ y la primera componente de la coordenada del codominio con el mismo isomorfismo. De esta manera, ambos primeros factores se identifican con el espacio modelo $E$ y la expresión anterior se convierte en $x \mapsto (x, 0)$. Al transportar estos cambios de coordenadas a $M$ y $N$ se obtiene (b).
Recíprocamente, en las coordenadas de (b) el diferencial de $f$ en $p$ está representado por la inclusión

$$E \longrightarrow E \oplus Z, \qquad v \longmapsto (v, 0),$$

que admite como inversa izquierda la proyección sobre $E$. Los diferenciales de las cartas son isomorfismos, por lo que $df_p$ también admite una inversa izquierda continua.
La expresión local $(x, 0)$ muestra tanto la inyectividad de $f \restriction_U$ como la persistencia de la condición split en $U$. □

**Teorema 24.5.3.** (Forma local de las submersiones split) Sea $f\colon M \longrightarrow N$ un mapeo de clase $C^r$ entre variedades de Banach, con $r \geq 1$, y sea $p \in M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) El mapeo $f$ es una submersión split en $p$.

(b) Existen cartas de clase $C^r$, $(U, \varphi)$ de $M$ alrededor de $p$ y $(V, \psi)$ de $N$ alrededor de $f(p)$, y un espacio de Banach $K$, tales que el espacio modelo de $U$ se identifica con $K \oplus F$, donde $F$ es el espacio modelo de $V$, y

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(k, y) = y$$

para todo $(k, y) \in \varphi(U)$.

En particular, toda submersión split es localmente abierta, admite secciones locales alrededor de cada punto de su imagen y sigue siendo una submersión split en una vecindad del punto considerado.

*Demostración.* Supongamos (a) y trabajemos en cartas centradas, de modo que el mapeo esté representado por $F\colon \Omega \subseteq E \longrightarrow H$, con $F(0) = 0$. Sea $T := DF(0)$. Por la Proposición 24.2.4, existe un subespacio cerrado $E_1 \subseteq E$ tal que

$$E = K \oplus E_1, \qquad K := \ker(T),$$

y $T_1 := T\restriction_{E_1} : E_1 \longrightarrow H$ es un isomorfismo. Sea $P_K : E \longrightarrow K$ la proyección continua y definamos

$$\Gamma : \Omega \longrightarrow K \times H, \qquad \Gamma(x) := (P_K x, F(x)).$$

Si $x = k + e_1$, entonces

$$D\Gamma(0)(k + e_1) = (k, T_1 e_1).$$

Este operador es un isomorfismo de $E$ sobre $K \times H$, con inversa $(k, y) \mapsto k + T_1^{-1} y$. El Teorema 23.3.3 muestra que $\Gamma$ es un difeomorfismo de clase $C^r$ entre vecindades del origen. Como la segunda componente de $\Gamma$ es $F$, en la coordenada $(k, y) = \Gamma(x)$ se tiene

$$F\big(\Gamma^{-1}(k, y)\big) = y.$$

Esto prueba (b).
Si (b) se cumple, el diferencial está representado por la proyección $K \oplus F \longrightarrow F$, que admite la inversa derecha $y \mapsto (0, y)$. La equivalencia queda demostrada.
En estas coordenadas la imagen de cualquier producto abierto suficientemente pequeño es abierta. Además, el mapeo $y \mapsto (0, y)$, transportado mediante las cartas, proporciona una sección local. La persistencia de la propiedad se sigue de la misma forma normal. □

**Definición 24.5.4.** Sean $M$ y $N$ variedades de Banach. Un mapeo de clase $C^r$ $f : M \longrightarrow N$, con $r \geq 1$, se denomina un **encaje split** si es una inmersión split, es inyectivo y el mapeo

$$f : M \longrightarrow f(M)$$

es un homeomorfismo cuando $f(M)$ se equipa con la topología de subespacio de $N$.

**Proposición 24.5.5.** (Encajes y subvariedades encajadas) Sea $f : M \longrightarrow N$ un mapeo de clase $C^r$ entre variedades de Banach, con $r \geq 1$.

(a) Si $f$ es un encaje split, entonces $f(M)$ es una subvariedad encajada de clase $C^r$ de $N$ y $f : M \longrightarrow f(M)$ es un difeomorfismo.

(b) Si $S \subseteq N$ es una subvariedad encajada de clase $C^r$, su inclusión $S \hookrightarrow N$ es un encaje split.

(c) Si $f(M)$ es una subvariedad encajada y $f : M \longrightarrow f(M)$ es un difeomorfismo, entonces $f$ es un encaje split.

*Demostración.* Supongamos que $f$ es un encaje split y fijemos $p \in M$. Por el Teorema 24.5.2, existen vecindades $U \subseteq M$ de $p$ y $V \subseteq N$ de $f(p)$, con cartas $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq E$ y $\psi : V \longrightarrow \psi(V) \subseteq E \oplus Z$, en las que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0).$$

Como $f : M \longrightarrow f(M)$ es un homeomorfismo, $f(U)$ es abierto en $f(M)$. Existe, por lo tanto, un abierto $O \subseteq N$ tal que $f(U) = O \cap f(M)$. El conjunto $\psi(V \cap O)$ es un abierto del espacio $E \oplus Z$ que contiene al origen. Elegimos vecindades abiertas $W_E \subseteq E$ y $W_Z \subseteq Z$ del origen de modo que

$$W_E \subseteq \varphi(U), \qquad W_E \times W_Z \subseteq \psi(V \cap O).$$

Definimos

$$U_0 := \varphi^{-1}(W_E), \qquad V_0 := \psi^{-1}(W_E \times W_Z).$$

La forma local de $f$ muestra que $f(U_0) \subseteq V_0 \cap f(M)$. Recíprocamente, si $q \in V_0 \cap f(M)$, entonces $q \in O \cap f(M) = f(U)$. Escribiendo $q = f(x)$ con $x \in U$, se obtiene $\psi(q) = (\varphi(x), 0)$. Como $\psi(q) \in W_E \times W_Z$, resulta $\varphi(x) \in W_E$ y, por lo tanto, $x \in U_0$. Se ha probado la igualdad $f(U_0) = V_0 \cap f(M)$ y, en consecuencia,

$$\psi(V_0 \cap f(M)) = W_E \times \{0\} = \psi(V_0) \cap (E \times \{0\}).$$

Así, $\psi \restriction_{V_0}$ es una carta adaptada para $f(M)$. La misma expresión local muestra que la corestricción de $f$ y su inversa son de clase $C^r$.

La segunda afirmación se sigue de la Proposición 24.3.2: la inclusión es de clase $C^r$, es un homeomorfismo sobre su imagen y su diferencial es la inclusión de un subespacio cerrado y complementado. La tercera afirmación se obtiene componiendo el difeomorfismo $M \longrightarrow f(M)$ con la inclusión split $f(M) \hookrightarrow N$. □

**Observación 24.5.6.** (Fenómenos propios de dimensión infinita) Las condiciones de la Definición 24.5.1 no pueden reducirse a la inyectividad o suprayectividad del diferencial.

(a) La inclusión lineal $I\colon \ell^1 \longrightarrow \ell^2$ es continua e inyectiva, pero su imagen no es cerrada. Si $x^{(N)}$ tiene sus primeros $N$ términos iguales a $\frac{1}{N}$ y los restantes iguales a cero, entonces

$$\|x^{(N)}\|_{\ell^1} = 1, \qquad \|Ix^{(N)}\|_{\ell^2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \longrightarrow 0.$$

Si la imagen fuese cerrada, el Teorema B.2.17 aplicado a $I\colon \ell^1 \longrightarrow \mathrm{Ran}(I)$ daría una constante $C > 0$ tal que $\|x\|_{\ell^1} \leq C\|Ix\|_{\ell^2}$, en contradicción con esta sucesión. Así, la imagen no es cerrada. En particular, $I$ no admite inversa izquierda continua y, considerado como mapeo entre variedades de Banach, es una inmersión débil que no es una inmersión split; en efecto, por su linealidad se tiene $dI_x = I$ en todo $x \in \ell^1$.

(b) El subespacio $c_0 := \{x = (x_n) \in \ell^\infty \mid x_n \longrightarrow 0\}$ es cerrado en $\ell^\infty$, pues el límite uniforme de sucesiones que convergen a cero también converge a cero. Sin embargo, $c_0$ no está complementado; esta última afirmación es el teorema clásico de Phillips. En consecuencia, la inclusión $c_0 \hookrightarrow \ell^\infty$ es un mapeo lineal que es un homeomorfismo sobre su imagen y tiene diferencial inyectivo con imagen cerrada, pero no es una inmersión split. Su diferencial en cada punto es la propia inclusión.

La no complementabilidad de $c_0$ en $\ell^\infty$ es el Teorema 7.5 de Phillips [117, p. 539]. Su demostración emplea la representación del dual de $\ell^\infty$ mediante medidas finitamente aditivas y un argumento de convergencia débil que no se necesita en el resto del libro. Aquí se usa únicamente para exhibir un subespacio cerrado cuya inclusión no es split; ningún resultado posterior depende de aquella representación dual.

(c) La proyección canónica

$$\pi\colon \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty/c_0$$

es lineal, continua y suprayectiva. Puesto que $c_0$ es cerrado, el cociente $\ell^\infty/c_0$ es un espacio de Banach por la Proposición B.2.20. En cada punto el diferencial de la proyección es $\pi$ y su núcleo es $c_0$. Si admitiera una inversa derecha lineal continua, la Proposición 24.2.4 implicaría que $\ker(\pi) = c_0$ está

complementado en $\ell^\infty$, lo cual es falso. Así, $\pi$ es una submersión débil que no es una submersión split.

## 24.6 Rango constante y teoremas de la preimagen

Para un operador entre espacios de dimensión infinita, el rango no se describe adecuadamente mediante un entero. La forma local correspondiente al teorema del rango requiere controlar simultáneamente el núcleo, la imagen y sus complementos. La hipótesis siguiente expresa que, cerca del punto base, las imágenes de los diferenciales conservan un mismo complemento en el codominio.

**Teorema 24.6.1.** (Rango constante con descomposiciones complementadas) Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, sea $\Omega \subseteq E$ abierto y sea $f \in C^r(\Omega, F)$, con $r \geq 1$. Fijemos $a \in \Omega$ y pongamos

$$A := Df(a), \qquad K := \ker(A), \qquad R := \operatorname{Ran}(A).$$

Supongamos que existen subespacios cerrados $X \subseteq E$ y $C \subseteq F$ tales que

$$E = K \oplus X, \qquad F = R \oplus C,$$

y que estas sumas directas son topológicas. Supongamos, además, que existe una vecindad abierta $\Omega_1 \subseteq \Omega$ de $a$ para la cual

$$F = \operatorname{Ran}(Df(x)) \oplus C \tag{24.2}$$

es una suma directa topológica para todo $x \in \Omega_1$. Entonces existen abiertos $W_R \subseteq R$ y $W_K \subseteq K$ que contienen al origen, un abierto $U_0 \subseteq \Omega_1$ que contiene a $a$, un abierto $V_0 \subseteq F$ que contiene a $f(a)$ y difeomorfismos de clase $C^r$

$$\alpha \colon U_0 \longrightarrow W_R \times W_K, \qquad \beta \colon V_0 \longrightarrow \beta(V_0) \subseteq R \times C,$$

tales que $\alpha(a) = (0,0)$, $\beta(f(a)) = (0,0)$ y

$$(\beta \circ f \circ \alpha^{-1})(y,k) = (y,0)$$

para todo $(y,k) \in W_R \times W_K$. El abierto $V_0$ puede elegirse contenido en cualquier vecindad abierta previamente fijada de $f(a)$.

*Demostración.* Denotemos por $P_K \colon E \longrightarrow K$, $P_X \colon E \longrightarrow X$, $P_R \colon F \longrightarrow R$ y $P_C \colon F \longrightarrow C$ las proyecciones continuas asociadas a las descomposiciones del enunciado. Como $K = \ker(A)$ y $R = \operatorname{Ran}(A)$, la restricción

$$A_X := A \restriction_X \colon X \longrightarrow R$$

es lineal y biyectiva. El Teorema B.2.17 implica que $A_X^{-1} \colon R \longrightarrow X$ es continuo.
Definamos

$$G \colon \Omega_1 \longrightarrow R \times K, \qquad G(x) := \big(P_R(f(x) - f(a)), P_K(x-a)\big).$$

Si $v = k + \xi$, con $k \in K$ y $\xi \in X$, entonces

$$DG(a)v = (A_X \xi, k).$$

Este operador es un isomorfismo de $E$ sobre $R \times K$; su inversa es $(y,k) \mapsto k + A_X^{-1} y$. Por el Teorema 23.3.3, después de disminuir $\Omega_1$ existen un abierto $U_1 \subseteq \Omega_1$ que contiene a $a$ y un abierto $W \subseteq R \times K$ que contiene a $(0,0)$ tales que $G\restriction_{U_1} : U_1 \longrightarrow W$ es un difeomorfismo de clase $C^r$. Podemos elegir bolas abiertas $W_R \subseteq R$ y $W_K \subseteq K$, centradas en el origen, tales que $W_R \times W_K \subseteq W$, y reemplazar $U_1$ por la preimagen de este producto. En las coordenadas $(y,k) = G(x)$, pongamos

$$\widetilde{f}(y,k) := f\left(G^{-1}(y,k)\right) - f(a).$$

La definición de $G$ implica que $P_R \widetilde{f}(y,k) = y$. Por lo tanto, existe un mapeo $h \in C^r(W_R \times W_K, C)$ tal que

$$\widetilde{f}(y,k) = (y, h(y,k)).$$

Fijemos $(y,k) \in W_R \times W_K$ y $\eta \in K$. Se tiene

$$D\widetilde{f}(y,k)(0,\eta) = (0, D_2 h(y,k)\eta).$$

Este vector pertenece a $C$. Por otra parte, la regla de la cadena y la invertibilidad de $DG^{-1}(y,k)$ muestran que

$$\operatorname{Ran}(D\widetilde{f}(y,k)) = \operatorname{Ran}\left(Df\left(G^{-1}(y,k)\right)\right).$$

La suma directa de (24.2) implica que la intersección de este rango con $C$ es trivial. Se sigue que $D_2 h(y,k)\eta = 0$ para todo $\eta \in K$ y, en consecuencia,

$$D_2 h(y,k) = 0.$$

La bola $W_K$ puede elegirse convexa. Para $y \in W_R$ y $k \in W_K$, la fórmula integral del valor medio del Teorema 23.1.11 da

$$h(y,k) - h(y,0) = \int_0^1 D_2 h(y,tk)k\,dt = 0.$$

Por lo tanto, $h(y,k) = h(y,0)$. Definamos el cambio triangular

$$\Xi : W_R \times C \longrightarrow W_R \times C, \qquad \Xi(y,z) := (y, z - h(y,0)).$$

Su inversa está dada por $\Xi^{-1}(y,z) = (y, z + h(y,0))$, de modo que $\Xi$ es un difeomorfismo de clase $C^r$. Además,

$$\Xi(\widetilde{f}(y,k)) = (y,0).$$

Como $h(0,0) = 0$, elegimos una bola abierta $W_C \subseteq C$ centrada en el origen y disminuimos $W_R$, si es necesario, para que

$$h(y,0) \in W_C$$

para todo $y \in W_R$. Dada de antemano una vecindad abierta de $f(a)$ en $F$, las bolas $W_R$ y $W_C$ pueden elegirse además de modo que su imagen por el isomorfismo suma $R \times C \longrightarrow F$, trasladada por $f(a)$, quede contenida en dicha vecindad.
Tomemos

$$U_0 := G^{-1}(W_R \times W_K)$$

y definamos $\alpha := G\restriction_{U_0}$. Asimismo, sea

$$V_0 := f(a) + \{y + z \mid y \in W_R,\ z \in W_C\}.$$

Este conjunto es abierto en $F$, porque la suma $R \times C \longrightarrow F$ es un isomorfismo topológico. El mapeo

$$\beta\colon V_0 \longrightarrow \Xi(W_R \times W_C), \qquad \beta(v) := \Xi\big(P_R(v - f(a)), P_C(v - f(a))\big),$$

es un difeomorfismo de clase $C^r$, satisface $\beta(f(a)) = (0,0)$ y, para $(y,k) \in W_R \times W_K$, cumple

$$(\beta \circ f \circ \alpha^{-1})(y,k) = (y,0).$$

Éstos son los difeomorfismos requeridos. □

**Teorema 24.6.2.** (Rango constante en variedades de Banach) Sean $M$ y $N$ variedades de Banach y sea $f\colon M \longrightarrow N$ un mapeo de clase $C^r$, con $r \geq 1$. Fijemos $p \in M$. Supongamos que, en cartas centradas en $p$ y $f(p)$, una representación coordenada

$$F\colon \Omega \subseteq E \longrightarrow H, \qquad F(0) = 0,$$

tiene la propiedad siguiente. Si

$$A := DF(0), \qquad K := \ker(A), \qquad R := \operatorname{Ran}(A),$$

existen subespacios cerrados $X \subseteq E$ y $C \subseteq H$ tales que

$$E = K \oplus X, \qquad H = R \oplus C,$$

como sumas directas topológicas, y $C$ continúa siendo un complemento topológico de $\operatorname{Ran}(DF(x))$ para todo $x$ en una vecindad del origen. Entonces existen cartas de clase $C^r$ en las que $f$ tiene la forma

$$(y,k) \longmapsto (y,0).$$

En particular, localmente $f$ se factoriza como la proyección $R \times K \longrightarrow R$ seguida de la inclusión $R \hookrightarrow R \times C$. Su imagen local es una subvariedad encajada y sus fibras locales son subvariedades encajadas modeladas sobre $K$.

*Demostración.* Aplicamos el Teorema 24.6.1 a la representación coordenada de $f$, eligiendo el abierto $V_0$ dentro de la imagen de la carta inicial del codominio. Al componer los difeomorfismos obtenidos con las cartas iniciales resultan cartas de clase $C^r$, conforme a la Observación 24.1.4. Las afirmaciones sobre la imagen, las fibras y la factorización se leen directamente en la expresión $(y,k) \mapsto (y,0)$. □

La hipótesis de complemento común en el teorema anterior sustituye a la constancia numérica del rango utilizada en dimensión finita. Un complemento fijo concreto no tiene por qué conservarse al efectuar un cambio no lineal de coordenadas. En cambio, la conclusión obtenida es intrínseca: la existencia de cartas en las que el mapeo tiene la forma $(y,k) \mapsto (y,0)$ no depende de las cartas iniciales utilizadas para construirlas.

**Proposición 24.6.3.** (Preimagen de una subvariedad mediante una submersión) Sean $M$, $N$ variedades de Banach, sea $f: M \longrightarrow N$ una submersión split de clase $C^r$, con $r \geq 1$, y sea $S \subseteq N$ una subvariedad encajada de clase $C^r$. Entonces $f^{-1}(S)$ es una subvariedad encajada de clase $C^r$ de $M$. La restricción

$$f\restriction_{f^{-1}(S)}: f^{-1}(S) \longrightarrow S$$

es una submersión split y, para cada $p \in f^{-1}(S)$, si $\iota: f^{-1}(S) \longrightarrow M$ y $\jmath: S \longrightarrow N$ son las inclusiones, entonces

$$d\iota_p\big(T_p(f^{-1}(S))\big) = (df_p)^{-1}\big(d\jmath_{f(p)}(T_{f(p)}S)\big). \tag{24.3}$$

*Demostración.* Si $f^{-1}(S) = \varnothing$, todas las afirmaciones se cumplen de manera vacía. Supongamos, pues, que $f^{-1}(S) \neq \varnothing$. Fijemos $p \in f^{-1}(S)$ y escribamos $q := f(p)$. Elijamos una carta $(V, \psi)$ de $N$ adaptada a $S$ en $q$. Después de trasladar el origen y de identificar el espacio modelo con una suma $Y \oplus Z$, se tiene

$$\psi(V \cap S) = \psi(V) \cap (Y \times \{0\}).$$

Tomemos una carta inicial de $M$ alrededor de $p$ y representemos $f$ en estas coordenadas, conservando la carta adaptada $\psi$ en el codominio. El diferencial de la representación admite una inversa derecha continua. La construcción de la prueba del Teorema 24.5.3, que no modifica la coordenada del codominio, proporciona una carta del dominio en la que

$$f(k, y, z) = (y, z),$$

donde el espacio modelo del dominio se identifica con $K \oplus Y \oplus Z$. En estas coordenadas,

$$f^{-1}(S) = \{(k, y, 0) \mid (k, y, 0) \text{ pertenece al dominio de la carta}\}.$$

Este conjunto es la intersección del dominio con el subespacio complementado $K \oplus Y \oplus \{0\}$. Por lo tanto, la carta es adaptada para $f^{-1}(S)$.
La restricción de $f$ está representada por la proyección

$$K \oplus Y \longrightarrow Y, \qquad (k, y) \longmapsto y,$$

que admite la inversa derecha $y \mapsto (0, y)$. Finalmente, el diferencial de $f$ en las coordenadas anteriores es $(k, y, z) \mapsto (y, z)$, y la preimagen de $Y \times \{0\}$ es $K \oplus Y \oplus \{0\}$. Esto demuestra (24.3). □

**Definición 24.6.4.** Sean $M$ y $N$ variedades de Banach y sea $f: M \longrightarrow N$ un mapeo de clase $C^r$, con $r \geq 1$. Un punto $q \in N$ se denomina un **valor regular split** de $f$ si, para cada $p \in f^{-1}(q)$, el diferencial

$$df_p: T_pM \longrightarrow T_qN$$

admite una inversa derecha lineal continua. Equivalentemente, $df_p$ es suprayectivo y $\ker(df_p)$ está complementado en $T_pM$ para todo $p \in f^{-1}(q)$. Si $f^{-1}(q) = \varnothing$, la condición se considera satisfecha.

**Teorema 24.6.5.** (Teorema de la preimagen) Sean $M$ y $N$ variedades de Banach, sea $f\colon M \longrightarrow N$ un mapeo de clase $C^r$, con $r \geq 1$, y sea $q \in N$ un valor regular split de $f$. Entonces $f^{-1}(q)$ es una subvariedad encajada de clase $C^r$ de $M$ y, si $\iota_q\colon f^{-1}(q) \longrightarrow M$ es la inclusión,

$$d(\iota_q)_p\big(T_p(f^{-1}(q))\big) = \ker(df_p)$$

para todo $p \in f^{-1}(q)$. Si $N$ es finito–dimensional de dimensión $m$, entonces $f^{-1}(q)$ tiene codimensión $m$.

*Demostración.* Si la fibra es vacía, la condición local de la Definición 24.3.1 se cumple de manera vacía; adoptamos la convención usual de que la subvariedad vacía tiene la codimensión indicada. Supongamos que la fibra no es vacía y sea $p \in f^{-1}(q)$. Por la regularidad split y el Teorema 24.5.3, existen cartas centradas en $p$ y $q$ en las que $f$ tiene la forma

$$(k, y) \longmapsto y.$$

Por consiguiente, la fibra de $q$ corresponde en estas coordenadas a $K \times \{0\}$, donde $K$ representa a $\ker(df_p)$. Este subespacio es cerrado y está complementado por $\{0\} \times F$, donde $F$ es el espacio modelo de la carta del codominio. El isomorfismo $d\psi_q\colon T_qN \longrightarrow F$ transporta las direcciones tangentes del codominio a este segundo factor. Por lo tanto, las cartas obtenidas son cartas adaptadas para $f^{-1}(q)$. Su espacio tangente en $p$ es $K$, que bajo los diferenciales de las cartas corresponde precisamente a $\ker(df_p)$.
Si $N$ tiene dimensión $m$, el complemento normal $\{0\} \times F$ tiene dimensión $m$, pues $d\psi_q$ es un isomorfismo, y la fibra posee codimensión $m$. □

**Corolario 24.6.6.** (Valores regulares con codominio finito–dimensional) Sean $M$ una variedad de Banach, $N$ una variedad finito–dimensional y $f\colon M \longrightarrow N$ un mapeo de clase $C^r$, con $r \geq 1$, y sea $q \in N$. Pongamos $m := \dim(N)$. Si $df_p\colon T_pM \longrightarrow T_qN$ es suprayectivo para todo $p \in f^{-1}(q)$, entonces $q$ es un valor regular split. En consecuencia, $f^{-1}(q)$ es una subvariedad encajada de codimensión $m$ y, si $\iota_q\colon f^{-1}(q) \longrightarrow M$ es la inclusión, para todo $p \in f^{-1}(q)$,

$$d(\iota_q)_p\big(T_p(f^{-1}(q))\big) = \ker(df_p).$$

*Demostración.* Si $f^{-1}(q) = \varnothing$, la hipótesis de regularidad es vacía y la conclusión es inmediata con la convención usual de que el conjunto vacío es una subvariedad encajada de la codimensión indicada; la afirmación sobre los espacios tangentes también es vacía. Supongamos que $f^{-1}(q) \neq \varnothing$. Fijemos $p \in f^{-1}(q)$ y elijamos una base $e_1, \ldots, e_m$ de $T_qN$. Por la suprayectividad de $df_p$, existen $v_1, \ldots, v_m \in T_pM$ tales que $df_p(v_j) = e_j$. El operador

$$R_p\colon T_qN \longrightarrow T_pM, \qquad R_p\left(\sum_{j=1}^{m} a_j e_j\right) := \sum_{j=1}^{m} a_j v_j$$

es lineal y continuo porque su dominio es finito–dimensional, y satisface $df_p \circ R_p = I_{T_qN}$. Por lo tanto, $q$ es un valor regular split y el Teorema 24.6.5 proporciona la conclusión. □

**Ejemplo 24.6.7.** (Fibras de operadores lineales) Sean $E$ y $F$ espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$ suprayectivo. Si $\ker(T)$ está complementado, todo $y \in F$ es un valor regular split de $T$. Para cualquier $x_0 \in T^{-1}(y)$ se tiene

$$T^{-1}(y) = x_0 + \ker(T).$$

Si $\iota_y\colon T^{-1}(y) \longrightarrow E$ es la inclusión, entonces

$$\Theta_{\mathrm{id}_E,x}\big(d(\iota_y)_x(T_x(T^{-1}(y)))\big) = \ker(T) \quad \text{para todo } x \in T^{-1}(y).$$

En efecto, para cada $x \in T^{-1}(y)$ la traslación

$$\theta_x\colon \ker(T) \longrightarrow T^{-1}(y), \qquad \theta_x(k) := x + k,$$

es un difeomorfismo afín y su diferencial es la inclusión $\ker(T) \hookrightarrow E$. Por lo tanto, el espacio tangente de la fibra, considerada como variedad de Banach modelada sobre $\ker(T)$, se identifica con $\ker(T)$. Si el núcleo está complementado, esta inclusión admite una inversa izquierda continua y la fibra es una subvariedad encajada por la Proposición 24.4.1. Si el núcleo no está complementado, la fibra sigue siendo un subespacio afín cerrado y una variedad de Banach por sí misma. Si la fibra fuese una subvariedad encajada de $E$, el diferencial de su inclusión tendría imagen exactamente $\ker(T)$. En efecto, para toda curva diferenciable $\gamma$ en la fibra se cumple $T \circ \gamma = y$ y, por lo tanto, $T\gamma'(0) = 0$; recíprocamente, si $k \in \ker(T)$, la curva $t \mapsto x + tk$ permanece en la fibra y tiene velocidad $k$ en $t = 0$. Bajo la supuesta estructura de subvariedad encajada, esta curva también es de clase $C^1$ como curva con valores en la fibra, por el Lema 24.3.3. La Proposición 24.3.2 obligaría entonces a que esta imagen tangente estuviera complementada en $E$, lo cual contradice la hipótesis. Por consiguiente, la fibra no es una subvariedad encajada en el sentido de la Definición 24.3.1.

## 24.7 Conjuntos de nivel regulares

Los conjuntos de nivel de funcionales reales constituyen la especialización más frecuente del Teorema 24.6.5. En este caso la no anulación del diferencial proporciona automáticamente una inversa derecha y un complemento unidimensional del núcleo. Desarrollaremos directamente esta situación para obtener cartas adaptadas explícitas y fijar la formulación que se utilizará en las restricciones variacionales.

**Lema 24.7.1.** Sean $X$ un espacio de Banach real y sean $f, g \in X'$ funcionales no nulos. Entonces $\ker(f)$ y $\ker(g)$ son isomorfos como espacios de Banach.

*Demostración.* Primero probemos que existe $a \in X$ tal que $g(a) = 1$ y $f(a) \neq 0$. Como $g \neq 0$, existe $b \in X$ tal que $g(b) \neq 0$. Reemplazando $b$ por $\frac{b}{g(b)}$, podemos suponer que $g(b) = 1$. Si $f(b) \neq 0$, tomamos $a = b$. Supongamos entonces que $f(b) = 0$. Como $f \neq 0$, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$. Definimos $y := x - g(x)b$. Entonces $g(y) = g(x) - g(x)g(b) = 0$ y $f(y) = f(x) - g(x)f(b) = f(x) \neq 0$. Por lo tanto, si tomamos $a := b + y$, se tiene $g(a) = g(b) + g(y) = 1$ y $f(a) = f(b) + f(y) = f(y) \neq 0$.

Definimos ahora $T\colon \ker(f) \longrightarrow \ker(g)$ por $T(h) := h - g(h)a$. Veamos primero que $T$ está bien definida. Si $h \in \ker(f)$, entonces $g(T(h)) = g(h) - g(h)g(a) = g(h) - g(h) = 0$. Por lo tanto, $T(h) \in \ker(g)$.

El operador $T$ es lineal y continuo, pues es la restricción a $\ker(f)$ del operador lineal continuo $x \mapsto x - g(x)a$ definido en $X$. Probemos ahora que $T$ es biyectivo. Para ello definimos $S\colon \ker(g) \longrightarrow \ker(f)$ por $S(k) := k - \dfrac{f(k)}{f(a)}a$. Esta fórmula está bien definida porque $f(a) \neq 0$. Además, si $k \in \ker(g)$, entonces $f(S(k)) = f(k) - \dfrac{f(k)}{f(a)}f(a) = 0$, por lo que $S(k) \in \ker(f)$. Así, $S$ está bien definida. También es lineal y continua.

Veamos que $S$ y $T$ son inversas. Sea $h \in \ker(f)$. Como $T(h) = h - g(h)a$, se tiene $f(T(h)) = f(h) - g(h)f(a) = -g(h)f(a)$, pues $f(h) = 0$. Entonces

$$S(T(h)) = T(h) - \frac{f(T(h))}{f(a)}a = h - g(h)a - \frac{-g(h)f(a)}{f(a)}a = h.$$

Por otro lado, sea $k \in \ker(g)$. Como $S(k) = k - \dfrac{f(k)}{f(a)}a$, se tiene $g(S(k)) = g(k) - \dfrac{f(k)}{f(a)}g(a) = -\dfrac{f(k)}{f(a)}$, pues $g(k) = 0$ y $g(a) = 1$. Por lo tanto,

$$T(S(k)) = S(k) - g(S(k))a = k - \frac{f(k)}{f(a)}a + \frac{f(k)}{f(a)}a = k.$$

Así, $S = T^{-1}$. En consecuencia, $T\colon \ker(f) \longrightarrow \ker(g)$ es una biyección lineal continua con inversa lineal continua.
Finalmente, como $f$ y $g$ son continuos, $\ker(f)$ y $\ker(g)$ son subespacios cerrados de $X$. Por lo tanto, ambos son espacios de Banach con la norma inducida de $X$. Concluimos que $\ker(f)$ y $\ker(g)$ son isomorfos como espacios de Banach. □

**Teorema 24.7.2.** (Conjuntos de nivel regulares en abiertos de espacios de Banach) Sean $X$ un espacio de Banach real, $\Omega \subseteq X$ un abierto no vacío y $J\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^k$, con $k \geq 1$. Sea $c \in \mathbb{R}$ y supongamos que el conjunto de nivel $V := \{u \in \Omega \mid J(u) = c\}$ es regular, es decir, $DJ(u) \neq 0$ para todo $u \in V$. Para $u \in \Omega$, la carta identidad determina el operador

$$\mathcal{I}_u := \Theta_{\mathrm{id}_\Omega, u}\colon T_u\Omega \longrightarrow X.$$

La Proposición 24.1.10 prueba que $\mathcal{I}_u$ es lineal, biyectivo y bicontinuo. Entonces $V$ es una subvariedad encajada de Banach de clase $C^k$ y codimensión 1 de $\Omega$. Si $\iota\colon V \longrightarrow \Omega$ es la inclusión, entonces

$$\mathcal{I}_u\big(d\iota_u(T_uV)\big) = \ker(DJ(u))$$

para todo $u \in V$.

*Demostración.* Si $V = \varnothing$, la afirmación es vacía. Supongamos que $V \neq \varnothing$ y fijemos $u \in V$. Como $DJ(u) \neq 0$, existe $e \in X$ tal que $DJ(u)(e) \neq 0$. Sea $Y_u := \ker(DJ(u))$. Entonces $Y_u$ es cerrado y

$$X = Y_u \oplus \mathbb{R}e.$$

Para cada $x \in X$ se tiene

$$x = \left(x - \frac{DJ(u)(x)}{DJ(u)(e)}e\right) + \frac{DJ(u)(x)}{DJ(u)(e)}e,$$

donde el primer sumando pertenece a $Y_u$, y la intersección $Y_u \cap \mathbb{R}e$ es trivial.
Consideremos

$$\Phi(y,t) := J(u + y + te) - c$$

en el abierto de $Y_u \times \mathbb{R}$ formado por los pares $(y,t)$ tales que $u+y+te \in \Omega$. Además, $\Phi(0,0) = 0$ y $D_2\Phi(0,0)(1) = DJ(u)(e) \neq 0$. Por el Teorema 23.3.8, existen abiertos $U_0 \subseteq Y_u$ e $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ que contienen a 0 y una función $h\colon U_0 \longrightarrow I_0$ de clase $C^k$, con $h(0) = 0$, tales que

$$\Phi(y,t) = 0 \iff t = h(y)$$

para todo $(y,t) \in U_0 \times I_0$.
Sea $W := \{u + y + te \mid y \in U_0,\ t \in I_0\}$. El operador lineal $L_u \colon Y_u \times \mathbb{R} \longrightarrow X$, $L_u(y,t) := y + te$, es un isomorfismo topológico por la Proposición 24.2.2; por lo tanto, $W$ es abierto en $X$. Definamos

$$\varphi \colon W \longrightarrow Y_u \times \mathbb{R}, \qquad \varphi(u + y + te) := (y, t - h(y)).$$

Su imagen es el abierto

$$\varphi(W) = \{(y,s) \in U_0 \times \mathbb{R} \mid s + h(y) \in I_0\},$$

y su inversa está dada por $\varphi^{-1}(y,s) = u + y + (s + h(y))e$. En consecuencia, $\varphi$ es un difeomorfismo de clase $C^k$, $\varphi(u) = (0,0)$ y

$$\varphi(W \cap V) = \varphi(W) \cap (Y_u \times \{0\}).$$

Así, $V$ es una subvariedad encajada de clase $C^k$ y codimensión 1.
Para identificar el espacio tangente en las coordenadas naturales del abierto $\Omega \subseteq X$, diferenciemos la identidad $\Phi(y, h(y)) = 0$ en $y = 0$. Para cada $\eta \in Y_u$ se obtiene

$$0 = D\Phi(0,0)\big(\eta, Dh(0)(\eta)\big) = DJ(u)\big(\eta + Dh(0)(\eta)e\big) = Dh(0)(\eta)DJ(u)(e).$$

Como $DJ(u)(e) \neq 0$, se sigue que $Dh(0) = 0$. El diferencial de la inversa de la carta adaptada envía entonces $(\eta, 0)$ en $\eta$. La Proposición 24.3.2 proporciona, por lo tanto,

$$\mathcal{I}_u\big(d\iota_u(T_u V)\big) = Y_u = \ker(DJ(u)).$$

Finalmente, si $u_0 \in V$ se fija, el Lema 24.7.1 muestra que $\ker(DJ(u))$ es isomorfo a $\ker(DJ(u_0))$ para todo $u \in V$. Por lo tanto, aun cuando $V$ sea disconexo, todos sus espacios modelo locales son isomorfos. □

**Lema 24.7.3.** (Diferencial de una restricción) Sean $X$ un espacio de Banach, $\Omega \subseteq X$ un abierto, $V \subseteq \Omega$ una subvariedad de Banach y $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Entonces $\varphi \restriction_V \in C^1(V, \mathbb{R})$ y, para cada $u \in V$,

$$d(\varphi \restriction_V)_u(v) = D\varphi(u)\big(\mathcal{I}_u(d\iota_u(v))\big)$$

para todo $v \in T_u V$. En particular,

$$d(\varphi \restriction_V)_u = D\varphi(u) \circ \mathcal{I}_u \circ d\iota_u.$$

*Demostración.* Sea $\iota \colon V \longrightarrow \Omega$ la inclusión canónica. Entonces $\varphi \restriction_V = \varphi \circ \iota$. La Proposición 24.3.2 muestra que $\iota$ es de clase $C^1$, y la regla de la cadena da

$$d(\varphi \restriction_V)_u = d\varphi_u \circ d\iota_u.$$

Con el isomorfismo bicontinuo $\mathcal{I}_u \colon T_u\Omega \longrightarrow X$ definido en el Teorema 24.7.2, el diferencial $d\iota_u$ se representa por la inclusión de $\mathcal{I}_u(d\iota_u(T_u V))$ en $X$. Además, en la carta identidad de $\Omega$ y en la coordenada usual de $\mathbb{R}$, el diferencial $d\varphi_u$ se representa por la derivada de Fréchet $D\varphi(u)$; es decir, $d\varphi_u = D\varphi(u) \circ \mathcal{I}_u$, identificando $T_{\varphi(u)}\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$d(\varphi \restriction_V)_u(v) = D\varphi(u)\big(\mathcal{I}_u(d\iota_u(v))\big)$$

para todo $v \in T_u V$, como se quería demostrar. □

## 24.8 Funciones flan y particiones suaves de la unidad

La construcción de objetos globales a partir de datos locales requiere una precaución adicional en las variedades de Banach. En dimensión finita, la segunda numerabilidad y la compacidad local proporcionan la paracompacidad, y las funciones flan euclidianas producen particiones suaves de la unidad. En un espacio de Banach de dimensión infinita no hay vecindades relativamente compactas y la existencia de funciones flan con la regularidad prescrita depende de la geometría del espacio modelo. Por ello conviene separar la parte topológica del argumento de la parte diferencial.

Sea $E$ un espacio topológico. Recordemos que el soporte de una función continua $b\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto cerrado

$$\operatorname{supp}(b) := \overline{\{x \in E \mid b(x) \neq 0\}}.$$

La cerradura se toma en $E$.

**Definición 24.8.1.** Sea $E$ un espacio de Banach real y sea $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Una **función flan de clase** $C^k$ en $E$, también llamada **función bump de clase** $C^k$, es una función $b \in C^k(E, \mathbb{R})$, no idénticamente nula, cuyo soporte es acotado.

En dimensión finita, un soporte cerrado y acotado es compacto, de modo que la definición anterior coincide con la utilizada en los capítulos precedentes. En dimensión infinita no se puede pedir soporte compacto, como muestra el resultado siguiente.

**Proposición 24.8.2.** Sea $E$ un espacio normado de dimensión infinita. Toda función continua $b\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto es idénticamente nula.

*Demostración.* Usaremos primero la siguiente consecuencia elemental del lema de Riesz. Si $Y \subsetneq E$ es un subespacio cerrado y $0 < a < 1$, existe $x \in E$ tal que $\|x\|_E = 1$ y

$$\operatorname{dist}(x, Y) > a.$$

En efecto, tomemos $z \notin Y$ y escribamos $d := \operatorname{dist}(z, Y) > 0$. Por la definición del ínfimo, existe $y_0 \in Y$ tal que $\|z - y_0\|_E < \frac{d}{a}$. Si $x := \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|_E}$, entonces, para todo $y \in Y$,

$$\|x - y\|_E = \frac{\|z - (y_0 + \|z - y_0\|_E y)\|_E}{\|z - y_0\|_E} \geq \frac{d}{\|z - y_0\|_E} > a.$$

Aplicando esta observación de manera inductiva, con $a = \frac{1}{2}$ y $Y_m := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_m\}$, se obtiene una sucesión $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de vectores unitarios tal que $\|x_m - x_j\|_E > \frac{1}{2}$ cuando $m \neq j$. Aquí cada $Y_m$ es cerrado por ser de dimensión finita y es propio porque $E$ tiene dimensión infinita. Por lo tanto, la bola unitaria cerrada de $E$ no es compacta.

Supongamos ahora que $b$ no es idénticamente nula y elijamos $x_0 \in E$ con $b(x_0) \neq 0$. La continuidad proporciona $r > 0$ tal que

$$|b(x)| > \frac{|b(x_0)|}{2} \qquad \text{si } \|x - x_0\|_E < r.$$

En consecuencia, $\overline{B}_E(x_0, r) \subseteq \operatorname{supp}(b)$. Si este soporte fuera compacto, también lo sería la bola cerrada $\overline{B}_E(x_0, r)$. La traslación por $-x_0$ y la homotecia de razón $\frac{1}{r}$ implicarían entonces la compacidad de la bola unitaria cerrada, en contradicción con el párrafo anterior. □

La normalización habitual de una función flan sigue siendo válida con la noción de soporte acotado.

**Lema 24.8.3.** Si $E$ admite una función flan de clase $C^k$, entonces admite una función $\beta \in C^k(E, \mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq \beta \leq 1, \qquad \beta = 1 \text{ en una vecindad de } 0, \qquad \operatorname{supp}(\beta) \text{ es acotado.}$$

*Demostración.* Sea $b$ una función flan y elijamos $z \in E$ tal que $c := b(z) \neq 0$. Existen intervalos abiertos disjuntos que contienen, respectivamente, a 0 y a $c$. Por la Proposición 1.3.6, aplicada en $\mathbb{R}$, podemos escoger $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \vartheta \leq 1$, $\vartheta = 0$ en una vecindad de 0 y $\vartheta = 1$ en una vecindad de $c$. Definimos

$$\beta(x) := \vartheta(b(x + z)).$$

La función $\beta$ es de clase $C^k$ por la regla de la cadena, vale uno en una vecindad de 0 y toma valores en $[0, 1]$. Además,

$$\{x \in E \mid \beta(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp}(b) - z,$$

porque $\vartheta(0) = 0$. Como el conjunto del lado derecho es cerrado y acotado, también $\operatorname{supp}(\beta)$ es acotado. □

Una fuente directa de funciones flan son las normas diferenciables.

**Proposición 24.8.4.** Sea $\nu$ una norma sobre un espacio de Banach $E$ y supongamos que existen constantes $c_\nu, C_\nu > 0$ tales que

$$c_\nu \|x\|_E \leq \nu(x) \leq C_\nu \|x\|_E, \qquad x \in E.$$

Si $\nu \colon E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^k$, entonces $E$ admite una función flan de clase $C^k$.

*Demostración.* Elijamos $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(t) = 1$ para $t \leq 1$ y $\chi(t) = 0$ para $t \geq 2$. La función

$$b(x) := \chi(\nu(x))$$

es de clase $C^k$ fuera del origen y es constante en la vecindad $\{x \in E \mid \nu(x) < 1\}$ de 0; por lo tanto, es de clase $C^k$ en todo $E$. Además, $b(0) = 1$ y $\operatorname{supp}(b) \subseteq \{x \in E \mid \nu(x) \leq 2\}$; la desigualdad $c_\nu \|x\|_E \leq \nu(x)$ muestra que este soporte está contenido en $\left\{x \in E \;\middle|\; \|x\|_E \leq \frac{2}{c_\nu}\right\}$. □

La existencia de una función flan es necesaria para construir particiones suaves de la unidad, pero la implicación recíproca no se empleará sin hipótesis adicionales. La condición exacta que necesita el argumento geométrico se formula a continuación.

**Definición 24.8.5.** Sea $E$ un espacio de Banach y sea $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Decimos que $E$ **admite particiones de la unidad de clase** $C^k$ si toda cubierta abierta $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $E$ admite una partición de la unidad $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ subordinada a $\mathscr{U}$, en el sentido de la Definición 1.3.4, tal que cada $\psi_\alpha$ es de clase $C^k$.

Esta propiedad contiene, en particular, la posibilidad de separar por una función suave un cerrado de un abierto.

**Lema 24.8.6.** (Cortes en el espacio modelo) Supongamos que $E$ admite particiones de la unidad de clase $C^k$. Si $A \subseteq E$ es cerrado, $B \subseteq E$ es abierto y $A \subseteq B$, existe $\theta \in C^k(E, \mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq \theta \leq 1, \qquad \theta = 1 \text{ en } A, \qquad \operatorname{supp}(\theta) \subseteq B.$$

*Demostración.* Consideremos la cubierta abierta $(B, E \setminus A)$ de $E$ y una partición de la unidad $(\theta, \zeta)$ de clase $C^k$ subordinada a ella. La subordinación da $\operatorname{supp}(\theta) \subseteq B$ y $\operatorname{supp}(\zeta) \subseteq E \setminus A$. En particular, $\zeta = 0$ sobre $A$; como $\theta + \zeta = 1$, se sigue que $\theta = 1$ sobre $A$. □

Tomando $A = \overline{B}_E(0,1)$ y $B = B_E(0,2)$ en el lema anterior se obtiene una función flan de clase $C^k$. Así, admitir particiones $C^k$ es una condición, a priori, más fuerte que disponer de una sola función flan.

### 24.8.1 La construcción global en una variedad de Banach

La parte topológica de la construcción se recoge en un lema de reducción. La paracompacidad que aparece en su enunciado es la paracompacidad del espacio topológico subyacente; no forma parte de la Definición 24.1.1 y, por lo tanto, debe imponerse de manera explícita.

**Lema 24.8.7.** (Encogimiento localmente finito) Sea $X$ un espacio de Hausdorff paracompacto. Entonces:

(a) si $F \subseteq U \subseteq X$, donde $F$ es cerrado y $U$ es abierto, existe un abierto $V$ tal que

$$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U;$$

(b) si $(W_i)_{i \in I}$ es una cubierta abierta localmente finita de $X$, existe una cubierta abierta $(V_i)_{i \in I}$ tal que

$$\overline{V_i} \subseteq W_i \qquad \text{para todo } i \in I.$$

*Demostración.* Probemos primero que $X$ es normal. Fijemos un punto $x \in X$ y un cerrado $F$ que no lo contiene. Para cada $y \in F$, la propiedad de Hausdorff proporciona abiertos disjuntos $A_y$ y $B_y$ con $x \in A_y$ y $y \in B_y$. La cubierta

$$\{X \setminus F\} \cup \{B_y \mid y \in F\}$$

admite un refinamiento abierto localmente finito $(R_j)_{j \in J}$. Sea $J_F := \{j \in J \mid R_j \cap F \neq \varnothing\}$. Si $j \in J_F$, el conjunto $R_j$ no puede estar contenido en $X \setminus F$; por ser un refinamiento, está contenido en algún $B_y$. En consecuencia, $x \notin \overline{R_j}$. La familia $(\overline{R_j})_{j \in J}$ también es localmente finita y, por ello,

$$\overline{\bigcup_{j \in J_F} R_j} \subseteq \bigcup_{j \in J_F} \overline{R_j}.$$

El abierto $W := \bigcup_{j \in J_F} R_j$ contiene a $F$, mientras que $x \notin \overline{W}$. Por lo tanto, $X \setminus \overline{W}$ es una vecindad de $x$ cuya cerradura no intersecta a $F$. Esto prueba que $X$ es regular.

Sean ahora $F_0$ y $F_1$ cerrados disjuntos. Para cada $x \in F_0$, la regularidad proporciona un abierto $U_x$ tal que

$x \in U_x$ y $\overline{U_x} \cap F_1 = \varnothing$. Refinamos localmente de manera finita la cubierta

$$\{X \setminus F_0\} \cup \{U_x \mid x \in F_0\}$$

y tomamos la unión $G$ de los elementos del refinamiento que intersectan a $F_0$. Estos elementos están contenidos en algún $U_x$. La local finitud implica que la cerradura de su unión está contenida en la unión de sus cerraduras; por consiguiente,

$$F_0 \subseteq G, \qquad \overline{G} \cap F_1 = \varnothing.$$

Los abiertos $G$ y $X \setminus \overline{G}$ separan a $F_0$ y $F_1$. El espacio $X$ es, pues, normal. Aplicando esta separación a los cerrados $F$ y $X \setminus U$ se obtiene (a).

Para demostrar (b), bien ordenamos $I$ y construimos los abiertos $V_i$ por recurrencia transfinita. Supongamos elegidos los $V_j$ con $j < i$ de modo que la familia

$$\{V_j \mid j < i\} \cup \{W_j \mid j \geq i\}$$

cubra a $X$. Definimos

$$K_i := X \setminus \left( \bigcup_{j<i} V_j \cup \bigcup_{j>i} W_j \right).$$

El conjunto $K_i$ es cerrado y la propiedad inductiva muestra que $K_i \subseteq W_i$. Por (a), existe un abierto $V_i$ tal que $K_i \subseteq V_i$ y $\overline{V_i} \subseteq W_i$. Esta elección preserva la propiedad de cobertura en el sucesor siguiente.

También la preserva en cada ordinal límite. En efecto, si un punto $x$ no perteneciera a ninguno de los $V_j$ ya elegidos ni a ninguno de los $W_j$ restantes, la local finitud permitiría tomar el mayor de los índices, entre los estrictamente anteriores al ordinal límite, de los conjuntos $W_j$ que contienen a $x$. La propiedad de cobertura inmediatamente después de ese índice obligaría a $x$ a pertenecer a uno de los $V_j$ ya elegidos, lo cual es una contradicción. Al terminar la recurrencia, $(V_i)_{i\in I}$ cubre a $X$ y satisface $\overline{V_i} \subseteq W_i$. Como $V_i \subseteq W_i$, la familia $(V_i)_{i\in I}$ es localmente finita. □

En los espacios métricos, la paracompacidad puede deducirse directamente de la distancia, sin hipótesis de separabilidad ni de compacidad local.

**Teorema 24.8.8.** (Paracompacidad de los espacios métricos) Toda cubierta abierta de un espacio métrico admite un refinamiento abierto localmente finito. En particular, todo espacio metrizable y todo subespacio suyo son paracompactos.

*Demostración.* Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ una cubierta abierta. Si $X = \varnothing$, la afirmación es inmediata. Supongamos que $X \neq \varnothing$ y elijamos un buen orden en $A$. Para cada $\alpha$ definamos

$$f_\alpha(x) := \min\{1, d(x, X \setminus U_\alpha)\}, \qquad x \in X,$$

y tomemos $f_\alpha \equiv 1$ cuando $U_\alpha = X$. La distancia a un conjunto no vacío es 1–Lipschitz: de $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, al tomar ínfimos sobre $z$ en el conjunto, se obtiene una de las desigualdades, y la otra se sigue intercambiando $x$ e $y$. Como truncar en 1 conserva esa propiedad, cada $f_\alpha$ es 1–Lipschitz. Además, $f_\alpha(x) > 0$ si y sólo si $x \in U_\alpha$, pues $U_\alpha$ es abierto.

Para $n \in \mathbb{N}$ pongamos $r_n := 2^{-n}$ y consideremos los cerrados

$$F_{\alpha,n} := \{x \in X \mid f_\alpha(x) \geq r_n,\ f_\beta(x) \leq r_n/2 \text{ para todo } \beta < \alpha\}.$$

Son cerrados porque se definen mediante intersecciones de conjuntos cerrados. Si $\alpha < \beta$, $x \in F_{\alpha,n}$ e $y \in F_{\beta,n}$, entonces

$$d(x,y) \geq |f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| \geq r_n/2.$$

Por otra parte, estos conjuntos cubren $X$ al variar $\alpha$ y $n$. En efecto, dado $x \in X$, sea $\alpha$ el primer índice para el cual $x \in U_\alpha$. Entonces $f_\alpha(x) > 0$ y $f_\beta(x) = 0$ para todo $\beta < \alpha$. Basta elegir $n$ con $r_n \leq f_\alpha(x)$ para obtener $x \in F_{\alpha,n}$.

Si $F_{\alpha,n} \neq \varnothing$, definamos el abierto

$$V_{\alpha,n} := \{x \in X \mid d(x, F_{\alpha,n}) < r_n/8\};$$

si $F_{\alpha,n} = \varnothing$, tomamos $V_{\alpha,n} = \varnothing$. Para $x \in V_{\alpha,n}$ existe $u \in F_{\alpha,n}$ con $d(x,u) < r_n/8$, y por tanto $f_\alpha(x) \geq f_\alpha(u) - d(x,u) > 7r_n/8 > 0$. Así, $V_{\alpha,n} \subseteq U_\alpha$. Si $\alpha \neq \beta$, $x \in V_{\alpha,n}$ e $y \in V_{\beta,n}$, elegimos puntos de los respectivos cerrados a distancia menor que $r_n/8$. La separación de los cerrados y la desigualdad triangular dan $d(x,y) > r_n/4$. En consecuencia, cada bola $B_d(z, r_n/8)$ intersecta a lo sumo uno de los conjuntos $V_{\alpha,n}$. Para cada $n$ fijo, la familia $(V_{\alpha,n})_{\alpha \in A}$ es, por lo tanto, localmente finita. Estas familias, reunidas para todos los $n$, cubren $X$.

Para obtener local finitud también respecto de $n$, pongamos

$$O_n := \bigcup_{1 \leq k \leq n} \bigcup_{\alpha \in A} V_{\alpha,k}, \qquad h_n(x) := \min\{1, d(x, X \setminus O_n)\},$$

con $h_n \equiv 1$ si $O_n = X$, y definamos

$$P_0 := \varnothing, \qquad P_n := \{x \in X \mid h_n(x) \geq 2^{-n}\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Los conjuntos $O_n$ son abiertos y crecientes. Las funciones $h_n$ son continuas y satisfacen $h_n \leq h_{n+1}$; por ello, los $P_n$ son cerrados, $P_n \subseteq O_n$ y $P_n \subseteq P_{n+1}$. Sus interiores cubren $X$. En efecto, si $x \in O_m$, entonces $h_m(x) > 0$ y, para $n$ suficientemente grande, $n \geq m$ y $h_n(x) \geq h_m(x) > 2^{-n}$. Por continuidad, esta desigualdad estricta persiste en una vecindad de $x$, contenida en $P_n$.

Definamos finalmente

$$W_{\alpha,n} := V_{\alpha,n} \setminus P_{n-1}.$$

Cada $W_{\alpha,n}$ es abierto y está contenido en $U_\alpha$. Para comprobar que cubren $X$, dado $x \in X$ tomemos el menor $n$ tal que $x \in V_{\alpha,n}$ para algún $\alpha$. Si $n = 1$, se tiene $x \notin P_0$. Si $n > 1$, la minimalidad da $x \notin O_{n-1}$ y, como $P_{n-1} \subseteq O_{n-1}$, también $x \notin P_{n-1}$. En ambos casos, $x \in W_{\alpha,n}$.

Fijemos ahora $x \in X$ y elijamos $N$ con $x \in \operatorname{Int}(P_N)$. Esta vecindad no intersecta ningún $W_{\alpha,n}$ con $n > N$, porque $P_N \subseteq P_{n-1}$. Para cada uno de los finitos niveles $1 \leq n \leq N$, la local finitud de $(V_{\alpha,n})_{\alpha \in A}$ proporciona una vecindad de $x$ que intersecta sólo un número finito de sus elementos. La intersección de estas vecindades con $\operatorname{Int}(P_N)$ intersecta sólo un número finito de los $W_{\alpha,n}$. Así, los miembros no vacíos de esta familia forman el refinamiento abierto localmente finito buscado. La afirmación para espacios metrizables se obtiene eligiendo una métrica compatible, y la relativa a sus subespacios se sigue aplicando lo probado a la métrica restringida. □

**Teorema 24.8.9.** (Particiones suaves en variedades de Banach) Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^k$, modelada sobre un espacio de Banach $E$, donde $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supongamos que el espacio topológico $M$ es paracompacto y que $E$ admite particiones de la unidad de clase $C^k$. Entonces toda cubierta abierta $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $M$ admite una partición de la unidad de clase $C^k$ subordinada a $\mathscr{U}$.

*Demostración.* El Lema 24.8.7 muestra, en particular, que $M$ es regular. Para cada $x \in M$, elijamos $\alpha(x) \in A$ tal que $x \in U_{\alpha(x)}$ y una carta $(C_x, \varphi_x)$ alrededor de $x$. Aplicando la regularidad al abierto $C_x \cap U_{\alpha(x)}$, obtenemos un abierto $Q_x$ tal que

$$x \in Q_x, \qquad \overline{Q_x} \subseteq C_x \cap U_{\alpha(x)}.$$

Como $\varphi_x(Q_x)$ es una vecindad abierta de $\varphi_x(x)$, existe $r_x > 0$ tal que

$$\overline{B}_E(\varphi_x(x), r_x) \subseteq \varphi_x(Q_x).$$

Pongamos

$$P_x := \varphi_x^{-1}\big(B_E(\varphi_x(x), r_x)\big).$$

Puesto que $P_x \subseteq Q_x$ y $\overline{Q_x} \subseteq C_x$, la cerradura de $P_x$ en $M$ permanece en el dominio de la carta. Por lo tanto,

$$\overline{P_x} = \varphi_x^{-1}\big(\overline{B}_E(\varphi_x(x), r_x)\big) \subseteq Q_x \subseteq U_{\alpha(x)}. \tag{24.4}$$

La paracompacidad proporciona un refinamiento abierto localmente finito $(W_i)_{i \in I}$ de la cubierta $(P_x)_{x \in M}$. Para cada $i$ fijamos un punto $x(i)$ tal que $W_i \subseteq P_{x(i)}$ y abreviamos

$$C_i := C_{x(i)}, \qquad \varphi_i := \varphi_{x(i)}, \qquad \alpha(i) := \alpha(x(i)).$$

Por el Lema 24.8.7, existe una cubierta abierta $(V_i)_{i \in I}$ con

$$\overline{V_i} \subseteq W_i \qquad \text{para todo } i \in I. \tag{24.5}$$

Consideremos, dentro del espacio modelo,

$$A_i := \varphi_i(\overline{V_i}), \qquad B_i := \varphi_i(W_i).$$

El conjunto $B_i$ es abierto y $A_i \subseteq B_i$. Además, $A_i$ es cerrado en $E$. Para verificar este último punto, observemos primero que $\overline{V_i}$ es cerrado en $M$ y está contenido en $C_i$, por lo que $A_i$ es cerrado en el abierto $\varphi_i(C_i)$. Por otra parte, $A_i$ está contenido en la bola cerrada $\overline{B}_E(\varphi_i(x(i)), r_{x(i)})$, la cual es un cerrado de $E$ contenido en $\varphi_i(C_i)$ por (24.4). Si $A_i = F_i \cap \varphi_i(C_i)$ con $F_i$ cerrado en $E$, entonces

$$A_i = F_i \cap \overline{B}_E(\varphi_i(x(i)), r_{x(i)}),$$

y queda probada la afirmación.
El Lema 24.8.6 proporciona una función $\theta_i \in C^k(E, \mathbb{R})$ tal que

$$0 \le \theta_i \le 1, \qquad \theta_i = 1 \text{ sobre } A_i, \qquad \operatorname{supp}(\theta_i) \subseteq B_i. \tag{24.6}$$

Definimos $\eta_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta_i(p) := \begin{cases} \theta_i(\varphi_i(p)), & p \in C_i, \\ 0, & p \notin C_i. \end{cases}$$

Esta extensión por cero es de clase $C^k$. En efecto, la tercera propiedad de (24.6) implica que la función local se anula fuera de un cerrado contenido en $W_i$, y $\overline{W_i} \subseteq \overline{P_{x(i)}} \subseteq C_i$ por (24.4); por ello es idénticamente nula en una vecindad de cada punto de $M \setminus C_i$. Además,

$$\operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq W_i, \qquad \eta_i = 1 \text{ sobre } \overline{V_i}. \tag{24.7}$$

La familia $(\operatorname{supp}(\eta_i))_{i\in I}$ es localmente finita porque está subordinada a $(W_i)_{i\in I}$. En consecuencia, la suma

$$h := \sum_{i\in I} \eta_i$$

está localmente formada por un número finito de funciones de clase $C^k$ y, por lo tanto, pertenece a $C^k(M)$. Dado $p \in M$, existe $i$ con $p \in V_i$; entonces (24.7) da $\eta_i(p) = 1$. Así, $h(p) \geq 1$ para todo $p \in M$. Las funciones

$$\rho_i := \frac{\eta_i}{h}$$

son de clase $C^k$, no negativas, forman una familia localmente finita, satisfacen $\operatorname{supp}(\rho_i) \subseteq W_i$ y cumplen $\sum_{i\in I} \rho_i = 1$.

Finalmente, para cada $\alpha \in A$ definimos

$$\psi_\alpha := \sum_{\{i\in I \mid \alpha(i)=\alpha\}} \rho_i.$$

La suma es localmente finita y, por lo tanto, $\psi_\alpha$ es de clase $C^k$. Además,

$$\sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha = \sum_{i\in I} \rho_i = 1.$$

Para comprobar la subordinación, notemos que cualquier subfamilia de una familia localmente finita de cerrados tiene unión cerrada. Por ello,

$$\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subseteq \bigcup_{i\in I,\ \alpha(i)=\alpha} \operatorname{supp}(\rho_i) \subseteq \bigcup_{i\in I,\ \alpha(i)=\alpha} W_i \subseteq U_\alpha.$$

La familia de estos soportes también es localmente finita, pues se obtiene agrupando la familia localmente finita $(\operatorname{supp}(\rho_i))_{i\in I}$ según los elementos de la cubierta original. Así, $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ es la partición requerida. □

**Definición 24.8.10.** Una variedad de Banach de clase $C^k$ se llama **$C^k$–paracompacta** si su espacio topológico es paracompacto y toda cubierta abierta admite una partición de la unidad de clase $C^k$ subordinada a ella.

El Teorema 24.8.9 afirma que una variedad paracompacta modelada sobre un espacio que admite particiones de clase $C^k$ es $C^k$–paracompacta. Esta formulación distingue las dos hipótesis: la paracompacidad produce familias localmente finitas, mientras que la propiedad del espacio modelo proporciona los cortes diferenciables.

### 24.8.2 Criterios y ejemplos de espacios modelo

Los criterios generales que permiten pasar de una sola función flan a particiones de la unidad pertenecen a la teoría de suavidad y renormamiento de espacios de Banach. Introducimos la hipótesis funcional que interviene en uno de los criterios más útiles.

**Definición 24.8.11.** Un espacio de Banach $E$ es un **espacio de Asplund** si todo subespacio cerrado y separable $Y \subseteq E$ tiene dual separable.

**Teorema 24.8.12.** (Criterio de Fry) Sea $E$ un espacio de Banach y sea $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $E$ admite una función flan de clase $C^k$ y $E'$ es un espacio de Asplund, entonces $E$ admite particiones de la unidad de clase $C^k$.

Este resultado es el Teorema 3.1 de Fry [63, p. 146]. Su demostración emplea resoluciones proyectivas en espacios duales y construye un encaje topológico en un espacio $c_0(\Gamma)$ cuyas componentes escalares son de clase $C^k$. La existencia de ese encaje proporciona las particiones de la unidad. El criterio combina, por tanto, la regularidad de la función flan con la hipótesis de Asplund sobre el dual. El Teorema 24.8.9 explica cómo trasladar su conclusión a una variedad paracompacta. Johanis [86] ofrece una caracterización que reúne y extiende varios criterios de existencia.

En ese trabajo, la suficiencia de una sola función flan de clase $C^k$ en un espacio de Banach arbitrario se formula como un problema abierto. Su caracterización utiliza, además de la función flan, una familia de funciones suaves que permite aproximar cada punto mediante subespacios determinados por sus componentes no nulas. Esta información adicional es la que hace posible obtener particiones en los casos cubiertos por el criterio.

Recordemos por qué la hipótesis de Asplund del criterio anterior se cumple en los ejemplos reflexivos. Si $E$ es reflexivo, también lo es $E'$ por la Proposición B.11.40. Sea $Y \subseteq E'$ un subespacio cerrado y separable. Como los subespacios cerrados de un espacio reflexivo son reflexivos, $Y$ es reflexivo: en efecto, la bola unitaria de $Y$ es la intersección de la bola unitaria de $E'$ con el subespacio cerrado y convexo $Y$, que es débilmente cerrado por el Teorema B.11.16; por lo tanto, dicha bola es débilmente compacta, y el Teorema B.11.38 da la reflexividad de $Y$. En consecuencia, $Y'$ también es reflexivo y su bola unitaria cerrada $B_{Y'}$ es débilmente compacta.

Por otra parte, la separabilidad de $Y$ y el Teorema B.11.31 muestran que $B_{Y'}$ es metrizable para la topología débil-$*$. Como $Y$ es reflexivo, el encaje canónico $J_Y\colon Y \longrightarrow Y''$, definido por $J_Y(y)(y') := y'(y)$, es suprayectivo. En consecuencia, la topología débil $\sigma(Y', Y'')$ y la topología débil-$*$ $\sigma(Y', J_Y(Y))$ coinciden sobre $Y'$; mediante $J_Y$, esta última es precisamente $\sigma(Y', Y)$. Así, $B_{Y'}$ es un espacio métrico compacto. Elijamos un subconjunto numerable $D \subseteq B_{Y'}$ que sea débilmente denso. Su envolvente convexa real $\operatorname{co}(D)$ tiene clausura débil igual a $B_{Y'}$, pues contiene a $D$ y está contenida en la bola convexa $B_{Y'}$. La envolvente convexa racional $\operatorname{co}_{\mathbb{Q}}(D)$ es numerable y es densa en norma en $\operatorname{co}(D)$: basta aproximar los coeficientes de cada combinación convexa finita por números racionales no negativos cuya suma sea uno. Finalmente, la clausura en norma de $\operatorname{co}_{\mathbb{Q}}(D)$ es convexa y, por el Teorema B.11.16, es también débilmente cerrada. Como contiene a $\operatorname{co}(D)$, contiene su clausura débil, que es $B_{Y'}$; la inclusión opuesta es inmediata. Por consiguiente, $B_{Y'}$ es separable para la norma y también lo es $Y'$. Esto prueba que todo espacio reflexivo es de Asplund y, en particular, que el dual de un espacio reflexivo es de Asplund.

**Ejemplo 24.8.13.** (Espacios de Hilbert) Sea $H$ un espacio de Hilbert real. La función cuadrática

$$Q\colon H \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad Q(x) := \langle x, x\rangle_H,$$

es suave y sus únicas derivadas no nulas son

$$DQ(x)h = 2\langle x, h\rangle_H, \qquad D^2Q(x)(h_1,h_2) = 2\langle h_1, h_2\rangle_H.$$

Si $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisface $0 \le \chi \le 1$, $\chi = 1$ en $(-\infty, 1]$ y $\chi = 0$ en $[4,\infty)$, entonces $\chi \circ Q$ es una función flan suave. Como $H$ es reflexivo, $H'$ es de Asplund. El Teorema 24.8.12 implica que $H$ admite particiones suaves de la unidad. Por consiguiente, toda variedad suave, paracompacta y modelada sobre un espacio de Hilbert admite particiones suaves de la unidad, sin que sea necesario suponer separabilidad del espacio modelo.

El grado de diferenciabilidad disponible en los espacios $L^p$ puede verse directamente en el funcional que define su norma.

**Lema 24.8.14.** Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $1 < p < \infty$, sobre escalares reales. Definamos

$$P_p\colon L^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad P_p(u) := \int_X |u|^p \, d\mu.$$

Si $p$ es un entero par, $P_p$ es suave. Si $p$ no es un entero par, $P_p$ es de clase $C^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ con $m < p$. Para $1 \le j < p$, sus derivadas son

$$D^j P_p(u)(h_1,\dots,h_j) = \int_X a_{p,j}(u) h_1 \cdots h_j \, d\mu, \tag{24.8}$$

donde

$$a_{p,j}(t) := p(p-1)\cdots(p-j+1)|t|^{p-j}(\operatorname{sgn} t)^j, \qquad a_{p,j}(0) := 0.$$

*Demostración.* Supongamos primero que $1 \le j < p$. La desigualdad de Hölder de la Proposición B.7.9, con exponentes $\frac{p}{p-j}, p, \dots, p$, da

$$\left| \int_X a_{p,j}(u) h_1 \cdots h_j \, d\mu \right| \le C_{p,j} \|u\|_{L^p(X)}^{p-j} \prod_{\ell=1}^{j} \|h_\ell\|_{L^p(X)}. \tag{24.9}$$

Aquí y en las estimaciones siguientes, $C_{p,j} > 0$ depende sólo de $p$ y $j$; no depende de $u$, de los incrementos ni del espacio de medida. Por lo tanto, el lado derecho de (24.8) define una forma $j$–lineal continua.
El operador de Nemytskii

$$L^p(X) \longrightarrow L^{\frac{p}{p-j}}(X), \qquad u \longmapsto a_{p,j}(u), \tag{24.10}$$

es continuo. En efecto, si $r := p - j$, para $0 < r \le 1$ se tiene la desigualdad puntual

$$\big||s|^r(\operatorname{sgn} s)^j - |t|^r(\operatorname{sgn} t)^j\big| \le C_r|s-t|^r,$$

mientras que, para $r > 1$,

$$\big||s|^r(\operatorname{sgn} s)^j - |t|^r(\operatorname{sgn} t)^j\big| \le C_r(|s|^{r-1} + |t|^{r-1})|s-t|.$$

En ambas desigualdades puede elegirse $C_r > 0$ en función únicamente de $r$; en particular, es independiente de $s$ y $t$. Al elevar a la potencia $\frac{p}{r}$, integrar y aplicar Hölder en el segundo caso, se obtiene, respectivamente,

$$\|a_{p,j}(u) - a_{p,j}(v)\|_{L^{\frac{p}{r}}(X)} \le C_{p,j}\|u-v\|_{L^p(X)}^r$$

y

$$\|a_{p,j}(u)-a_{p,j}(v)\|_{L^{\frac{p}{r}}(X)} \le C_{p,j}(\|u\|^{r-1}_{L^p(X)}+\|v\|^{r-1}_{L^p(X)})\|u-v\|_{L^p(X)}.$$

Esto prueba la continuidad de (24.10) y, junto con (24.9), la continuidad en norma de la función que asigna a $u$ la forma multilineal de (24.8).

Resta verificar que estas formas son efectivamente las derivadas de Fréchet. Pongamos $a_{p,0}(t) := |t|^p$. Si $j+1<p$, el teorema fundamental del cálculo en $\mathbb{R}$ da, para casi todo punto de $X$,

$$a_{p,j}(u+h)-a_{p,j}(u)-a_{p,j+1}(u)h = \int_0^1 \big(a_{p,j+1}(u+th)-a_{p,j+1}(u)\big)h\,dt.$$

Para $j=0$ interpretamos el producto vacío como 1. Para cada $t\in[0,1]$, la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{p}{p-j-1}, p, \dots, p$ controla la norma $L^1(X)$ del integrando después de multiplicarlo por $h_1\cdots h_j$. Además, la continuidad del operador de Nemytskii hace que ese integrando dependa continuamente de $t$ en $L^1(X)$. Podemos, por tanto, integrar en $t$ en este espacio de Banach y aplicar el funcional lineal continuo $v \longmapsto \int_X v\,d\mu$; esta operación justifica el intercambio de las integrales. La identidad escalar anterior coincide con esta identidad en $L^1(X)$: el integrando se anula fuera de la unión de los conjuntos $\{|u|\ge 1/n\}$ y $\{|h|\ge 1/n\}$, con $n\in\mathbb{N}$, que tienen medida finita, de modo que Fubini se aplica en ese soporte de medida $\sigma$–finita. Obtenemos así

$$\begin{aligned}&\left|\int_X \big(a_{p,j}(u+h)-a_{p,j}(u)-a_{p,j+1}(u)h\big)h_1\cdots h_j\,d\mu\right| \\ &\qquad \le \sup_{t\in[0,1]} \|a_{p,j+1}(u+th)-a_{p,j+1}(u)\|_{L^{\frac{p}{p-j-1}}(X)} \|h\|_{L^p(X)} \prod_{\ell=1}^{j}\|h_\ell\|_{L^p(X)}.\end{aligned}$$

La continuidad del operador de Nemytskii correspondiente a $j+1$ muestra que el supremo tiende a cero cuando $h\to 0$ en $L^p(X)$: en las dos estimaciones anteriores basta sustituir $v$ por $u+th$, y las cotas son uniformes para $0\le t\le 1$. Por lo tanto, para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$, dependiente de $u,p,j$ y $\varepsilon$, tal que, si $\|h\|_{L^p(X)}<\delta$, la norma del residuo como forma $j$–lineal es a lo sumo $\varepsilon\|h\|_{L^p(X)}$. Para $j=0$ esto prueba la fórmula de la primera derivada. Supongamos que, para un entero $j\ge 1$ con $j+1<p$, la forma de (24.8) ya coincide con $D^jP_p$. La estimación del residuo, tomada sobre todos los $h_\ell\in L^p(X)$ con $\|h_\ell\|_{L^p(X)}\le 1$ y $\ell\in\{1,\dots,j\}$, prueba la diferenciabilidad de $D^jP_p$ en la norma del espacio de formas $j$–lineales. Su derivada, mediante la asociación de la Proposición 23.2.3, es exactamente la forma indicada para el orden $j+1$. La continuidad de esa forma ya fue establecida en (24.10). Queda así demostrado el paso inductivo y, con él, que $P_p$ es de clase $C^m$ para todo $m\in\mathbb{N}$ con $m<p$.

Si $p$ es un entero par, $|u|^p=u^p$ y

$$(u_1,\dots,u_p)\longmapsto \int_X u_1\cdots u_p\,d\mu$$

es una forma $p$–lineal continua por Hölder. Así, $P_p$ es un polinomio homogéneo continuo de grado $p$. La Proposición 23.2.4, aplicada a esta forma, y el Corolario 23.2.8, aplicado al mapeo diagonal $u\longmapsto(u,\dots,u)$, muestran que $P_p$ es suave. □

**Corolario 24.8.15.** (Los modelos $\ell^p$ y $L^p$) Sea $1<p<\infty$.

(a) Si $p$ es un entero par, los espacios reales $\ell^p$ y $L^p(X)$, para todo espacio de medida $\sigma$–finito $(X,\mathcal{A},\mu)$, admiten particiones suaves de la unidad.

(b) Si $p$ no es un entero par, esos espacios admiten particiones de la unidad de clase $C^m$ para cada $m \in \mathbb{N}$ con $m < p$.

En consecuencia, el Teorema 24.8.9 se aplica, con el mismo grado de diferenciabilidad, a toda variedad de Banach paracompacta modelada sobre uno de estos espacios.

*Demostración.* Sea $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le \chi \le 1$, igual a uno en $(-\infty, 1]$ e igual a cero en $[2, \infty)$. Por el Lema 24.8.14, la función $u \mapsto \chi(P_p(u))$ es una función flan suave si $p$ es par y de clase $C^m$ si $m < p$ en los demás casos. El Teorema B.7.7 muestra que los espacios $L^p(X)$ considerados son reflexivos; el caso de $\ell^p$ se obtiene tomando la medida de conteo en $\mathbb{N}$. Como vimos antes del Ejemplo 24.8.13, el dual de un espacio reflexivo es de Asplund. La conclusión se sigue del Teorema 24.8.12. □

El rango de diferenciabilidad del corolario no es un defecto de la función flan elegida. El siguiente resultado muestra que, para $\ell^p$, la restricción es intrínseca.

**Teorema 24.8.16.** (Bonic–Frampton) Sea $1 < p < \infty$ y supongamos que $p$ no es un entero par. Si $m \in \mathbb{N}$ y $m \ge p$, no existe en $\ell^p$ ninguna función flan no nula de clase $C^m$. En particular, $\ell^p$ no admite particiones de la unidad de clase $C^m$ para esos valores de $m$, ni particiones suaves de la unidad.

El enunciado es el Teorema 1 y su Corolario 1 de Bonic y Frampton [24, Teorema 1 y Corolario 1, pp. 393–394]. Su argumento utiliza el siguiente principio de valores de frontera: si $p$ no es un entero par, $D \subseteq \ell^p$ es abierto, conexo y acotado, y una función real es continua en $\overline{D}$ y $m$ veces diferenciable en $D$, con $m \ge p$, entonces su imagen en $\overline{D}$ queda contenida en la clausura de su imagen en $\partial D$. Aplicado a una componente conexa acotada del conjunto donde una función flan no se anula, este principio obliga a que la función sea idénticamente nula. En efecto, las componentes conexas de un abierto de $\ell^p$ son abiertas, porque cada punto tiene una bola convexa contenida en ese abierto. Si $D$ es una componente de $\{u \mid b(u) \neq 0\}$, entonces $b = 0$ en $\partial D$: de lo contrario, una bola conexa donde $b$ no se anula intersectaría a $D$ y quedaría contenida en la misma componente, contradiciendo que su centro es un punto de frontera. Así, la clausura de $b(\partial D)$ es $\{0\}$ y el principio citado da $b(D) = \{0\}$, una contradicción. El resultado muestra que el orden de diferenciabilidad del corolario precedente es óptimo. La afirmación sobre particiones se deduce del Lema 24.8.6, pues una partición con esa regularidad produciría una función flan del mismo orden.

Existen ejemplos no reflexivos cuya construcción requiere técnicas más finas. Haydon demostró el resultado siguiente.

**Definición 24.8.17.** (Espacios $C(K)$ y $C_0(L)$) Si $K$ es compacto y Hausdorff, $C(K)$ es el espacio de Banach real de las funciones continuas $u\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$, con la norma $\|u\|_\infty := \sup_{x \in K} |u(x)|$. Si $L$ es localmente compacto y Hausdorff, se define

$$C_0(L) := \{u\colon L \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ es continua y, para todo } \varepsilon > 0,\ \{x \in L \mid |u(x)| \ge \varepsilon\} \text{ es compacto}\},$$

con la norma del supremo. Esta norma es finita: para $\varepsilon = 1$, se tiene $|u| < 1$ fuera de un compacto y, si éste es no vacío, $|u|$ alcanza un máximo en él. Además, $C_0(L)$ es completo. En efecto, una sucesión de Cauchy para $\|\cdot\|_\infty$ converge uniformemente a una función continua y acotada $u$. Dado $\varepsilon > 0$, si $\|u - u_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces

$$\{x \in L \mid |u(x)| \ge \varepsilon\} \subseteq \{x \in L \mid |u_n(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}\};$$

el conjunto de la izquierda es cerrado y el de la derecha es compacto, por lo que el primero es compacto. Sus elementos son precisamente las funciones continuas que se anulan en el infinito.

**Teorema 24.8.18.** (Haydon) Si $K$ es un espacio compacto, Hausdorff y numerable, entonces $C(K)$ admite una norma suave $\nu$ fuera del origen y constantes $c_K, C_K > 0$, que pueden depender de $K$, tales que $c_K\|u\|_\infty \le \nu(u) \le C_K\|u\|_\infty$ para todo $u \in C(K)$; además, admite particiones suaves de la unidad. Lo mismo ocurre para $C_0([0,\Omega))$, donde $\Omega$ es un ordinal y $[0,\Omega)$ lleva la topología de orden, con constantes que pueden depender de $\Omega$.

La norma suave se construye en el Teorema 1 y la Proposición 2 de Haydon, pp. 457–463; el criterio de particiones es su Teorema 2 y los dos casos del enunciado se obtienen en los Corolarios 4–5, pp. 464–468 [77]. La construcción de Haydon utiliza operadores de Talagrand, resoluciones proyectivas y una inducción transfinita sobre espacios de ordinales. Estos ejemplos muestran que la hipótesis sobre el espacio modelo del Teorema 24.8.9 también puede cumplirse sin reflexividad.

### 24.8.3 Consecuencias geométricas

Las particiones de la unidad permiten globalizar construcciones que toman valores en espacios vectoriales. Registramos una forma que se utilizará con frecuencia.

**Proposición 24.8.19.** (Pegado de funciones con codominio lineal) Sea $M$ una variedad de Banach $C^k$–paracompacta, sea $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ una cubierta abierta y sea $F$ un espacio de Banach. Supongamos que $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow F$ es de clase $C^k$ para cada $\alpha$. Si $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una partición de la unidad de clase $C^k$ subordinada a la cubierta, entonces

$$f : M \longrightarrow F, \qquad f(p) := \sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha(p) f_\alpha(p),$$

donde cada producto se extiende por cero fuera de $U_\alpha$, está bien definida y es de clase $C^k$.

*Demostración.* La inclusión $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subseteq U_\alpha$ garantiza que $\psi_\alpha f_\alpha$ se extiende por cero como una función de clase $C^k$ a todo $M$. Cada punto posee una vecindad que intersecta sólo un número finito de los soportes $\operatorname{supp}(\psi_\alpha)$. La suma que define a $f$ es, por lo tanto, localmente finita y localmente coincide con una suma finita de funciones de clase $C^k$. □

**Proposición 24.8.20.** (Aproximación suave fina) Sea $M$ una variedad de Banach $C^k$–paracompacta, sea $F$ un espacio de Banach y sea $f : M \longrightarrow F$ continua. Para toda función continua $\varepsilon : M \longrightarrow (0,\infty)$ existe $g \in C^k(M,F)$ tal que

$$\|g(p) - f(p)\|_F < \varepsilon(p) \qquad \text{para todo } p \in M.$$

*Demostración.* Para cada $x \in M$, la continuidad de $f$ y de $\varepsilon$ permite elegir una vecindad abierta $U_x$ de $x$ tal que, para todo $p \in U_x$,

$$\|f(p) - f(x)\|_F < \frac{\varepsilon(x)}{2}, \qquad \varepsilon(p) > \frac{\varepsilon(x)}{2}.$$

Sea $(\psi_x)_{x\in M}$ una partición de la unidad de clase $C^k$ subordinada a $(U_x)_{x\in M}$. Definimos

$$g(p) := \sum_{x\in M} \psi_x(p) f(x).$$

La suma es localmente finita y cada sumando es el producto de una función de clase $C^k$ por un vector fijo de $F$; por lo tanto, $g$ es de clase $C^k$. Si $\psi_x(p) \neq 0$, entonces $p \in \operatorname{supp}(\psi_x) \subseteq U_x$, y las desigualdades anteriores proporcionan

$$\|f(x) - f(p)\|_F < \frac{\varepsilon(x)}{2} < \varepsilon(p).$$

Usando que $\psi_x(p) \geq 0$ y $\sum_{x\in M} \psi_x(p) = 1$, concluimos que

$$\|g(p) - f(p)\|_F \leq \sum_{x\in M} \psi_x(p)\|f(x) - f(p)\|_F < \varepsilon(p).$$

□

En particular, las particiones de clase $C^k$ implican la aproximación fina de funciones continuas con codominio lineal. Junto con la Proposición 24.8.4 y el Teorema 24.8.12, esto precisa las implicaciones que se usan aquí: si una norma $C^k$ fuera del origen satisface $c\|x\| \leq \nu(x) \leq C\|x\|$ con $c, C > 0$, entonces produce una función flan; bajo la hipótesis de Asplund sobre el dual, ésta produce particiones $C^k$; y las particiones producen aproximaciones suaves. No se necesitan las implicaciones recíprocas, que pertenecen a problemas de renormamiento y aproximación considerablemente más delicados.

El mismo argumento conserva relaciones afines lineales siempre que los objetos locales tomen valores en un mismo espacio de Banach. En efecto, si $L\colon F \longrightarrow G$ es lineal continuo, $b \in G$ y las funciones locales $f_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow F$ satisfacen $L \circ f_\alpha = b$, entonces la función pegada $f := \sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha f_\alpha$ satisface

$$L \circ f = \sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha L(f_\alpha) = \left(\sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha\right) b = b.$$

Así, las particiones de la unidad permiten globalizar construcciones locales con codominio lineal sin destruir las restricciones afines que éstas satisfacen.

No existe una operación análoga para mapeos con valores en una variedad de Banach arbitraria, pues una combinación convexa de puntos de una variedad no está definida. La globalización de tales mapeos requiere, por consiguiente, construcciones geométricas adicionales. Esta distinción interviene en el estudio global de submersiones y de espacios de mapeos; una aplicación moderna de las particiones suaves en este contexto se encuentra en el lema de Stacey–Roberts para variedades de Banach, expuesto en [89].

# 25

# Haces vectoriales, conexiones y flujos en variedades de Banach

Los haces vectoriales sobre variedades de Banach se describen mediante mapeos de transición con valores en grupos de operadores invertibles. La topología empleada en estos grupos es la inducida por la norma de operadores; esta elección permite aplicar el cálculo de Fréchet y evita confundir la continuidad conjunta de la evaluación con la regularidad, en norma de operadores, de una familia de transformaciones lineales.

El marco de haces con fibras de Banach y la necesidad de distinguir los productos tensoriales topológicos aparecen ya en la formulación clásica del análisis global infinito–dimensional [85, §§4(C)–4(G)]. Aquí se trabajará en la categoría de Banach y con diferenciabilidad de Fréchet.

**Geometría diferencial con fibras infinitas**

Los haces de Banach permiten que cada fibra sea un espacio completo de dimensión infinita. Esta generalización aparece de manera natural al estudiar familias de secciones, operadores o datos iniciales que varían sobre una base. La norma de operadores determina la regularidad de las funciones de transición, de las conexiones y del transporte paralelo. Estudiaremos estas construcciones junto con las condiciones topológicas que requieren, algunas de las cuales se cumplen automáticamente en dimensión finita.

## 25.1 Haces vectoriales de Banach

Sean $X$ y $F$ espacios de Banach reales y sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^r$, con $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, modelada sobre $X$. El espacio $F$ será el modelo de las fibras. Usamos la convención de la Definición 24.1.1: las cartas tienen imágenes abiertas en los espacios modelo. Cuando se considere un haz continuo, se entenderán las mismas condiciones que para un haz $C^r$, sustituyendo la regularidad $C^r$ por continuidad en norma de operadores. Esta variante se utilizará para el haz tangente de una variedad $C^1$.

**Proposición 25.1.1.** (Grupo lineal general de un espacio de Banach) El conjunto

$$\mathrm{GL}(F) := \{A \in \mathcal{L}(F) \mid A \text{ es invertible}\}$$

es un abierto del álgebra de Banach $\mathcal{L}(F)$. Con esta estructura, $\mathrm{GL}(F)$ es un grupo de Lie de Banach: la composición y la inversión

$$(A,B)\longmapsto AB,\qquad A\longmapsto A^{-1}$$

son suaves. Además,

$$D(A\mapsto A^{-1})(A)H=-A^{-1}HA^{-1}.$$

*Demostración.* La composición es bilineal continua y, por lo tanto, suave. La apertura del conjunto de operadores invertibles, la suavidad de la inversión y la fórmula para su diferencial son precisamente las afirmaciones de la Proposición 23.3.2, aplicada con $X=Y=F$. □

Antes de dualizar fibras conviene distinguir dos nociones que coinciden en dimensión finita, pero no en un espacio de Banach general. Para un espacio vectorial $V$, denotaremos por $V^*$ su dual algebraico, formado por todos los funcionales lineales. Para un espacio de Banach $F$, denotaremos por

$$F':=\mathcal{L}(F;\mathbb{R})$$

su dual topológico, formado por los funcionales lineales continuos. El segundo es un subespacio del dual algebraico $F^*$ y posee la norma

$$\|\lambda\|_{F'}:=\sup_{v\in F,\ \|v\|_F\le 1}|\lambda(v)|.$$

**Proposición 25.1.2.** (Dual topológico y operadores transpuestos) El espacio $F'$ es un espacio de Banach. Si $A\in\mathcal{L}(F,G)$, su transpuesto

$$A'\colon G'\longrightarrow F',\qquad A'\mu:=\mu\circ A,$$

es lineal y continuo, y satisface

$$\|A'\|_{\mathcal{L}(G',F')}=\|A\|_{\mathcal{L}(F,G)}.$$

Si $A\colon F\longrightarrow G$ es un isomorfismo lineal topológico, entonces $A'\colon G'\longrightarrow F'$ también lo es y $(A')^{-1}=(A^{-1})'$. Además, el mapeo

$$\mathcal{L}(F,G)\longrightarrow\mathcal{L}(G',F'),\qquad A\longmapsto A',$$

es una incrustación lineal isométrica.
Si $F$ es infinito–dimensional, la inclusión $F'\subseteq F^*$ es estricta.

*Demostración.* Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $F'$. Para cada $v\in F$, la sucesión $(\lambda_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, pues

$$|\lambda_n(v)-\lambda_m(v)|\le\|\lambda_n-\lambda_m\|_{F'}\|v\|_F.$$

Definamos $\lambda(v):=\lim_{n\to\infty}\lambda_n(v)$. El paso al límite muestra que $\lambda$ es lineal. Como toda sucesión de Cauchy es acotada, existe $C>0$ tal que $\|\lambda_n\|_{F'}\le C$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y entonces $|\lambda(v)|\le C\|v\|_F$. Por lo tanto, $\lambda\in F'$. Dado $\varepsilon>0$, para $n,m$ suficientemente grandes se tiene $\|\lambda_n-\lambda_m\|_{F'}<\varepsilon$; haciendo tender $m$ a infinito en la desigualdad puntual correspondiente se obtiene $\|\lambda_n-\lambda\|_{F'}\le\varepsilon$. Así, $F'$ es completo.

La desigualdad $\|A'\| \le \|A\|$ se sigue de

$$|(A'\mu)(v)| \le \|\mu\|_{G'}\|A\|\|v\|_F.$$

Recíprocamente, el teorema de Hahn–Banach aplicado a $Av \in G$ da, para cada $v \in F$ con $Av \neq 0$, un funcional $\mu_v \in G'$ tal que $\|\mu_v\|_{G'} = 1$ y $\mu_v(Av) = \|Av\|_G$. Por ello,

$$\|Av\|_G \le \|A'\|\|v\|_F,$$

desigualdad que también es cierta cuando $Av = 0$. Al tomar el supremo sobre la bola unidad resulta $\|A\| \le \|A'\|$. Las afirmaciones sobre la inversa se deducen de $(BA)' = A'B'$.
Supongamos finalmente que $F$ es infinito–dimensional. Existe una sucesión linealmente independiente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores unitarios. Sobre su envolvente lineal, formada por combinaciones lineales finitas de estos vectores, definimos $\lambda_0(v_n) := n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y lo extendemos algebraicamente a $F$ completando $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a una base de Hamel. La extensión $\lambda \in F^*$ no es continua, porque no está acotada sobre la esfera unidad. En consecuencia, $\lambda \notin F'$. □

El dual algebraico no lleva en general una topología de Banach canónica compatible con la evaluación. Por esta razón, todos los haces duales que aparecen a continuación se construyen con el dual topológico.

**Definición 25.1.3.** (Haz vectorial de Banach) Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^r$. Un **haz vectorial de Banach de clase $C^r$ y fibra modelo** $F$ sobre $M$ consta de un espacio topológico de Hausdorff $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, un mapeo continuo y suprayectivo

$$\pi\colon \boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow M$$

y una estructura de espacio vectorial de Banach sobre cada fibra $\boldsymbol{\mathcal{E}}_p := \pi^{-1}(p)$, junto con una cubierta abierta $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de $M$ y homeomorfismos

$$\Phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$$

que satisfacen las condiciones siguientes:

(a) $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_\alpha = \pi$;

(b) para cada $p \in U_\alpha$, la restricción

$$\Phi_{\alpha,p} := \mathrm{pr}_2 \circ \big(\Phi_\alpha \restriction_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_p}\big)\colon \boldsymbol{\mathcal{E}}_p \longrightarrow F$$

es un isomorfismo lineal y topológico;

(c) en toda intersección no vacía existen mapeos de clase $C^r$, respecto de la topología de la norma de operadores,

$$g_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(F)$$

tales que

$$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(p, v) = \big(p, g_{\beta\alpha}(p)v\big).$$

La familia $(U_\alpha, \Phi_\alpha)$ se denomina una **familia de trivializaciones locales**. Dos familias determinan el mismo haz $C^r$ si su unión satisface la condición (c).

La regularidad en la Definición 25.1.3 se exige en norma de operadores. Como la evaluación

$$\mathcal{L}(F)\times F \longrightarrow F, \qquad (A,v)\longmapsto Av,$$

es bilineal continua, cada cambio de trivialización es de clase $C^r$ en las coordenadas de la base y de la fibra. En combinación con un atlas de $M$, las trivializaciones proporcionan a $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ un atlas de variedad de Banach modelada sobre $X\times F$. La proyección $\pi$ es entonces de clase $C^r$.

La Definición 25.1.3 reproduce, con fibras de Banach y regularidad en norma de operadores, la construcción finito–dimensional de la Definición 1.7.2. En rango finito, la continuidad de una familia matricial y la continuidad en norma de operadores son la misma condición; para una fibra de Banach, esta última es la que permite aplicar directamente el cálculo de Fréchet.

**Proposición 25.1.4.** (Mapeos de transición y reconstrucción) Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^r$. Los mapeos de transición de un haz vectorial de Banach satisfacen

$$g_{\alpha\alpha}(p)=\mathrm{id}_F, \qquad g_{\alpha\beta}(p)=g_{\beta\alpha}(p)^{-1}, \qquad g_{\gamma\beta}(p)g_{\beta\alpha}(p)=g_{\gamma\alpha}(p)$$

para $\alpha,\beta,\gamma\in A$ y $p$ en la intersección de los dominios correspondientes.
Recíprocamente, una cubierta abierta $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de $M$ y una familia de mapeos $C^r$

$$g_{\beta\alpha}\colon U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow \mathrm{GL}(F)$$

que satisfaga estas identidades determina, salvo isomorfismo de haces de clase $C^r$, un haz vectorial de Banach con fibra modelo $F$.

*Demostración.* Las identidades se obtienen componiendo los cambios de trivialización. Para la afirmación recíproca, consideremos la unión disjunta

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_0:=\coprod_{\alpha\in A}(U_\alpha\times F)$$

y la relación

$$(\alpha,p,v)\sim(\beta,p,w)\quad\Longleftrightarrow\quad w=g_{\beta\alpha}(p)v.$$

Las identidades de cociclo muestran que ésta es una relación de equivalencia. Sea $q\colon\boldsymbol{\mathcal{E}}_0\longrightarrow\boldsymbol{\mathcal{E}}:=\boldsymbol{\mathcal{E}}_0/\!\sim$ la proyección y dotemos a $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ de la topología cociente. Para cada $\alpha$ definimos

$$j_\alpha\colon U_\alpha\times F\longrightarrow\boldsymbol{\mathcal{E}}, \qquad j_\alpha(p,v):=q(\alpha,p,v).$$

El mapeo $j_\alpha$ es inyectivo. Además, si $O\subseteq U_\alpha\times F$ es abierto, entonces

$$q^{-1}\big(j_\alpha(O)\big)=\coprod_{\beta\in A}\Big\{(\beta,p,g_{\beta\alpha}(p)v)\;\Big|\;(p,v)\in O,\ p\in U_\alpha\cap U_\beta\Big\}.$$

Para cada $\beta$, el conjunto de la derecha es la imagen del abierto $O\cap((U_\alpha\cap U_\beta)\times F)$ por el homeomorfismo

$$(p,v)\longmapsto(p,g_{\beta\alpha}(p)v).$$

En consecuencia, $q^{-1}(j_\alpha(O))$ es abierto y la definición de la topología cociente implica que $j_\alpha(O)$ es abierto. Por lo tanto, $j_\alpha$ es un homeomorfismo sobre el abierto $j_\alpha(U_\alpha \times F)$.
La fórmula

$$\pi\big(j_\alpha(p,v)\big) := p$$

está bien definida, es suprayectiva y es continua en cada uno de los abiertos $j_\alpha(U_\alpha \times F)$. De hecho, $j_\alpha(U_\alpha \times F) = \pi^{-1}(U_\alpha)$: si $q(\beta,p,w)$ se proyecta sobre $p \in U_\alpha$, entonces también está representado por $(\alpha,p,g_{\alpha\beta}(p)w)$. Probemos que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es de Hausdorff. Si $e_1,e_2 \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$ se proyectan sobre puntos distintos, se eligen abiertos disjuntos de $M$ que contengan a sus proyecciones; sus preimágenes por $\pi$ separan a $e_1$ y $e_2$. Si $\pi(e_1) = \pi(e_2) = p$, tomamos $\alpha$ con $p \in U_\alpha$ y escribimos $e_i = j_\alpha(p,v_i)$. La desigualdad $e_1 \neq e_2$ implica $v_1 \neq v_2$. Dos bolas disjuntas de $F$ alrededor de $v_1$ y $v_2$, multiplicadas por una vecindad abierta de $p$ contenida en $U_\alpha$ y transportadas mediante $j_\alpha$, separan a los dos puntos.
En cada fibra las operaciones se definen transportando las de $F$ mediante $j_\alpha$; el cociclo garantiza que no dependen de $\alpha$. Las trivializaciones

$$\Phi_\alpha : j_\alpha(U_\alpha \times F) \longrightarrow U_\alpha \times F, \qquad \Phi_\alpha := j_\alpha^{-1},$$

tienen por cambios de coordenadas precisamente los mapeos $(p,v) \mapsto (p, g_{\beta\alpha}(p)v)$. Al combinarlas con cartas de $M$ se obtiene el atlas de variedad de Banach sobre el espacio total.
Finalmente, si $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \longrightarrow M$ es otro haz provisto de trivializaciones $\widetilde{\Phi}_\alpha$ con los mismos mapeos de transición, la fórmula

$$j_\alpha(p,v) \longmapsto \widetilde{\Phi}_\alpha^{-1}(p,v)$$

no depende de $\alpha$. Define un isomorfismo de haces de clase $C^r$, pues en cada trivialización es la identidad. Esto prueba la unicidad salvo isomorfismo. □

Dos cociclos $(g_{\beta\alpha})$ y $(\widetilde{g}_{\beta\alpha})$ sobre la misma cubierta se denominan **equivalentes** si existen mapeos $h_\alpha \in C^r(U_\alpha, \mathrm{GL}(F))$ tales que

$$\widetilde{g}_{\beta\alpha}(p) = h_\beta(p)\, g_{\beta\alpha}(p)\, h_\alpha(p)^{-1}. \tag{25.1}$$

En ese caso, la fórmula

$$[\alpha,p,v]_g \longmapsto [\alpha,p,h_\alpha(p)v]_{\widetilde{g}}$$

está bien definida por (25.1) y proporciona un isomorfismo de los haces reconstruidos. Recíprocamente, las representaciones locales de un isomorfismo de haces sobre $M$ proporcionan una familia $(h_\alpha)$ que satisface esa identidad, después de pasar a una cubierta común. Así, la equivalencia de cociclos describe exactamente el cambio de trivializaciones del mismo haz.

**Definición 25.1.5.** (Homomorfismo de haces) Sean $M$ y $N$ variedades de Banach. Sean $\pi_{\boldsymbol{\mathcal{E}}} : \boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow M$ y $\pi_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} : \boldsymbol{\mathcal{H}} \longrightarrow N$ haces vectoriales de Banach de clase $C^r$, con fibras modelo $F$ y $G$, respectivamente. Un **homomorfismo de haces de clase** $C^r$ **sobre** $f \in C^r(M,N)$ es un mapeo $\mathscr{A} : \boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{H}}$ tal que

$$\pi_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \circ \mathscr{A} = f \circ \pi_{\boldsymbol{\mathcal{E}}},$$

cuyas restricciones

$$\mathscr{A}_p : \boldsymbol{\mathcal{E}}_p \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{H}}_{f(p)}$$

son lineales y continuas y cuyas representaciones locales son familias $C^r$, en norma de operadores,

$$A_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \longrightarrow \mathcal{L}(F,G).$$

Un homomorfismo sobre $\mathrm{id}_M$ se denomina un homomorfismo sobre $M$. Es un **isomorfismo de haces** si cada operador fibrado es invertible y el homomorfismo inverso es de clase $C^r$.

**Proposición 25.1.6.** (Datos locales de un homomorfismo) Sean $M$ y $N$ variedades de Banach y sean $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to M$ y $\boldsymbol{\mathcal{H}} \to N$ haces vectoriales de Banach de clase $C^r$. Las representaciones locales de un homomorfismo de haces satisfacen

$$A_{\delta\gamma}(p) = h_{\delta\beta}(f(p))A_{\beta\alpha}(p)g_{\alpha\gamma}(p), \tag{25.2}$$

siempre que todas las trivializaciones involucradas estén definidas. Aquí $g$ y $h$ son los mapeos de transición de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.
Recíprocamente, una familia de mapeos $C^r$ con valores en $\mathcal{L}(F,G)$ y que satisfaga (25.2) determina un único homomorfismo de haces de clase $C^r$ sobre $f$. La composición de homomorfismos corresponde a la composición puntual de sus operadores locales.

*Demostración.* La primera identidad se obtiene escribiendo una representación local entre dos pares distintos de trivializaciones. Para la recíproca, sean $e \in \boldsymbol{\mathcal{E}}_p$ y una trivialización $\Phi_\alpha$ alrededor de $p$, y elijamos una trivialización $\Psi_\beta$ de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ alrededor de $f(p)$. Si $\Phi_\alpha(e) = (p, v)$, ponemos

$$\mathscr{A}(e) := \Psi_\beta^{-1}\big(f(p), A_{\beta\alpha}(p)v\big).$$

La identidad (25.2) muestra que el resultado no depende de $\alpha$ ni de $\beta$. En cada par de trivializaciones, $\mathscr{A}$ está representado por $(p,v) \mapsto (f(p), A_{\beta\alpha}(p)v)$, que es de clase $C^r$ porque la evaluación $\mathcal{L}(F,G)\times F \longrightarrow G$ es bilineal continua. La unicidad y la afirmación sobre composiciones son inmediatas en estas representaciones. □

**Definición 25.1.7.** (Subhaz complementado) Sea $M$ una variedad de Banach. Sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow M$ un haz vectorial de Banach con fibra modelo $F$. Un **subhaz vectorial complementado** es un subconjunto $\boldsymbol{\mathcal{S}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{E}}$ tal que cada $\boldsymbol{\mathcal{S}}_p := \boldsymbol{\mathcal{S}} \cap \boldsymbol{\mathcal{E}}_p$ es un subespacio vectorial y, para cada $p \in M$, existen una trivialización

$$\Phi\colon \boldsymbol{\mathcal{E}}\restriction_U \longrightarrow U \times F$$

y un subespacio cerrado complementado $F_0 \subseteq F$ para los cuales

$$\Phi(\boldsymbol{\mathcal{S}}\restriction_U) = U \times F_0.$$

**Proposición 25.1.8.** Sea $M$ una variedad de Banach y sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to M$ un haz vectorial de Banach. Todo subhaz complementado $\boldsymbol{\mathcal{S}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{E}}$ es un haz vectorial de Banach y, sobre cada componente en la que su fibra modelo es fija, su inclusión en $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es una subvariedad encajada split. En las trivializaciones de la Definición 25.1.7, el haz normal local está modelado sobre cualquier complemento cerrado de $F_0$.

*Demostración.* Si dos trivializaciones adaptadas se intersectan, su mapeo de transición envía $F_0$ sobre el modelo correspondiente de la subfibra. La restricción es un isomorfismo lineal continuo. Para comprobar la regularidad en norma, sean $F_0$ y $\widetilde{F}_0$ los modelos de las subfibras y sea $\widetilde{P}\colon F \to \widetilde{F}_0$ una proyección continua. El operador restringido se escribe $\widetilde{P} \circ g_{\beta\alpha}(p)\restriction_{F_0}$. La restricción y la composición con $\widetilde{P}$ son operaciones lineales continuas entre los espacios de operadores; por ello esta familia es $C^r$. Por lo tanto, las restricciones de las trivializaciones definen la estructura de haz de $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Si $F = F_0 \oplus F_1$, localmente la inclusión es

$$U \times F_0 \longrightarrow U \times (F_0 \oplus F_1), \qquad (p, v) \longmapsto (p, v, 0).$$

Ésta es la forma local de una subvariedad encajada split. □

**Proposición 25.1.9.** (Cociente por un subhaz complementado) Sea $M$ una variedad de Banach y sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to M$ un haz vectorial de Banach. Si $\boldsymbol{\mathcal{S}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{E}}$ es un subhaz complementado, la unión

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}/\boldsymbol{\mathcal{S}} := \coprod_{p \in M} \boldsymbol{\mathcal{E}}_p/\boldsymbol{\mathcal{S}}_p$$

restringida a cada componente conexa $C \subseteq M$ posee una estructura natural de haz vectorial de Banach sobre $C$, con un modelo cociente fijo $Q_C$. Si los espacios $Q_C$ son todos isomorfos a un mismo espacio de Banach $Q$, la unión completa es un haz sobre $M$ con fibra modelo $Q$. En cada componente, la sucesión

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}}/\boldsymbol{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

es exacta fibra a fibra y se escinde localmente mediante homomorfismos de clase $C^r$. Si $F = F_0 \oplus F_1$ en una trivialización adaptada, la proyección $F_1 \longrightarrow F/F_0$ es un isomorfismo lineal topológico. Esta identificación depende del complemento, mientras que el haz cociente es canónico.

*Demostración.* Un mapeo de transición entre trivializaciones adaptadas envía el modelo de la subfibra sobre el modelo correspondiente y, por lo tanto, induce un isomorfismo lineal continuo entre los espacios cociente. Estos operadores inducidos dependen con regularidad $C^r$ de la base. En efecto, si $q_\alpha\colon F \to F/F_{0,\alpha}$ es la proyección cociente y $j_\alpha\colon F/F_{0,\alpha} \to F$ una sección lineal continua obtenida de un complemento, el operador inducido es $q_\beta g_{\beta\alpha}(p) j_\alpha$. Esta expresión es $C^r$ en norma de operadores. Su valor no depende de la sección elegida, porque dos representantes de una clase difieren en $F_{0,\alpha}$ y el mapeo de transición envía ese subespacio en $F_{0,\beta}$. Las identidades de cociclo se deducen aplicando los operadores a clases de equivalencia. En cada componente conexa $C$, el tipo de Banach de esos espacios cociente es localmente constante. En efecto, los dominios de trivialización que pueden unirse por una cadena de intersecciones no vacías tienen modelos cociente isomorfos, y las uniones correspondientes a las distintas clases de cadenas formarían una partición de $C$ por abiertos; la conexidad obliga a que haya una sola clase. Además, $C$ es abierta porque una variedad de Banach es localmente conexa. Fijando un modelo $Q_C$ e identificaciones lineales topológicas de los modelos locales con $Q_C$, los operadores inducidos se convierten en un cociclo con valores en $\mathrm{GL}(Q_C)$. La Proposición 25.1.4 construye entonces el haz cociente. Si $F = F_0 \oplus F_1$, la proyección canónica restringida a $F_1$ es biyectiva y continua; su inversa es continua por la continuidad de las proyecciones asociadas a la suma topológica. Esto proporciona la escisión local. □

**Definición 25.1.10.** (Sección) Sea $M$ una variedad de Banach y sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to M$ un haz vectorial de Banach. Una **sección** de $\boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow M$ sobre un abierto $U \subseteq M$ es un mapeo $\mathbf{s}\colon U \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}}$ tal que $\pi \circ \mathbf{s} = \mathrm{id}_U$. Es de clase $C^r$ si, en toda trivialización local, existe un mapeo $s_\alpha \in C^r(U \cap U_\alpha, F)$ para el cual

$$\Phi_\alpha(\mathbf{s}(p)) = (p, s_\alpha(p)).$$

El espacio vectorial de las secciones $C^r$ globales se denota por $\Gamma^r(\boldsymbol{\mathcal{E}})$.

En una intersección se cumple

$$s_\beta(p) = g_{\beta\alpha}(p) s_\alpha(p),$$

de modo que la regularidad de una sección puede comprobarse en cualquier familia de trivializaciones.

**Proposición 25.1.11.** (Datos locales y pegado de secciones) Sea $M$ una variedad de Banach y sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to M$ un haz vectorial de Banach de clase $C^r$. Una familia de mapeos $s_\alpha \in C^r(U_\alpha, F)$ determina una única sección $\mathbf{s} \in \Gamma^r(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ si y sólo si

$$s_\beta(p) = g_{\beta\alpha}(p) s_\alpha(p)$$

en cada solapamiento. Más generalmente, secciones de clase $C^r$ definidas sobre una cubierta abierta y que coinciden dos a dos en los solapamientos se pegan en una única sección de clase $C^r$. Además, $\Gamma^r(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ es un módulo sobre $C^r(M)$ mediante $(f\mathbf{s})(p) := f(p)\mathbf{s}(p)$, y todo $e \in \boldsymbol{\mathcal{E}}_p$ es el valor en $p$ de una sección local de clase $C^r$.

*Demostración.* La condición de compatibilidad permite definir

$$\mathbf{s}(p) := \Phi_\alpha^{-1}(p, s_\alpha(p))$$

sin depender del índice $\alpha$. En cada trivialización esta sección está representada por $s_\alpha$, de modo que es de clase $C^r$; la misma fórmula prueba la unicidad. El argumento para una cubierta arbitraria es idéntico. Las operaciones del módulo se verifican punto a punto y conservan la regularidad en las representaciones locales. Finalmente, si $\Phi\colon \boldsymbol{\mathcal{E}} \restriction_U \longrightarrow U \times F$ es una trivialización alrededor de $p$ y $\Phi(e) = (p, v)$, la sección $q \mapsto \Phi^{-1}(q, v)$ sobre $U$ toma el valor $e$ en $p$. □

**Proposición 25.1.12.** (Haz inducido) Sean $M$ y $N$ variedades de Banach. Sea $f\colon N \longrightarrow M$ un mapeo de clase $C^r$ y sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow M$ un haz vectorial de Banach de clase $C^r$. El conjunto

$$f^*\boldsymbol{\mathcal{E}} := \{(q, e) \in N \times \boldsymbol{\mathcal{E}} \mid f(q) = \pi(e)\}, \qquad \pi_f(q, e) := q,$$

posee una estructura natural de haz vectorial de Banach sobre $N$, denominada el **haz inducido** o **pullback**. Sus mapeos de transición son

$$g_{\beta\alpha} \circ f$$

sobre $f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Esta estructura no depende de la familia de trivializaciones elegida.

*Demostración.* Sobre $f^{-1}(U_\alpha)$ definimos

$$\widetilde{\Phi}_\alpha(q,e) := \big(q, \mathrm{pr}_2\,\Phi_\alpha(e)\big).$$

Estas biyecciones y sus inversas proporcionan las trivializaciones locales requeridas. En una intersección, el cambio de coordenadas fibrado es $g_{\beta\alpha}(f(q))$, que es de clase $C^r$. La compatibilidad con otra familia de trivializaciones se sigue de (25.1): si el cambio está dado por $h_\alpha$, los cociclos inducidos están relacionados por $h_\alpha \circ f$. □

**Proposición 25.1.13.** (Suma directa) Sea $M$ una variedad de Banach. Sean $\mathcal{E} \longrightarrow M$ y $\mathcal{H} \longrightarrow M$ haces vectoriales de Banach de clase $C^r$, con fibras modelo $F$ y $G$. La unión fibrada

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{H} := \coprod_{p\in M} (\mathcal{E}_p \oplus \mathcal{H}_p)$$

es un haz vectorial de Banach con fibra modelo $F \oplus G$. En trivializaciones simultáneas, sus mapeos de transición son

$$g^{\mathcal{E}}_{\beta\alpha}(p) \oplus g^{\mathcal{H}}_{\delta\gamma}(p).$$

Las inclusiones y proyecciones canónicas son homomorfismos de haces.

*Demostración.* En $F \oplus G$ puede usarse, por ejemplo, la norma $\|(v,w)\| = \|v\|_F + \|w\|_G$. Los operadores diagonales indicados son invertibles y dependen de manera $C^r$ de la base. Las identidades de cociclo se verifican componente a componente. □

Si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ son haces sobre la misma base, escribiremos

$$\mathcal{E} \times_M \mathcal{H} := \{(e,h) \in \mathcal{E} \times \mathcal{H} \mid \pi_{\mathcal{E}}(e) = \pi_{\mathcal{H}}(h)\}$$

para su producto fibrado. Esta notación describe el espacio total subyacente a la suma directa cuando las operaciones lineales se toman fibra a fibra.

**Proposición 25.1.14.** (Haz dual) Sean $M$ y $N$ variedades de Banach. Sea $\mathcal{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial de Banach de clase $C^r$, con fibra modelo $F$ y mapeos de transición $g_{\beta\alpha}$. La unión

$$\mathcal{E}' := \coprod_{p\in M} \mathcal{E}'_p$$

posee una estructura natural de haz vectorial de Banach de clase $C^r$, con fibra modelo $F'$. En la trivialización dual de $\Phi_\alpha$,

$$\Phi'_\alpha(\lambda_p) := \big(p, \lambda_p \circ \Phi^{-1}_{\alpha,p}\big),$$

sus mapeos de transición son

$$g^{\vee}_{\beta\alpha}(p) := \big(g_{\beta\alpha}(p)^{-1}\big)'. \tag{25.3}$$

La evaluación fibrada

$$\mathrm{ev}\colon \mathcal{E}' \times_M \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\lambda_p, e_p) \longmapsto \lambda_p(e_p),$$

es de clase $C^r$.
Si $\mathscr{A}\colon \boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{H}}$ es un homomorfismo sobre $f\colon M \longrightarrow N$, existe un homomorfismo transpuesto natural

$$\mathscr{A}'\colon f^*\boldsymbol{\mathcal{H}}' \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}}', \qquad \mathscr{A}'_p(\mu_{f(p)}) := \mu_{f(p)} \circ \mathscr{A}_p.$$

En particular, existe un isomorfismo canónico

$$\mathfrak{d}_f\colon (f^*\boldsymbol{\mathcal{H}})' \longrightarrow f^*(\boldsymbol{\mathcal{H}}').$$

En la fibra sobre $p$, sea $\iota_p\colon \boldsymbol{\mathcal{H}}_{f(p)} \longrightarrow (f^*\boldsymbol{\mathcal{H}})_p$ el isomorfismo $\iota_p(h) := (p,h)$. Entonces

$$(\mathfrak{d}_f)_p(\lambda) := \lambda \circ \iota_p.$$

Su inverso es $\mu \mapsto \mu \circ \iota_p^{-1}$. Ambos operadores son lineales y continuos y, en las trivializaciones inducidas, están representados por la identidad de $G'$. Por lo tanto, $\mathfrak{d}_f$ y su inverso son homomorfismos de haces de clase $C^r$.

*Demostración.* La Proposición 25.1.2 muestra que los operadores de (25.3) pertenecen a $\mathrm{GL}(F')$ y dependen con regularidad $C^r$ de $p$. Además,

$$g^\vee_{\gamma\beta} g^\vee_{\beta\alpha} = \big(g^{-1}_{\gamma\beta}\big)'\big(g^{-1}_{\beta\alpha}\big)',$$

y, como $(BA)' = A'B'$, el último miembro es

$$\big(g^{-1}_{\beta\alpha} g^{-1}_{\gamma\beta}\big)' = \big((g_{\gamma\beta} g_{\beta\alpha})^{-1}\big)' = g^\vee_{\gamma\alpha},$$

de modo que satisfacen la identidad de cociclo en el orden correcto. La Proposición 25.1.4 reconstruye el haz. En las trivializaciones de $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ y $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, la evaluación es el mapeo bilineal continuo $F' \times F \longrightarrow \mathbb{R}$; la ley de transición dual hace que estas expresiones locales coincidan en los solapamientos.
La representación local de $\mathscr{A}'$ es $A_{\beta\alpha}(p)'$. La transposición es lineal continua en norma de operadores y, por lo tanto, la familia es de clase $C^r$; su compatibilidad se deduce transponiendo (25.2). Finalmente, los mapeos de transición de $(f^*\boldsymbol{\mathcal{H}})'$ y de $f^*(\boldsymbol{\mathcal{H}}')$ son, en ambos casos,

$$q \longmapsto \big(h_{\delta\beta}(f(q))^{-1}\big)',$$

por lo que la identidad fibra a fibra define el isomorfismo canónico. □

**Proposición 25.1.15.** (Haces de operadores) Sea $M$ una variedad de Banach. Sean $\boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow M$ y $\boldsymbol{\mathcal{H}} \longrightarrow M$ haces vectoriales de Banach de clase $C^r$, con fibras modelo $F$ y $G$. La unión

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}) := \coprod_{p \in M} \mathcal{L}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_p, \boldsymbol{\mathcal{H}}_p)$$

es un haz vectorial de Banach con fibra modelo $\mathcal{L}(F,G)$. En dos pares de trivializaciones, el cambio de coordenadas es

$$A \longmapsto h_{\delta\beta}(p) A g_{\alpha\gamma}(p). \tag{25.4}$$

Sus secciones de clase $C^r$ se identifican con los homomorfismos $\boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{H}}$ de clase $C^r$ sobre $\mathrm{id}_M$.

En particular,

$$\operatorname{End}(\boldsymbol{\mathcal{E}}) := \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$$

tiene fibra $\mathcal{L}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_p)$ y mapeos de transición $A \mapsto g_{\beta\alpha} A g_{\beta\alpha}^{-1}$. La evaluación

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}) \times_M \boldsymbol{\mathcal{E}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{H}}, \qquad (A_p, e_p) \longmapsto A_p e_p,$$

es un mapeo fibrado de clase $C^r$ y es bilineal en las variables fibradas.

*Demostración.* El espacio $\mathcal{L}(F, G)$ es de Banach. La composición de operadores es bilineal continua, de modo que los mapeos (25.4) son isomorfismos lineales continuos que dependen con regularidad $C^r$ del punto. Las identidades de cociclo se siguen de las de $g$ y $h$, y la reconstrucción se obtiene de la Proposición 25.1.4. La identificación de las secciones con los homomorfismos es exactamente la compatibilidad (25.2). La evaluación se representa localmente por el mapeo bilineal continuo $\mathcal{L}(F, G) \times F \longrightarrow G$. □

## 25.2 Haces tangente y cotangente

Sea $M$ una variedad de Banach de clase $C^k$, modelada sobre $X$, y supongamos primero que $k \geq 1$. De acuerdo con la Definición 24.1.15, ponemos

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M, \qquad \pi_{TM}(\xi_p) := p.$$

Cada carta $(U, \varphi)$ induce una trivialización

$$\tau_\varphi \colon TM \restriction_U \longrightarrow U \times X, \qquad \tau_\varphi(\xi_p) := \big(p, \Theta_{\varphi,p}(\xi_p)\big).$$

Si $(V, \psi)$ es otra carta y $p \in U \cap V$, el cambio en la fibra es

$$A_{\psi\varphi}(p) := D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \in \mathrm{GL}(X). \tag{25.5}$$

La regla de la cadena da las identidades de cociclo.

**Proposición 25.2.1.** (Regularidad del haz tangente) Si $M$ es una variedad de Banach de clase $C^k$, con $2 \leq k < \infty$, las trivializaciones anteriores hacen de $TM$ un haz vectorial de Banach de clase $C^{k-1}$. Si $M$ es suave, $TM$ es un haz vectorial de Banach suave. Para una variedad meramente $C^1$, la misma construcción produce un haz vectorial continuo.

*Demostración.* Si el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ es de clase $C^k$, el mapeo que asigna a cada punto su derivada, con valores en $\mathcal{L}(X)$ provisto de la norma de operadores, es de clase $C^{k-1}$. Consideramos la base con su estructura $C^{k-1}$ subyacente, descrita en la Observación 24.1.4. La expresión (25.5), la apertura de $\mathrm{GL}(X)$ y la reconstrucción por cociclos prueban la afirmación. Cuando $k = 1$, este mapeo es continuo; cuando $k = \infty$, es suave. □

La pérdida de una derivada en la proposición anterior es parte de la estructura: para $k < \infty$ no debe atribuirse en general a $TM$ regularidad $C^k$ a partir de un atlas de clase $C^k$.

**Definición 25.2.2.** (Haz cotangente) Sea $M$ una variedad de Banach de clase al menos $C^1$. El **espacio cotangente** en $p$ es el dual topológico del espacio tangente cinemático,

$$T_p'M := (T_pM)'.$$

El **haz cotangente** es la unión

$$T'M := \coprod_{p\in M} T_p'M, \qquad \pi_{T'M}(\alpha_p) := p.$$

En la carta $(U,\varphi)$ se trivializa mediante

$$\tau_\varphi^*(\alpha_p) = \big(p, \alpha_p \circ \Theta_{\varphi,p}^{-1}\big) \in U \times X'.$$

Así, $T'M$ es el haz dual topológico de $TM$ en el sentido de la Proposición 25.1.14. No se utiliza el dual algebraico de $T_pM$ ni el dual del espacio tangente operacional. Esta elección garantiza que cada fibra sea un espacio de Banach y que la evaluación sea continua. La prima distingue este haz del haz cotangente finito–dimensional $T^*M$ y es coherente con la notación $X'$ para el dual topológico de un espacio de Banach.

En una intersección, si $A_{\psi\varphi}$ es el operador de (25.5), el mapeo de transición cotangente es

$$\alpha \longmapsto \big(A_{\psi\varphi}(p)^{-1}\big)'\alpha. \tag{25.6}$$

El mapeo $A \mapsto A'$ es lineal continuo en norma de operadores y la inversión en $\mathrm{GL}(X)$ es suave. Por lo tanto, $T'M$ es un haz vectorial modelado sobre $X'$, de clase $C^{k-1}$ cuando $2 \le k < \infty$, continuo cuando $k = 1$ y suave cuando $M$ es suave.

**Proposición 25.2.3.** (Evaluación tangente–cotangente) Sea $M$ una variedad de Banach de clase al menos $C^1$. El mapeo fibrado

$$\mathrm{ev}\colon T'M \times_M TM \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ev}(\alpha_p, \xi_p) := \alpha_p(\xi_p),$$

es natural respecto de los cambios de coordenadas. Posee la misma regularidad que los haces tangente y cotangente; en particular, es suave si $M$ es suave.

*Demostración.* En una trivialización, el mapeo está representado por la evaluación bilineal continua

$$X' \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\ell, v) \longmapsto \ell(v).$$

La fórmula (25.6) se eligió precisamente para que esta expresión sea invariante. □

**Definición 25.2.4.** (Campos covectoriales y diferencial) Sea $M$ una variedad suave de Banach. Un **campo covectorial** o una **1–forma** sobre un abierto $U \subseteq M$ es una sección suave $\boldsymbol{\alpha}\colon U \longrightarrow T'M$. Si $f \in C^\infty(U)$, su **diferencial** es el campo covectorial determinado por

$$(df)_p(v) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)), \qquad v = [\gamma] \in T_pM.$$

La definición no depende del representante $\gamma$ porque, en una carta $(U,\varphi)$, se tiene

$$(df)_\varphi(x) = D(f\circ\varphi^{-1})(x). \tag{25.7}$$

En la misma carta, un campo covectorial está representado por

$$\alpha_\varphi\colon \varphi(U)\longrightarrow X', \qquad \alpha_\varphi(\varphi(p)) := \boldsymbol{\alpha}_p\circ\Theta_{\varphi,p}^{-1},$$

y, si $(V,\psi)$ es otra carta, satisface

$$\alpha_\psi(\psi(p)) = \big(A_{\psi\varphi}(p)^{-1}\big)'\alpha_\varphi(\varphi(p)). \tag{25.8}$$

La fórmula (25.7) muestra que $df$ es suave. Más precisamente, si $M$ y $f$ son de clase $C^k$, con $1\le k<\infty$, entonces $T'M$ y la sección $df$ son de clase $C^{k-1}$; la pérdida procede de la derivación de los cambios de carta y de $f$.

**Proposición 25.2.5.** (Propiedades elementales del diferencial) Sea $M$ una variedad suave de Banach. Para $f,g\in C^\infty(M)$ se cumple

$$d(fg) = f\,dg + g\,df.$$

Además, todo covector es localmente el diferencial de una función en el punto: si $p\in M$ y $\lambda_p\in T_p'M$, existen una vecindad $U$ de $p$ y $f\in C^\infty(U)$ tales que $(df)_p=\lambda_p$.

*Demostración.* La regla de Leibniz se obtiene aplicando la regla del producto a (25.7). Para la segunda afirmación, sea $(U,\varphi)$ una carta alrededor de $p$ y pongamos

$$\ell := \lambda_p\circ\Theta_{\varphi,p}^{-1}\in X'.$$

La función $f(q) := \ell(\varphi(q)-\varphi(p))$ es suave en $U$ y su representación local tiene derivada constante $\ell$. Por consiguiente, $(df)_p=\lambda_p$. □

**Definición 25.2.6.** (Pullback de campos covectoriales) Sea $f\colon M\longrightarrow N$ un mapeo suave entre variedades de Banach. Para una 1–forma $\boldsymbol{\alpha}$ sobre $N$, definimos

$$(f^*\boldsymbol{\alpha})_p := \boldsymbol{\alpha}_{f(p)}\circ df_p\in T_p'M.$$

El campo $f^*\boldsymbol{\alpha}$ se denomina el **pullback** de $\boldsymbol{\alpha}$ por $f$.

**Proposición 25.2.7.** (Regularidad y naturalidad del pullback) Sean $M$, $N$ y $P$ variedades suaves de Banach y sea $f\colon M\to N$ un mapeo suave. El pullback de una 1–forma suave es una 1–forma suave. Si $g\colon N\longrightarrow P$ es suave, entonces

$$(g\circ f)^* = f^*\circ g^*, \qquad \mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}, \qquad d(h\circ f) = f^*(dh)$$

para toda $h\in C^\infty(N)$.

*Demostración.* Sean $\varphi$ y $\psi$ cartas en $M$ y $N$, respectivamente, y escribamos

$$\widehat{f} := \psi\circ f\circ\varphi^{-1}, \qquad \widehat{\alpha} := \alpha_\psi.$$

La representación local del pullback es

$$(f^*\boldsymbol{\alpha})_{\varphi}(x) = D\widehat{f}(x)'\widehat{\alpha}(\widehat{f}(x)).$$

El mapeo $x \mapsto D\widehat{f}(x)$ es suave con valores en la norma de operadores, la transposición es lineal continua y la evaluación es bilineal continua. Por lo tanto, la expresión es suave. Las tres identidades se obtienen de la regla de la cadena y de la definición puntual. □

Para tratar formas de grado superior sin elegir una completación tensorial, si $m \in \mathbb{N}$ y $X_0, Y_0$ son espacios de Banach, denotemos por

$$\mathcal{L}^m_{\mathrm{alt}}(X_0; Y_0)$$

el subespacio de los mapeos $m$–lineales continuos $A\colon X_0^m \longrightarrow Y_0$ que son alternantes, provisto de la norma de operadores. Es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}^m(X_0; Y_0)$ y, por lo tanto, es un espacio de Banach. Los cambios de coordenadas actúan mediante

$$\omega \longmapsto \omega \circ (A^{-1}, \dots, A^{-1}).$$

La Proposición 25.1.4 proporciona así un haz de Banach, denotado por $\bigwedge^m(T'M)$, cuya fibra en $p$ es $\mathcal{L}^m_{\mathrm{alt}}(T_pM; \mathbb{R})$.

**Definición 25.2.8.** (Formas diferenciales) Sean $M$ y $N$ variedades suaves de Banach. Una **$m$–forma diferencial suave** sobre $M$ es una sección suave de $\bigwedge^m(T'M)$, para $m \in \mathbb{N}$. El espacio de estas secciones se denota por $\Omega^m(M)$; para $m = 0$ ponemos $\Omega^0(M) := C^\infty(M)$. Si $f\colon M \longrightarrow N$ es suave y $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^m(N)$, su pullback se define por

$$(f^*\boldsymbol{\omega})_p(v_1, \dots, v_m) := \boldsymbol{\omega}_{f(p)}(df_p v_1, \dots, df_p v_m). \tag{25.9}$$

La misma prueba local de la Proposición 25.2.7, usando la composición multilineal continua, muestra que (25.9) define una $m$–forma suave y que el pullback es functorial. Esta formulación no identifica las formas continuas con un producto tensorial completado; evita así imponer una norma tensorial que no sea canónica.

Las Definiciones 25.2.2 y 25.2.4, así como la Proposición 25.2.5, corresponden a las Definiciones 1.7.46 y 1.7.47 y al Corolario 1.7.50. La fórmula de pullback es la misma que en la Definición 1.10.19 y conserva las identidades de la Proposición 1.10.20. La diferencia funcional es que aquí cada covector pertenece al dual topológico y toda regularidad se comprueba en la norma de operadores; no se usa una identificación finito–dimensional con un producto tensorial.

**Observación 25.2.9.** (Doble dual y productos tensoriales) Existe una inyección lineal isométrica canónica

$$J_X\colon X \longrightarrow X'', \qquad J_X(v)(\ell) := \ell(v),$$

pero puede no ser suprayectiva. Por ello, si el espacio modelo no es reflexivo, no existe una identificación canónica entre $TM$ y $(T'M)'$ fibra a fibra.

Tampoco hay una única completación tensorial implícita en la categoría de Banach. Por ejemplo, $X' \otimes F$ se envía al espacio de operadores de rango finito de $X$ en $F$, mientras que sus completaciones proyectiva e inyectiva pueden ser distintas y no coinciden en general con $\mathcal{L}(X, F)$. Por consiguiente, los haces de tensores deben definirse especificando una norma tensorial completa. Cuando sólo se requieren mapeos

multilineales continuos, resulta canónico trabajar directamente con fibras como

$$\mathcal{L}^m(T_pM;\mathbb{R}) \quad \text{o} \quad \mathcal{L}(T_pM, T_pM),$$

sin imponer una identificación tensorial que pueda fallar.

## 25.3 Campos vectoriales y curvas integrales

En lo que resta del capítulo, $M$ será una variedad de Banach suave modelada sobre un espacio de Banach $X$.

**Definición 25.3.1.** (Campo vectorial) Sea $M$ una variedad suave de Banach. Un **campo vectorial** sobre $M$ es una sección $\mathbf{X}\colon M \longrightarrow TM$. En una carta $(U,\varphi)$ queda representado por

$$X_\varphi\colon \varphi(U) \longrightarrow X, \qquad X_\varphi(\varphi(p)) := \Theta_{\varphi,p}(\mathbf{X}(p)).$$

En el solapamiento de dos cartas se cumple

$$X_\psi(\psi(p)) = D(\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))X_\varphi(\varphi(p)). \tag{25.10}$$

El campo es continuo, localmente Lipschitz o de clase $C^r$ si sus representaciones coordenadas poseen la propiedad correspondiente.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(U) := \Gamma^\infty(TU)$ el espacio de campos vectoriales suaves sobre un abierto $U \subseteq M$. Si $f \in C^\infty(U)$ y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(U)$, se define la función $\mathbf{X}(f) \in C^\infty(U)$ por

$$\mathbf{X}(f)(p) := (df)_p(\mathbf{X}(p)), \qquad p \in U.$$

Si $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(U)$, en una carta definimos

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]_\varphi(x) := DY_\varphi(x)X_\varphi(x) - DX_\varphi(x)Y_\varphi(x). \tag{25.11}$$

**Proposición 25.3.2.** (Corchete de campos vectoriales) Sea $M$ una variedad suave de Banach y sea $U \subseteq M$ abierto. La expresión (25.11) no depende de la carta y define un campo vectorial suave $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$. Además,

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y},\mathbf{X}], \qquad [\mathbf{X},f\mathbf{Y}] = \mathbf{X}(f)\mathbf{Y} + f[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$$

para todo $f \in C^\infty(U)$, y el corchete satisface la identidad de Jacobi.

*Demostración.* Sea $\chi$ un cambio de coordenadas y escribamos $\widetilde{X}(\chi(x)) = D\chi(x)X(x)$ y $\widetilde{Y}(\chi(x)) = D\chi(x)Y(x)$. Al diferenciar y restar se obtiene

$$\begin{aligned} &D\widetilde{Y}(\chi(x))\widetilde{X}(\chi(x)) - D\widetilde{X}(\chi(x))\widetilde{Y}(\chi(x)) \\ &\qquad = D\chi(x)\big(DY(x)X(x) - DX(x)Y(x)\big), \end{aligned}$$

porque los términos que contienen $D^2\chi(x)(X(x),Y(x))$ se cancelan por la simetría de la segunda derivada.

Ésta es exactamente la ley de transformación de un campo vectorial. Las dos primeras identidades se comprueban en coordenadas mediante la regla del producto. Para Jacobi, consideremos primero la acción sobre una función $f \in C^\infty(U)$. Si $\widehat{f} = f \circ \varphi^{-1}$, la regla del producto da

$$\mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) = D^2\widehat{f}(X_\varphi, Y_\varphi) + D\widehat{f}\big(DY_\varphi[X_\varphi]\big)$$

en las coordenadas de la carta. La simetría de $D^2\widehat{f}$ implica $[\mathbf{X},\mathbf{Y}](f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$. Aplicando esta identidad dos veces, los tres términos de Jacobi actúan como

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X},[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]](f) &= \mathbf{XYZ}(f) - \mathbf{XZY}(f) - \mathbf{YZX}(f) + \mathbf{ZYX}(f),\\
[\mathbf{Y},[\mathbf{Z},\mathbf{X}]](f) &= \mathbf{YZX}(f) - \mathbf{YXZ}(f) - \mathbf{ZXY}(f) + \mathbf{XZY}(f),\\
[\mathbf{Z},[\mathbf{X},\mathbf{Y}]](f) &= \mathbf{ZXY}(f) - \mathbf{ZYX}(f) - \mathbf{XYZ}(f) + \mathbf{YXZ}(f).
\end{aligned}$$

Cada composición aparece una vez con cada signo, por lo que la suma es cero. En cada punto $p$, todo covector continuo es el diferencial de una función local por la Proposición 25.2.5. Como el dual topológico separa puntos por Hahn–Banach, un vector anulado por todos esos diferenciales es cero. La suma de los tres campos es, por tanto, el campo nulo, que es la identidad de Jacobi. □

La condición local de Lipschitz es independiente de la carta. En efecto, sea $\chi$ un cambio de coordenadas y sea $B$ una bola convexa sobre la cual $X_\varphi$ es $L_X$–Lipschitz. Después de disminuir $B$, la suavidad de $\chi$ proporciona constantes $C_0, C_1, C_2 > 0$ tales que, para $x, y \in B$,

$$\|D\chi(x)\| \le C_0, \qquad \|D\chi(x) - D\chi(y)\| \le C_1\|x-y\|, \qquad \|x-y\| \le C_2\|\chi(x)-\chi(y)\|.$$

Si además $\|X_\varphi(x)\| \le C_X$ en $B$, la ley de transformación da

$$\|X_\psi(\chi(x)) - X_\psi(\chi(y))\| \le C_2(C_0L_X + C_1C_X)\|\chi(x)-\chi(y)\|.$$

Así se transporta una constante de Lipschitz entre cartas. En particular, todo campo de clase $C^1$ es localmente Lipschitz, pues su derivada está acotada en una bola suficientemente pequeña.

**Definición 25.3.3.** (Curva integral) Sea $M$ una variedad suave de Banach y sea $\mathbf{X}$ un campo vectorial sobre $M$. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y $\gamma\colon I \longrightarrow M$ es una curva de clase $C^1$, su velocidad en $t$ es

$$\dot\gamma(t) := d\gamma_t(1) \in T_{\gamma(t)}M.$$

La curva $\gamma$ es una **curva integral** de $\mathbf{X}$ si

$$\dot\gamma(t) = \mathbf{X}(\gamma(t))$$

para todo $t \in I$. Es **maximal** si no es la restricción de una curva integral definida en un intervalo estrictamente mayor.

En una carta, la ecuación de las curvas integrales se convierte en la EDO autónoma

$$x'(t) = X_\varphi(x(t)).$$

La ley de transformación (25.10) y la regla de la cadena garantizan que esta ecuación no depende de las coordenadas.

**Teorema 25.3.4.** (Existencia y unicidad de curvas integrales) Sea $M$ una variedad suave de Banach. Sea $\mathbf{X}$ un campo continuo y localmente Lipschitz sobre $M$. Para cada $p \in M$ existe una única curva integral maximal

$$\gamma_p : I_p \longrightarrow M, \qquad 0 \in I_p, \qquad \gamma_p(0) = p.$$

El dominio $I_p$ es un intervalo abierto. Toda curva integral que toma el valor $p$ en el tiempo cero es una restricción de $\gamma_p$.

*Demostración.* El Teorema B.13.1, aplicado a una representación coordenada de $\mathbf{X}$, da una curva integral local. La Proposición B.13.2 muestra que dos curvas integrales con un valor común coinciden cerca de ese tiempo y, mediante el argumento de abierto y cerrado sobre la intersección de sus intervalos, coinciden en toda componente común. Las soluciones locales pueden, por lo tanto, pegarse. El mismo argumento de unión que en el Teorema B.13.3 produce un intervalo abierto maximal y una única curva integral sobre él. □

## 25.4 Flujos en variedades de Banach

**Definición 25.4.1.** (Flujo local) Sea $M$ una variedad suave de Banach. Un **flujo local** sobre $M$ es un mapeo continuo

$$\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow M,$$

donde $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ es abierto y contiene $\{0\} \times M$. Para cada $p \in M$ se exige que

$$\mathcal{D}_p := \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$$

sea un intervalo que contiene 0. El mapeo satisface

$$\Phi(0, p) = p$$

y, si $s \in \mathcal{D}_p$, la equivalencia exacta de dominios

$$t \in \mathcal{D}_{\Phi(s,p)} \quad \Longleftrightarrow \quad t + s \in \mathcal{D}_p,$$

junto con la ley

$$\Phi(t + s, p) = \Phi(t, \Phi(s, p))$$

cuando esas condiciones se cumplen. Si $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times M$, se denomina un **flujo global**. Un flujo es de clase $C^r$, con $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, si el mapeo $\Phi$ lo es. Se dice que tiene **campo generador $\mathbf{X}$** si cada curva $t \mapsto \Phi(t, p)$ es de clase $C^1$ y

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \Phi(t, p) = \mathbf{X}(p)$$

para todo $p \in M$. Un flujo local con campo generador $\mathbf{X}$ es **maximal** si todo otro flujo local con generador $\mathbf{X}$

es una restricción suya. En particular, no admite una extensión propia con el mismo generador.

Para un campo $\mathbf{X}$ como en el Teorema 25.3.4, definimos

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X}} := \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_p\}, \qquad \Phi_{\mathbf{X}}(t,p) := \gamma_p(t).$$

**Teorema 25.4.2.** (Flujo maximal y dependencia suave) Sea $M$ una variedad suave de Banach. Sea $\mathbf{X}$ un campo continuo y localmente Lipschitz sobre $M$. Entonces $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$ es abierto, $\Phi_{\mathbf{X}}$ es continuo y constituye el único flujo local maximal cuyas curvas de órbita son integrales de $\mathbf{X}$.
Si $\mathbf{X}$ es de clase $C^r$, con $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, entonces $\Phi_{\mathbf{X}}$ es de clase $C^r$. Para cualesquiera $p \in M$ y $s,t \in \mathbb{R}$ tales que $(s,p) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}$, se tiene la equivalencia

$$(t, \Phi_{\mathbf{X}}(s,p)) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \iff (t+s,p) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}},$$

y, cuando estas condiciones se cumplen,

$$\Phi_{\mathbf{X}}(t, \Phi_{\mathbf{X}}(s,p)) = \Phi_{\mathbf{X}}(t+s,p). \tag{25.12}$$

*Demostración.* En una carta y para tiempos suficientemente pequeños, las afirmaciones de apertura, continuidad y regularidad son las del Teorema B.13.5, tomando el punto inicial como parámetro. Para alcanzar un punto arbitrario $(t_0,p_0) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}$, se cubre la imagen compacta de la curva $\gamma_{p_0}$ entre 0 y $t_0$ por un número finito de cartas y se subdivide el intervalo de modo que cada tramo quede en una de ellas. La composición finita de los mapeos locales de solución demuestra que $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$ es abierto alrededor de $(t_0,p_0)$ y que $\Phi_{\mathbf{X}}$ posee allí la regularidad afirmada. Más explícitamente, si $t_0 > 0$, elegimos $0 = t_0' < t_1' < \cdots < t_m' = t_0$ de manera que cada tramo pertenezca a un dominio de solución local; aquí $m \in \mathbb{N}$. Partimos del dato $p$ próximo a $p_0$. Supongamos que, después de $j$ tramos, con $0 \le j < m$, el punto alcanzado depende de $p$ con la regularidad afirmada y permanece próximo a $\gamma_{p_0}(t_j')$. La continuidad permite reducir la vecindad de $p_0$ para que ese punto pertenezca al dominio del siguiente mapeo local. La composición con dicho mapeo conserva la regularidad y produce el punto del tramo $j+1$. Éste es el paso inductivo, cuyo caso inicial es la identidad $p \mapsto p$. En el último tramo dejamos variar también el tiempo final en una vecindad de $t_0$. Resulta una solución definida en un producto abierto alrededor de $(t_0,p_0)$, con la regularidad requerida. Para $t_0 < 0$ se aplica esta construcción al campo $-\mathbf{X}$; en $t_0 = 0$ basta el resultado local.
Fijemos ahora $s$ con $(s,p) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}$. Las curvas

$$t \longmapsto \Phi_{\mathbf{X}}(t, \Phi_{\mathbf{X}}(s,p)) \quad \text{y} \quad t \longmapsto \Phi_{\mathbf{X}}(t+s,p)$$

son curvas integrales de $\mathbf{X}$ y toman el mismo valor en $t = 0$. La unicidad muestra que coinciden en su dominio común. La maximalidad de ambas curvas identifica sus intervalos de definición y prueba tanto la equivalencia de dominios como (25.12). Finalmente, cualquier flujo con campo generador $\mathbf{X}$ está formado por curvas integrales: al derivar $\Phi(t+h,p) = \Phi(h, \Phi(t,p))$ en $h = 0$ se obtiene $\partial_t \Phi(t,p) = \mathbf{X}(\Phi(t,p))$. La unicidad de las curvas integrales muestra entonces que ese flujo es una restricción de $\Phi_{\mathbf{X}}$. □

Las nociones anteriores prolongan las Definiciones 1.7.40, 1.8.1 y 1.8.13. La prueba del Teorema 1.8.15 conserva aquí su argumento de unicidad y pegado; el paso nuevo es que la existencia local y la dependencia respecto del dato inicial proceden de las EDO en espacios de Banach, Teoremas B.13.1 y B.13.5, sin usar compacidad local.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea

$$M_t := \{p \in M \mid (t,p) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}\}.$$

La apertura de $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$ implica que $M_t$ es abierto. La ley de flujo muestra que

$$\Phi_{\mathbf{X}}^t := \Phi_{\mathbf{X}}(t,\cdot)\colon M_t \longrightarrow M_{-t}$$

es un homeomorfismo con inversa $\Phi_{\mathbf{X}}^{-t}$. Si $\mathbf{X}$ es de clase $C^r$, ambos mapeos son de clase $C^r$ y, por lo tanto, $\Phi_{\mathbf{X}}^t$ es un difeomorfismo $C^r$ entre abiertos.

**Observación 25.4.3.** (Campos y flujos en regularidad $C^{1,1}$) Sea $M$ una variedad de Banach con el atlas $C^{1,1}$ de la Definición 24.1.5. Un campo vectorial es una sección $\mathbf{X}\colon M \longrightarrow TM$, y diremos que es localmente Lipschitz si lo son sus representaciones en las cartas de ese atlas. Esta propiedad no depende de la carta elegida. En efecto, la ley (25.10) sólo utiliza primeras derivadas. Si $\chi = \psi \circ \varphi^{-1}$, podemos reducir el dominio alrededor del punto considerado de modo que $D\chi$ sea acotada y Lipschitz, $\mathbf{X}_\varphi$ sea acotado y Lipschitz, y $\chi^{-1}$ sea Lipschitz en una bola de su dominio. La última propiedad se sigue de la continuidad de $D\chi^{-1}$ y de la desigualdad del valor medio. La estimación de la Sección 25.3 se aplica con estas mismas cotas y demuestra que $\mathbf{X}_\psi = (D\chi \cdot \mathbf{X}_\varphi) \circ \chi^{-1}$ es localmente Lipschitz.

La definición de curva integral y las conclusiones de existencia, unicidad y flujo maximal continuo de los Teoremas 25.3.4 y 25.4.2 siguen siendo válidas en esta regularidad. Para verlo, en cada carta aplicamos el Teorema B.13.1 al campo coordenado. La regla de la cadena para los cambios $C^1$ transforma una solución coordenada en una curva integral independiente de la carta. La unicidad local permite pegar esas soluciones y tomar la unión de sus intervalos, como en el Teorema 25.3.4. Por el Teorema B.13.5, los mapeos locales de solución son continuos respecto del tiempo y del dato inicial. La composición sobre una partición finita de un tramo compacto de la órbita, construida en la prueba del Teorema 25.4.2, demuestra la apertura del dominio del flujo y su continuidad conjunta. La unicidad proporciona la ley de grupo y los homeomorfismos de tiempo con sus inversos. No se afirma aquí diferenciabilidad del flujo respecto del dato inicial para un campo que sólo sea localmente Lipschitz.

**Proposición 25.4.4.** (Campo generador) Sea $M$ una variedad suave de Banach. Si $\Phi\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ es un flujo local de clase $C^1$, entonces

$$\mathbf{X}_\Phi(p) := \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \Phi(t,p) \in T_pM$$

define un campo vectorial continuo. Cada curva $t \mapsto \Phi(t,p)$ es una curva integral de $\mathbf{X}_\Phi$. Si $\Phi$ es de clase $C^r$, con $r \geq 1$, entonces $\mathbf{X}_\Phi$ es de clase $C^{r-1}$; si $\Phi$ es suave, también lo es $\mathbf{X}_\Phi$.

*Demostración.* La identidad $\Phi(0,p) = p$ muestra que $\mathbf{X}_\Phi(p) \in T_pM$. Al diferenciar la ley de flujo

$$\Phi(t+h,p) = \Phi(h,\Phi(t,p))$$

respecto de $h$ en $h = 0$, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,p) = \mathbf{X}_\Phi(\Phi(t,p)).$$

La afirmación de regularidad se sigue al tomar una derivada parcial respecto del tiempo. □

**Teorema 25.4.5.** (Flujo global de un campo acotado en un espacio de Banach) Sea $X$ un espacio de Banach, considerado como variedad de Banach suave, y sea $\mathbf{V}\colon X \longrightarrow X$ un campo continuo y localmente Lipschitz. Si existe $C \geq 0$ tal que

$$\|\mathbf{V}(x)\|_X \leq C$$

para todo $x \in X$, entonces su flujo maximal es global:

$$\Phi_{\mathbf{V}}\colon \mathbb{R} \times X \longrightarrow X.$$

Además,

$$\|\Phi_{\mathbf{V}}(t,x) - x\|_X \leq C|t|$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$. Si $\mathbf{V}$ es de clase $C^r$, con $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, entonces $\Phi_{\mathbf{V}}$ es de clase $C^r$ y cada $\Phi_{\mathbf{V}}^t\colon X \longrightarrow X$ es un difeomorfismo de clase $C^r$, con inversa $\Phi_{\mathbf{V}}^{-t}$.

*Demostración.* El Corolario B.13.6, aplicado a $F(t,x) := \mathbf{V}(x)$, muestra que toda curva integral maximal está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y proporciona la estimación indicada. La regularidad del flujo se sigue del Teorema B.13.5. La ley (25.12) da

$$\Phi_{\mathbf{V}}^{-t} \circ \Phi_{\mathbf{V}}^{t} = \mathrm{id}_X = \Phi_{\mathbf{V}}^{t} \circ \Phi_{\mathbf{V}}^{-t}.$$

□

La acotación del teorema anterior utiliza la norma distinguida del espacio $X$. En una variedad de Banach abstracta no es una condición invariante hasta que se fija una estructura adicional, por ejemplo una norma continua en cada fibra de $TM$ con control uniforme adecuado. El criterio intrínseco básico de prolongación sigue siendo el análisis, en una carta final, de la convergencia de la curva y de la pertenencia de su límite al dominio, conforme al Teorema B.13.4.

## 25.5 Conexiones lineales en haces de Banach

Sea $\pi\colon \mathcal{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial de Banach suave con fibra modelo $F$, sobre una variedad de Banach suave modelada sobre $X$. En dimensión infinita no basta exigir identidades algebraicas a un operador sobre secciones: también debe imponerse que sus coeficientes locales dependan suavemente del punto en la topología de la norma de operadores.

**Definición 25.5.1.** (Conexión lineal) Sea $M$ una variedad suave de Banach y sea $\mathcal{E} \to M$ un haz vectorial de Banach suave. Una **conexión lineal** en $\mathcal{E}$ es una regla que, para cada abierto $U \subseteq M$, cada $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(U)$ y cada $\mathbf{s} \in \Gamma^\infty(\mathcal{E}\restriction_U)$, asigna una sección

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s} \in \Gamma^\infty(\mathcal{E}\restriction_U),$$

de manera compatible con restricciones a abiertos menores, y que satisface

$$\begin{aligned}
\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{s} &= f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s} + g\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{s},\\
\nabla_{\mathbf{X}}(a\mathbf{s}+b\mathbf{t}) &= a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s} + b\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{t},\\
\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{s}) &= \mathbf{X}(f)\mathbf{s} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s}
\end{aligned}$$

para $f, g \in C^\infty(U)$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Se exige además la siguiente regularidad local. Si $(U, \varphi)$ es una carta de $M$ y $\Phi : \boldsymbol{\mathcal{E}} \restriction_U \longrightarrow U \times F$ es una trivialización, existe un mapeo suave, en norma de operadores,

$$\Gamma_{\varphi,\Phi} : \varphi(U) \longrightarrow \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(F)\big)$$

tal que

$$\big(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s}\big)_{\varphi,\Phi}(x) = Ds_{\varphi,\Phi}(x)[X_\varphi(x)] + \Gamma_{\varphi,\Phi}(x)(X_\varphi(x))s_{\varphi,\Phi}(x). \tag{25.13}$$

El mapeo $\Gamma_{\varphi,\Phi}$ se denomina el **coeficiente local de la conexión** en la carta y la trivialización elegidas.

La primera identidad expresa la linealidad sobre $C^\infty(U)$ en la dirección, mientras que la tercera es la regla de Leibniz en la sección. La condición local adicional garantiza que la operación sea una estructura diferencial continua y no sólo un operador algebraico.

La parte algebraica coincide con la Definición 2.4.2. La diferencia es analítica: en una trivialización de fibra infinita, el coeficiente debe ser un mapeo suave con valores en $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(F))$ provisto de la norma de operadores. Esta hipótesis sustituye el control automático de las familias matriciales en dimensión finita y garantiza la suavidad de la evaluación que aparece en (25.13).

**Proposición 25.5.2.** (Ley de transformación de una conexión) Sea $M$ una variedad suave de Banach y sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to M$ un haz vectorial de Banach suave con conexión $\nabla$. Sean $(U, \varphi, \Phi)$ y $(V, \psi, \Psi)$ dos elecciones de carta y trivialización. En el solapamiento, escribamos

$$\chi := \psi \circ \varphi^{-1}, \qquad g(x) := g_{\Psi\Phi}(\varphi^{-1}(x)).$$

Si $\Gamma$ y $\widetilde{\Gamma}$ son los coeficientes locales correspondientes, entonces

$$\widetilde{\Gamma}(\chi(x))(D\chi(x)v) = g(x)\Gamma(x)(v)g(x)^{-1} - Dg(x)[v]g(x)^{-1} \tag{25.14}$$

para todo $v \in X$. Recíprocamente, una familia de mapeos suaves con valores en $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(F))$ que satisfaga esta ley determina una única conexión lineal.

*Demostración.* Sean $x = \varphi(p)$, $w = s_{\varphi,\Phi}(x)$ y $v = X_\varphi(x)$. En las segundas coordenadas se tiene

$$s_{\psi,\Psi}(\chi(x)) = g(x)w, \qquad X_\psi(\chi(x)) = D\chi(x)v.$$

La regla de la cadena y la regla del producto dan

$$D(s_{\psi,\Psi} \circ \chi)(x)[v] = Dg(x)[v]w + g(x)Ds_{\varphi,\Phi}(x)[v].$$

Como $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s}$ es una sección de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, su segunda representación debe ser $g(x)$ veces la primera. Al sustituir (25.13) y cancelar el término con $Ds_{\varphi,\Phi}$ se obtiene

$$\widetilde{\Gamma}(\chi(x))(D\chi(x)v)g(x)w = g(x)\Gamma(x)(v)w - Dg(x)[v]w.$$

Como $w \in F$ es arbitrario, esta identidad equivale a (25.14).

Recíprocamente, definimos $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s}$ mediante (25.13) en cada trivialización. El cálculo anterior, leído en sentido

inverso, muestra que las expresiones locales se transforman como una sección y, por lo tanto, se pegan. Las identidades de la Definición 25.5.1 se verifican directamente, y la fórmula local prueba la unicidad. □

**Teorema 25.5.3.** (Existencia de conexiones) Sea $M$ una variedad suave de Banach. Supongamos que $M$ admite particiones suaves de la unidad subordinadas a toda cubierta abierta. Entonces todo haz vectorial de Banach suave sobre $M$ admite una conexión lineal suave.

*Demostración.* Refinando simultáneamente un atlas de $M$ y una familia de trivializaciones, obtenemos una cubierta $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ tal que cada $U_\alpha$ es el dominio de una carta $\varphi_\alpha$ y de una trivialización $\Phi_\alpha$. Elijamos una partición suave de la unidad $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ subordinada a ella. En $\boldsymbol{\mathcal{E}}\restriction_{U_\alpha}$ existe la conexión plana local $\nabla^\alpha$ cuyo coeficiente en $(\varphi_\alpha,\Phi_\alpha)$ es cero.

Definamos la regla en toda la gavilla de secciones. Sean $W\subseteq M$ abierto, $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(W)$ y $\mathbf{s}\in\Gamma^\infty(\boldsymbol{\mathcal{E}}\restriction_W)$. En $W\cap U_\alpha$ ponemos

$$T_\alpha(\mathbf{X},\mathbf{s}) := \rho_\alpha\restriction_W\ \nabla^\alpha_{\mathbf{X}\restriction_{W\cap U_\alpha}}(\mathbf{s}\restriction_{W\cap U_\alpha}).$$

Como $\operatorname{supp}(\rho_\alpha)\subseteq U_\alpha$, esta sección se extiende por cero a una sección suave de $\boldsymbol{\mathcal{E}}\restriction_W$: todo punto de $W\setminus U_\alpha$ posee una vecindad en la que $\rho_\alpha$ es idénticamente nula. La familia de estas extensiones es localmente finita. Por lo tanto, la suma

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s} := \sum_{\alpha\in A} T_\alpha(\mathbf{X},\mathbf{s})$$

está bien definida y es suave en $W$. La misma fórmula en un abierto $W_0\subseteq W$ es la restricción de la anterior, de modo que la regla es compatible con restricciones.

Cada $\nabla^\alpha$ es lineal sobre funciones en la dirección y lineal sobre $\mathbb{R}$ en la sección; multiplicar por $\rho_\alpha$ y sumar conserva estas dos propiedades. Para $f\in C^\infty(W)$, en cada $W\cap U_\alpha$ se tiene

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{s}) &= \sum_{\alpha\in A}\rho_\alpha\left(\mathbf{X}(f)\mathbf{s} + f\nabla^\alpha_{\mathbf{X}}\mathbf{s}\right)\\ &= \mathbf{X}(f)\mathbf{s} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s},\end{aligned}$$

pues $\sum_{\alpha\in A}\rho_\alpha = 1$. Finalmente, en cualquier carta y trivialización, cada conexión plana local se transforma mediante (25.14) en un coeficiente suave con valores en $\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(F))$. El coeficiente de $\nabla$ es la suma localmente finita de esos coeficientes multiplicados por $\rho_\alpha$; por ello es suave en norma de operadores. Se satisfacen así todas las condiciones de la Definición 25.5.1. □

La hipótesis del teorema anterior no es vacía en la categoría de Banach. La paracompacidad por sí sola no produce particiones suaves de la unidad; se requieren las hipótesis sobre el espacio modelo estudiadas en la Sección 24.8.

**Proposición 25.5.4.** (Conexiones inducidas) Sean $M$ y $N$ variedades suaves de Banach y sea $\boldsymbol{\mathcal{E}}\to M$ un haz vectorial de Banach suave. Sea $\nabla$ una conexión en $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Entonces:

(i) el haz dual $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ posee la conexión dual $\nabla'$ determinada por la identidad

$$(\nabla'_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{s}) = \mathbf{X}\big(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{s})\big) - \boldsymbol{\lambda}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s}); \tag{25.15}$$

aquí $U\subseteq M$ es abierto, $\mathbf{X}\in\mathfrak{X}(U)$, $\boldsymbol{\lambda}\in\Gamma^\infty(\boldsymbol{\mathcal{E}}'\restriction_U)$ y $\mathbf{s}\in\Gamma^\infty(\boldsymbol{\mathcal{E}}\restriction_U)$;

(ii) si $\mathcal{H}$ posee una conexión $\nabla^{\mathcal{H}}$, el haz $\mathcal{E}\oplus\mathcal{H}$ posee la conexión suma directa

$$\nabla^{\oplus}_{\mathbf{X}}(\mathbf{s},\mathbf{t}) = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s}, \nabla^{\mathcal{H}}_{\mathbf{X}}\mathbf{t});$$

(iii) si $f\colon N\longrightarrow M$ es suave, el haz $f^{*}\mathcal{E}$ posee una conexión $f^{*}\nabla$. Sean $(V,\psi)$ una carta de $N$ y $(U,\varphi)$ una carta de $M$ tales que $f(V)\subseteq U$, y sea $\Phi\colon \mathcal{E}\restriction_{U}\longrightarrow U\times F$ una trivialización. Sea $\widehat{f}:=\varphi\circ f\circ\psi^{-1}$ y denote $\Gamma$ el coeficiente de $\nabla$ en $(\varphi,\Phi)$. En la trivialización inducida, si $V$ y $\sigma$ denotan también sus representaciones locales, la conexión tiene la expresión

$$\big((f^{*}\nabla)_{V}\sigma\big)(y) = D\sigma(y)[V(y)] + \Gamma(\widehat{f}(y))\big(D\widehat{f}(y)[V(y)]\big)\sigma(y). \tag{25.16}$$

*Demostración.* Para que (25.15) defina un covector, primero hay que comprobar su dependencia respecto de la sección de prueba. Si $h\in C^{\infty}(U)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{X}\big(\boldsymbol{\lambda}(h\mathbf{s})\big) - \boldsymbol{\lambda}(\nabla_{\mathbf{X}}(h\mathbf{s})) &= \mathbf{X}\big(h\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{s})\big) - \boldsymbol{\lambda}\big(\mathbf{X}(h)\mathbf{s} + h\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s}\big)\\ &= h\big(\mathbf{X}(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{s})) - \boldsymbol{\lambda}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s})\big).\end{aligned}$$

El miembro derecho de (25.15) es, por lo tanto, $C^{\infty}(U)$–lineal en $\mathbf{s}$. Para comprobar además que su valor en un punto sólo depende de la fibra, escribamos $\ell$ y $s$ para las representaciones de $\boldsymbol{\lambda}$ y $\mathbf{s}$, y $u = X_{\varphi}(x)$. La derivada de la evaluación, que es bilineal continua, da

$$D\big(\ell(\cdot)(s(\cdot))\big)(x)[u] = D\ell(x)[u](s(x)) + \ell(x)(Ds(x)[u]).$$

Al restar $\ell(x)(Ds(x)[u]+\Gamma(x)(u)s(x))$, los términos con $Ds$ se cancelan. El resultado sólo depende de $s(x)$ y está dado por el funcional continuo

$$D\ell(x)[X_{\varphi}(x)] - \big(\Gamma(x)(X_{\varphi}(x))\big)'\ell(x).$$

En particular, es continuo en la variable fibrada y depende suavemente del punto. El coeficiente de la conexión dual es

$$\Gamma'(x)(v) = -\big(\Gamma(x)(v)\big)',$$

que es suave en norma de operadores porque la transposición $\mathcal{L}(F)\longrightarrow\mathcal{L}(F')$ es lineal continua. Al diferenciar la identidad $\langle (g^{-1})'\ell, gw\rangle = \langle \ell, w\rangle$ y usar (25.14), se obtiene exactamente la ley de transformación de $\Gamma'$ para el cociclo dual $(g^{-1})'$. Las linealidades y la regla de Leibniz en $\boldsymbol{\lambda}$ se deducen directamente de (25.15).
La conexión suma directa verifica las identidades componente a componente; en trivializaciones simultáneas su coeficiente es el operador diagonal $\Gamma^{\mathcal{E}}\oplus\Gamma^{\mathcal{H}}$.
Para el pullback, supongamos que $N$ está modelada sobre un espacio de Banach $Y$. En las coordenadas y la trivialización inducida del enunciado, definamos

$$\Gamma^{f}(y)(w) := \Gamma(\widehat{f}(y))\big(D\widehat{f}(y)[w]\big), \qquad w\in Y.$$

La composición y la evaluación de operadores son suaves, de modo que $\Gamma^{f}\colon \psi(V)\longrightarrow\mathcal{L}(Y,\mathcal{L}(F))$ es suave en norma de operadores. Si se cambian la carta del dominio, la carta del codominio y la trivialización, se

sustituye (25.14) en esta fórmula y se usa

$$D(g\circ\widehat{f})(y)[w] = Dg(\widehat{f}(y))[D\widehat{f}(y)[w]].$$

El resultado es (25.14) para el mapeo de transición inducido $g\circ\widehat{f}$; por ello las expresiones locales se pegan. La fórmula local resultante es (25.16). Su linealidad sobre funciones en la dirección vectorial y la regla de Leibniz en $\sigma$ siguen, respectivamente, de la linealidad de $D\widehat{f}(y)$ y de la regla del producto para $D(h\sigma)$. □

La conexión dual y la conexión inducida prolongan las construcciones de la Proposición 2.4.27. En dimensión finita los coeficientes son matrices; aquí la misma demostración requiere además que la transposición, la composición y los coeficientes dependan continuamente en norma de operadores.

## 25.6 Derivada a lo largo de curvas y transporte paralelo

Sea $\gamma\colon I\longrightarrow M$ una curva de clase $C^1$. Un campo de clase $C^1$ a lo largo de $\gamma$ es una sección $\mathbf{V}\in\Gamma^1(\gamma^*\boldsymbol{\mathcal{E}})$. Si $\gamma(J)$ está contenida en el dominio de una carta y una trivialización, escribimos $x(t)$ para la representación de $\gamma$ y $v(t)$ para la de $\mathbf{V}$. La fórmula local (25.13) muestra que $(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s})(p)$ depende de $\mathbf{X}$ sólo mediante $\mathbf{X}(p)$. Por ello, si $u\in T_pM$, escribiremos $\nabla_u\mathbf{s}$ para el valor común de $(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s})(p)$ entre todos los campos locales $\mathbf{X}$ tales que $\mathbf{X}(p)=u$.

**Definición 25.6.1.** (Derivada covariante a lo largo de una curva) Sea $M$ una variedad suave de Banach, sea $\boldsymbol{\mathcal{E}}\to M$ un haz vectorial de Banach suave con conexión y sea $\gamma\colon I\to M$ una curva de clase $C^1$. La **derivada covariante de $\mathbf{V}$ a lo largo de** $\gamma$ es el campo $\frac{D^\nabla\mathbf{V}}{dt}$ cuya representación en la trivialización $\Phi$ está definida localmente como sigue. Para $p$ en el dominio de $\Phi$, denotemos por

$$\Phi_p := \mathrm{pr}_2\circ\big(\Phi\restriction_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_p}\big)\colon \boldsymbol{\mathcal{E}}_p\longrightarrow F$$

la coordenada fibrada. Entonces

$$\Phi_{\gamma(t)}\left(\left(\frac{D^\nabla\mathbf{V}}{dt}\right)(t)\right) = v'(t)+\Gamma(x(t))(x'(t))v(t). \tag{25.17}$$

Para $\gamma$ y $\mathbf{V}$ de clase $C^1$, la derivada covariante es un campo continuo a lo largo de $\gamma$. El campo $\mathbf{V}$ es **paralelo** si $\frac{D^\nabla\mathbf{V}}{dt}=0$.

**Proposición 25.6.2.** (Invariancia de la derivada a lo largo de curvas) Sea $M$ una variedad suave de Banach, sea $\boldsymbol{\mathcal{E}}\to M$ un haz vectorial de Banach suave con conexión y sea $\gamma\colon I\to M$ una curva de clase $C^1$. La expresión (25.17) no depende de la carta ni de la trivialización. Es lineal en $\mathbf{V}$ y satisface

$$\frac{D^\nabla(a\mathbf{V})}{dt} = a'\mathbf{V}+a\frac{D^\nabla\mathbf{V}}{dt}$$

para toda función $a\in C^1(I)$. Si $\mathbf{V}(t)=\mathbf{s}(\gamma(t))$ para una sección local suave $\mathbf{s}$, entonces

$$\frac{D^\nabla\mathbf{V}}{dt}(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)}\mathbf{s}.$$

*Demostración.* En un cambio de trivialización se tiene $\widetilde{v}(t) = g(x(t))v(t)$. Por lo tanto,

$$\widetilde{v}'(t) = Dg(x(t))[x'(t)]v(t) + g(x(t))v'(t).$$

Al sumar el término de conexión y usar (25.14), los dos términos que contienen $Dg$ se cancelan, y el resultado es $g(x(t))$ veces el miembro derecho de (25.17). La invariancia bajo cambios de coordenadas de la base está incluida en la misma ley. Las restantes afirmaciones se siguen de la regla del producto y de (25.13). □

**Teorema 25.6.3.** (Existencia y unicidad del transporte paralelo) Sea $M$ una variedad suave de Banach, sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to M$ un haz vectorial de Banach suave con conexión y sea $\gamma\colon I \to M$ una curva de clase $C^1$. Sean $t_0 \in I$ y $e_0 \in \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\gamma(t_0)}$. Existe un único campo paralelo $\mathbf{V}$ a lo largo de $\gamma$ tal que $\mathbf{V}(t_0) = e_0$. Para $t_0, t_1 \in I$, el mapeo

$$P^{\nabla}_{\gamma, t_0 \to t_1}\colon \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\gamma(t_0)} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\gamma(t_1)}, \qquad e_0 \longmapsto \mathbf{V}(t_1),$$

es un isomorfismo lineal topológico. Además,

$$\begin{aligned} P^{\nabla}_{\gamma, t_1 \to t_2} \circ P^{\nabla}_{\gamma, t_0 \to t_1} &= P^{\nabla}_{\gamma, t_0 \to t_2}, \\ \left(P^{\nabla}_{\gamma, t_0 \to t_1}\right)^{-1} &= P^{\nabla}_{\gamma, t_1 \to t_0}. \end{aligned}$$

para cualesquiera $t_0, t_1, t_2 \in I$.

*Demostración.* En una trivialización sobre un subintervalo $J \subseteq I$, la condición de paralelismo equivale a la EDO lineal en $F$

$$v'(t) = -A(t)v(t), \qquad A(t) := \Gamma(x(t))(x'(t)) \in \mathcal{L}(F). \tag{25.18}$$

El coeficiente $A$ es continuo en norma de operadores. El teorema de existencia y unicidad para EDO en espacios de Banach, Teorema B.13.1, proporciona una solución local única. En todo subintervalo compacto contenido en $J$, la función $\|A(t)\|$ está acotada y la ecuación integral, junto con el Lema de Grönwall 1.8.19, da

$$\|v(t)\|_F \le \|v(t_0)\|_F \exp\left(\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|\, d\tau\right)$$

cuando $t \ge t_0$, con la estimación análoga en sentido inverso. Por lo tanto, la solución permanece acotada en todo subintervalo compacto. Si un extremo finito $c$ del intervalo maximal perteneciera al interior de $J$, entonces, en un compacto que contuviera a $t_0$ y a $c$, también estarían acotados $A$ y $v$. La ecuación implicaría que $v' = -Av$ está acotada; por lo tanto, $v$ sería uniformemente Lipschitz y tendría un límite en $F$ al tender $t$ a $c$, pues $F$ es completo. Aplicando de nuevo el teorema local con ese límite como dato inicial se prolongaría la solución más allá de $c$, contradicción. Así, la solución existe en todo $J$. Cubriendo el segmento de la curva comprendido entre dos tiempos por un número finito de trivializaciones y usando la unicidad en los solapamientos, se obtiene una solución sobre todo $I$.

La ecuación es lineal en el dato inicial, y la estimación anterior, combinada en un número finito de trivializaciones, prueba la continuidad del operador de transporte. La unicidad muestra que transportar de $t_0$ a $t_1$ y luego de $t_1$ a $t_2$ produce la misma sección paralela que transportar directamente. Tomando $t_2 = t_0$ se obtiene la fórmula para la inversa. □

La noción de sección a lo largo de una curva y la fórmula de derivación son las de la Definición 2.7.3 y el

Teorema 2.7.5. Asimismo, las leyes de composición e inversión corresponden al Teorema 2.7.12 y a la Proposición 2.7.14. La novedad aquí es que la ecuación lineal toma valores en una fibra de Banach; la existencia global sobre el intervalo se obtiene de la estimación del Lema de Grönwall 1.8.19 y de la completitud de la fibra, no de la dimensión finita.

**Definición 25.6.4.** (Curvatura de una conexión) Sea $M$ una variedad suave de Banach y sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to M$ un haz vectorial de Banach suave con conexión $\nabla$. La **curvatura** de $\nabla$ es el operador

$$\mathbf{R}^{\nabla}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{s} := \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{s} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s} - \nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{s}.$$

La conexión es **plana** si $\mathbf{R}^{\nabla} = 0$.

**Proposición 25.6.5.** (Tensorialidad y expresión local de la curvatura) Sea $M$ una variedad suave de Banach y sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to M$ un haz vectorial de Banach suave con conexión $\nabla$. La curvatura es $C^{\infty}(M)$–lineal en $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{s}$, y es alternante en $\mathbf{X},\mathbf{Y}$. La expresión local que se obtiene a continuación muestra, además, que su valor en $p$ sólo depende de $\mathbf{X}(p)$, $\mathbf{Y}(p)$ y $\mathbf{s}(p)$. Así, para cada $p \in M$ determina un mapeo trilineal continuo

$$\mathbf{R}^{\nabla}_{p} \colon T_pM \times T_pM \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_p \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}}_p.$$

Equivalentemente,

$$\mathbf{R}^{\nabla}_{p} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{alt}}\big(T_pM; \mathcal{L}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_p)\big).$$

En una carta y una trivialización, si $x$ representa a $p$, entonces

$$\mathbf{R}^{\nabla}_{x}(u,v)w = \Omega(x)(u,v)w, \tag{25.19}$$

donde

$$\begin{aligned}\Omega(x)(u,v) = {} & D\Gamma(x)[u](v) - D\Gamma(x)[v](u) \\ & + \Gamma(x)(u)\Gamma(x)(v) - \Gamma(x)(v)\Gamma(x)(u).\end{aligned}$$

En un cambio de carta y trivialización como el de la Proposición 25.5.2, se cumple

$$\widetilde{\Omega}(\chi(x))(D\chi(x)u, D\chi(x)v) = g(x)\Omega(x)(u,v)g(x)^{-1}. \tag{25.20}$$

*Demostración.* La antisimetría es inmediata. Para $f \in C^{\infty}(M)$, usamos

$$[f\mathbf{X},\mathbf{Y}] = f[\mathbf{X},\mathbf{Y}] - \mathbf{Y}(f)\mathbf{X}$$

y las reglas de Leibniz de la conexión para obtener $\mathbf{R}^{\nabla}(f\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{s} = f\mathbf{R}^{\nabla}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{s}$. La linealidad en la segunda dirección se deduce de la antisimetría. Asimismo, al expandir $\mathbf{R}^{\nabla}(\mathbf{X},\mathbf{Y})(f\mathbf{s})$, los términos con primeras derivadas de $f$ se cancelan y el restante de segundo orden es

$$\big(\mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) - [\mathbf{X},\mathbf{Y}](f)\big)\mathbf{s} = 0.$$

Estas identidades prueban la linealidad sobre funciones. La dependencia puntual y la continuidad se com-

prueban directamente con los coeficientes de la conexión. Denotemos por $U, V$ y $s$ las representaciones locales de los dos campos y de la sección; en las igualdades siguientes todos los mapeos y sus derivadas se evalúan en $x$. Aplicando dos veces (25.13), obtenemos

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{s})_{\varphi,\Phi} = {} & D^2 s[U,V] + Ds[DV[U]] + D\Gamma[U](V)s + \Gamma(DV[U])s \\ & + \Gamma(V)Ds[U] + \Gamma(U)Ds[V] + \Gamma(U)\Gamma(V)s.\end{aligned}$$

La expresión de $\nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s}$ se obtiene intercambiando $U$ y $V$. Al restarlas, los términos con $D^2 s$ se anulan por simetría, y los dos términos en los que una derivada de $s$ está multiplicada por $\Gamma$ aparecen en ambos miembros con el mismo signo. Los términos que contienen $DU$ o $DV$ suman

$$Ds[DV[U] - DU[V]] + \Gamma(DV[U] - DU[V])s = (\nabla_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{s})_{\varphi,\Phi}.$$

Al restar esta última expresión queda (25.19), ahora obtenida para campos y secciones arbitrarios. Por ello se pueden sustituir por campos constantes con los mismos valores sin cambiar el resultado. Para $u, v \in X$ y $w \in F$ la fórmula da la cota

$$\|\Omega(x)(u,v)w\|_F \leq \big(2\|D\Gamma(x)\| + 2\|\Gamma(x)\|^2\big)\|u\|_X\|v\|_X\|w\|_F.$$

Las normas de $\Gamma(x)$ y de $D\Gamma(x)$ son las de $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(F))$ y $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(F)))$, respectivamente. Esto prueba la continuidad trilineal; la suavidad en $x$ se sigue de la suavidad de $\Gamma$ y de la composición bilineal continua de operadores. Finalmente, como $\mathbf{R}^{\nabla}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{s}$ es una sección y es tensorial en sus tres argumentos, sus representaciones locales satisfacen (25.20); equivalentemente, la identidad se obtiene sustituyendo (25.14) y cancelando los términos que contienen derivadas de $g$ y de $\chi$. □

La definición y la prueba de tensorialidad corresponden a la Definición 2.10.1 y a la Proposición 2.10.2. Las cancelaciones algebraicas son literalmente las mismas. Lo que debe comprobarse adicionalmente en el marco de Banach es que $D\Gamma(x)[u](v)$ y los productos de operadores de (25.19) dependen suavemente de $x$ en norma de operadores; esto se sigue de la suavidad de $\Gamma$, de la bilinealidad continua de la evaluación y de la composición en $\mathcal{L}(F)$.

# 26

# Geometría de Hilbert y estructuras de Finsler

La existencia de un espacio tangente de Banach no proporciona por sí sola una noción de longitud. Conviene distinguir tres estructuras que suelen confundirse: una métrica riemanniana fuerte en una variedad de Hilbert, una métrica riemanniana débil y una estructura de Banach–Finsler. La primera permite transportar localmente la geometría riemanniana clásica mediante el isomorfismo de Riesz; la segunda puede carecer incluso de gradientes y de una conexión de Levi–Civita o una distancia que separe puntos; la tercera retiene el control métrico local que necesitan la completitud y los flujos de deformación. Al final se separa esta teoría de la geometría de Finsler clásica, cuya convexidad vertical conduce al spray geodésico y a la conexión de Chern. Las variedades se entienden con la convención de la Definición 24.1.1. En la geometría riemanniana y en la geometría de Finsler clásica se trabaja con estructuras diferenciables suaves; la regularidad menor necesaria para las aplicaciones variacionales se precisará en la sección de Banach–Finsler.

**Qué queda de la geometría riemanniana en dimensión infinita**

En dimensión finita, toda métrica riemanniana identifica vectores y covectores y produce una distancia localmente equivalente a las coordenadas. En una variedad de Hilbert esa identificación puede fallar si la métrica es débil. Esta diferencia, estudiada en la geometría infinitodimensional moderna, explica por qué algunos gradientes no existen, por qué la distancia puede degenerarse y por qué el teorema de Hopf–Rinow deja de tener sus equivalencias usuales. Las estructuras fuertes y Banach–Finsler recuperan parte del control necesario, pero cada conclusión debe probarse con sus hipótesis propias.

## 26.1 Variedades de Hilbert y métricas fuertes o débiles

Definición 26.1.1. Una **variedad de Hilbert** es una variedad de Banach cuyo espacio modelo es un espacio de Hilbert real $H$. Sea $M$ una variedad de Hilbert modelada sobre $H$. Una **métrica riemanniana débil suave** en $M$ es una familia $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_x)_{x\in M}$ de productos interiores continuos y definidos positivos en $T_xM$ tal que, en

toda trivialización de $TM$, el mapeo

$$x \longmapsto \mathbf{g}_x \in \mathcal{L}^2_s(H;\mathbb{R})$$

es suave. Su homomorfismo musical es

$$\flat_{\mathbf{g}} \colon TM \longrightarrow T'M, \qquad \flat_{\mathbf{g}}(v) = \mathbf{g}(v,\cdot).$$

Aquí $T'M$ es el haz de duales topológicos de la Definición 25.2.2; en coordenadas sus fibras se modelan sobre $H'$. La métrica es **fuerte** si cada norma $|v|_{\mathbf{g},x} = \mathbf{g}_x(v,v)^{\frac{1}{2}}$ induce la topología dada de $T_xM$; es **estrictamente débil** si no es fuerte. Así, "débil" significa aquí "no necesariamente fuerte". La positividad implica que $\flat_{\mathbf{g},x}$ es inyectivo, pero no que sea sobreyectivo.

Fijemos un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ en el espacio modelo de una variedad de Hilbert. En una carta existe un único operador positivo, inyectivo y autoadjunto $G(x) \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$\mathbf{g}_x(u,v) = \langle G(x)u, v\rangle_H. \tag{26.1}$$

Esta representación es la de la Proposición B.3.23, aplicada en cada punto. El mapeo $x \mapsto G(x)$ es suave. Después de identificar $H'$ con $H$ por Riesz, $\flat_{\mathbf{g},x}$ queda representado por $G(x)$. En particular, su imagen es densa. En efecto, como $G(x)$ es autoadjunto, $(\operatorname{Ran} G(x))^{\perp} = \ker(G(x)^*) = \ker G(x) = \{0\}$ y, por lo tanto,

$$\overline{\operatorname{Ran} G(x)} = \big(\ker G(x)\big)^{\perp} = H.$$

El rango puede, sin embargo, ser propio y no cerrado.

**Proposición 26.1.2.** Para una métrica riemanniana débil $\mathbf{g}$ en una variedad de Hilbert son equivalentes:

(i) $\mathbf{g}$ es fuerte;

(ii) $\flat_{\mathbf{g},x} \colon T_xM \longrightarrow T_x'M$ es un isomorfismo topológico para todo $x \in M$;

(iii) $\flat_{\mathbf{g}} \colon TM \longrightarrow T'M$ es un isomorfismo suave de haces vectoriales;

(iv) en torno de cada $x_0$ existe una carta y constantes $0 < c \le C$ tales que

$$c\|v\|_H \le |v|_{\mathbf{g},x} \le C\|v\|_H \quad \text{para todo } x \text{ de una vecindad de } x_0 \text{ y } v \in H.$$

(v) alrededor de cada punto existe una carta de Hilbert en la que el operador $G(x)$ de (26.1) pertenece a $\mathrm{GL}(H)$ para todo $x$ de su dominio; esta propiedad vale entonces en toda carta.

Además, si una variedad de Banach no vacía admite una métrica fuerte, su espacio modelo es isomorfo a un espacio de Hilbert.

*Demostración.* La norma de (26.1) induce la topología de $H$ si y sólo si existen $c, C > 0$ tales que

$$c^2\|v\|_H^2 \le \langle G(x)v, v\rangle_H \le C^2\|v\|_H^2.$$

La desigualdad inferior equivale a que $G(x)$ sea invertible. En efecto, si se cumple, $G(x)^{\frac{1}{2}}$ está acotado

inferiormente y tiene imagen cerrada y densa, por lo que es sobreyectivo. La implicación recíproca se deduce de la continuidad de $G(x)^{-\frac{1}{2}}$. Esto prueba las equivalencias puntuales entre (i), (ii) y (v).
Como $\mathrm{GL}(H)$ es abierto y la inversión es suave, la continuidad de $G$ y de $G^{-1}$ proporciona, después de reducir la carta, cotas uniformes para $\|G(x)\|$ y $\|G(x)^{-1}\|$. En concreto, si estas cotas son $A$ y $B$, respectivamente, pueden tomarse $C = A^{\frac{1}{2}}$ y $c = B^{-\frac{1}{2}}$ en (iv). La misma observación muestra que la inversa fibrada $\sharp_{\mathbf{g}} := \flat_{\mathbf{g}}^{-1}$ es suave. Así, (iii) es equivalente a las condiciones anteriores.
Para la última afirmación, denotemos por $X$ el espacio modelo, fijemos $x_0 \in M$ y transportemos $\mathbf{g}_{x_0}$ a $X$. Como la norma dada y la norma prehilbertiana $|\cdot|_{\mathbf{g},x_0}$ inducen la misma topología, existen $c_0, C_0 > 0$ tales que

$$c_0\|v\|_X \leq |v|_{\mathbf{g},x_0} \leq C_0\|v\|_X, \qquad v \in X.$$

Si $(v_n)$ es de Cauchy para $|\cdot|_{\mathbf{g},x_0}$, la desigualdad izquierda la hace de Cauchy para $\|\cdot\|_X$; converge entonces a algún $v \in X$, y la desigualdad derecha convierte esa convergencia en convergencia para $|\cdot|_{\mathbf{g},x_0}$. Por consiguiente, $X$, provisto de este producto interior, es un espacio de Hilbert, y la identidad entre ambas normas es un isomorfismo lineal topológico. □

**Ejemplo 26.1.3.** (Jerarquía de métricas de Sobolev) Sea $\mathbf{E} \longrightarrow K$ un haz vectorial real de rango finito positivo, provisto de una métrica fibrada y de una conexión compatible, sobre una variedad riemanniana compacta sin frontera $K$ y sea $A = I + (\nabla^{\mathbf{E}})^*\nabla^{\mathbf{E}}$. Supongamos que $K$ es no vacía. Para $s > 0$ y $0 \leq r \leq s$, sobre el espacio de Hilbert $H^s(K,\mathbf{E})$ consideremos la métrica constante

$$\mathbf{g}_{\mathbf{u}}^{(r)}(\mathbf{h},\mathbf{k}) := \left\langle A^{\frac{r}{2}}\mathbf{h}, A^{\frac{r}{2}}\mathbf{k}\right\rangle_{L^2(K,\mathbf{E})}. \tag{26.2}$$

Usamos aquí la norma espectral $\|\mathbf{h}\|_{H^t_A(K,\mathbf{E})} := \|A^{\frac{t}{2}}\mathbf{h}\|_{L^2(K,\mathbf{E})}$. Para cada $t \geq 0$ existen constantes $c_t, C_t > 0$, dependientes sólo de $K$, de las métricas, de la conexión y de $t$, tales que

$$c_t\|\mathbf{h}\|_{H^t(K,\mathbf{E})} \leq \|\mathbf{h}\|_{H^t_A(K,\mathbf{E})} \leq C_t\|\mathbf{h}\|_{H^t(K,\mathbf{E})}, \qquad \mathbf{h} \in H^t(K,\mathbf{E}).$$

Para los órdenes enteros pares, estas estimaciones son las del Corolario 11.5.1; los órdenes restantes se obtienen mediante la escala espectral e interpolación. En concreto, para $0 < t < 2m$, con $m \in \mathbb{N}$ y parámetro $\theta = t/(2m)$, se interpola entre $L^2(K,\mathbf{E})$ y el dominio de $A^m$. La Proposición 12.4.11 identifica el espacio interpolado con el dominio de $A^{t/2}$, mientras que la Proposición 13.3.11 lo identifica con $H^t(K,\mathbf{E})$. La compacidad de $K$ permite aplicar las hipótesis de geometría acotada de ese resultado. Es también el caso $p = 2$ del Teorema 14.5.6. La continuidad del encaje $H^s(K,\mathbf{E}) \hookrightarrow H^r(K,\mathbf{E})$ muestra que $\mathbf{g}^{(r)}$ es una métrica débil suave. Para $r = s$ es fuerte, pues su norma es una de las normas que definen $H^s(K,\mathbf{E})$.
Supongamos que $K$ tiene dimensión positiva. Si $A\mathbf{e}_j = \lambda_j\mathbf{e}_j$, con $(\mathbf{e}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ortonormal en $L^2(K,\mathbf{E})$ y $\lambda_j \to \infty$ cuando $j \to \infty$, entonces

$$\mathbf{h}_j := \lambda_j^{-\frac{s}{2}}\mathbf{e}_j, \qquad \|\mathbf{h}_j\|_{H^s_A(K,\mathbf{E})} = 1, \qquad |\mathbf{h}_j|_{\mathbf{g}^{(r)}} = \lambda_j^{\frac{r-s}{2}}.$$

Por consiguiente, $\mathbf{g}^{(r)}$ es estrictamente débil para $r < s$. Respecto del producto interior de $H^s(K,\mathbf{E})$, su operador métrico es $A^{r-s}$, que es inyectivo y tiene imagen densa, pero no es sobreyectivo. En particular, hay covectores continuos sobre $H^s(K,\mathbf{E})$ que no poseen gradiente respecto de $\mathbf{g}^{(r)}$.

**Ejemplo 26.1.4.** (La métrica $L^2$) El caso $r = 0$ de (26.2) es

$$\mathbf{g}^{(0)}_{\mathbf{u}}(\mathbf{h},\mathbf{k}) = \int_K \langle \mathbf{h},\mathbf{k}\rangle_{\mathbf{E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Su mapeo musical es la inclusión

$$H^s(K,\mathbf{E}) \longrightarrow H^{-s}(K,\mathbf{E}), \qquad \mathbf{h} \longmapsto \big[\mathbf{k} \longmapsto (\mathbf{h},\mathbf{k})_{L^2(K,\mathbf{E})}\big].$$

Si $\dim K > 0$, la imagen es propia, como se comprobó en el ejemplo anterior para $r = 0 < s$. Así, el uso de una integral $L^2$ en un espacio de configuraciones de regularidad $H^s(K,\mathbf{E})$ no convierte automáticamente esa métrica en fuerte. Por contraste, la métrica $\mathbf{g}^{(s)}$ sí identifica $H^s(\mathbf{E})$ con su dual mediante Riesz.

La obstrucción musical es independiente de la noción de suavidad elegida para los espacios de funciones. En particular, pasar al cálculo conveniente en espacios de Fréchet, desarrollado en [88], no vuelve sobreyectivo un mapeo musical que no lo era. La teoría conveniente y la teoría fuerte de Hilbert resuelven problemas distintos. Una comparación moderna de las categorías de cálculo infinito–dimensional y de la geometría riemanniana débil se encuentra en [129, Cap. 4 y Apéndices C y E]. En este libro, sin embargo, todos los mapeos entre abiertos de Banach se interpretan en el cálculo de Fréchet establecido en el Capítulo 23; el cálculo conveniente no se adopta como premisa.

## 26.2 Conexión, geodésicas y variación en el caso fuerte

Sea $\mathbf{g}$ fuerte y escribamos $Dg(x)[u](v,w)$ para la derivada de su representante local $g$. Para $x \in U$ y $u,v \in H$, definimos el covector

$$\mathscr{K}_x(u,v)(w) := \frac{1}{2}\big(Dg(x)[u](v,w) + Dg(x)[v](u,w) - Dg(x)[w](u,v)\big). \tag{26.3}$$

Con la norma de operadores multilineales se tiene

$$\|\mathscr{K}_x(u,v)\|_{H'} \le \frac{3}{2}\|Dg(x)\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{L}^2_s(H;\mathbb{R}))}\|u\|_H\|v\|_H. \tag{26.4}$$

En efecto, cada uno de los tres sumandos de (26.3) está acotado por el producto que aparece a la derecha antes del factor $\frac{1}{2}$. La reagrupación continua de operadores multilineales muestra entonces que $x \mapsto \mathscr{K}_x \in \mathcal{L}^2_s(H;H')$ es suave. En particular, el mapeo $(x,u,v) \mapsto \mathscr{K}_x(u,v)$ es suave, bilineal y simétrico en $(u,v)$. Como $\flat_{\mathbf{g},x}$ es sobreyectivo, existe un único vector $\Gamma_x(u,v) = \sharp_{\mathbf{g},x}\mathscr{K}_x(u,v)$ tal que

$$2g_x\big(\Gamma_x(u,v),w\big) = Dg(x)[u](v,w) + Dg(x)[v](u,w) - Dg(x)[w](u,v). \tag{26.5}$$

La Definición 2.4.8 y el Teorema 2.4.10 son el modelo finito–dimensional de la construcción siguiente. Su expresión local y su ley de cambio de coordenadas aparecen en el Corolario 2.4.11 y el Lema 2.4.12. La identidad de Koszul y el cálculo de cambios de carta son los mismos; el paso nuevo es que su miembro derecho es inicialmente un elemento de $H'$ y sólo la fuerza de la métrica permite aplicarle $\sharp_{\mathbf{g}}$ en norma de operadores.

**Teorema 26.2.1.** (Levi–Civita fuerte) Toda métrica riemanniana fuerte y suave en una variedad de Hilbert posee una única conexión $\nabla$ sin torsión y compatible con $\mathbf{g}$. Si $X, Y$ son los representantes locales de los campos $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, entonces

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_{\varphi}(x) = DY(x)X(x) + \Gamma_x(X(x), Y(x)),$$

donde $\Gamma$ está determinada por (26.5). Equivalentemente, para campos suaves $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ satisface la fórmula de Koszul

$$2\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{X}\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{Y}\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) - \mathbf{Z}\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbf{g}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) - \mathbf{g}([\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}) - \mathbf{g}([\mathbf{X}, \mathbf{Z}], \mathbf{Y}).$$

Si $\tau$ es un cambio de coordenadas entre abiertos de espacios de Hilbert, los símbolos correspondientes satisfacen la ley completa

$$\widetilde{\Gamma}_{\tau(x)}\big(D\tau(x)u, D\tau(x)v\big) = D\tau(x)\Gamma_x(u, v) - D^2\tau(x)(u, v). \tag{26.6}$$

Equivalentemente, si $\sigma = \tau^{-1}$ y $y = \tau(x)$,

$$\widetilde{\Gamma}_y(a, b) = D\tau(\sigma(y))\Gamma_{\sigma(y)}\big(D\sigma(y)a, D\sigma(y)b\big) + D\tau(\sigma(y))D^2\sigma(y)(a, b).$$

*Demostración.* En una carta, el mapeo musical depende suavemente del punto y toma valores en el abierto de los isomorfismos lineales $H \longrightarrow H'$. Como la inversión es suave en ese abierto, $x \mapsto \sharp_{\mathbf{g},x} \in \mathcal{L}(H'; H)$ es suave. La construcción anterior puede escribirse como

$$\Gamma_x = \sharp_{\mathbf{g},x} \circ \mathscr{K}_x.$$

La composición continua de operadores, junto con (26.4), demuestra que $x \mapsto \Gamma_x \in \mathcal{L}^2_s(H; H)$ es suave. La fórmula local satisface explícitamente, para $f, h \in C^\infty(U)$ y $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\nabla_{f\mathbf{X}+h\mathbf{Z}}\mathbf{Y} &= f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + h\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y},\\
\nabla_{\mathbf{X}}(a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z}) &= a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + b\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z},\\
\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) &= \mathbf{X}(f)\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},
\end{aligned}$$

pues $DY$ es lineal en la dirección, $\Gamma_x$ es bilineal y, si $\widehat{f} = f \circ \varphi^{-1}$, la regla del producto da $D(\widehat{f}Y)[X] = D\widehat{f}[X]Y + \widehat{f}DY[X]$. Son, por lo tanto, exactamente los axiomas de la Definición 25.5.1, una vez comprobada la invariancia de las expresiones locales.

Sean ahora los representantes de los campos en las segundas coordenadas, $\widetilde{X}(y) = D\tau(\sigma(y))X(\sigma(y))$ y $\widetilde{Y}(y) = D\tau(\sigma(y))Y(\sigma(y))$. La regla de la cadena da

$$\begin{aligned}
D\widetilde{Y}(\tau(x))\widetilde{X}(\tau(x)) = {}& D^2\tau(x)(X(x), Y(x))\\
&+ D\tau(x)DY(x)X(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = D\tau(\nabla_X Y)$ entre las expresiones locales es equivalente precisamente a (26.6). Para verificarla a partir de la métrica, fijemos $x$, pongamos $y = \tau(x)$, $A = D\tau(x)$ y $B = D^2\tau(x)$. La transforma-

ción de la métrica es $g_x(v,w) = \widetilde{g}_y(Av, Aw)$. Al derivar en la dirección $u$,

$$Dg(x)[u](v,w) = D\widetilde{g}(y)[Au](Av, Aw) + \widetilde{g}_y(B(u,v), Aw) + \widetilde{g}_y(Av, B(u,w)).$$

En la combinación que define $2\mathscr{K}_x(u,v)(w)$, los términos con $B(u,w)$ se cancelan con los de $B(w,u)$, y los de $B(v,w)$ con los de $B(w,v)$. Los dos términos restantes son iguales por la simetría de $B$. Por tanto,

$$\mathscr{K}_x(u,v)(w) = \widetilde{\mathscr{K}_y}(Au, Av)(Aw) + \widetilde{g}_y(B(u,v), Aw).$$

Sustituyendo $\mathscr{K}_x(u,v)(w) = g_x(\Gamma_x(u,v), w)$ y la igualdad análoga para $\widetilde{\mathscr{K}}$, se obtiene

$$\widetilde{g}_y\big(A\Gamma_x(u,v) - \widetilde{\Gamma}_y(Au, Av) - B(u,v), Aw\big) = 0.$$

Como $A$ es sobreyectivo y $\widetilde{g}_y$ es no degenerada, el primer argumento debe ser cero. Ésta es (26.6); así, las expresiones locales se pegan y definen una conexión.
La simetría de $\Gamma_x$ muestra, en coordenadas,

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X})_\varphi = DY[X] - DX[Y] = [\mathbf{X},\mathbf{Y}]_\varphi,$$

de modo que la torsión es nula. Por otra parte, la regla del producto da

$$(\mathbf{X}\mathbf{g}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})) \circ \varphi^{-1} = Dg[X](Y,Z) + g(DY[X], Z) + g(Y, DZ[X]).$$

Al sumar las identidades (26.5) para $(X,Y,Z)$ y $(X,Z,Y)$, los términos $Dg[Y](X,Z)$ y $Dg[Z](X,Y)$ aparecen una vez con cada signo; por la simetría de $g$, se cancelan y queda

$$Dg[X](Y,Z) = g(\Gamma(X,Y), Z) + g(Y, \Gamma(X,Z)).$$

Las dos últimas fórmulas prueban la compatibilidad métrica. Recíprocamente, la compatibilidad y la ausencia de torsión implican la fórmula de Koszul mediante el mismo cálculo algebraico del Teorema 2.4.10. Si $\nabla$ y $\widetilde{\nabla}$ tuvieran las mismas propiedades, la fórmula de Koszul daría $\mathbf{g}((\nabla_{\mathbf{X}} - \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}})\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = 0$ para todo campo $\mathbf{Z}$; la no degeneración de $\mathbf{g}$ concluye la unicidad. □

**Proposición 26.2.2.** (Criterio musical en el caso débil) Sea $\mathbf{g}$ una métrica riemanniana débil en una variedad de Hilbert. Existe una conexión de Levi–Civita para $\mathbf{g}$ si y sólo si, en un atlas, los covectores de (26.3) pertenecen a $\operatorname{Im} \flat_{\mathbf{g},x}$ y sus únicas preimágenes

$$\Gamma_x(u,v) := \flat_{\mathbf{g},x}^{-1}\mathscr{K}_x(u,v)$$

dependen suavemente de $(x,u,v)$. Equivalentemente, se exige suavidad de $x \mapsto \Gamma_x$ con valores en $\mathcal{L}^2_s(H;H)$ y su norma de operadores. Cuando existe, la conexión es única.

*Demostración.* La necesidad se obtiene aplicando la fórmula de Koszul a campos constantes en una carta. Comprobemos la equivalencia de las dos formulaciones de suavidad. Una familia suave en norma produce

una evaluación conjunta suave por la evaluación multilineal continua. Recíprocamente, si $H_0(x,u,v) := \Gamma_x(u,v)$ es suave y bilineal en $(u,v)$, entonces

$$\Gamma_x(u,v) = D_v D_u H_0(x,0,0)[u,v].$$

La derivada de Fréchet del miembro derecho depende suavemente de $x$ en norma de operadores bilineales. Por ello $\Gamma$ tiene exactamente la regularidad requerida en la Definición 25.5.1. La hipótesis permite, por tanto, definir los coeficientes de una conexión. Al cambiar de coordenadas, ambos miembros de (26.6), después de aplicar $\flat_{\mathbf{g}}$, coinciden por la regla de la cadena. Como $\flat_{\mathbf{g}}$ es inyectivo, se cumple dicha ley y las expresiones locales definen una conexión. La prueba del Teorema 26.2.1 demuestra compatibilidad, ausencia de torsión y unicidad a partir de la fórmula de Koszul y de la inyectividad del mapeo musical. □

El criterio explica exactamente la dificultad débil. La métrica constante $\mathbf{g}^{(r)}$ del Ejemplo 26.1.3 tiene $D\mathbf{g}^{(r)} = 0$ y, por lo tanto, admite la conexión plana $\Gamma = 0$, aunque sea estrictamente débil cuando $r < s$. En una métrica débil variable, en cambio, $\mathscr{K}_x(u,v)$ puede quedar fuera de la imagen musical. No hay entonces ningún vector que pueda desempeñar el papel de $\Gamma_x(u,v)$.

Sea $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ una curva $C^1$ y sea $\mathbf{V}$ un campo $C^1$ a lo largo de $\gamma$. Aplicamos al haz $TM$ la Definición 25.6.1 y escribimos $\nabla_t \mathbf{V} := \frac{D^{\nabla}\mathbf{V}}{dt}$. En una carta,

$$\nabla_t \mathbf{V} := \dot{V}(t) + \Gamma_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), V(t)),$$

La independencia de la carta y la regla de Leibniz son la Proposición 25.6.2. La compatibilidad métrica añade, para todo campo $\mathbf{W}$ a lo largo de $\gamma$, la segunda de las reglas

$$\nabla_t(f\mathbf{V}) = f'\mathbf{V} + f\nabla_t\mathbf{V}, \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{g}(\mathbf{V},\mathbf{W}) = \mathbf{g}(\nabla_t\mathbf{V},\mathbf{W}) + \mathbf{g}(\mathbf{V},\nabla_t\mathbf{W}).$$

El Teorema 25.6.3, aplicado a $TM$, da existencia y unicidad de los campos que satisfacen $\nabla_t\mathbf{V} = 0$, así como los isomorfismos lineales topológicos

$$P^{\gamma}_{s,t} := P^{\nabla}_{\gamma,s\to t}\colon T_{\gamma(s)}M \longrightarrow T_{\gamma(t)}M, \qquad P^{\gamma}_{r,t}P^{\gamma}_{s,r} = P^{\gamma}_{s,t}, \qquad (P^{\gamma}_{s,t})^{-1} = P^{\gamma}_{t,s}.$$

Para identificar la propiedad adicional que aporta Levi–Civita, sean $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ los campos paralelos con datos $u$ y $v$ en el tiempo $s$. La compatibilidad métrica da

$$\frac{d}{dt}\mathbf{g}_{\gamma(t)}(\mathbf{U}(t),\mathbf{V}(t)) = \mathbf{g}(\nabla_t\mathbf{U},\mathbf{V}) + \mathbf{g}(\mathbf{U},\nabla_t\mathbf{V}) = 0.$$

Por consiguiente, para $s,t \in [a,b]$ y $u,v \in T_{\gamma(s)}M$, $\mathbf{g}_{\gamma(t)}(P^{\gamma}_{s,t}u, P^{\gamma}_{s,t}v) = \mathbf{g}_{\gamma(s)}(u,v)$ y el transporte paralelo es una isometría. Esta es la misma deducción que, en dimensión finita, completa los Teoremas 2.7.5 y 2.7.12 y la Proposición 2.7.14; la existencia e invertibilidad en el caso presente proceden, en cambio, de la EDO lineal en el espacio de Banach demostrada en el capítulo anterior.

Si $\mathbf{T}_\gamma := \dot\gamma$ denota el campo tangente, una curva $C^2$ es una **geodésica afín** si $\nabla_t\mathbf{T}_\gamma = 0$. En coordenadas, esta condición es

$$\ddot\gamma + \Gamma_\gamma(\dot\gamma,\dot\gamma) = 0. \tag{26.7}$$

Toda geodésica afín tiene rapidez constante, pues $\frac{d}{dt}|\mathbf{T}_\gamma|^2_{\mathbf{g}} = 2\mathbf{g}(\nabla_t\mathbf{T}_\gamma,\mathbf{T}_\gamma) = 0$. Esta definición y su expresión local

son los análogos de la Definición 2.8.1; la novedad analítica posterior es resolver la ecuación en un espacio de Banach, no el cálculo que la produce.

**Definición 26.2.3.** (Spray) Sea $M$ una variedad suave de Banach. Sea $h_t\colon TM \longrightarrow TM$ la homotecia fibrada $h_t(v) = tv$. Un **spray** es un campo vectorial suave $\mathbf{S}$ sobre $TM$ que cumple

$$T\pi \circ \mathbf{S} = \mathrm{id}_{TM}, \qquad \mathbf{S}(h_t(v)) = Th_t\big(t\mathbf{S}(v)\big)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $v \in TM$. En una carta se escribe

$$\mathbf{S}(x,v) = \big((x,v),(v,Q_x(v))\big), \qquad Q_x(tv) = t^2 Q_x(v).$$

La suavidad en la sección cero implica que $Q_x(v)$ es la diagonal de una forma bilineal simétrica continua. En efecto, para $v$ fijo, $Q_x(tv) = t^2 Q_x(v)$ implica, al derivar dos veces en $t = 0$,

$$Q_x(v) = \frac{1}{2} D_v^2 Q_x(0)(v,v).$$

La segunda derivada es simétrica, bilineal y continua; además, depende suavemente de $x$ en norma de operadores por el cálculo de Fréchet. Un campo que sólo satisface la primera condición se denomina un campo de segundo orden.

El spray de Levi–Civita está dado por

$$\mathbf{S}_{\mathbf{g}}(x,v) = \big((x,v),(v,-\Gamma_x(v,v))\big). \tag{26.8}$$

La ley (26.6) es exactamente la que garantiza que estas expresiones se peguen. Una curva $\gamma$ satisface (26.7) si y sólo si $t \mapsto \dot\gamma(t)$ es una curva integral de $\mathbf{S}_{\mathbf{g}}$.

**Proposición 26.2.4.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad de Hilbert con métrica riemanniana fuerte. Para cada $v \in T_xM$ existe una única geodésica maximal $\gamma_v$ con $\gamma_v(0) = x$ y $\dot\gamma_v(0) = v$. Su dominio es un intervalo abierto que contiene $0$, y la dependencia respecto de $(t,v)$ es suave en el dominio maximal. El conjunto

$$\mathcal{D} := \{v \in TM \mid \gamma_v \text{ está definida en } [0,1]\}$$

es abierto, contiene la sección cero y el mapeo

$$\exp\colon \mathcal{D} \longrightarrow M, \qquad \exp(v) := \gamma_v(1)$$

es suave. Además, $d(\exp_x)_0 = \mathrm{id}_{T_xM}$; por lo tanto, $\exp_x$ es un difeomorfismo entre vecindades del origen y de $x$.

*Demostración.* En coordenadas, (26.7) equivale al sistema de primer orden $(\dot x, \dot v) = (v, -\Gamma_x(v,v))$. El Teorema 25.4.2 aplicado al spray da existencia, unicidad, apertura del dominio maximal y dependencia suave de los datos. La homogeneidad del spray y la unicidad proporcionan la identidad de escala

$$\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp_x(tv) \tag{26.9}$$

cuando los miembros están definidos. En particular,

$$d(\exp_x)_0(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_x(tv) = \dot\gamma_v(0) = v.$$

La igualdad de escala es el mismo paso geométrico del Lema 2.8.5. El Teorema 23.3.3 concluye que $\exp_x$ es un difeomorfismo entre vecindades de 0 y de $x$. En dimensión finita, el campo geodésico, la existencia maximal y el mapeo exponencial aparecen en la Proposición 2.8.2, el Teorema 2.8.3 y la Definición 2.8.6, con sus propiedades en la Proposición 2.8.7. El argumento diferencial es idéntico; aquí se usan el flujo y la función inversa en Banach. □

Para una curva absolutamente continua cuya velocidad tiene norma integrable definimos la longitud; si además $|\dot\gamma|_{\mathbf g}^2$ es integrable, definimos la energía mediante

$$L_{\mathbf g}(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma|_{\mathbf g}\, dt, \qquad E_{\mathbf g}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b |\dot\gamma|_{\mathbf g}^2\, dt.$$

La desigualdad de Cauchy–Schwarz da

$$L_{\mathbf g}(\gamma)^2 \le 2(b-a)E_{\mathbf g}(\gamma), \tag{26.10}$$

con igualdad si y sólo si la rapidez es constante casi en todas partes.

**Proposición 26.2.5.** (Primera variación) Sea $(M,\mathbf g)$ una variedad de Hilbert con métrica riemanniana fuerte y conexión de Levi–Civita. Sea $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\longrightarrow M$ una variación suave, $\mathbf T = \partial_t\alpha$, $\mathbf V = \partial_s\alpha$ y $\gamma = \alpha_0$. En los miembros derechos siguientes, $\mathbf T$ y $\mathbf V$ se evalúan en $s=0$. Entonces

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} E_{\mathbf g}(\alpha_s) = \big[\mathbf g(\mathbf V,\mathbf T)\big]_a^b - \int_a^b \mathbf g\big(\mathbf V, \nabla_t\mathbf T\big)\, dt.$$

Las mismas fórmulas valen para variaciones de clase $C^2$. Si $\mathbf T$ no se anula a lo largo de $\gamma$, también se cumple

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L_{\mathbf g}(\alpha_s) = \left[\frac{\mathbf g(\mathbf V,\mathbf T)}{|\mathbf T|_{\mathbf g}}\right]_a^b - \int_a^b \mathbf g\left(\mathbf V, \nabla_t\frac{\mathbf T}{|\mathbf T|_{\mathbf g}}\right) dt. \tag{26.11}$$

En consecuencia, una curva $C^2$ es crítica de la energía entre extremos fijos si y sólo si es geodésica afín. Una curva regular es crítica de la longitud entre extremos fijos si y sólo si su parametrización por longitud de arco es una geodésica afín.

*Demostración.* Fijemos $0<\delta<\varepsilon$ y restrinjamos la variación al rectángulo compacto $[-\delta,\delta]\times[a,b]$. La función $(s,t)\mapsto \mathbf g_{\alpha(s,t)}(\mathbf T(s,t),\mathbf T(s,t))$ es suave y, para una variación $C^2$, es al menos $C^1$. La derivación bajo el signo integral está, por lo tanto, justificada por continuidad uniforme de su derivada parcial. La compatibilidad métrica da

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} E_{\mathbf g}(\alpha_s) = \int_a^b \mathbf g(\nabla_s\mathbf T,\mathbf T)\, dt.$$

La ausencia de torsión y la igualdad $[\partial_s,\partial_t]=0$ en el dominio de parámetros implican $\nabla_s\mathbf T = \nabla_t\mathbf V$. Usando

ahora la compatibilidad métrica una segunda vez,

$$\int_a^b \mathbf{g}(\nabla_t \mathbf{V}, \mathbf{T})\,dt = \int_a^b \Big( \frac{d}{dt}\mathbf{g}(\mathbf{V},\mathbf{T}) - \mathbf{g}(\mathbf{V}, \nabla_t \mathbf{T}) \Big)\,dt = \big[\mathbf{g}(\mathbf{V},\mathbf{T})\big]_a^b - \int_a^b \mathbf{g}(\mathbf{V}, \nabla_t \mathbf{T})\,dt,$$

que es la fórmula para la energía, incluidos sus términos de frontera.

Si $\mathbf{T}$ no se anula a lo largo de $\gamma$, la compacidad de $[a,b]$ y la continuidad permiten reducir $\varepsilon$ de modo que $|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}$ permanezca separado de cero. Se puede derivar de nuevo bajo el signo integral y

$$\partial_s |\mathbf{T}|_{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{g}(\nabla_s \mathbf{T}, \mathbf{T})}{|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}} = \mathbf{g}\left( \nabla_t \mathbf{V}, \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}} \right).$$

La identidad

$$\frac{d}{dt}\mathbf{g}\left( \mathbf{V}, \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}} \right) = \mathbf{g}\left( \nabla_t \mathbf{V}, \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}} \right) + \mathbf{g}\left( \mathbf{V}, \nabla_t \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}} \right)$$

y la integración sobre $[a,b]$ prueban (26.11).

Para justificar la consecuencia variacional sin presuponer que todo campo a lo largo de $\gamma$ procede de una variación global, fijemos un subintervalo compacto $J \subset (a,b)$ cuya imagen esté contenida en una carta $\varphi\colon U \longrightarrow H$. Si $\mathbf{W}$ es un campo suave a lo largo de $\gamma$, con soporte contenido en el interior de $J$, para $|s|$ pequeño definimos en $J$

$$\alpha(s,t) := \varphi^{-1}\big( \varphi(\gamma(t)) + s\, d\varphi_{\gamma(t)} \mathbf{W}(t) \big)$$

y ponemos $\alpha(s,t) = \gamma(t)$ fuera de $J$. La compacidad del soporte permite elegir un mismo intervalo de valores de $s$, y la anulación de $\mathbf{W}$ en una vecindad de los extremos de $J$ hace suave el pegado. Si la curva central es sólo $C^2$, se toman campos $C^2$ a lo largo de ella y el mismo pegado produce una variación $C^2$; la fórmula de primera variación sigue siendo aplicable. Esta variación tiene campo variacional $\mathbf{W}$ y extremos fijos.

Si la primera variación de la energía se anula para todas estas variaciones, fijemos $z \in H$ y tomemos

$$\mathbf{W}(t) = \chi(t)(d\varphi_{\gamma(t)})^{-1} z, \qquad \chi \in C_c^\infty(\mathring{J}).$$

La fórmula ya demostrada y el lema fundamental del cálculo de variaciones implican

$$\mathbf{g}_{\gamma(t)}\big( (d\varphi_{\gamma(t)})^{-1} z, \nabla_t \mathbf{T}(t) \big) = 0, \qquad t \in \mathring{J}.$$

Como $z$ es arbitrario y $d\varphi_{\gamma(t)}$ es un isomorfismo, la no degeneración de $\mathbf{g}$ da $\nabla_t \mathbf{T} = 0$. Para la longitud, el mismo argumento aplicado a $\nabla_t\big(\frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}}\big)$ da $\nabla_t\big(\frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}}\big) = 0$. Al parametrizar por longitud de arco, este último campo es el vector tangente y la identidad se convierte en la ecuación geodésica afín. Las recíprocas se leen directamente en las fórmulas de variación.

La compatibilidad métrica y la derivada a lo largo de curvas son las de la Definición 2.4.8 y del Teorema 2.7.5; el argumento de diferenciación e integración es el mismo en dimensión finita. La construcción de variaciones usa una carta de Hilbert y funciones de corte en el intervalo del parámetro; por ello es válida aunque la variedad no sea localmente compacta. □

Para $p, q$ en la misma componente conexa, sea

$$d_{\mathbf{g}}(p,q) := \inf\{ L_{\mathbf{g}}(\gamma) \mid \gamma \text{ es una curva } C^1 \text{ por tramos de } p \text{ a } q \}.$$

**Proposición 26.2.6.** En cada componente conexa de una variedad riemanniana fuerte de Hilbert, $d_{\mathbf{g}}$ es una distancia finita que induce la topología de la variedad.

*Demostración.* Fijemos $x_0$ y una carta $\varphi\colon U \longrightarrow H$ con $\varphi(x_0) = 0$. Por la Proposición 26.1.2, después de reducir $U$ existen $c, C > 0$ tales que

$$c\|w\|_H \le |d\varphi_x^{-1} w|_{\mathbf{g},x} \le C\|w\|_H$$

para todo $x \in U$ y $w \in H$. Elijamos $r > 0$ de modo que $B_H(0,3r) \subseteq \varphi(U)$ y pongamos $V := \varphi^{-1}(B_H(0,\frac{r}{2}))$. Si $x, y \in V$, el segmento que une sus coordenadas permanece en $B_H(0,\frac{r}{2})$, y su levantamiento tiene longitud a lo sumo $C\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_H$.

Sea ahora $\gamma$ una curva $C^1$ por tramos de $x$ a $y$. Mientras $\gamma$ permanezca en $\varphi^{-1}(B_H(0,2r))$, la regla de la cadena da

$$c\|\varphi(\gamma(t_1)) - \varphi(\gamma(t_0))\|_H \le L_{\mathbf{g}}\big(\gamma\restriction_{[t_0,t_1]}\big). \tag{26.12}$$

Justifiquemos que una curva que abandona esa bola alcanza su esfera coordenada antes de salir de la carta. Sea $t_1$ el extremo del intervalo inicial durante el cual la curva permanece en la bola. Para $s < t < t_1$, (26.12) acota la diferencia de sus coordenadas por $c^{-1}$ veces la longitud del tramo $[s,t]$. Esa longitud tiende a cero cuando $s, t \nearrow t_1$, porque la rapidez es integrable. Las coordenadas tienen entonces un límite en el espacio completo $H$, de norma a lo sumo $2r$. Ese límite pertenece a $\varphi(U)$, pues $\overline{B_H(0,2r)} \subset B_H(0,3r) \subset \varphi(U)$. La continuidad de $\varphi^{-1}$ y de $\gamma$, junto con la propiedad de Hausdorff de $M$, identifica $\gamma(t_1)$ con la preimagen del límite. Si se produce una salida, su norma debe ser $2r$: una norma menor permitiría prolongar el intervalo dentro de la bola.

Si la curva no abandona esa bola, al tomar sus extremos obtenemos $L_{\mathbf{g}}(\gamma) \ge c\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_H$. Si la abandona, la continuidad de $\|\varphi \circ \gamma\|_H$ proporciona un primer tiempo $t_1$ en el que vale $2r$. Como $\|\varphi(x)\|_H < \frac{r}{2}$, la desigualdad (26.12) implica

$$L_{\mathbf{g}}(\gamma) \ge c\big(2r - \|\varphi(x)\|_H\big) > \frac{3cr}{2}.$$

Por otra parte, $\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_H < r$, de modo que esta última cota es mayor que $c\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_H$. Tomando el ínfimo sobre todas las curvas se obtiene

$$c\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_H \le d_{\mathbf{g}}(x,y) \le C\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_H$$

para $x, y \in V$. Para controlar también los puntos exteriores a $V$, aplicamos el mismo argumento de salida a la bola de radio $r/2$, con punto inicial $x_0$. Toda curva de $x_0$ a un punto de $M \setminus V$ tiene longitud al menos $cr/2$. Por consiguiente, $B_{d_{\mathbf{g}}}(x_0, cr/2) \subseteq V$. La desigualdad superior local prueba que la convergencia en coordenadas implica convergencia en distancia; esta inclusión y la desigualdad inferior prueban la implicación inversa. También separan $x_0$ de cualquier otro punto. La simetría se obtiene invirtiendo curvas y la desigualdad triangular concatenándolas. Las clases de puntos unidos por curvas $C^1$ por tramos son abiertas; la conexidad de la componente muestra que sólo hay una y prueba la finitud.

La definición finito–dimensional correspondiente y la conclusión métrica se encuentran en la Definición 2.9.2 y el Teorema 2.9.4. El segmento coordenado da la cota superior; el argumento de primera salida da la cota inferior mediante la comparación local de normas, sin requerir que las bolas sean compactas. □

Para una métrica débil sólo se obtiene en general una seudodistancia: la positividad de la longitud de cada

curva no impide que existan curvas entre dos puntos distintos con longitudes arbitrariamente pequeñas.

La parte local de la geometría riemanniana sobrevive en el caso fuerte; la parte global no lo hace automáticamente.

**Proposición 26.2.7.** (La implicación de Hopf–Rinow que sobrevive) Toda variedad riemanniana fuerte y métricamente completa es geodésicamente completa.

*Demostración.* Sea $\gamma\colon [0,b) \longrightarrow M$ una geodésica maximal con $b < \infty$. Su rapidez es constante, así que $d_{\mathbf{g}}(\gamma(s),\gamma(t)) \le |t-s|\|\dot\gamma(0)|_{\mathbf{g}}$. Por completitud, $\gamma(t)$ converge a un punto $q$ cuando $t \nearrow b$. Elijamos una carta $\varphi\colon U \longrightarrow H$ en torno de $q$. Después de reducirla, existen $c, C, K > 0$ tales que

$$c\|w\|_H \le |d\varphi_x^{-1} w|_{\mathbf{g},x} \le C\|w\|_H, \qquad \|\Gamma_x\|_{\mathcal{L}^2_s(H;H)} \le K$$

para $x \in U$ y $w \in H$. Para $t$ suficientemente próximo a $b$, la curva permanece en esa carta. Si su rapidez constante es $a$, entonces $\|(\varphi\circ\gamma)'(t)\|_H \le \frac{a}{c}$ y la ecuación geodésica da

$$\|(\varphi\circ\gamma)''(t)\|_H \le K\left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

Así, $(\varphi\circ\gamma)'(t)$ es de Cauchy cuando $t \nearrow b$ y converge a algún $v \in H$. En la trivialización coordenada, el estado converge a $(\varphi(q), v)$; por lo tanto, $(\gamma(t),\dot\gamma(t))$ converge a $(q, (d\varphi_q)^{-1}v) \in TM$. La existencia local para el spray prolonga la geodésica más allá de $b$, contradicción.

En dimensión finita, esta es una de las implicaciones del Teorema 2.9.9. Aquí sólo se reutilizan la rapidez constante y la existencia local de la EDO; no se usa compacidad de bolas cerradas, que falta en un espacio de Hilbert infinito–dimensional. □

**Ejemplo 26.2.8.** (Completitud sin geodésica minimizante) Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canónica de $\ell^2$, sea $a_1 = 1$ y $a_n = 1 + 2^{-n}$ para $n \ge 2$, y consideremos el elipsoide

$$\mathcal{E} := \left\{ x = (x_n) \in \ell^2 \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1 \right\}$$

con la métrica inducida por $\ell^2$. Es una subvariedad de Hilbert: la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2/a_n^2$ es una forma cuadrática continua, por tanto suave, y $Df(x)[x] = 2$ en el nivel $f = 1$. Su diferencial es allí sobreyectivo sobre $\mathbb{R}$ y tiene núcleo complementado. El teorema del valor regular del Capítulo 24 proporciona la estructura de subvariedad. La métrica inducida es fuerte, porque usa la norma de $\ell^2$ sobre cada subespacio tangente cerrado. El operador $A(x_n) = (a_n x_n)$ es un isomorfismo lineal acotado, envía la esfera unidad sobre $\mathcal{E}$ y satisface

$$\|v\|_{\ell^2} \le \|Av\|_{\ell^2} \le (1 + 2^{-2})\|v\|_{\ell^2}.$$

Si $d_{\mathbb{S}}$ es la distancia intrínseca de la esfera unidad y $d_{\mathcal{E}}$ la de $\mathcal{E}$, la comparación de longitudes da, para $x, y$ en la esfera,

$$d_{\mathbb{S}}(x,y) \le d_{\mathcal{E}}(Ax,Ay) \le \frac{5}{4} d_{\mathbb{S}}(x,y).$$

La esfera de Hilbert es completa: la distancia ambiente satisface $\|x-y\|_{\ell^2} \le d_{\mathbb{S}}(x,y)$ y, si $\|x-y\|_{\ell^2} < 1$, el

arco del círculo máximo contenido en $\operatorname{span}\{x,y\}$ tiene longitud $2\arcsin\left(\frac{\|x-y\|_{\ell^2}}{2}\right) \le 2\|x-y\|_{\ell^2}$. Por ello una sucesión de Cauchy intrínseca converge primero en $\ell^2$ a un punto de la esfera y después en la distancia intrínseca. Las desigualdades anteriores prueban que $\mathcal{E}$ es métricamente completa, y la Proposición 26.2.7 prueba su completitud geodésica.

Toda curva $C^1$ por tramos $c\colon [0,1]\to\mathbb{S}$ que une $e_1$ con $-e_1$ tiene longitud al menos $\pi$. Para verlo, pongamos $a(t)=\langle c(t),e_1\rangle$. Como $\langle \dot c(t), c(t)\rangle = 0$,

$$|a'(t)| = |\langle \dot c(t), e_1 - a(t)c(t)\rangle| \le \|\dot c(t)\|_{\ell^2}\sqrt{1-a(t)^2}.$$

Para $0<\delta<1$, la función $\theta_\delta(t)=\arccos((1-\delta)a(t))$ satisface $|\theta_\delta'(t)|\le\|\dot c(t)\|_{\ell^2}$ en cada tramo. Integrando y haciendo $\delta\to 0^+$, obtenemos $\pi\le L(c)$. Además,

$$\|A\dot c(t)\|_{\ell^2}^2 - \|\dot c(t)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=2}^{\infty}(a_n^2-1)|\langle \dot c(t), e_n\rangle|^2 \ge 0.$$

Si $L(A\circ c)=L(c)$, la diferencia de las rapideces, no negativa, se anula casi en todas partes. Como $a_n>1$ para cada $n\ge 2$, cada componente $\langle \dot c(t), e_n\rangle$ con ese índice se anula casi en todas partes; el teorema fundamental del cálculo da $\langle c(t),e_n\rangle = 0$ para todo $t\in[0,1]$. La curva quedaría en $\mathbb{S}\cap\mathbb{R}e_1=\{e_1,-e_1\}$, donde no existe una curva continua entre esos extremos. Por tanto, $L(A\circ c)>L(c)$. En cambio, los semicírculos

$$c_n(t)=\cos(\pi t)e_1+\sin(\pi t)e_n$$

se consideran para $n\ge 2$ y $t\in[0,1]$, y satisfacen

$$L(A\circ c_n)=\pi\int_0^1\sqrt{\sin^2(\pi t)+a_n^2\cos^2(\pi t)}\,dt\longrightarrow\pi.$$

La convergencia es uniforme en el integrando, pues $a_n\to 1$, y también se deduce por convergencia dominada con la cota 5/4. Por ello $d_{\mathcal{E}}(e_1,-e_1)=\pi$, pero ninguna curva realiza esa distancia. Éste es el elipsoide de Grossman [70].

**Observación 26.2.9.** (Limitaciones de Hopf–Rinow) La Proposición 26.2.7 no restituye las equivalencias finito–dimensionales. La completitud métrica no implica que todo par de puntos esté unido por una geodésica minimizante, como muestra el Ejemplo 26.2.8. La completitud métrica tampoco obliga a que $\exp_p$ sea sobreyectiva: éste es el contraejemplo de Atkin de [12]. La implicación inversa entre completitud geodésica global y completitud métrica también falla, pero corresponde a un trabajo posterior de Atkin.[a] Estas afirmaciones distinguen tres propiedades: la prolongación de cada geodésica, la convergencia de las sucesiones de Cauchy y la existencia de curvas minimizantes. En dimensión infinita no se dispone de la compacidad local de bolas cerradas que las relaciona en el teorema clásico.

Hay resultados parciales importantes. Ekeland demostró que, fijado $p$ en una variedad fuerte, conexa y métricamente completa, el conjunto de puntos que pueden unirse a $p$ mediante una única geodésica minimizante contiene un $G_\delta$ denso [58, Thm. B]. Bajo hipótesis globales de curvatura seminegativa también se recuperan conclusiones de tipo Cartan–Hadamard. Ninguna de estas afirmaciones autoriza a usar el teorema de Hopf–Rinow finito–dimensional sin verificar sus hipótesis adicionales.

[a] C. J. Atkin, *Geodesic and metric completeness in infinite dimensions*, Hokkaido Mathematical Journal **26** (1997), 1–61,

doi:10.14492/hokmj/1351257804.

## 26.3 Estructuras de Banach–Finsler

**Definición 26.3.1.** Sea $M$ una variedad de Banach de clase al menos $C^1$, modelada sobre $X$. Una **estructura de Banach–Finsler** es una familia de normas $F_x\colon T_xM \longrightarrow [0,\infty)$ que cumple:

(i) $F_x$ es una norma completa que induce la topología dada de $T_xM$ para todo $x$;

(ii) $(x,v)\mapsto F_x(v)$ es continua en $TM$;

(iii) para cada $x_0$ existe una carta $\varphi\colon U\longrightarrow X$ tal que, si $\|w\|_x := F_x((d\varphi_x)^{-1}w)$, para todo $\varepsilon>0$ puede reducirse $U$ de modo que

$$(1+\varepsilon)^{-1}\|w\|_{x_0} \le \|w\|_x \le (1+\varepsilon)\|w\|_{x_0}, \qquad x\in U,\ w\in X. \tag{26.13}$$

La estructura $F$ se llama **reversible** si $F_x(-v)=F_x(v)$ para todo $x\in M$ y todo $v\in T_xM$. Esta propiedad concierne a la estructura $F$, no a la variedad de Banach sin esa estructura. Aquí "norma" tiene su sentido usual, de modo que la homogeneidad absoluta implica dicha igualdad: todas las estructuras Banach–Finsler de esta definición son reversibles. No se exige que $F$ sea diferenciable en la sección cero. Las métricas Finsler clásicas no reversibles se introducirán después mediante funcionales de Minkowski y no son casos de esta definición.

La condición (26.13), llamada a veces **admisibilidad**, es la condición de Palais. Es más fuerte que pedir que, para cada $x$, existan constantes $c_x, C_x>0$ tales que $c_x\|w\|_X \le F_x((d\varphi_x)^{-1}w)\le C_x\|w\|_X$ para todo $w\in X$: en dimensión infinita la continuidad puntual en $w$ no proporciona por sí sola uniformidad sobre la bola unidad. Tomando $\|\cdot\|_X=\|\cdot\|_{x_0}$ y $C=1+\varepsilon$ se obtiene

$$C^{-1}\|w\|_X \le \|w\|_x \le C\|w\|_X, \qquad x\in U,\quad w\in X. \tag{26.14}$$

La definición no depende de la carta admisible elegida. En efecto, si $\psi$ es otra carta y $\tau=\psi\circ\varphi^{-1}$, entonces

$$\|z\|_{x,\psi} = \big\|D\tau(\varphi(x))^{-1}z\big\|_{x,\varphi}.$$

Pongamos

$$A_x := D\tau(\varphi(x))^{-1}D\tau(\varphi(x_0)).$$

La continuidad de la inversión en el grupo lineal implica $\|A_x - I\|_{\mathcal{L}(X)}\to 0$, donde la norma de operadores se calcula con $\|\cdot\|_{x_0,\varphi}$. Dados $\eta>0$, elijamos $\varepsilon,\delta>0$ de modo que

$$(1+\varepsilon)(1+\delta)\le 1+\eta, \qquad (1+\varepsilon)^{-1}(1-\delta)\ge (1+\eta)^{-1}.$$

Después de reducir el dominio, la admisibilidad en la carta $\varphi$ vale con $\varepsilon$ y $\|A_x-I\|\le\delta$. Para $w=D\tau(\varphi(x_0))^{-1}z$ se obtiene entonces

$$\|z\|_{x,\psi} = \|A_x w\|_{x,\varphi} \le (1+\varepsilon)(1+\delta)\|w\|_{x_0,\varphi},$$

$$\|z\|_{x,\psi} \geq (1+\varepsilon)^{-1}(1-\delta)\|w\|_{x_0,\varphi}.$$

Como $\|w\|_{x_0,\varphi} = \|z\|_{x_0,\psi}$, ésa es (26.13) en la carta $\psi$, con la constante $1+\eta$.

**Proposición 26.3.2.** Si $\mathbf{g}$ es una métrica riemanniana fuerte en una variedad de Hilbert, entonces $F_x(v) := |v|_{\mathbf{g},x}$ es una estructura Banach–Finsler. Su longitud y su distancia coinciden con $L_{\mathbf{g}}$ y $d_{\mathbf{g}}$.

*Demostración.* Sólo hay que verificar la admisibilidad. En una carta, fijemos $x_0$ y conjuguemos $G(x)$ por $G(x_0)^{-\frac{1}{2}}$. El operador positivo

$$B(x) := G(x_0)^{-\frac{1}{2}} G(x) G(x_0)^{-\frac{1}{2}}$$

converge a $I$ en norma cuando $x \to x_0$. Para $w \in H$, pongamos $z = G(x_0)^{\frac{1}{2}} w$. Entonces $\|w\|_{x_0}^2 = \|z\|_H^2$ y $\|w\|_x^2 = \langle B(x)z, z\rangle_H$. Si $\|B(x) - I\| < \delta < 1$, se sigue que

$$(1-\delta)\|w\|_{x_0}^2 \leq \|w\|_x^2 \leq (1+\delta)\|w\|_{x_0}^2.$$

Dados $\varepsilon > 0$, una elección de $\delta > 0$ que satisfaga $1+\delta \leq (1+\varepsilon)^2$ y $1-\delta \geq (1+\varepsilon)^{-2}$ da (26.13). Las igualdades de longitudes y distancias se siguen de las definiciones. □

**Definición 26.3.3.** Sea $(M, F)$ una variedad Banach–Finsler. La **norma dual Finsler** de $\xi \in T_x'M$ es

$$F_x^*(\xi) := \sup\{|\xi(v)| \mid v \in T_xM,\ F_x(v) \leq 1\}.$$

Para $I \in C^1(M, \mathbb{R})$ escribimos $\|dI(x)\|_{F,*} := F_x^*(dI(x))$.

**Proposición 26.3.4.** Sea $(M, F)$ una variedad Banach–Finsler modelada sobre $X$. En una carta que satisface (26.13), para $\lambda \in X'$ y $x$ en un dominio reducido donde (26.14) se cumple,

$$C^{-1}\|\lambda\|_{X'} \leq F_x^*(\lambda \circ d\varphi_x) \leq C\|\lambda\|_{X'},$$

donde la norma de $X'$ es dual de $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{x_0}$. En particular, $x \mapsto \|dI(x)\|_{F,*}$ es continua para $I \in C^1(M)$.

*Demostración.* De (26.14) se deducen las inclusiones

$$C^{-1}B_X \subseteq B_x \subseteq CB_X, \qquad B_x := \{w \in X \mid \|w\|_x \leq 1\}.$$

Aquí $B_X := \{w \in X \mid \|w\|_X \leq 1\}$ es la bola unidad cerrada. Al tomar supremos de $|\lambda|$ sobre estos conjuntos se obtiene la estimación dual.

Para la continuidad, fijemos $x_0$ y $\eta > 0$. La admisibilidad permite reducir la carta de modo que las normas duales en $x$ y $x_0$ difieran por un factor comprendido entre $(1+\eta)^{-1}$ y $1+\eta$. Si $\lambda_x := dI(x) \circ (d\varphi_x)^{-1}$, entonces $\lambda_x \to \lambda_{x_0}$ en $X'$ y

$$\begin{aligned}\big|\|\lambda_x\|_{x,*} - \|\lambda_{x_0}\|_{x_0,*}\big| &\leq \|\lambda_x - \lambda_{x_0}\|_{x,*} \\ &\quad + \big|\|\lambda_{x_0}\|_{x,*} - \|\lambda_{x_0}\|_{x_0,*}\big|.\end{aligned}$$

La comparación dual precisa es

$$(1+\eta)^{-1}\|\mu\|_{x_0,*} \le \|\mu\|_{x,*} \le (1+\eta)\|\mu\|_{x_0,*}, \qquad \mu \in X'.$$

Por lo tanto, el primer término del miembro derecho anterior no supera $(1+\eta)\|\lambda_x - \lambda_{x_0}\|_{x_0,*}$ y el segundo no supera $\eta\|\lambda_{x_0}\|_{x_0,*}$. Primero se elige $\eta$ y después $x$; ambos términos pueden hacerse arbitrariamente pequeños. Esto prueba la continuidad. □

Para una curva $C^1$ por tramos se pone

$$L_F(\gamma) = \int_a^b F_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\,dt, \qquad d_F(x,y) = \inf\{L_F(\gamma) \mid \gamma \text{ es una curva } C^1 \text{ por tramos de } x \text{ a } y\}.$$

La longitud es invariante bajo reparametrizaciones crecientes $C^1$ por tramos. La simetría de las normas implica $L_F(\gamma^{-1}) = L_F(\gamma)$.

**Teorema 26.3.5.** En cada componente conexa de una variedad Banach–Finsler, $d_F$ es una distancia finita que induce la topología de la variedad. Más precisamente, para cada $x_0$ existen una carta $\varphi\colon U \longrightarrow X$, una vecindad $V \subseteq U$ de $x_0$ y $C \ge 1$ tales que, para $x, y \in V$,

$$C^{-1}\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_X \le d_F(x,y) \le C\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_X.$$

*Demostración.* Trasladando coordenadas, supongamos que $\varphi(x_0) = 0$. Reduzcamos primero $U$ para que (26.14) se cumpla allí y elijamos después $r > 0$ de modo que $B_X(0,3r) \subseteq \varphi(U)$. Sea

$$V := \varphi^{-1}(B_X(0, \tfrac{r}{2})).$$

Si $x, y \in V$, el segmento $z(t) = (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$ permanece en $B_X(0,\frac{r}{2})$ y su levantamiento $\sigma = \varphi^{-1} \circ z$ satisface

$$L_F(\sigma) \le C\int_0^1 \|z'(t)\|_X\,dt = C\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_X.$$

Ésta es la cota superior.

Sea ahora $\gamma$ cualquier curva de $x$ a $y$. Mientras su imagen permanece en $\varphi^{-1}(B_X(0,2r))$, la regla de la cadena y (26.14) dan

$$\|\varphi(\gamma(t_1)) - \varphi(\gamma(t_0))\|_X \le C L_F(\gamma\restriction_{[t_0,t_1]}). \tag{26.15}$$

Si $\gamma$ no sale de esa bola, aplicamos la desigualdad a sus extremos y obtenemos $L_F(\gamma) \ge C^{-1}\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_X$. Si sale, existe un primer tiempo $t_1$ en que la norma de su coordenada vale $2r$. En efecto, la estimación (26.15) hace de las coordenadas una familia de Cauchy al aproximarse al extremo del tramo inicial. La completitud de $X$ proporciona un límite en $\overline{B_X(0,2r)}$, que está contenida en $\varphi(U)$. La continuidad de la curva y el carácter de Hausdorff de $M$ identifican ese límite con la coordenada de $\gamma(t_1)$. Si su norma fuera menor que $2r$, la curva permanecería en la bola un poco más. Es el argumento de salida de la Proposición 26.2.6, basado en longitud finita y completitud del modelo. Como $\|\varphi(x)\|_X < \frac{r}{2}$, la misma desigualdad da

$$L_F(\gamma) \ge C^{-1}\frac{3r}{2} \ge C^{-1}\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_X,$$

pues la distancia entre dos puntos de $B_X(0, \frac{r}{2})$ es menor que $r$. Tomando el ínfimo sobre $\gamma$ se obtiene la cota inferior, incluso frente a curvas que abandonan la carta.

Las propiedades de no negatividad, simetría y desigualdad triangular se siguen, respectivamente, de la definición, de invertir curvas y de concatenarlas. Para incluir los puntos exteriores a $V$, el mismo argumento en la bola de radio $r/2$ prueba que toda curva de $x_0$ a $M \setminus V$ tiene longitud al menos $r/(2C)$. Así, $B_{d_F}(x_0, r/(2C)) \subseteq V$. Esta inclusión y la cota inferior dentro de $V$ separan $x_0$ de todos los demás puntos, y muestran que una sucesión que converge a $x_0$ en distancia entra finalmente en $V$ y converge en coordenadas. La cota superior prueba la recíproca. Finalmente, la relación de accesibilidad mediante curvas $C^1$ por tramos divide $M$ en conjuntos abiertos: desde un punto accesible se alcanzan todos los puntos de una carta convexa suficientemente pequeña. Por conexidad, cada componente conexa es una sola clase de accesibilidad, de modo que $d_F$ es finita en ella. Las dos cotas locales prueban que las bolas de $d_F$ y las vecindades coordenadas generan la misma topología. □

**Definición 26.3.6.** Una variedad Banach–Finsler es **métricamente completa** si cada componente, provista de la restricción de $d_F$, es un espacio métrico completo.

**Definición 26.3.7.** (Regularidad $C^{1,1}$ y regularidad de la norma) Sea $(M, F)$ una variedad Banach–Finsler. Diremos que es de clase $C^{1,1}$ cuando $M$ está provista de un atlas $C^{1,1}$ en el sentido de la Definición 24.1.5; en ese atlas se comprobará la regularidad de las representaciones coordenadas. Esta condición no impone regularidad Lipschitz a la familia de normas $F_x$. Una estructura Banach–Finsler es **localmente Lipschitz en la base** si, para cada $x_0$, existe una carta admisible reducida y $L > 0$ tales que

$$\bigl|\|w\|_x - \|w\|_y\bigr| \le L\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_X \, \|w\|_{x_0}, \qquad x, y \in U, \quad w \in X. \tag{26.16}$$

Estas dos condiciones son independientes: la primera concierne al atlas y la segunda a la familia de normas. La segunda se expresa en cartas del atlas $C^{1,1}$ elegido, pues la transformación de una norma tangente contiene el diferencial del cambio de carta.

La terminología "variedad Finsler de clase $C^{1,1}$" agrupa a veces hipótesis distintas. Los argumentos de Palais–Struwe utilizan los siguientes ingredientes:

(a) $M$ es una variedad de Banach paracompacta con atlas $C^{1,1}$;

(b) $F$ es una estructura continua y admisible en el sentido de la Definición 26.3.1;

(c) las cubiertas que intervienen admiten particiones de la unidad localmente Lipschitz en las cartas del atlas $C^{1,1}$.

En esta construcción, las particiones del último inciso no constituyen una hipótesis adicional sobre el espacio modelo. En cada componente, el Teorema 26.3.5 y el Teorema 24.8.8 permiten aplicar el Lema 24.8.7. Las distancias a los complementos de los abiertos encogidos, divididas por su suma localmente finita y positiva, producen esas particiones. La construcción se desarrolla en el Teorema 31.4.4. Cuando se requieren particiones diferenciables, se utiliza en cambio el Teorema 24.8.9, con las hipótesis de regularidad y del espacio modelo que allí se indican.

La continuidad y admisibilidad de $F$ bastan para la topología de $d_F$ y para transportar desigualdades estrictas de una fibra a fibras próximas. El atlas $C^{1,1}$ y las particiones localmente Lipschitz son los ingredientes que permiten pegar campos locales y obtener una EDO con unicidad. La condición adicional (26.16) sólo se invoca cuando

se necesita que la propia norma varíe con control Lipschitz. Ninguna de estas hipótesis afirma que $v \mapsto F_x(v)^2$ tenga Hessiano vertical o que exista una conexión de Chern. Éste es el marco de la teoría de deformación de Palais y Struwe [138, §II.3.7].

**Ejemplo 26.3.8.** (Subvariedades completas de un espacio de Banach) Sea $N$ una subvariedad split y cerrada de un espacio de Banach $X$. La norma inducida de $X$ en cada $T_xN$ define una estructura Banach–Finsler completa. En una parametrización local $\theta\colon V \subseteq X_0 \longrightarrow N$, la continuidad de $D\theta$ en norma de operadores y el hecho de que $D\theta(y_0)$ es un isomorfismo sobre su imagen permiten usar $\|w\|_0 := \|D\theta(y_0)w\|_X$. Esta norma es completa porque $D\theta(y_0)$ es un isomorfismo topológico sobre el subespacio cerrado $T_{\theta(y_0)}N$. Dado $\varepsilon > 0$, reducimos $V$ de modo que

$$\|D\theta(y) - D\theta(y_0)\|_{0,X} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Aquí $\|\cdot\|_{0,X}$ es la norma de operadores del espacio $(X_0, \|\cdot\|_0)$ en $(X, \|\cdot\|_X)$. La desigualdad triangular y su forma inversa dan entonces

$$(1+\varepsilon)^{-1}\|w\|_0 \le \|D\theta(y)w\|_X \le (1+\varepsilon)\|w\|_0,$$

que es exactamente la admisibilidad de las normas inducidas. Para probar la completitud, obsérvese primero que, para toda curva $\gamma$ en $N$,

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\|_X \le L_F(\gamma),$$

de modo que una sucesión de Cauchy intrínseca es de Cauchy en $X$. Su límite pertenece a $N$ porque $N$ es cerrado. En una carta adaptada de la subvariedad, la parametrización local y su diferencial están acotados después de reducir la carta. El segmento coordenado proporciona entonces $d_F(x,p) \le C_0\|\psi(x)-\psi(p)\|_{X_0}$ para $x$ próximo al límite $p$, donde $C_0 > 0$ depende de la carta reducida. Por lo tanto, la convergencia en $X$, y con ella la convergencia en la carta, implica la convergencia intrínseca. La cerradura global y el control local de longitudes cumplen funciones distintas en este argumento.

**Proposición 26.3.9.** (Criterio de prolongación) Sea $(M, F)$ una variedad Banach–Finsler completa, y sea $\mathbf{X}$ un campo definido en todo $M$, continuo y localmente Lipschitz en coordenadas. Supongamos que el atlas de $M$ es al menos $C^{1,1}$. Si existe $A \ge 0$ tal que $F_x(\mathbf{X}(x)) \le A$ para todo $x$, toda curva integral maximal de $\mathbf{X}$ está definida en $\mathbb{R}$. El flujo global es continuo y sus mapeos de tiempo son homeomorfismos con inversa $\Phi_{-t}$. Si el atlas es $C^{r+1}$ y $\mathbf{X}$ es $C^r$, con $r \in \mathbb{N}$, el flujo y sus mapeos de tiempo son $C^r$; si el atlas y el campo son suaves, también lo es el flujo.

*Demostración.* Si el extremo derecho maximal fuera $b < \infty$, entonces, para $s < t < b$, $d_F(\gamma(s), \gamma(t)) \le L_F(\gamma\restriction_{[s,t]}) \le A(t-s)$. La curva es de Cauchy y converge, por completitud, a un punto $p$. Como $d_F$ induce la topología de la variedad, la cola de $\gamma$ entra en una carta en torno de $p$. La Observación 25.4.3, aplicada con dato inicial $p$ en el tiempo $b$, produce una solución local. Para comprobar el pegado en $b$, escribimos la ecuación integral en la carta final y hacemos tender el extremo superior a $b$. El campo es continuo y la curva tiene límite, de modo que la ecuación integral vale también con el dato límite; su derivada en $b$ es el valor del campo en $p$. La unicidad local identifica esta prolongación con la solución iniciada en $p$. Se obtiene así una curva integral más allá de $b$, lo que contradice la maximalidad. El extremo izquierdo se trata del mismo modo, o aplicando el argumento a $-\mathbf{X}$.

El argumento en cartas del Teorema 25.4.2 sigue siendo aplicable: los cambios de un atlas $C^{1,1}$ conservan la condición local de Lipschitz de los campos, por la estimación de la Sección 25.3. El teorema de depen-

dencia de datos del apéndice da continuidad del flujo. Si el atlas es $C^{r+1}$, sus cambios tangentes son $C^r$ y la misma construcción proporciona la dependencia $C^r$ afirmada. La unicidad da $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ y $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$; la dependencia $C^r$ de los datos da la última afirmación. □

**Observación 26.3.10.** (Gradiente frente a pseudogradiente) En una métrica fuerte, $\operatorname{grad} I = \sharp_{\mathbf{g}}(dI)$ y $dI(\operatorname{grad} I) = |\operatorname{grad} I|_{\mathbf{g}}^2$. En una estructura de Banach–Finsler no existe en general una elección canónica de un vector que realice la norma dual, y en un Banach no reflexivo el supremo puede no alcanzarse. En un punto donde $dI \neq 0$, para deformación basta elegir localmente, por la definición del supremo, direcciones $v$ con $F(v) \le 1$ y $dI(v) > \theta \|dI\|_{F,*}$, $0 < \theta < 1$. Se puede dejar también un margen estricto en la norma. Fijado $x_0$, elegimos $\theta < \theta_1 < 1$ y $v_0 \in T_{x_0}M$ con $F_{x_0}(v_0) \le 1$ y $dI_{x_0}(v_0) > \theta_1 \|dI(x_0)\|_{F,*}$. Multiplicamos $v_0$ por $a \in (\theta/\theta_1, 1)$. Entonces $F_{x_0}(av_0) < 1$ y $dI_{x_0}(av_0) > \theta \|dI(x_0)\|_{F,*}$. Extendemos $av_0$ como un campo de componentes constantes en una carta. La continuidad de $F$, de $dI$ y de la norma dual conserva ambas desigualdades estrictas en una vecindad de $x_0$. En un atlas $C^{1,1}$, este campo es localmente Lipschitz también en las demás cartas, sin necesidad de dividirlo por una norma que sea sólo continua. Para pegarlas sin perder esa desigualdad se necesita una partición de la unidad no negativa y localmente finita de la regularidad requerida. Para obtener un pseudogradiente localmente Lipschitz se usan las particiones construidas mediante distancias en el Teorema 31.4.4; su existencia se apoya en el Teorema 24.8.8 y en el Lema 24.8.7. No se necesita que el espacio modelo admita funciones flan diferenciables. El Teorema 24.8.9 corresponde al problema distinto de obtener particiones diferenciables. Ninguna de estas construcciones interviene en la definición de $F$ ni en la prueba de que $d_F$ induce la topología. Ésta es la razón funcional de los campos pseudogradiente empleados en las deformaciones variacionales.

## 26.4 Finsler clásico en dimensión finita

### 26.4.1 Funcionales de Minkowski y tensores verticales

**Definición 26.4.1.** (Funcional de Minkowski) Sea $V$ un espacio vectorial real finito–dimensional. Un **funcional de Minkowski** es una función $F\colon V \longrightarrow [0,\infty)$ continua, suave en $V \setminus \{0\}$, positiva fuera de 0 y positivamente homogénea, $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ para $\lambda > 0$, tal que

$$\mathbf{g}_v(u,w) := \frac{1}{2} D^2(F^2)_v(u,w)$$

es un producto interior para todo $v \neq 0$. Es **reversible** si $F(-v) = F(v)$.

**Definición 26.4.2.** En una variedad suave finito–dimensional $M$, una **métrica de Finsler clásica** es una función $F\colon TM \longrightarrow [0,\infty)$, continua en la sección cero y suave en el haz retirado

$$0_M := \{0_x \in T_xM \mid x \in M\}, \qquad \widetilde{TM} := TM \setminus 0_M,$$

tal que cada restricción $F_x := F \restriction_{T_xM}$ es un funcional de Minkowski. En coordenadas $(x^1,\dots,x^n,v^1,\dots,v^n)$, donde $n = \dim M$, los índices $i,j,k$ recorren $\{1,\dots,n\}$. El **tensor fundamental** y el **tensor de Cartan** son

$$g_{ij}(x,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial v^i \partial v^j}(x,v), \qquad C_{ijk}(x,v) = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 F^2}{\partial v^i \partial v^j \partial v^k}(x,v).$$

En forma intrínseca, $\mathbf{g}_v = \frac{1}{2} D_v^2(F_x^2)$ y $\mathbf{C}_v = \frac{1}{4} D_v^3(F_x^2)$, donde las derivadas $D_v$ y $d(F_x)_v$ que aparecen en esta sección son siempre verticales, es decir, se calculan en la fibra fija $T_xM$.

**Proposición 26.4.3.** (Identidades de Euler y transformación de Legendre) Sea $(M, F)$ una variedad Finsler clásica finito–dimensional. Para $v \neq 0$ y $u, w \in T_xM$ se tiene

$$d(F_x)_v(u) = \frac{\mathbf{g}_v(v,u)}{F(v)}, \qquad \mathbf{g}_v(v,v) = F(v)^2, \qquad \mathbf{C}_v(v,u,w) = 0.$$

La transformación de Legendre

$$\mathcal{L}_x \colon T_xM \setminus \{0\} \longrightarrow T_x^*M \setminus \{0\}, \qquad \mathcal{L}_x(v) := d\left(\frac{1}{2}F_x^2\right)_v = \mathbf{g}_v(v, \cdot),$$

es un difeomorfismo positivamente homogéneo.

*Demostración.* La función $F_x^2$ es homogénea de grado dos. El teorema de Euler da $d(F_x^2)_v(v) = 2F_x(v)^2$. Al derivar esta identidad en la dirección $u$ se obtiene

$$D^2(F_x^2)_v(v,u) = d(F_x^2)_v(u),$$

lo que prueba las dos primeras fórmulas. Como $\mathbf{g}_{\lambda v} = \mathbf{g}_v$, su derivada radial es cero y se obtiene $\mathbf{C}_v(v,u,w) = 0$.

La derivada vertical de $\mathcal{L}_x$ en $v$ es el isomorfismo $u \mapsto \mathbf{g}_v(u, \cdot)$, por lo que $\mathcal{L}_x$ es un difeomorfismo local. Para justificar la inyectividad también en segmentos que pasan por el origen, fijemos una norma euclidiana $|\cdot|$ en $T_xM$ y pongamos $L = \frac{1}{2}F_x^2$. La homogeneidad y la compacidad de la esfera euclidiana dan $L(v) \leq C|v|^2$ y $\|dL_v\| \leq C'|v|$ para constantes $C, C' > 0$. Por ello $L$ es $C^1$ en todo $T_xM$, con $dL_0 = 0$. Si $u \neq v$, la función $h(t) := L(u + t(v-u))$ tiene derivada continua en $[0,1]$ y

$$h''(t) = \mathbf{g}_{u+t(v-u)}(v-u, v-u) > 0$$

salvo, a lo sumo, en el único parámetro en el que el segmento pasa por cero. En cada lado de ese parámetro $h'$ es estrictamente creciente y la continuidad impide un salto al cruzarlo. Por tanto, $h'(1) > h'(0)$, es decir, $\big(dL_v - dL_u\big)(v-u) > 0$. Esto prueba la convexidad estricta de $L$ y la inyectividad de su diferencial. Dado $\xi \in T_x^*M \setminus \{0\}$, la función $\xi$ alcanza un máximo positivo en la esfera compacta $F_x(v) = 1$. Esta restricción es regular, pues la identidad de Euler da $d(F_x)_v(v) = F_x(v) = 1$. El Teorema 23.4.2 proporciona $\xi = \lambda\, d(F_x)_v = \lambda \mathcal{L}_x(v)$ con $\lambda > 0$; la última igualdad usa $F_x(v) = 1$, y la positividad se obtiene evaluando en $v$. Por homogeneidad, $\xi = \mathcal{L}_x(\lambda v)$; así, $\mathcal{L}_x$ es sobreyectiva. Una biyección que es difeomorfismo local tiene inversa suave. □

La convexidad fuerte contiene la desigualdad triangular. En efecto, las identidades de Euler anteriores y la regla del cociente dan, para $v \neq 0$,

$$D^2F_v(w,w) = \frac{\mathbf{g}_v(w,w)F(v)^2 - \mathbf{g}_v(v,w)^2}{F(v)^3} \geq 0$$

por Cauchy–Schwarz para $\mathbf{g}_v$. La restricción de $F$ a cualquier recta es convexa fuera de los posibles parámetros en

los que pasa por el origen; la homogeneidad describe el único punto que falta: en una recta $tw$ que pasa por el origen, la pendiente a la izquierda es $-F(-w)$ y a la derecha es $F(w)$. La primera es menor que la segunda, de modo que la convexidad también se conserva al cruzar el origen. Por lo tanto, $F$ es convexa en todo $V$, y la convexidad y la homogeneidad implican $F(u+w) \le F(u)+F(w)$. Así, un funcional de Minkowski reversible es una norma, mientras que uno no reversible es una norma dirigida.

El tensor de Cartan mide la dependencia direccional del tensor fundamental. Si $\mathbf{g}_v$ no depende de $v$, entonces $\mathbf{C}_v = 0$. Recíprocamente, si $\dim M \ge 2$, cada fibra retirada $T_xM \setminus \{0\}$ es conexa y $\mathbf{C} = 0$ implica que $\mathbf{g}_v$ es independiente de $v$; por lo tanto, $F_x^2$ es una forma cuadrática. En dimensión uno la misma conclusión requiere, además, reversibilidad: sin ella, los dos rayos de una fibra retirada pueden llevar formas cuadráticas distintas. Si $F$ es reversible, satisface la Definición 26.3.1. En dimensión finita, fijemos una carta $\varphi$ y la norma $\|w\|_0 := F_{x_0}((d\varphi_{x_0})^{-1}w)$. Sobre la esfera compacta $\{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\|_0 = 1\}$, la continuidad uniforme de $F_x((d\varphi_x)^{-1}w)$ implica que, dado $\varepsilon > 0$, después de reducir la carta,

$$(1+\varepsilon)^{-1}\|w\|_0 \le F_x((d\varphi_x)^{-1}w) \le (1+\varepsilon)\|w\|_0$$

para todo $w$ y todo $x$ de la carta reducida. Ésta es la admisibilidad; la compacidad utilizada en el argumento es precisamente la que falta en la bola unidad de un modelo de Banach infinito–dimensional.

**Ejemplo 26.4.4.** (Espacios de Minkowski) Un espacio vectorial finito–dimensional provisto de un funcional de Minkowski constante es una variedad Finsler. Sus geodésicas son las rectas y las conexiones no lineal y de Chern que se introducirán a continuación tienen coeficientes nulos en las coordenadas lineales. El tensor de Cartan puede ser no nulo: la anulación de la conexión expresa que la geometría es localmente Minkowski, no que el funcional sea euclidiano.

### 26.4.2 Spray, conexión no lineal y conexión de Chern

Escribimos $n := \dim M \ge 1$. Todos los índices coordenados latinos y griegos de esta sección recorren $\{1,\dots,n\}$, salvo que se especifique otro conjunto. La matriz $(g^{ij})_{i,j=1}^n$ es la inversa de $(g_{ij})_{i,j=1}^n$. Los índices libres se mantienen fijos en cada igualdad; los índices que se suman se indicarán en la suma correspondiente.

Para $L = \frac{1}{2}F^2$, las extremales satisfacen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma,\dot\gamma) - \frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma,\dot\gamma) = 0. \tag{26.17}$$

Como $\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} = g_{ij}$, la ecuación anterior se convierte en

$$\ddot x^i + 2G^i(x,\dot x) = 0, \tag{26.18}$$

donde

$$G^i(x,v) = \frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^n g^{i\ell}(x,v)\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F^2}{\partial x^k \partial v^\ell}(x,v)v^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^\ell}(x,v)\right). \tag{26.19}$$

Los coeficientes $G^i$ son suaves en $\widetilde{TM}$ y homogéneos de grado dos. Bajo un cambio de coordenadas $y = \tau(x)$ satisfacen

$$\widetilde G^\alpha(y, D\tau(x)v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial x^i}(x)G^i(x,v) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \tau^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}(x)v^i v^j, \tag{26.20}$$

como se comprueba transformando (26.18). Por ello definen el **spray geodésico retirado**

$$\mathbf{S}_F(x,v) = \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i - 2\sum_{i=1}^{n} G^i(x,v)\partial_{v^i}$$

sobre $\widetilde{TM}$. Es un campo de segundo orden y satisface la identidad de homogeneidad de la Definición 26.2.3 para $\lambda > 0$:

$$\mathbf{S}_F(h_\lambda(v)) = T h_\lambda\big(\lambda \mathbf{S}_F(v)\big), \qquad v \in \widetilde{TM}, \quad \lambda > 0.$$

La restricción a escalares positivos es esencial cuando $F$ no es reversible. En general $\mathbf{S}_F$ no se prolonga suavemente a la sección cero; por ello no es un spray suave sobre todo $TM$ en el sentido de aquella definición, y las curvas constantes se incorporan por separado.

**Definición 26.4.5.** (Conexión no lineal canónica) Sea $(M,F)$ una variedad Finsler clásica finito–dimensional. Los coeficientes

$$N^i_j(x,v) := \frac{\partial G^i}{\partial v^j}(x,v)$$

definen la **conexión no lineal canónica**. Denotemos por $\widetilde{\pi}\colon \widetilde{TM} \to M$ la proyección tangente restringida. La distribución vertical es

$$\mathcal{V}_{(x,v)} := \ker T_{(x,v)}\widetilde{\pi} = \operatorname{span}\{\partial_{v^i} \mid 1 \le i \le n\},$$

y la distribución horizontal está generada por los campos

$$\boldsymbol{\delta}_{x^j} := \partial_j - \sum_{i=1}^{n} N^i_j \partial_{v^i},$$

y las coformas verticales adaptadas se escriben

$$\boldsymbol{\delta v}^i := \mathbf{d}v^i + \sum_{j=1}^{n} N^i_j \mathbf{d}x^j.$$

En particular, $\boldsymbol{\delta v}^i(\boldsymbol{\delta}_{x^j}) = 0$ y $\boldsymbol{\delta v}^i(\partial_{v^j}) = \delta^i_j$. Si $\mathcal{H}_{(x,v)}$ denota el subespacio generado por $\boldsymbol{\delta}_{x^j}$, entonces $T_{(x,v)}\widetilde{TM} = \mathcal{H}_{(x,v)} \oplus \mathcal{V}_{(x,v)}$.

La ley (26.20), derivada respecto de $v$, da la transformación explícita

$$\sum_{\beta=1}^{n} \widetilde{N}^\alpha_\beta(y, D\tau(x)v)\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} N^i_j(x,v) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^k} v^k. \tag{26.21}$$

Esta identidad muestra que la distribución horizontal es intrínseca, aunque los coeficientes $N^i_j$ no sean los de una conexión lineal sobre $TM$. La homogeneidad da $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} N^i_j v^j = 2G^i$.

El flujo local de $\mathbf{S}_F$ produce una geodésica maximal $\gamma_v$ para cada $v \neq 0$. La homogeneidad da $\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1)$ para $t > 0$ cuando ambos miembros están definidos. Al añadir las geodésicas constantes se obtiene un dominio

estrellado $\mathcal{D}_p \subseteq T_pM$ y el mapeo exponencial

$$\exp_p \colon \mathcal{D}_p \longrightarrow M, \qquad \exp_p(v) := \gamma_v(1).$$

Es suave en $\mathcal{D}_p \setminus \{0\}$, de clase $C^1$ en 0 y

$$d(\exp_p)_0 = \mathrm{id}_{T_pM}.$$

Para cuantificar esta afirmación, elijamos coordenadas $\varphi \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\varphi(p) = 0$ y usemos $d\varphi_p$ para identificar $T_pM$ con $\mathbb{R}^n$. Sea $\widehat{\exp}_p := \varphi \circ \exp_p \circ (d\varphi_p)^{-1}$. Tomemos $\rho > 0$ con $\overline{B(0,\rho)} \subseteq \varphi(U)$. La compacidad de $\overline{B(0,\rho)} \times S^{n-1}$ proporciona números $M_0, M_x, M_v \geq 0$ que acotan, respectivamente,

$$|G(x,u)|, \qquad \|D_xG(x,u)\|, \qquad \|D_vG(x,u)\|, \qquad |u| = 1.$$

Por homogeneidad, para $w \neq 0$ estas cotas se convierten en

$$|G(x,w)| \leq M_0|w|^2, \quad \|D_xG(x,w)\| \leq M_x|w|^2, \quad \|D_vG(x,w)\| \leq M_v|w|.$$

Elijamos $0 < r \leq 1$ de modo que $2r < \rho$ y $8M_0r \leq \frac{1}{2}$. Si $0 < |v| < r$, la solución $x_v$ de $x_v'' = -2G(x_v, x_v')$, $x_v(0) = 0$, $x_v'(0) = v$, satisface $|x_v'(t)| \leq 2|v|$ para $0 \leq t \leq 1$. En efecto, mientras valga esta cota,

$$|x_v'(t) - v| \leq 2M_0 \int_0^t |x_v'(s)|^2 ds \leq 8M_0|v|^2 \leq \frac{1}{2}|v|,$$

lo que mejora la cota de arranque y da también $|x_v'(t)| \geq \frac{|v|}{2}$; además, $|x_v(t)| \leq 2|v| < \rho$. Para un $v$ fijo, el estado $(x_v, x_v')$ permanece así en un compacto contenido en el dominio del spray retirado. El Teorema B.13.4 excluye un extremo maximal anterior a 1, y el argumento alcanza todo $[0,1]$. Al integrar una vez más se obtiene

$$|\widehat{\exp}_p(v) - v| \leq C_0|v|^2, \qquad C_0 := 8M_0. \tag{26.22}$$

Para la derivada respecto del dato inicial, pongamos $J_v(t) := D_vx_v(t)$. La ecuación variacional es

$$J_v'' = -2D_xG(x_v, x_v')J_v - 2D_vG(x_v, x_v')J_v', \qquad J_v(0) = 0, \quad J_v'(0) = I. \tag{26.23}$$

Las cotas anteriores dan $\|D_xG(x_v, x_v')\| \leq 4M_x|v|^2$ y $\|D_vG(x_v, x_v')\| \leq 2M_v|v|$. Aplicando el Lema de Grönwall 1.8.19 al sistema de primer orden para $(J_v, J_v')$ y comparándolo con $(tI, I)$ se obtiene

$$\|D\widehat{\exp}_p(v) - I\| \leq C_1|v|, \qquad C_1 := (8M_xr + 4M_v)\exp(1 + 8M_xr^2 + 4M_vr). \tag{26.24}$$

En detalle, pongamos $E_0 := \exp(1 + 8M_xr^2 + 4M_vr)$. El Lema de Grönwall 1.8.19 aplicado a la norma suma del sistema da $\|J_v(t)\| + \|J_v'(t)\| \leq E_0$ para $t \in [0,1]$. Integrando (26.23), obtenemos

$$\|J_v'(t) - I\| \leq \int_0^t \big(8M_x|v|^2\|J_v(s)\| + 4M_v|v|\|J_v'(s)\|\big)\, ds \leq (8M_xr + 4M_v)E_0|v|t.$$

Al integrar otra vez y usar $J_v(0) = 0$, resulta

$$\|J_v(t) - tI\| \leq \frac{1}{2}(8M_xr + 4M_v)E_0|v|t^2.$$

En $t=1$ esta cota implica (26.24) con el valor de $C_1$ indicado. Las estimaciones (26.22) y (26.24) extienden el diferencial continuamente al origen con valor $I$ y prueban que $d(\exp_p)_0 = \mathrm{id}_{T_pM}$. En general $\exp_p$ no es $C^2$ en 0, reflejo de que $F^2$ y el spray retirado no tienen por qué ser suaves en la sección cero. Las constantes $C_0, C_1$ son independientes de la dirección $v$ y dependen sólo de $r$ y de las cotas $M_0, M_x, M_v$ sobre la vecindad coordenada y la esfera unidad elegidas. El teorema de la función inversa, aplicado a este mapeo $C^1$, muestra además que $\exp_p$ restringe un difeomorfismo $C^1$ entre vecindades de 0 y de $p$; fuera de 0 tanto el mapeo como su inversa local son suaves.

Sobre el haz tangente retirado consideremos el **haz inducido**

$$\widetilde{\pi}^{*}TM = \{((x,v),w) \mid v \in T_xM \setminus \{0\},\ w \in T_xM\}.$$

El tensor fundamental es una métrica en este haz: en la fibra sobre $(x,v)$ se usa $\mathbf{g}_v$. La sección tautológica es $\boldsymbol{\mathcal{Y}}(x,v) = v$.

**Teorema 26.4.6.** (Conexión de Chern) Sea $(M,F)$ una variedad Finsler clásica finito–dimensional. Existe una única conexión lineal $\nabla^{\mathrm{Ch}}$ en $\widetilde{\pi}^{*}TM$ cuyas formas de conexión $\omega^i_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(x,v)\,\mathbf{d}x^k$ satisfacen

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}x^j \wedge \omega^i_j = 0, \tag{26.25}$$

$$\mathbf{d}g_{ij} - \sum_{k=1}^{n}\left(g_{kj}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j\right) = 2\sum_{k=1}^{n} C_{ijk}\,\boldsymbol{\delta}v^k. \tag{26.26}$$

Sus coeficientes están dados por

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} g^{i\ell}\left(\delta_{x^j} g_{\ell k} + \delta_{x^k} g_{j\ell} - \delta_{x^\ell} g_{jk}\right), \qquad \delta_{x^j} = \partial_j - \sum_{m=1}^{n} N^m_j \partial_{v^m}. \tag{26.27}$$

Si $y = \tau(x)$ es un cambio de coordenadas, su ley de transformación completa es

$$\sum_{\beta,\gamma=1}^{n} \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(y, D\tau(x)v)\frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}(x,v) - \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{26.28}$$

Además,

$$N^i_j = \sum_{k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}v^k, \qquad 2G^i = \sum_{j,k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}v^j v^k. \tag{26.29}$$

Si $F$ procede de una métrica riemanniana, $\mathbf{C}=0$ y $\nabla^{\mathrm{Ch}}$ es el levantamiento de la conexión de Levi–Civita.

*Demostración.* La primera condición equivale a $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Como $\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} = 2C_{ijk}$, las componentes verticales de (26.26) se satisfacen automáticamente. Sus componentes horizontales son

$$\delta_{x^k} g_{ij} = \sum_{m=1}^{n}\left(g_{mj}\Gamma^m_{ik} + g_{im}\Gamma^m_{jk}\right).$$

Fijemos $i,j,k\in\{1,\dots,n\}$. Las tres identidades necesarias son

$$\delta_{x^j} g_{ik} = \sum_{m=1}^{n} \big( g_{mk}\Gamma^m_{ij} + g_{im}\Gamma^m_{kj} \big),$$
$$\delta_{x^k} g_{ij} = \sum_{m=1}^{n} \big( g_{mj}\Gamma^m_{ik} + g_{im}\Gamma^m_{jk} \big),$$
$$\delta_{x^i} g_{jk} = \sum_{m=1}^{n} \big( g_{mk}\Gamma^m_{ji} + g_{jm}\Gamma^m_{ki} \big).$$

Al sumar las dos primeras y restar la tercera, la simetría en los índices inferiores cancela los términos con $g_{mk}$ y $g_{mj}$. Queda $2\sum_{m=1}^{n} g_{im}\Gamma^m_{jk}$. Multiplicar por la matriz inversa de $g$ da (26.27). Esto prueba la unicidad local. Recíprocamente, la fórmula es simétrica en $j,k$ y, al sustituirla en la identidad horizontal, las dos parejas de términos con signos opuestos se cancelan y queda $\delta_{x^k} g_{ij}$. Las componentes verticales ya se verificaron; por tanto, también existe la conexión local.

Para justificar el pegado, consideremos en $\widetilde{\pi}^{*}TM$ la forma con valores en la fibra que envía un vector tangente $Z$ a $T\widetilde{\pi}(Z)$. Sus componentes son $\mathbf{d}x^i$. La primera ecuación expresa que su derivada exterior covariante es cero, por lo que es invariante bajo cambios de coordenadas. Para la segunda, la proyección vertical determinada por la distribución horizontal tiene componentes $\delta v^i$. La ley (26.21) muestra que esas componentes cambian mediante el Jacobiano del cambio de coordenadas. El tensor $\mathbf{C}$, obtenido por tres derivadas en una fibra donde el cambio es lineal, es covariante de orden tres. Por ello el miembro derecho de (26.26) y la derivada covariante de $\mathbf{g}$ son formas tensoriales del mismo tipo. Ambas condiciones se conservan al cambiar de coordenadas. El cambio de base en la fibra depende sólo de $x$, así que tampoco introduce componentes $\mathbf{d}v$ en las formas de conexión. La unicidad local proporciona el pegado. Finalmente, al derivar el cambio de componentes de un campo a lo largo de una curva, aparece $D^2\tau(\dot\gamma, X)$; al trasladarlo al otro miembro se obtiene el signo negativo de (26.28). Es la misma regla de transformación ya probada en (26.6).

Probemos la contracción con la sección tautológica $\boldsymbol{\mathcal{Y}}(x,v)=v$. Escribamos $L=\tfrac12 F^2$. Las identidades de Euler dan

$$L_{v^i} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} v^k, \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial v^m} = 2C_{ikm}, \qquad \sum_{k=1}^{n} C_{ikm} v^k = 0.$$

La ecuación de Euler–Lagrange, escrita mediante el spray, es

$$2\sum_{\ell=1}^{n} g_{i\ell} G^\ell = \sum_{k=1}^{n} L_{x^k v^i} v^k - L_{x^i}. \tag{26.30}$$

Al derivarla respecto de $v^j$ se obtiene

$$2\sum_{\ell=1}^{n} g_{i\ell} N^\ell_j = L_{x^j v^i} - L_{x^i v^j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^k - 4\sum_{m=1}^{n} C_{ijm} G^m. \tag{26.31}$$

Abreviamos $\delta_j := \delta_{x^j}$ para $j\in\{1,\dots,n\}$. Por otra parte, contraer (26.27) en el índice $k$ con $\boldsymbol{\mathcal{Y}}^k = v^k$ da

$$2\sum_{\ell,k=1}^{n} g_{i\ell}\Gamma^\ell_{jk} v^k = \sum_{k=1}^{n} \big( \delta_j g_{ik} + \delta_k g_{ij} - \delta_i g_{jk} \big) v^k$$

$$= L_{x^j v^i} - L_{x^i v^j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^k - 4 \sum_{m=1}^{n} C_{ijm} G^m.$$

En la segunda igualdad se usaron $\sum_{k=1}^{n} C_{ikm} v^k = 0$ y $\sum_{k=1}^{n} N_k^m v^k = 2G^m$. La comparación con (26.31) y la invertibilidad de $(g_{ij})$ prueban $N_j^i = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{jk}^i v^k$. La segunda igualdad de (26.29) se sigue al contraer una vez más y usar $\sum_{j=1}^{n} N_j^i v^j = 2G^i$. En el caso riemanniano, $g_{ij}$ no depende de $v$ y (26.27) es la fórmula usual de Christoffel. □

Si $\gamma$ es una curva regular y $\mathbf{W}$ es un campo no nulo a lo largo de $\gamma$, la conexión de Chern define

$$D_t^{\mathbf{W}} \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \left( \dot{X}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{jk}^i(\gamma, \mathbf{W}) \dot{\gamma}^j X^k \right) \partial_i. \tag{26.32}$$

La casi compatibilidad se expresa mediante

$$\frac{d}{dt} \mathbf{g}_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{g}_{\mathbf{W}}(D_t^{\mathbf{W}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbf{g}_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}, D_t^{\mathbf{W}} \mathbf{Y}) + 2\mathbf{C}_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, D_t^{\mathbf{W}} \mathbf{W}). \tag{26.33}$$

En particular, si $\mathbf{T}_\gamma := \dot{\gamma}$ es el campo tangente, una curva regular es geodésica si y sólo si $D_t^{\mathbf{T}_\gamma} \mathbf{T}_\gamma = 0$; por (26.29), ésta es precisamente (26.18).

### 26.4.3 Primera variación y distancia dirigida

Para una curva regular ponemos

$$E_F(\gamma) := \frac{1}{2} \int_a^b F(\dot{\gamma})^2 \, dt, \qquad L_F(\gamma) := \int_a^b F(\dot{\gamma}) \, dt.$$

**Proposición 26.4.7.** (Primera variación Finsler) Sea $(M, F)$ una variedad Finsler clásica finito–dimensional. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \longrightarrow M$ una variación suave por curvas regulares, sea $\mathbf{T} = \partial_t \alpha$, $\mathbf{V} = \partial_s \alpha$ y sea $\gamma = \alpha_0$. En los miembros derechos, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{V}$ se evalúan en $s = 0$. Entonces

$$\frac{d}{ds}\bigg|_0 \frac{1}{2} \int_a^b F(\dot{\alpha}_s)^2 \, dt = \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v^i} V^i \right]_a^b + \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) V^i \, dt.$$

Equivalentemente,

$$\frac{d}{ds}\bigg|_0 E_F(\alpha_s) = \big[ \mathbf{g}_{\mathbf{T}}(\mathbf{V}, \mathbf{T}) \big]_a^b - \int_a^b \mathbf{g}_{\mathbf{T}}(\mathbf{V}, D_t^{\mathbf{T}} \mathbf{T}) \, dt. \tag{26.34}$$

Para la longitud se tiene

$$\frac{d}{ds}\bigg|_0 L_F(\alpha_s) = \left[ \frac{\mathbf{g}_{\mathbf{T}}(\mathbf{V}, \mathbf{T})}{F(\mathbf{T})} \right]_a^b - \int_a^b \mathbf{g}_{\mathbf{T}} \left( \mathbf{V}, D_t^{\mathbf{T}} \frac{\mathbf{T}}{F(\mathbf{T})} \right) dt. \tag{26.35}$$

Así, las extremales de la energía con extremos fijos son las geodésicas con parámetro afín. Las extremales regulares de la longitud son las curvas cuya parametrización por longitud de arco es geodésica.

*Demostración.* Fijemos $0 < \delta < \varepsilon$ y restrinjamos la variación a $[-\delta, \delta]\times[a,b]$. Como es regular y este rectángulo es compacto, el mapeo $(s,t) \mapsto (\alpha(s,t), \mathbf{T}(s,t))$ tiene imagen compacta en $\widetilde{TM}$; las derivadas de $L = \frac{1}{2}F^2$ son continuas y acotadas sobre ella. Cubrimos la curva central por un número finito de cartas y subdividimos $[a,b]$ de modo que, después de reducir $\varepsilon$, cada banda de la variación quede en una de ellas. La derivación bajo el signo integral está, por lo tanto, justificada y en cada subintervalo da

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_0 E_F(\alpha_s) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} V^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{V}^i \right) dt.$$

La integración por partes se escribe explícitamente como

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{V}^i \, dt = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i} V^i \right]_a^b - \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) V^i \, dt,$$

y prueba la primera fórmula al sumar los subintervalos: los términos de frontera interiores se cancelan porque $\sum_{i=1}^n L_{v^i} V^i = d_v L(\mathbf{V})$ es la evaluación intrínseca de un covector. Ahora $L_{v^i} = \sum_{j=1}^n g_{ij} v^j$ y (26.30) implican

$$\frac{d}{dt} L_{v^i} - L_{x^i} = \sum_{j=1}^n g_{ij}\left( \ddot{x}^j + 2G^j(x,\dot{x}) \right) = \sum_{j=1}^n g_{ij} (D_t^{\mathbf{T}} \mathbf{T})^j.$$

La última igualdad usa (26.29). Como el término de frontera es $\sum_{i=1}^n L_{v^i} V^i = \mathbf{g_T}(\mathbf{T}, \mathbf{V})$, queda demostrada (26.34).

Para la longitud, la identidad de Euler de la Proposición 26.4.3 da $d(F_x)_{\mathbf{T}}(\mathbf{W}) = \frac{\mathbf{g_T}(\mathbf{T},\mathbf{W})}{F(\mathbf{T})}$. La simetría de los índices inferiores de $\Gamma^i_{jk}$, junto con $\partial_s \mathbf{T} = \partial_t \mathbf{V}$, produce la identidad de torsión nula a lo largo de la variación

$$D_s^{\mathbf{T}} \mathbf{T} = D_t^{\mathbf{T}} \mathbf{V}.$$

Al aplicar (26.33) con referencia $\mathbf{T}$, el término de Cartan desaparece porque uno de sus argumentos es $\mathbf{T}$; por lo tanto,

$$\partial_s F(\mathbf{T}) = \mathbf{g_T}\left( D_t^{\mathbf{T}} \mathbf{V}, \frac{\mathbf{T}}{F(\mathbf{T})} \right).$$

La misma fórmula de casi compatibilidad, ahora en la dirección $t$, da

$$\frac{d}{dt} \mathbf{g_T}\left( \mathbf{V}, \frac{\mathbf{T}}{F(\mathbf{T})} \right) = \mathbf{g_T}\left( D_t^{\mathbf{T}} \mathbf{V}, \frac{\mathbf{T}}{F(\mathbf{T})} \right) + \mathbf{g_T}\left( \mathbf{V}, D_t^{\mathbf{T}} \frac{\mathbf{T}}{F(\mathbf{T})} \right),$$

pues $\mathbf{C_T}\left( \mathbf{V}, \frac{\mathbf{T}}{F(\mathbf{T})}, D_t^{\mathbf{T}} \mathbf{T} \right) = 0$. Integrar esta identidad prueba (26.35), con los términos de frontera indicados. Queda justificar que el lema fundamental se aplica a todos los campos locales necesarios. Sea $J \subset (a,b)$ un subintervalo compacto contenido en una carta $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en el sentido de que $\gamma(J) \subseteq U$, y sea $\mathbf{W}$ un campo

suave a lo largo de $\gamma$ con soporte en el interior de $J$. Para $|s|$ pequeño,

$$\alpha(s,t) := \varphi^{-1}\big(\varphi(\gamma(t)) + s\, d\varphi_{\gamma(t)}\mathbf{W}(t)\big)$$

en $J$, prolongada por $\gamma$ fuera de $J$, es una variación suave. La compacidad del soporte permite una elección uniforme de $s$, el pegado es suave porque $\mathbf{W}$ se anula cerca de los extremos de $J$, y la regularidad de $\gamma$ asegura que las curvas vecinas siguen siendo regulares al reducir $|s|$.
Para extremos fijos desaparecen los términos de frontera. Fijados $z \in \mathbb{R}^n$ y $\chi \in C_c^\infty(\mathring{J})$, elegimos $\mathbf{W}(t) = \chi(t)(d\varphi_{\gamma(t)})^{-1}z$. La fórmula de la energía y el lema fundamental implican

$$\mathbf{g}_{\mathbf{T}}\big((d\varphi_{\gamma(t)})^{-1}z, D_t^{\mathbf{T}}\mathbf{T}\big) = 0 \qquad \text{en } \mathring{J}.$$

La arbitrariedad de $z$ y la positividad de $\mathbf{g}_{\mathbf{T}}$ dan $D_t^{\mathbf{T}}\mathbf{T} = 0$, que por (26.29) es (26.18). Aplicado a la fórmula de longitud, el mismo argumento da $D_t^{\mathbf{T}}\left(\frac{\mathbf{T}}{F(\mathbf{T})}\right) = 0$; al parametrizar por longitud de arco ésta es la ecuación geodésica afín. Las recíprocas se leen directamente en las fórmulas.
La derivación métrica y la integración por partes coinciden con el cálculo de Levi–Civita del capítulo finito–dimensional, cuya conexión y derivada a lo largo de curvas están en el Teorema 2.4.10 y el Teorema 2.7.5. Aquí se usa además la identidad $\mathbf{C}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T},\cdot,\cdot) = 0$: ella elimina los términos adicionales de la casi compatibilidad de Chern y permite expresar la primera variación mediante la aceleración covariante. □

La **distancia dirigida hacia delante** es

$$d_F^+(p,q) := \inf\{L_F(\gamma) \mid \gamma \text{ es una curva } C^1 \text{ por tramos de } p \text{ a } q\}. \tag{26.36}$$

Satisface $d_F^+(p,q) > 0$ para $p \neq q$ y la desigualdad triangular, pero no necesariamente es simétrica. La métrica inversa

$$\overleftarrow{F}(v) := F(-v)$$

satisface $d_{\overleftarrow{F}}^+(p,q) = d_F^+(q,p)$. Denotaremos esta última distancia por $d_F^-(p,q)$. Las funciones

$$d_F^{\max}(p,q) := \max\{d_F^+(p,q), d_F^-(p,q)\}, \qquad d_F^{\mathrm{sum}}(p,q) := d_F^+(p,q) + d_F^-(p,q)$$

son distancias simétricas finitas en cada componente conexa. Si se consideran puntos de componentes distintas, se adopta el valor $+\infty$; las afirmaciones métricas se aplican componente a componente.

**Proposición 26.4.8.** (Topología de la distancia dirigida) Sea $(M,F)$ una variedad Finsler clásica finito–dimensional. Las bolas dirigidas hacia delante, las bolas dirigidas hacia atrás y las bolas de $d_F^{\max}$ y $d_F^{\mathrm{sum}}$ inducen la topología de $M$.

*Demostración.* Fijemos una norma euclidiana $|\cdot|$ en una carta alrededor de $x_0$. Por compacidad de la esfera unidad y continuidad de $F$, después de reducir la carta existen $0 < m \le M$ tales que

$$m|v| \le F_x(v) \le M|v|, \qquad m|v| \le F_x(-v) \le M|v|$$

para todo $x$ de la carta y todo $v$. El argumento de primera salida de la prueba del Teorema 26.3.5, aplicado

por separado a $F$ y a $\overleftarrow{F}$, proporciona una bola coordenada $V$ tal que, para $x, y \in V$,

$$m|\varphi(y) - \varphi(x)| \le d_F^+(x,y) \le M|\varphi(y) - \varphi(x)|$$

y las mismas desigualdades con $d_F^-$ en lugar de $d_F^+$. Por último,

$$d_F^{\max}(x,y) \le d_F^{\mathrm{sum}}(x,y) \le 2d_F^{\max}(x,y).$$

Estas estimaciones prueban las cuatro afirmaciones topológicas. □

**Definición 26.4.9.** (Completitudes dirigida y geodésica) Sea $(M,F)$ una variedad Finsler clásica. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **de Cauchy hacia delante** si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_F^+(x_i, x_j) < \varepsilon \qquad \text{si } i, j \in \mathbb{N},\ j \ge i \ge N.$$

La variedad es **métricamente completa hacia delante** si toda sucesión de Cauchy hacia delante converge. Se define la completitud métrica hacia atrás reemplazando $F$ por $\overleftarrow{F}$. Es **geodésicamente completa hacia delante** si toda geodésica maximal con velocidad inicial no nula está definida para todos los tiempos positivos; la noción hacia atrás se define análogamente.

La convergencia en la definición anterior puede expresarse con la topología de $M$, con $d_F^+(x_n, x) \to 0$ o con $d_F^-(x, x_n) \to 0$. En efecto, las dos últimas cantidades son iguales por definición y, en una carta reducida, la prueba anterior proporciona constantes $m, M > 0$ tales que

$$m|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \le d_F^+(x_n, x) \le M|\varphi(x_n) - \varphi(x)|$$

cuando $x_n$ y $x$ pertenecen a esa carta. La completitud hacia delante no implica en general la completitud hacia atrás. Si $F$ es reversible, ambas distancias coinciden y se recupera la completitud métrica usual.

**Ejemplo 26.4.10.** (Métricas de Randers) Si $a$ es riemanniana y $\beta$ es una 1–forma con $|\beta|_a < 1$, entonces

$$F(v) = \sqrt{a(v,v)} + \beta(v)$$

es Finsler clásica. Es reversible si y sólo si $\beta = 0$. La condición $|\beta|_a < 1$ es precisamente la positividad puntual que impide que $F$ se anule en una dirección no nula. Sobre una base no compacta, una cota uniforme exige la condición adicional $\|\beta\|_{L^\infty(M,a)} < 1$. Para comprobar la convexidad vertical, fijemos una fibra y escribamos $\alpha(v) = \sqrt{a(v,v)}$. Si $v \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{2} D^2(F^2)_v(w,w) = \big(d\alpha_v(w) + \beta(w)\big)^2 + \frac{F(v)}{\alpha(v)} \left( a(w,w) - \frac{a(v,w)^2}{a(v,v)} \right).$$

El segundo sumando es no negativo por Cauchy–Schwarz y se anula sólo cuando $w$ es proporcional a $v$. En ese caso, si $w = tv \neq 0$, el primer sumando es $t^2 F(v)^2 > 0$. Si no son proporcionales, el segundo sumando es positivo. Así, el Hessiano es positivo definido para todo $v \neq 0$. Además, si $b(x) := |\beta_x|_a < 1$, se tiene $(1 - b(x))\alpha(v) \le F(v) \le (1 + b(x))\alpha(v)$; de aquí se distinguen la positividad puntual y la comparación uniforme en toda la base.

**Ejemplo 26.4.11.** (Métrica de Funk) En la bola euclidiana $B^n$, la fórmula

$$F_x(v) = \frac{\sqrt{(1-|x|^2)|v|^2 + \langle x, v\rangle^2} + \langle x, v\rangle}{1-|x|^2}$$

define una métrica no reversible. Es una métrica de Randers: su parte riemanniana y su 1–forma son

$$a_x(v,v) = \frac{|v|^2}{1-|x|^2} + \frac{\langle x, v\rangle^2}{(1-|x|^2)^2}, \qquad \beta_x(v) = \frac{\langle x, v\rangle}{1-|x|^2}.$$

La matriz inversa de $a_x$ es $(1-|x|^2)(I - xx^{\mathsf{T}})$, por lo que $|\beta_x|^2_{a_x} = |x|^2 < 1$. El ejemplo anterior garantiza la convexidad vertical fuerte. Sobre un radio dirigido hacia la frontera, $F_{te_1}(e_1) = \frac{1}{1-t}$, cuya integral diverge; en la dirección opuesta aparece $F_{te_1}(-e_1) = \frac{1}{1+t}$. Más generalmente, si el rayo que parte de $x$ y pasa por $y$ encuentra la frontera en $b$, se tiene

$$d_F^+(x,y) = \log \frac{|x-b|}{|y-b|}.$$

Para verificar la fórmula, fijemos $x \neq y$ y ese punto $b \in \partial B^n$, y pongamos $h_b(z) = 1 - \langle b, z\rangle > 0$. Para $w \neq 0$, la fórmula de $F_z(w)$ es la solución positiva de $|z + w/F_z(w)| = 1$. Al tomar el producto interior con $b$ se obtiene

$$F_z(w) \geq \frac{\langle b, w\rangle}{h_b(z)} = -d(\log h_b)_z(w).$$

La desigualdad también vale para $w = 0$. Toda curva de $x$ a $y$ tiene, por tanto, longitud al menos $\log(h_b(x)/h_b(y))$. En el segmento orientado de $x$ a $y$ se cumple la igualdad, porque el rayo tangente encuentra la esfera precisamente en $b$. Como $x, y, b$ son colineales, $h_b(x)/h_b(y) = |x-b|/|y-b|$, y queda demostrada la fórmula de distancia. En particular,

$$d_F^+(0,y) = -\log(1-|y|), \qquad \overline{B}^+(0,R) = \{y \in B^n \mid |y| \leq 1 - e^{-R}\}, \qquad R \geq 0.$$

Estas bolas son compactas. Una sucesión de Cauchy hacia delante queda contenida en alguna de ellas por la desigualdad triangular y tiene una subsucesión convergente a $y \in B^n$. Para comprobar la convergencia de toda la sucesión, fijemos $\varepsilon > 0$ y un índice $N$ a partir del cual $d_F^+(x_i, x_j) < \varepsilon/2$ si $j \geq i \geq N$. Para cada $i \geq N$, tomamos índices de la subsucesión mayores que $i$ y pasamos al límite; la continuidad de la distancia da $d_F^+(x_i, y) \leq \varepsilon/2$. La topología de las bolas hacia atrás implica $x_i \to y$. Así se obtiene la completitud hacia delante. Para la métrica inversa, en cambio, el radio $t \mapsto te_1$ tiene longitud

$$\int_0^1 F_{te_1}(-e_1)\,dt = \log 2 < \infty.$$

Así, una sucesión sobre ese radio que converge a la frontera es de Cauchy para la distancia inversa y no converge en $B^n$; la métrica no es completa hacia atrás.

**Teorema 26.4.12.** (Hopf–Rinow de Finsler finito–dimensional) Sea $(M, F)$ una variedad Finsler clásica, conexa y finito–dimensional. Son equivalentes:

(i) $(M, F)$ es métricamente completa hacia delante;

(ii) $(M, F)$ es geodésicamente completa hacia delante;

(iii) $\exp_p$ está definida en todo $T_pM$ para cada $p \in M$;

(iv) toda bola cerrada hacia delante $\overline{B}^{+}(p,r) = \{q \in M \mid d_F^{+}(p,q) \le r\}$ es compacta;

(v) todo subconjunto cerrado y acotado hacia delante, es decir, contenido en alguna bola $B^{+}(p,r)$, es compacto.

Bajo estas condiciones, para cualesquiera $p, q \in M$ existe una geodésica dirigida de $p$ a $q$ cuya longitud es $d_F^{+}(p,q)$. Las afirmaciones análogas valen hacia atrás, aplicadas a $\overleftarrow{F}$. Si $F$ es reversible, ambas versiones coinciden y proporcionan las mismas equivalencias de completitud que en el teorema de Hopf–Rinow riemanniano; la métrica reversible no tiene por qué proceder de un producto interior.

Una demostración puede consultarse en [19, §6.6, Thm. 6.6.1]; combina la existencia local de geodésicas con la compactación de sucesiones minimizantes y las propiedades de las bolas dirigidas. La dimensión finita es esencial tanto para la compacidad de las indicatrices como para la compacidad local que interviene en el argumento, y no puede omitirse a la vista de la Observación 26.2.9. El resultado relaciona, en cada orientación por separado, la completitud métrica, la completitud geodésica y la existencia de geodésicas minimizantes. No identifica la completitud hacia delante con la completitud hacia atrás.

## 26.5 Resultados globales y fronteras entre teorías

Un spray suave sobre todo $TM$ determina la conexión simétrica que se usa en el resultado siguiente. En coordenadas escribimos, como en la Definición 26.2.3,

$$\mathbf{S}(x,v) = \big((x,v),(v,Q_x(v))\big).$$

La suavidad en la sección cero y la homogeneidad para todos los escalares implican que $Q_x$ es cuadrático. Su polarización define

$$\Gamma_x(u,v) := -\frac{1}{2}\big(Q_x(u+v) - Q_x(u) - Q_x(v)\big), \qquad Q_x(v) = -\Gamma_x(v,v). \tag{26.37}$$

La ley de transformación del spray da (26.6) para estos coeficientes, sin usar un producto interior; por ello definen una conexión lineal simétrica en $TM$. Su transporte paralelo es el del Teorema 25.6.3. Diremos que el spray es **compatible** con una estructura Banach–Finsler $F$ si ese transporte, a lo largo de cada segmento geodésico, preserva las normas $F_x$.

**Teorema 26.5.1.** (Cartan–Hadamard de Neeb) Sea $M$ una variedad suave de Banach conexa, provista de una estructura Banach–Finsler $F$ y de un spray suave sobre todo $TM$, compatible con $F$ en el sentido anterior. Supóngase que tiene curvatura seminegativa en el siguiente sentido: para todo $x \in M$ y todo $v \in \mathcal{D}_x$, donde $\mathcal{D}_x$ es el dominio de $\exp_x$, y todo $w \in T_xM$,

$$(d\exp_x)_v \colon T_xM \longrightarrow T_{\exp_x(v)}M \quad \text{es un isomorfismo y} \quad F_{\exp_x(v)}\big((d\exp_x)_v w\big) \ge F_x(w).$$

Bajo estas hipótesis, la completitud geodésica equivale a la completitud de $(M, d_F)$. Si se cumple cualquiera de ellas, para todo $x \in M$ el mapeo $\exp_x \colon T_xM \longrightarrow M$ es un mapeo cubriente. Si además $M$ es simplemente conexa, $\exp_x$ es un difeomorfismo global. En este último caso las geodésicas radiales minimizan la distancia entre sus extremos.

Las nociones y resultados que siguen proceden de Neeb [107, pp. 118–124]. Las normas tangentes compatibles y los sprays compatibles se introducen en sus Definiciones 1.3–1.4, pp. 118–120. La implicación de completitud métrica a completitud geodésica es su Lema 1.8, y el argumento de levantamiento de caminos es su Teorema 1.9, pp. 121–123. El carácter cubriente del mapeo exponencial es el Teorema 1.10 y la equivalencia de completitudes es el Corolario 1.11, pp. 123–124; el difeomorfismo y la minimización en el caso simplemente conexo aparecen en el Corolario 1.12, p. 124. El argumento de Neeb construye levantamientos de caminos con control de longitud, prolonga geodésicas y verifica el criterio de mapeo cubriente. La estimación que hace posible ese argumento es

$$F_x\big(((d\exp_x)_v)^{-1}z\big) \le F_{\exp_x(v)}(z), \qquad z \in T_{\exp_x(v)}M.$$

Así, la longitud de un levantamiento no supera la de su proyección; en el dominio completo $T_xM$, un levantamiento de longitud finita tiene un límite al llegar a un extremo finito y una inversa local permite prolongarlo. Es el mecanismo de prolongación de caminos utilizado en el Capítulo 23. La condición sobre $d\exp_x$ contiene dos afirmaciones independientes, invertibilidad y expansividad, y ninguna se deduce de la sola continuidad de $F$. A su vez, una estructura Banach–Finsler continua no determina por sí sola un spray compatible.

*Demostración.* Supongamos primero que $(M, d_F)$ es completo. Si una geodésica maximal $\gamma$ tuviera un extremo derecho finito $b$, la compatibilidad del spray haría constante su rapidez $F_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) = a$. En efecto, su velocidad es paralela para la conexión asociada al spray, y el transporte a lo largo de la propia geodésica conserva $F$. Por tanto, $d_F(\gamma(s),\gamma(t)) \le a|t-s|$, y la completitud proporciona un límite $q$ cuando $t \nearrow b$.
En una carta alrededor de $q$, la comparación local de normas proporciona $c > 0$ tal que $c\|w\|_X \le F_z((d\varphi_z)^{-1}w)$. La suavidad de los coeficientes de la conexión permite reducir la carta para que $\|\Gamma_z\| \le K$, con $K > 0$. Si $u(t) = \varphi(\gamma(t))$, en la cola de la curva se tiene

$$\|u'(t)\|_X \le a/c, \qquad \|u''(t)\|_X \le K(a/c)^2.$$

De aquí $u'$ tiene un límite en $X$ cuando $t \nearrow b$. El estado $(u, u')$ converge a un punto del dominio del spray; el criterio de prolongación de la EDO del apéndice extiende la geodésica. Esto contradice la maximalidad. La misma prueba en el extremo izquierdo da completitud geodésica. Es el argumento de la Proposición 26.2.7, con la rapidez constante y la comparación Finsler en lugar de la compatibilidad riemanniana.
Supongamos ahora completitud geodésica, fijemos $x \in M$ y escribamos $E := T_xM$, con la norma completa $F_x$, y $f := \exp_x\colon E \to M$. El diferencial de $f$ es un isomorfismo en cada punto, de modo que el teorema de la función inversa lo hace un difeomorfismo local. Si $c\colon [0,1] \to M$ es una curva $C^1$ por tramos y $v_0 \in E$ satisface $f(v_0) = c(0)$, una inversa local inicia un levantamiento $v$ de $c$ con $v(0) = v_0$. Dos levantamientos con el mismo valor coinciden cerca de ese tiempo por la inyectividad local de $f$; el argumento de abierto y cerrado extiende la coincidencia a su intervalo común.
En todo tramo donde el levantamiento está definido, la regla de la cadena y la expansividad dan

$$F_x(v'(t)) = F_x\big((df_{v(t)})^{-1}c'(t)\big) \le F_{c(t)}(c'(t)).$$

Si su dominio inicial tuviera un extremo $b \le 1$, entonces, para $s < t < b$,

$$F_x(v(t) - v(s)) \le \int_s^t F_{c(\tau)}(c'(\tau))\,d\tau.$$

El miembro derecho tiende a cero cuando $s,t \nearrow b$. La completitud de $E$ proporciona un límite $v_b$, y la continuidad de $f$ da $f(v_b) = c(b)$. Una inversa local alrededor de $v_b$ continúa el levantamiento, o lo define en $t = 1$ si $b = 1$. Así, toda curva $C^1$ por tramos posee un único levantamiento en todo $[0,1]$ con el dato inicial prescrito. Como la conexidad de $M$ permite unir $x = f(0)$ a cualquier punto por una curva de esa clase, $f$ es sobreyectivo.

Verifiquemos la propiedad de mapeo cubriente. Sea $q \in M$ y elijamos una carta $\psi\colon V \to B_X(0,r)$ con $\psi(q) = 0$, cuya imagen sea una bola abierta. Para $y \in V$, sea $c_y(t) := \psi^{-1}(t\psi(y))$. Para cada $e \in f^{-1}(q)$, definimos $s_e(y)$ como el extremo del levantamiento de $c_y$ que empieza en $e$. Entonces $f \circ s_e = \mathrm{id}_V$. Estos mapeos son suaves. Para comprobarlo cerca de un $y_0 \in V$, cubrimos el levantamiento compacto de $c_{y_0}$ por un número finito de dominios de inversas locales de $f$. Subdividimos $[0,1]$ para que cada tramo se levante en uno de ellos. En el primer tramo se usa la inversa que toma $q$ en $e$. Si se han construido los primeros $j$ tramos para $y$ próximo a $y_0$, la continuidad del extremo y la apertura del siguiente dominio permiten reducir esa vecindad de $y_0$ y utilizar la siguiente inversa local. La continuidad conjunta de $(t,y) \mapsto c_y(t)$ y la compacidad de cada intervalo de la subdivisión permiten hacer esta elección para todo el tramo a la vez. La unicidad hace coincidir las dos expresiones en el tiempo común. Este paso, repetido un número finito de veces, expresa el extremo mediante inversas locales suaves. Prueba la suavidad de $s_e$.

Cada $s_e(V)$ es abierto. En efecto, alrededor de $s_e(y)$ tomamos un dominio $O$ donde $f$ es un difeomorfismo; por continuidad de $s_e$, existe un abierto $W \subseteq V$ alrededor de $y$ con $s_e(W) \subseteq O$. Allí $s_e = (f\restriction_O)^{-1}$, así que $s_e(W)$ es abierto. Si $s_e(y) = s_{e'}(y)$, al levantar la curva inversa de $c_y$ desde ese punto, la unicidad da $e = e'$. Por tanto, las imágenes de dos secciones distintas son disjuntas. Finalmente, dado $z \in f^{-1}(V)$, levantamos desde $z$ la curva inversa de $c_{f(z)}$; su extremo es algún $e \in f^{-1}(q)$, y la unicidad da $z = s_e(f(z))$. Hemos probado

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{e \in f^{-1}(q)} s_e(V), \qquad f\restriction_{s_e(V)}\colon s_e(V) \to V \text{ es un difeomorfismo.}$$

Ésta es la condición de mapeo cubriente.

La misma estimación de levantamientos prueba la completitud métrica. Sea $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $M$. Elegimos una subsucesión $(q_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $d_F(q_{j_k}, q_{j_{k+1}}) < 2^{-k-1}$. Por la definición de distancia, existe una curva de $q_{j_k}$ a $q_{j_{k+1}}$ de longitud menor que $2^{-k}$. Tomamos $v_1 \in f^{-1}(q_{j_1})$ y levantamos esas curvas sucesivamente, usando el extremo de cada una como dato inicial de la siguiente. Si $v_k$ es el levantamiento de $q_{j_k}$, entonces

$$F_x(v_\ell - v_k) \le \sum_{m=k}^{\ell-1} 2^{-m} \le 2^{1-k}, \qquad k,\ell \in \mathbb{N}, \quad \ell > k.$$

Así, $v_k$ converge en $E$ a un punto $v$. La continuidad de $f$ y la igualdad entre la topología de $M$ y la de $d_F$ implican $q_{j_k} \to f(v)$ en distancia. Una sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente converge al mismo límite, por lo que $(M, d_F)$ es completo.

Si $M$ es simplemente conexa, el recubrimiento anterior tiene una sola hoja, porque $E$ es conexo. Puede verse mediante levantamientos: un camino en $E$ entre dos puntos de la misma fibra se proyecta en un lazo contráctil. Al levantar una contracción con extremos fijos, el extremo levantado varía continuamente en la fibra discreta y, por tanto, permanece constante. El levantamiento del lazo constante termina donde empieza; los dos puntos de la fibra deben coincidir. El levantamiento de esa contracción se construye en las vecindades uniformemente cubiertas de la misma manera que para caminos, subdividiendo el cuadrado compacto de parámetros en un número finito de rectángulos. Así, $f$ es biyectivo y sus inversas locales

forman una inversa suave global.
Queda la minimización. En el caso simplemente conexo, sea $\Gamma = \exp_x^{-1} \circ \gamma$ el levantamiento de una curva de $x$ a $y$; entonces $\Gamma(0) = 0$. La expansividad da

$$L_F(\gamma) \geq \int_0^1 F_x(\dot{\Gamma}(t))dt \geq F_x(\Gamma(1)).$$

La curva radial $t \mapsto \exp_x(t\Gamma(1))$ es una geodésica y su velocidad es paralela; la compatibilidad del spray con $F$ muestra que tiene longitud $F_x(\Gamma(1))$. Por lo tanto, es minimizante. □

**Observación 26.5.2.** (Cuatro niveles que no deben identificarse) (a) Una métrica riemanniana fuerte sólo existe en modelos hilbertizables y proporciona $\sharp_{\mathbf{g}}$, Levi–Civita y un spray suave.

(b) Una métrica riemanniana estrictamente débil puede ser geométricamente natural, como $L^2$ en espacios de mapeos de regularidad positiva. Su mapeo musical deja de ser sobreyectivo al menos en una fibra; ser débil, en la convención de este capítulo, no excluye ser fuerte.

(c) Una estructura Banach–Finsler de Palais–Struwe es una familia uniformemente local de normas; no requiere Hessiano vertical ni conexión de Chern, y es la estructura adecuada para completitud y deformaciones.

(d) Una métrica Finsler clásica exige suavidad fuera de cero y convexidad vertical fuerte. Los resultados desarrollados aquí usan, además, la compacidad de las esferas y la dimensión finita de los tensores verticales; sus análogos de Banach requieren hipótesis adicionales de suavidad y convexidad uniforme y no se siguen de una norma arbitraria.

Ningún tensor producto, dualidad musical o identificación de un espacio con su dual se considera canónico sin haber fijado la estructura que lo produce.

# 27

# Geometría uniforme y espacios funcionales geométricos

Los capítulos anteriores establecieron el cálculo diferencial y las estructuras geométricas básicas sobre variedades de Banach. Para aplicarlas a espacios de funciones y de secciones todavía hace falta resolver una dificultad adicional: las cartas, las métricas y las conexiones deben ser compatibles con la regularidad funcional elegida, y sus estimaciones deben permanecer controladas al variar el punto base.

En un espacio de mapeos, una carta se construye punto a punto mediante una adición local o el mapeo exponencial del espacio objetivo. En los espacios de métricas y de conexiones, la estructura procede de abiertos o espacios afines de secciones tensoriales. Los grupos de calibre y de difeomorfismos introducen además operaciones no lineales cuya regularidad no es la misma: la acción de calibre exige una derivada del elemento del grupo, mientras que la composición de difeomorfismos pierde derivadas en una de sus variables. Estas diferencias determinan qué objetos forman variedades de Hilbert a regularidad fija y cuáles deben estudiarse mediante una escala de Sobolev o una estructura ILH.

El propósito de este capítulo es reunir estas construcciones dentro de un marco uniforme. Se identificarán las cartas, los espacios tangentes y las acciones naturales, pero también se indicará en cada caso qué hipótesis de regularidad permiten que las operaciones estén bien definidas y sean suaves. Esta precisión será esencial en el capítulo siguiente: muchas energías geométricas utilizan una métrica $L^2$, débil respecto de la topología de Sobolev, y sus gradientes diferenciales disminuyen la regularidad. La geometría infinita dimensional debe, por lo tanto, conservar simultáneamente la estructura geométrica y la escala analítica en la que viven las ecuaciones.

### Eichhorn, Amann y el control en el infinito

La geometría no compacta obliga a distinguir cercanía local, control uniforme y distancia global. Eichhorn desarrolló uniformidades para comparar objetos geométricos y estudiar sus componentes de distancia finita; Amann organizó atlas uniformemente regulares adaptados al análisis de espacios funcionales. Aunque ambos lenguajes comparten estimaciones uniformes, responden a preguntas diferentes: uno describe espacios de configuraciones y el otro permite localizar operadores y normas sin que las constantes se deterioren al escapar hacia el infinito.

## 27.1 Control uniforme de la variedad base: regularidad uniforme y geometría acotada

Los espacios $BC^j(U,F)$ y $BUC^j(U,F)$, incluidos los convenios para una media caja y para $j=0,\infty$, se definieron en la Definición 6.4.1. Los atlas normalizados y encogibles, su multiplicidad, los atlas y las estructuras uniformemente regulares se definieron en las Definiciones 13.2.1 y 13.2.2. Para una carta $\kappa\colon U_\kappa \longrightarrow Q_\kappa$, la representación coordenada de la métrica es, por definición, $g_\kappa = (\kappa^{-1})^{*}g$. Las constantes uniformes de elipticidad y las cotas $BUC^j$ de $g_\kappa$ y de $g_\kappa^{-1}$ aparecen explícitamente en (13.8), (13.9) y (13.11); ninguna de ellas depende de la carta.

El Teorema 13.2.4 y el Corolario 14.4.7 demuestran la dirección empleada en este capítulo, sin y con frontera. En la primera situación, las constantes dependen sólo de la dimensión, de un radio normal común y de las cotas de las derivadas de la curvatura del orden requerido. En la segunda se añaden el ancho del collar, el radio normal de la frontera y las cotas de la segunda forma fundamental y sus derivadas. Las comparaciones completas y las referencias precisas para sus recíprocas se formulan en los Teoremas 13.2.5 y 14.4.8, respectivamente.

El sistema de localización de Amann se construyó en la Proposición 13.2.6. Sin frontera, para los operadores de análisis $\mathcal{S}_{\mathfrak{K}}$ y síntesis $\mathcal{R}_{\mathfrak{K}}$ definidos en el Corolario 13.3.12, se tiene $\mathcal{R}_{\mathfrak{K}}\mathcal{S}_{\mathfrak{K}} = \mathrm{id}$ y, para cada $s\in\mathbb{R}$ y $1<p<\infty$, existen constantes $c_{s,p}, C_{s,p}, D_{s,p}>0$ tales que

$$c_{s,p}\|u\|_{H^{s,p}(M)} \le \|\mathcal{S}_{\mathfrak{K}}u\|_{\ell^p(I;H^{s,p}(\mathbb{R}^m))} \le C_{s,p}\|u\|_{H^{s,p}(M)}$$

además de $\|\mathcal{R}_{\mathfrak{K}}v\|_{H^{s,p}(M)} \le D_{s,p}\|v\|_{\ell^p(I;H^{s,p}(\mathbb{R}^m))}$. Las tres constantes dependen únicamente de $m,s,p$, de la multiplicidad y de las cotas uniformes de los cambios de coordenadas y de los cortes hasta los órdenes requeridos; no dependen de la carta ni de $u$ o $v$. El mismo corolario registra las comparaciones de Triebel–Lizorkin y, cuando los índices lo permiten, de Besov mediante constantes explícitas.

Con frontera, el Corolario 14.4.12 sustituye el espacio de sucesiones anterior por $\mathbb{H}^{s,p}_{\partial}(\mathfrak{K})$, cuyas componentes se modelan en $\mathbb{R}^m$ para las cartas interiores y en $\mathbb{R}^m_+$ para las de frontera. Los operadores $\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}}$ y $\mathcal{R}_{\partial,\mathfrak{K}}$ satisfacen $\mathcal{R}_{\partial,\mathfrak{K}}\mathcal{S}_{\partial,\mathfrak{K}} = \mathrm{id}$ y las estimaciones (14.38)– (14.39), con constantes positivas $c^{\partial}_{s,p}, C^{\partial}_{s,p}, D^{\partial}_{s,p}$. Éstas dependen sólo de $m,s,p$, de las cotas de traslape y de las cotas uniformes de los cambios de coordenadas y de los cortes hasta el orden requerido; no dependen de la carta ni del elemento localizado. Así se transfieren a las cartas, con constantes uniformes, los encajes, los multiplicadores y los operadores locales euclidianos. Éste es el papel de la regularidad uniforme de Amann en el libro: ofrecer una formulación coordinada de la geometría acotada adaptada a los espacios funcionales, no una geometría alternativa ni una uniformidad sobre un espacio de configuraciones.

## 27.2 Espacios uniformes y uniformidades de Eichhorn

### 27.2.1 Estructuras uniformes

Si $X$ es un conjunto y $U, V \subseteq X\times X$, escribimos

$$U^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y)\in U\},$$
$$U\circ V := \{(x,z)\in X\times X \mid \text{existe } y\in X \text{ con } (x,y)\in V,\ (y,z)\in U\}.$$

La diagonal de $X\times X$ se denota por $\Delta_X := \{(x,x)\mid x\in X\}$.

**Definición 27.2.1.** (Estructura uniforme) Una *estructura uniforme* sobre $X$ es una familia no vacía $\varnothing \neq \mathscr{U} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ que satisface:

(i) si $U \in \mathscr{U}$ y $U \subseteq V \subseteq X \times X$, entonces $V \in \mathscr{U}$;

(ii) si $U, V \in \mathscr{U}$, entonces $U \cap V \in \mathscr{U}$;

(iii) $\Delta_X \subseteq U$ para todo $U \in \mathscr{U}$;

(iv) si $U \in \mathscr{U}$, entonces $U^{-1} \in \mathscr{U}$;

(v) para cada $U \in \mathscr{U}$ existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$.

Los elementos de $\mathscr{U}$ se llaman *entornos uniformes*; también reciben el nombre francés *entourages*. El par $(X, \mathscr{U})$ es un *espacio uniforme*. Es separado si $\bigcap_{U \in \mathscr{U}} U = \Delta_X$.

**Definición 27.2.2.** (Base y cofinalidad) Una familia $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U}$ es una *base* de la uniformidad $\mathscr{U}$ si, para cada $U \in \mathscr{U}$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subseteq U$. Dos bases $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ son *cofinales* si cada elemento de cualquiera de ellas contiene un elemento de la otra.
Una familia no vacía $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ genera una uniformidad si todos sus elementos contienen $\Delta_X$ y se cumplen las condiciones siguientes: para $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ existe $B_3 \in \mathscr{B}$ con $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$; para $B \in \mathscr{B}$ existen $B', B'' \in \mathscr{B}$ tales que $(B')^{-1} \subseteq B$ y $B'' \circ B'' \subseteq B$. La uniformidad generada está formada por los subconjuntos de $X \times X$ que contienen algún elemento de $\mathscr{B}$.

**Definición 27.2.3.** (Uniformidad metrizable) Una uniformidad es *metrizable* si existe una métrica finita que la genera. Una base es *numerable* si posee una subfamilia cofinal numerable.

Para $x \in X$ y $U \in \mathscr{U}$ ponemos $U[x] := \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$. Los conjuntos $U[x]$ forman una base de vecindades de una topología sobre $X$. La estructura uniforme contiene más información que esta topología: permite comparar puntos sin elegir previamente un punto base.

**Definición 27.2.4.** (Continuidad uniforme) Sean $(X, \mathscr{U}_X)$ y $(Y, \mathscr{U}_Y)$ espacios uniformes. Un mapeo $F\colon X \longrightarrow Y$ es *uniformemente continuo* si, para cada $V \in \mathscr{U}_Y$, existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que

$$(F \times F)(U) \subseteq V.$$

Dos estructuras uniformes son equivalentes si la identidad es uniformemente continua en ambos sentidos.

**Definición 27.2.5.** (Filtro y completitud uniformes) Un *filtro* sobre $X$ es una familia no vacía $\mathscr{F}$ de subconjuntos de $X$ que no contiene a $\varnothing$, es cerrada bajo intersecciones finitas y contiene todo supraconjunto de cada uno de sus elementos. Un filtro $\mathscr{F}$ sobre $X$ es *de Cauchy* si, para todo $U \in \mathscr{U}$, existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A \times A \subseteq U$. Converge a $x \in X$ si $U[x] \in \mathscr{F}$ para todo $U \in \mathscr{U}$. El espacio uniforme es *completo* si todo filtro de Cauchy converge.

**Lema 27.2.6.** (Filtros y sucesiones para una base numerable) Supongamos que $\mathscr{U}$ posee una base numerable. Una sucesión $(x_n)$ se llama *de Cauchy* si, para cada $U \in \mathscr{U}$, existe $n_0$ tal que $(x_m, x_n) \in U$ cuando $m, n \geq n_0$. Entonces el espacio es completo en el sentido de la Definición 27.2.5 si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge.

*Demostración.* Si todo filtro de Cauchy converge, se aplica la hipótesis al filtro de las colas de una sucesión de Cauchy; la convergencia de ese filtro equivale a la de la sucesión.
Recíprocamente, sea $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy y sea $(\mathscr{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base cofinal numerable. Para cada $k$ existe $A_k \in \mathscr{F}$ tal que $A_k \times A_k \subseteq \mathscr{B}_k$. Los conjuntos $C_k := A_1 \cap \cdots \cap A_k$ pertenecen a $\mathscr{F}$ y no son vacíos; elijamos $x_k \in C_k$. Dado $U \in \mathscr{U}$, existe $j$ con $\mathscr{B}_j \subseteq U$. Si $m, n \geq j$, entonces $x_m, x_n \in C_j \subseteq A_j$ y, por lo tanto, $(x_m, x_n) \in U$. La sucesión $(x_k)$ es de Cauchy y converge, por hipótesis, a cierto $x \in X$.
Fijemos $U \in \mathscr{U}$. Existe un entorno uniforme simétrico $V$ tal que $V \circ V \subseteq U$: se intersecta con su inverso un entorno cuyo cuadrado esté contenido en $U$. Elijamos $j$ con $\mathscr{B}_j \subseteq V$ y luego $n \geq j$ con $(x, x_n) \in V$. Para $y \in A_j$ se tiene $(x_n, y) \in \mathscr{B}_j \subseteq V$, de modo que $(x, y) \in U$. Por consiguiente, $A_j \subseteq U[x]$ y $U[x] \in \mathscr{F}$. Esto vale para cada $U$, luego $\mathscr{F}$ converge a $x$. □

**Proposición 27.2.7.** (Uniformidad métrica) Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Los conjuntos

$$U_\varepsilon := \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

forman una base de una estructura uniforme separada. Su topología es la topología métrica, sus sucesiones de Cauchy son las usuales y el espacio uniforme es completo si y sólo si $(X, d)$ es completo.

*Demostración.* La diagonal está contenida en cada $U_\varepsilon$ y $U_\varepsilon^{-1} = U_\varepsilon$. La desigualdad triangular da $U_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ U_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq U_\varepsilon$. Además, $U_\varepsilon[x] = B_d(x, \varepsilon)$, de modo que la topología inducida es la métrica. Finalmente, $\{x_j\}$ es de Cauchy para la uniformidad si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0$ tal que $(x_i, x_j) \in U_\varepsilon$ para $i, j \geq j_0$, que es precisamente la condición métrica habitual. El Lema 27.2.6, aplicado a la base $\left(U_{\frac{1}{k}}\right)_{k\geq 1}$, identifica la completitud por filtros con la completitud métrica. □

**Proposición 27.2.8.** (Completación en el caso metrizable) Todo espacio uniforme separado y metrizable $(X, \mathscr{U})$ admite una completación métrica: existe un espacio uniforme separado, metrizable y completo $\widehat{X}$, y un encaje uniforme $\iota\colon X \longrightarrow \widehat{X}$ cuya imagen es densa. Aquí, *encaje uniforme* significa que $\iota$ es inyectivo y que tanto $\iota$ como su inversa sobre $\iota(X)$ son uniformemente continuos. La completación es única entre completaciones separadas y metrizables: si $\jmath\colon X \longrightarrow Y$ es otra, existe un único isomorfismo uniforme $\Phi\colon \widehat{X} \longrightarrow Y$ tal que $\Phi \circ \iota = \jmath$.

*Demostración.* Elijamos una métrica $d$ que genere $\mathscr{U}$. Se consideran las sucesiones de Cauchy en $X$ y se identifican dos de ellas, $(x_j)$ y $(y_j)$, cuando $d(x_j, y_j) \to 0$. Si $[x_j]$ denota la clase resultante, la fórmula

$$\widehat{d}([x_j], [y_j]) := \lim_{j\to\infty} d(x_j, y_j)$$

está bien definida, pues

$$\left|d(x_j, y_j) - d(x_k, y_k)\right| \leq d(x_j, x_k) + d(y_j, y_k).$$

Esta desigualdad muestra que la sucesión escalar es de Cauchy y que el límite no cambia al sustituir representantes. La positividad, la simetría y la desigualdad triangular pasan al límite, y $\widehat{d}([x_j],[y_j]) = 0$ equivale a la relación que define las clases. Por lo tanto, $\widehat{d}$ es una métrica. El mapeo

$$\iota\colon X \longrightarrow \widehat{X}, \qquad x \longmapsto [(x,x,\dots)],$$

es isométrico y, por lo tanto, un encaje uniforme. Si $(x_j)$ representa $\xi \in \widehat{X}$, entonces

$$\widehat{d}(\iota(x_j),\xi) = \lim_{k\to\infty} d(x_j,x_k) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } j \longrightarrow \infty,$$

por lo que $\iota(X)$ es denso.
Sea $(\xi_k)$ una sucesión de Cauchy en $\widehat{X}$. Se elige una subsucesión $(\eta_j)$ tal que $\widehat{d}(\eta_j,\eta_{j+1}) < 2^{-j-2}$ y, por densidad, puntos $z_j \in X$ tales que $\widehat{d}(\iota(z_j),\eta_j) < 2^{-j-2}$. La desigualdad triangular da $d(z_j,z_{j+1}) < 2^{-j}$; en consecuencia, para $q > p$,

$$d(z_p,z_q) < \sum_{j=p}^{q-1} 2^{-j},$$

y $(z_j)$ es de Cauchy. Sea $\zeta := [z_j]$. Entonces

$$\widehat{d}(\eta_j,\zeta) \le 2^{-j-2} + \sum_{r=j}^{\infty} 2^{-r} \longrightarrow 0.$$

La subsucesión $(\eta_j)$ converge a $\zeta$ y, como $(\xi_k)$ es de Cauchy, también $\xi_k \to \zeta$. Así, $\widehat{X}$ es completo.
Para la unicidad usaremos la siguiente construcción, que también explica la extensión a una completación. Si $F\colon X \longrightarrow Y$ es uniformemente continuo y $(Y,e)$ es métrico completo, se define, para $\xi = [x_j]$,

$$\widehat{F}(\xi) := \lim_{j\to\infty} F(x_j).$$

La continuidad uniforme hace de $(F(x_j))$ una sucesión de Cauchy. Si $d(x_j,y_j) \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ se elige $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implique $e(F(x),F(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$; para $j$ grande se obtiene $e(F(x_j),F(y_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, el límite no depende del representante. El mismo criterio muestra la continuidad uniforme de $\widehat{F}$: si $\widehat{d}(\xi,\eta) < \frac{\delta}{2}$, se eligen representantes $(x_j)$ y $(y_j)$ y, para $j$ suficientemente grande, $d(x_j,y_j) < \delta$; al pasar al límite se obtiene $e(\widehat{F}(\xi),\widehat{F}(\eta)) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. La extensión es única porque $Y$ es separado y $\iota(X)$ es denso.
Sea ahora $\jmath\colon X \longrightarrow Y$ otra completación separada y metrizable. La identidad uniforme entre $\iota(X)$ y $\jmath(X)$ se extiende a mapeos uniformemente continuos $\Phi\colon \widehat{X} \longrightarrow Y$ y $\Psi\colon Y \longrightarrow \widehat{X}$. Las composiciones fijan los subconjuntos densos correspondientes; la unicidad anterior da $\Psi\circ\Phi = \mathrm{id}_{\widehat{X}}$ y $\Phi\circ\Psi = \mathrm{id}_Y$. Además, $\Phi\circ\iota = \jmath$, y la misma densidad prueba que no existe otro isomorfismo con esta propiedad. □

**Definición 27.2.9.** (Métrica extendida) Una *métrica extendida* sobre un conjunto $X$ es un mapeo

$$d\colon X\times X \longrightarrow [0,+\infty]$$

que satisface los axiomas de una métrica, con la convención aritmética $a + (+\infty) = +\infty$.

**Definición 27.2.10.** (Componente de distancia finita) Si $d$ es una métrica extendida y $x \in X$, la *componente de distancia finita* de $x$ es

$$X_x := \{y \in X \mid d(x,y) < +\infty\}.$$

La restricción $d\restriction_{X_x}$ es una métrica ordinaria. La relación definida por la condición $d(x,y) < +\infty$ es de equivalencia, y sus clases son las componentes de distancia finita.

**Proposición 27.2.11.** (Descomposición por componentes finitas) Las componentes de distancia finita son abiertas y cerradas para la topología generada por las bolas de radio finito. La completación de $(X,d)$ es la unión disjunta de las completaciones métricas de esas componentes.

*Demostración.* Si $y \in X_x$, toda bola de radio finito centrada en $y$ está contenida en $X_x$ por la desigualdad triangular; por lo tanto, $X_x$ es abierta. Su complemento es la unión de las demás componentes y también es abierto. Una sucesión de Cauchy queda, desde cierto índice, en una sola componente, pues para algún radio finito todas sus parejas suficientemente tardías están a distancia menor que ese radio. En consecuencia, completar cada componente y tomar la unión disjunta produce, y caracteriza, la completación de la métrica extendida. □

**Proposición 27.2.12.** (Metrización por cadenas) Sea $(V_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una base cofinal decreciente de entornos uniformes simétricos de un espacio uniforme separado $X$ y supongamos

$$V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subseteq V_n, \qquad n \geq 0.$$

Definamos el coste de una arista por

$$\omega(x,y) := \inf\big(\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_0,\ (x,y) \in V_n\} \cup \{+\infty\}\big)$$

y, para cadenas $(x_i)_{i=0}^{N}$ con todos sus vértices en $X$, la métrica de cadenas por

$$d_{\mathrm{cad}}(x,y) := \inf\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \omega(x_i, x_{i+1}) \,\middle|\, N \in \mathbb{N},\ x = x_0,\ x_N = y \right\}. \tag{27.1}$$

Si no existe una cadena de coste finito, el ínfimo vale $+\infty$. Entonces, para $n \geq 1$,

$$V_n \subseteq \{(x,y) \mid d_{\mathrm{cad}}(x,y) \leq 2^{-n}\} \quad \text{y} \quad \{(x,y) \mid d_{\mathrm{cad}}(x,y) < 2^{-n}\} \subseteq V_{n-1}.$$

En particular, $d_{\mathrm{cad}}$ es una métrica extendida que genera la uniformidad en cada componente de distancia finita, y $\min\{1, d_{\mathrm{cad}}\}$ es una métrica finita que genera la uniformidad en todo el espacio.

*Demostración.* La primera inclusión se obtiene usando la cadena de una sola arista. Para la segunda probamos simultáneamente para todo $n \in \mathbb{N}$ la implicación: una cadena de $N$ aristas y coste menor que $2^{-n}$ tiene sus extremos en $V_{n-1}$. Si $N = 1$, la definición del coste y el carácter diádico de sus valores dan $(x_0, x_1) \in V_{n+1} \subseteq V_{n-1}$. Una arista de coste cero une puntos iguales, porque el par pertenece a todos los $V_j$ y la uniformidad es separada.
Supongamos ahora la implicación para toda cadena de menos de $N$ aristas. Si el coste total $c$ es cero, todos

los vértices coinciden. Si $c > 0$, elegimos la primera arista para la cual el coste acumulado alcanza o supera $c/2$. La subcadena que la precede tiene coste menor que $c/2$ y la que la sigue tiene coste a lo más $c/2$. Como $c < 2^{-n}$, ambos costes son menores que $2^{-(n+1)}$. Cada subcadena tiene menos de $N$ aristas, de modo que la hipótesis inductiva, aplicada al índice $n+1$, sitúa sus extremos en $V_n$. Si una subcadena es vacía, sus extremos coinciden y pertenecen a la diagonal de $V_n$. La arista central tiene coste menor que $2^{-n}$, por lo que pertenece a $V_{n+1} \subseteq V_n$. La inclusión $V_n \circ V_n \circ V_n \subseteq V_{n-1}$ concluye el paso inductivo.
La simetría y la desigualdad triangular de $d_{\mathrm{cad}}$ se siguen, respectivamente, invirtiendo y concatenando cadenas. Si su valor es cero, la segunda inclusión coloca el par en todo $V_n$; la separación implica que los puntos coinciden. Las dos inclusiones muestran que las bolas y los entornos uniformes son cofinales. Finalmente, truncar por uno conserva todas las bolas de radio menor que uno y asigna distancia uno a pares de componentes distintas. □

En particular, toda uniformidad separada con base numerable es metrizable: se intersecta cada elemento de la base con su inverso y se refina recursivamente para obtener la condición triple de la proposición.

### 27.2.2 Las uniformidades de Eichhorn

La regularidad uniforme anterior es una propiedad de la variedad base y de un atlas. Las uniformidades que se introducen ahora viven, en cambio, sobre un conjunto de secciones, mapeos, métricas o difeomorfismos. Su papel es comparar globalmente dos objetos, incluso cuando la base no es compacta. El marco uniforme general y su uso en variedades completas, no compactas y sin frontera se desarrollan en [51]; las construcciones analíticas específicas se formulan a continuación.

#### El modelo lineal

Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa y sin frontera, y sea $\mathbf{E} \longrightarrow M$ un haz vectorial suave real de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión $\nabla := \nabla^{\mathbf{E}}$ compatible con ella. Para $1 \le p < \infty$ y $r \in \mathbb{N}_0$ ponemos

$$\|\mathbf{u}\|_{p,r;\nabla} := \left( \sum_{j=0}^{r} \int_M |\nabla^j \mathbf{u}|^p_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sobre el espacio $L^0(M,\mathbf{E})$ de clases, módulo igualdad casi en todas partes, de secciones medibles, definimos la métrica extendida

$$d_{p,r;\nabla}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \begin{cases} \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{p,r;\nabla}, & \mathbf{u}-\mathbf{v} \in W^{r,p}(M,\mathbf{E}), \\ +\infty, & \mathbf{u}-\mathbf{v} \notin W^{r,p}(M,\mathbf{E}). \end{cases} \tag{27.2}$$

**Proposición 27.2.13.** (Componentes lineales) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa y sin frontera, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión $\nabla := \nabla^{\mathbf{E}}$ compatible con ella. Fijemos $1 \le p < \infty$ y $r \in \mathbb{N}_0$. Entonces los conjuntos

$$V_\varepsilon := \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mid d_{p,r;\nabla}(\mathbf{u},\mathbf{v}) < \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

son una base de una uniformidad separada y metrizable. La componente de distancia finita de $\mathbf{u}_0$ es el espacio afín $\mathbf{u}_0 + W^{r,p}(M,\mathbf{E})$, y es completa cuando $W^{r,p}(M,\mathbf{E})$ lo es. Si $\nabla'$ es otra conexión, los espacios de secciones con derivadas débiles de orden a lo más $r$ integrables son los mismos para ambas conexiones y

existen $c_\nabla, C_\nabla > 0$ tales que

$$c_\nabla \|\mathbf{u}\|_{p,r;\nabla} \le \|\mathbf{u}\|_{p,r;\nabla'} \le C_\nabla \|\mathbf{u}\|_{p,r;\nabla} \qquad (\mathbf{u} \in W^{r,p}(M,\mathbf{E})),$$

ambas conexiones inducen la misma uniformidad.

*Demostración.* La simetría y la desigualdad triangular de $d_{p,r;\nabla}$ se heredan de la norma en toda componente de distancia finita. Por ello $V_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ V_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq V_\varepsilon$; además, $V_\varepsilon^{-1} = V_\varepsilon$, $\Delta_{L^0(M,\mathbf{E})} \subseteq V_\varepsilon$ y $V_{\min\{\varepsilon,\delta\}} \subseteq V_\varepsilon \cap V_\delta$. Éstas son todas las condiciones de la Definición 27.2.2. La función $\min\{1, d_{p,r;\nabla}\}$ es una métrica finita que genera los mismos entornos uniformes de radio menor que uno, lo que prueba la metrizabilidad. Por otra parte, $d_{p,r;\nabla}(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}) < \infty$ equivale a $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in W^{r,p}(M,\mathbf{E})$, lo que identifica la componente. La traslación $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ es una isometría de esa componente sobre $W^{r,p}(M,\mathbf{E})$, de donde se sigue la completitud. Finalmente, dos normas que satisfacen las desigualdades explícitas del enunciado tienen las mismas bolas uniformes después de cambiar el radio por los factores $c_\nabla, C_\nabla$ y, por lo tanto, bases cofinales de entornos uniformes. □

Si $\nabla' - \nabla = \mathbf{a} \in \Omega^1(\operatorname{End}\mathbf{E})$ y $\mathbf{a}, \nabla\mathbf{a}, \dots, \nabla^{r-1}\mathbf{a}$ son uniformemente acotadas, la regla de Leibniz expresa $(\nabla')^j\mathbf{u}$, en el sentido débil del Capítulo 9, como $\nabla^j\mathbf{u}$ más una suma de productos entre derivadas de $\mathbf{a}$ y derivadas de $\mathbf{u}$ de orden menor. Se obtiene $\|\mathbf{u}\|_{p,r;\nabla'} \le C_\nabla \|\mathbf{u}\|_{p,r;\nabla}$, donde $C_\nabla$ depende de $r$ y de las cotas de $\mathbf{a}, \nabla\mathbf{a}, \dots, \nabla^{r-1}\mathbf{a}$. Si las derivadas correspondientes de $-\mathbf{a} = \nabla - \nabla'$ están acotadas respecto de $\nabla'$, se obtiene $c_\nabla \|\mathbf{u}\|_{p,r;\nabla} \le \|\mathbf{u}\|_{p,r;\nabla'}$. Las mismas identidades, aplicadas a secciones localmente integrables en el sentido distribucional, prueban las dos inclusiones de los dominios Sobolev; no basta comparar las normas sobre uno solo de ellos. En el paso de orden $j$ a orden $j+1$, la regla de Leibniz de la Proposición 9.1.40 deriva uno de los factores existentes, y el término $\mathbf{a}*$ añade un nuevo factor de orden cero. Partiendo de $\nabla'\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{a} * \mathbf{u}$, esto describe todos los términos para $j \in \{0,\dots,r\}$. Esta observación explica por qué, en geometría acotada, las conexiones de referencia admisibles producen la misma uniformidad lineal. Para conexiones sobre un haz fijo, la diferencia de dos conexiones ya es una sección de $T^*M \otimes \operatorname{End}\mathbf{E}$, y (27.2) se aplica directamente a esa diferencia.

### Mapeos y comparación exponencial

**Definición 27.2.14.** (Condiciones $(I)$ y $(B_k)$) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana completa y sin frontera. Se dice que $(M,\mathbf{g})$ satisface $(I)$ si existe $i_0 > 0$ tal que $\operatorname{inj}(M,\mathbf{g}) \ge i_0$, y que satisface $(B_k)$ si existen constantes $K_0,\dots,K_k > 0$ tales que

$$\|\nabla^j \operatorname{Rm}_{\mathbf{g}}\|_\infty \le K_j, \qquad 0 \le j \le k.$$

La expresión *geometría acotada de orden k* significará en esta sección que se cumplen $(I)$ y $(B_k)$. Las constantes de las estimaciones se referirán a $i_0, K_0, \dots, K_k$ y a los demás datos indicados en cada enunciado.

En lo que sigue, $(M,\mathbf{g})$ y $(N,\mathbf{h}_N)$ denotan variedades completas sin frontera que satisfacen las condiciones de la Definición 27.2.14 al orden requerido.

Si $\mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial suave real de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h}_\mathbf{E}$ y una conexión $\nabla := \nabla^\mathbf{E}$, y $j \in \mathbb{N}_0$, ponemos

$$C_b^j(M,\mathbf{E}) := \left\{ \mathbf{u} \in C^j(M,\mathbf{E}) \,\middle|\, \|\mathbf{u}\|_{C_b^j(M,\mathbf{E})} := \sum_{\ell=0}^{j} \sup_{x\in M} |\nabla^\ell \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g},\mathbf{h}_\mathbf{E}} < +\infty \right\}.$$

Para $j = 0$ sólo se exige que $\mathbf{u}$ sea continua y acotada. En el haz inducido $f^*TN$ se emplea la conexión inducida por $f$ y por la conexión de Levi–Civita de $N$.

Para $q \in \mathbb{N}$, denotamos por $C_b^{\infty,q}(M,N)$ el conjunto de los mapeos suaves $f\colon M \longrightarrow N$ tales que $\|\nabla^j df\|_\infty < +\infty$ para $0 \le j \le q-1$. Cuando sea necesario uniformar las constantes, fijaremos $\mathbf{B} = (B_0,\dots,B_{q-1}) \in (0,+\infty)^q$ y escribiremos

$$C_{b,\mathbf{B}}^{\infty,q}(M,N) := \left\{ f \in C_b^{\infty,q}(M,N) \,\middle|\, \|\nabla^j df\|_\infty \le B_j,\ 0 \le j \le q-1 \right\}.$$

Las constantes serán comunes a todos los mapeos de una clase con $\mathbf{B}$ fijado. Permitir que cada mapeo tenga su propia cota no proporciona una constante común; esta diferencia interviene al comprobar los axiomas de una uniformidad.

Si $\mathbf{X} \in \Gamma(f^*TN)$ y $\|\mathbf{X}\|_{C^0(M,f^*TN;f^*\mathbf{h}_N)} < i_0(N)$, ponemos $(\operatorname{Exp}_f \mathbf{X})(x) := \exp_{f(x)} \mathbf{X}(x)$ y medimos sus derivadas con la conexión inducida en $f^*TN$ mediante

$$\|\mathbf{X}\|_{b,r;f} := \sum_{j=0}^{r} \|\nabla^j \mathbf{X}\|_\infty.$$

Para $0 < \varepsilon < i_0(N)/2$ definimos

$$\mathcal{V}_\varepsilon^{b,r} := \left\{ (f,h) \,\middle|\, h = \operatorname{Exp}_f \mathbf{X} \text{ para algún } \mathbf{X} \in \Gamma(f^*TN),\ \|\mathbf{X}\|_{b,r;f} < \varepsilon \right\}. \tag{27.3}$$

Supongamos ahora $1 < p < \infty$ y $r \in \mathbb{N}$ con $r > \dim(M)/p + 1$, y fijemos $0 < \rho < i_0(N)/2$. En el régimen Sobolev utilizaremos

$$\mathcal{V}_{\varepsilon,\rho}^{p,r} := \left\{ (f,h) \,\middle|\, \begin{array}{l} h = \operatorname{Exp}_f \mathbf{X} \text{ para algún } \mathbf{X} \in W^{r,p}(M,f^*TN), \\ \|\mathbf{X}\|_{W^{r,p}(M,f^*TN)} < \varepsilon, \quad \|\mathbf{X}\|_{C^0(M,f^*TN;f^*\mathbf{h}_N)} < \rho \end{array} \right\}. \tag{27.4}$$

La condición puntual mantiene la comparación dentro de una bola normal común. Para $q \ge r$, sobre $C_{b,\mathbf{B}}^{\infty,q}(M,N)$, los resultados de localización y el encaje de Sobolev proporcionan una constante $C_S = C_S(M,N,p,r,\rho,\mathbf{B}) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{X}\|_{C^0(M,f^*TN;f^*\mathbf{h}_N)} \le C_S \|\mathbf{X}\|_{W^{r,p}(M,f^*TN)}.$$

Por lo tanto, en una clase con datos fijados, la condición $\|\mathbf{X}\|_{C^0(M,f^*TN;f^*\mathbf{h}_N)} < \rho$ se sigue de $\varepsilon < \rho/C_S$.

La propiedad central es que la inversión y la composición de comparaciones exponenciales conservan el control. Si $h = \operatorname{Exp}_f \mathbf{X}$, denotamos por $P_{\mathbf{X}}\colon f^*TN \longrightarrow h^*TN$ el transporte paralelo a lo largo de $t \mapsto \exp_{f(x)}(t\mathbf{X}(x))$.

**Lema 27.2.15.** (Estimaciones uniformes de comparación) Sean $(M,\mathbf{g})$ y $(N,\mathbf{h}_N)$ variedades riemannianas completas y sin frontera que satisfacen $(I)$ y $(B_k)$ hasta el orden requerido. Fijemos un radio $\rho > 0$ tan pequeño que las bolas de radio $4\rho$ estén contenidas en dominios normales uniformes y que las diferenciales verticales de la exponencial y sus inversas tengan cotas comunes. Podemos elegirlo en función de $i_0(N)$ y de la cota de curvatura, con $4\rho < i_0(N)$. Fijemos también un perfil $\mathbf{B}$ que acote las derivadas de los mapeos considerados hasta el orden necesario. Para cada $0 \le j \le r$ existen polinomios continuos $P_j, Q_j$, con coeficientes no negativos y sin término constante, que dependen sólo de las dimensiones, de $j$, de $\rho$, de los datos geométricos uniformes de $M$ y $N$ hasta el orden $r$, y de $\mathbf{B}$, y cumplen:

(i) si $h = \operatorname{Exp}_f \mathbf{X}$, entonces

$$\|\nabla^j (P_{\mathbf{X}}\mathbf{X})\|_{C^0(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes h^*TN;\mathbf{g},h^*\mathbf{h}_N)} \le P_j\Big( \|\mathbf{X}\|_{C^0(M,f^*TN;f^*\mathbf{h}_N)}, \dots, \|\nabla^j \mathbf{X}\|_{C^0(M,T^{(0,j)}(TM)\otimes f^*TN;\mathbf{g},f^*\mathbf{h}_N)} \Big);$$

como $f = \operatorname{Exp}_h(-P_{\mathbf{X}}\mathbf{X})$, esta cota controla la inversión;

(ii) si $h = \operatorname{Exp}_f \mathbf{X}$ y $\ell = \operatorname{Exp}_h \mathbf{Y}$ permanecen en una bola normal común, existe una única $\mathbf{Z} \in \Gamma(f^*TN)$ con $\ell = \operatorname{Exp}_f \mathbf{Z}$, y $\|\nabla^j \mathbf{Z}\|_{C^0(M, T^{(0,j)}(TM)\otimes f^*TN; \mathbf{g}, f^*\mathbf{h}_N)} \le Q_j(\|\mathbf{X}\|_{b,j;f}, \|\mathbf{Y}\|_{b,j;h})$.

Podemos tomar $P_0(t) = t$ y $Q_0(a,b) = a+b$. Además, dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$, dependiente sólo de los datos anteriores, tal que $Q_j(a,b) < \eta$ cuando $a+b < \delta$. Si $r > \dim(M)/p+1$, existen polinomios $\widehat{P}_r, \widehat{Q}_r$ con las mismas dependencias, además de las constantes de módulo y encaje de Sobolev, para los cuales

$$\|P_{\mathbf{X}}\mathbf{X}\|_{W^{r,p}(M,h^*TN)} \le \widehat{P}_r(\|\mathbf{X}\|_{W^{r,p}(M,f^*TN)}), \qquad \|\mathbf{Z}\|_{W^{r,p}(M,f^*TN)} \le \widehat{Q}_r\big(\|\mathbf{X}\|_{W^{r,p}(M,f^*TN)}, \|\mathbf{Y}\|_{W^{r,p}(M,h^*TN)}\big),$$

si las normas en $C^0(M, f^*TN; f^*\mathbf{h}_N)$ y $C^0(M, h^*TN; h^*\mathbf{h}_N)$ correspondientes son menores que $\rho$.

*Demostración.* Para el orden cero, el transporte paralelo es isométrico, de modo que $|P_{\mathbf{X}}\mathbf{X}|_{h^*\mathbf{h}_N} = |\mathbf{X}|_{f^*\mathbf{h}_N}$. Si dos segmentos geodésicos sucesivos determinan $\mathbf{Z}$, la desigualdad triangular da $|\mathbf{Z}|_{f^*\mathbf{h}_N} \le |\mathbf{X}|_{f^*\mathbf{h}_N} + |\mathbf{Y}|_{h^*\mathbf{h}_N}$, tras transportar los vectores al mismo espacio tangente a lo largo de los segmentos.
Para el primer orden, sea $x(s)$ una curva con $x(0) = x$ y $x'(0) = \mathbf{V}$, y consideremos $c(s,t) = \exp_{f(x(s))}(t\mathbf{X}(x(s)))$. El campo $\mathbf{J}(t) = \partial_s c(0,t)$ satisface

$$\frac{D^2\mathbf{J}}{dt^2} + \operatorname{Rm}_{\mathbf{h}_N}(\mathbf{J}, \dot\gamma)\dot\gamma = 0, \qquad \mathbf{J}(0) = df(\mathbf{V}), \qquad \frac{D\mathbf{J}}{dt}(0) = \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{X}. \tag{27.5}$$

En un marco paralelo, la forma integral de esta ecuación y el Lema de Grönwall 1.8.19 implican $\sup_{t\in[0,1]} |\mathbf{J}(t)|_{\mathbf{h}_N} \le e^{K_0(N)\rho^2}(|df(\mathbf{V})|_{\mathbf{h}_N} + |\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{X}|_{\mathbf{h}_N})$. Al integrar una vez la ecuación de Jacobi obtenemos

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{D\mathbf{J}}{dt}(t)\right|_{\mathbf{h}_N} \le |\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{X}|_{\mathbf{h}_N} + K_0(N)|\mathbf{X}|^2_{f^*\mathbf{h}_N} e^{K_0(N)\rho^2}\big(|df(\mathbf{V})|_{\mathbf{h}_N} + |\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{X}|_{\mathbf{h}_N}\big). \tag{27.6}$$

Como la conexión no tiene torsión, $\nabla_{\mathbf{V}}(P_{\mathbf{X}}\mathbf{X}) = D_t\mathbf{J}(1)$, y la cota anterior demuestra el caso $j = 1$.
Para componer dos comparaciones exponenciales, escribamos $\widetilde{\mathbf{Y}} := P_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{Y} \in \Gamma(f^*TN)$. En el dominio normal común consideramos el mapeo suave

$$\Psi(p, v, y) := \exp_p^{-1}\Big(\exp_{\exp_p v}(P_v y)\Big), \qquad p \in N, \quad v, y \in T_pN,$$

donde $P_v : T_pN \longrightarrow T_{\exp_p v}N$ es el transporte paralelo a lo largo de $t \mapsto \exp_p(tv)$. La sección que compara $\ell = \operatorname{Exp}_h \mathbf{Y}$ directamente con $f$ es entonces $\mathbf{Z}(x) = \Psi(f(x), \mathbf{X}(x), \widetilde{\mathbf{Y}}(x))$. Al diferenciar esta identidad aparecen los campos de Jacobi anteriores y la ecuación lineal del transporte paralelo. En particular, existe una constante $A_1$, dependiente sólo de $\dim N$, $\rho$ y $K_0(N)$, tal que

$$|\nabla\mathbf{Z}|_{\mathbf{g}, f^*\mathbf{h}_N} \le A_1\big[(1 + |\mathbf{X}|_{f^*\mathbf{h}_N} + |\widetilde{\mathbf{Y}}|_{f^*\mathbf{h}_N})(|\nabla\mathbf{X}|_{\mathbf{g}, f^*\mathbf{h}_N} + |\nabla\widetilde{\mathbf{Y}}|_{\mathbf{g}, f^*\mathbf{h}_N}) + (|\mathbf{X}|_{f^*\mathbf{h}_N} + |\widetilde{\mathbf{Y}}|_{f^*\mathbf{h}_N})|df|_{\mathbf{g}, f^*\mathbf{h}_N}\big].$$

Las derivadas de $\widetilde{\mathbf{Y}} = P_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{Y}$ se estiman mediante la misma ecuación de transporte paralelo; sus cotas dependen polinómicamente de las derivadas de $\mathbf{X}$ y de $\mathbf{Y}$ y no introducen un término constante.
Para precisar el paso inductivo, supongamos obtenidas las cotas hasta un orden $j-1$, con $2 \le j \le r$. Diferenciamos $j-1$ veces la ecuación (27.5). La recurrencia (13.4)– (13.5) separa la incógnita de orden $j$ de la fuente: el operador sobre esa incógnita sigue siendo el operador de Jacobi, y cada término de la fuente contiene únicamente campos de variación de órdenes menores y derivadas de curvatura de los órdenes allí indicados. La Proposición 9.1.40 permite derivar las contracciones sin cambiar su naturaleza. El término

que resulta al derivar un factor de curvatura eleva en uno su orden; el que resulta al derivar un campo eleva en uno el orden de ese campo. Éstas son exactamente las dos operaciones de la recurrencia, y la identidad de pesos impide que la fuente contenga una segunda incógnita de orden $j$. Sus factores quedan, por tanto, controlados por la hipótesis inductiva y por los datos fijados.

Es necesario conservar además la anulación cuando $\mathbf{X} = 0$. Para ello restamos a la ecuación diferenciada la correspondiente a la variación constante $c(x,t) = f(x)$. Los términos que sólo contienen $df, \dots, \nabla^{j-1} df$ se cancelan. Cada término restante contiene al menos un factor entre $\mathbf{X}, \nabla\mathbf{X}, \dots, \nabla^{j}\mathbf{X}$. Al integrar la ecuación lineal y aplicar Grönwall obtenemos la cota de orden $j$ para el vector final $P_{\mathbf{X}}\mathbf{X}$, con un polinomio sin constante. Así se cierra el paso $j-1 \longrightarrow j$, partiendo de los órdenes cero y uno ya calculados.

Para la composición se procede con el mapeo $\Psi$ y con la ecuación del transporte paralelo. Aquí se resta la identidad $\Psi(p,0,0) = 0$. Al derivarla respecto de $p$, todos los términos que sólo contienen derivadas del centro vuelven a desaparecer. La regla de la cadena de orden $j$ deja productos de las derivadas de $\mathbf{X}$ y de $\mathbf{Y}$ cuyo orden total es a lo más $j$; sus coeficientes están acotados por la misma recurrencia de Jacobi y por la cota de la inversa de la diferencial de la exponencial. La suma de sus cotas define $Q_j$ y conserva la ausencia de término constante.

Para pasar a las normas Sobolev, usamos las trivializaciones uniformes y la equivalencia de normas de la Proposición 13.3.14. En cada término hay al menos un factor integrable. Los productos de derivadas de las secciones se estiman mediante Hölder y los encajes de Sobolev, asignando a cada factor el orden que conserva después de derivarlo; la suma de los órdenes de diferenciación no supera $r$. Los factores de orden cero se controlan por el encaje en $C^1_b$, y las derivadas de los coeficientes por los datos geométricos y $\mathbf{B}$. La estimación de producto en el régimen $r > m/p + 1$ da así un polinomio en las normas $W^{r,p}$ de las secciones, sin un término que exigiría integrar una constante sobre $M$. La multiplicidad finita de la cubierta permite sumar las potencias $p$ de las cotas locales con una constante común. Esto da $\widehat{P}_r$ y $\widehat{Q}_r$.

□

**Proposición 27.2.16.** (Uniformidad con datos de control fijados) Sean $(M,\mathbf{g})$ y $(N,\mathbf{h}_N)$ variedades riemannianas completas y sin frontera que satisfacen $(I)$ y $(B_k)$ hasta el orden requerido. Fijado un perfil $\mathbf{B}$, las familias $\mathcal{V}^{b,r}_{\varepsilon}$ restringidas a $C^{\infty,r}_{b,\mathbf{B}}(M,N)$ forman una base de uniformidad separada. En el régimen Sobolev ocurre lo mismo con $\mathcal{V}^{p,r}_{\varepsilon,\rho}$, después de elegir $\varepsilon < \rho / C_S(\mathbf{B})$.

*Demostración.* La diagonal pertenece a todos los entornos y la monotonía en $\varepsilon$ controla las intersecciones. El inciso (i) del lema permite, para cada $\varepsilon > 0$, elegir $\delta > 0$ tal que $(\mathcal{V}^{b,r}_{\delta})^{-1} \subseteq \mathcal{V}^{b,r}_{\varepsilon}$; el inciso (ii) permite disminuir $\delta$ para obtener $\mathcal{V}^{b,r}_{\delta} \circ \mathcal{V}^{b,r}_{\delta} \subseteq \mathcal{V}^{b,r}_{\varepsilon}$. Las constantes son uniformes porque $\mathbf{B}$ está fijado. La separación se sigue del control puntual. El mismo argumento, usando las estimaciones Sobolev y la condición $C_S(\mathbf{B})\delta < \rho$, prueba la segunda afirmación. □

**Teorema 27.2.17.** (Metrización en una clase con cotas comunes) Sean $(M,\mathbf{g})$ y $(N,\mathbf{h}_N)$ completas, sin frontera y de geometría acotada de orden $k$. Para $q \in \{1,\dots,k\}$ fijemos un perfil $\mathbf{B} \in (0,+\infty)^q$. Los conjuntos (27.3), con $r = q$, restringidos a $C^{\infty,q}_{b,\mathbf{B}}(M,N)$, generan una uniformidad separada con base numerable. Si $1 < p < \infty$ y $k \geq r > m/p + 1$, lo mismo ocurre con (27.4) sobre $C^{\infty,r}_{b,\mathbf{B}}(M,N)$. Ambas uniformidades son metrizables y no cambian al disminuir el radio normal común.

*Demostración.* La Proposición 27.2.16 verifica los axiomas de uniformidad. Basta tomar radios positivos racionales para obtener una base numerable. La separación y la metrización se siguen de la Proposición 27.2.12. Si se disminuye el radio normal, el encaje de Sobolev con constante común muestra que los entornos de radio suficientemente pequeño de la base original pertenecen a la nueva base. La inclusión inversa es inmediata; las bases son cofinales. □

La necesidad de fijar las cotas puede verse directamente. Tomemos $M = S^1 \times \mathbb{R}$ y $N = S^2 \times \mathbb{R}$, con sus métricas producto, y para $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$f_n(\theta, t) = (\cos(n\theta), \sin(n\theta), 0, t), \qquad \theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sea $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ igual a uno en $[-1,1]$, con $0 \le \chi \le 1$, y fijemos $0 < \alpha < \rho$. El campo $\mathbf{X}_n = \alpha\chi(t)(0,0,1,0)$ a lo largo de $f_n$ tiene normas $C_b^r$ y $W^{r,p}$ iguales a una constante por $\alpha$, independientemente de $n$: el vector vertical de la esfera es paralelo a lo largo del ecuador, y sólo se derivan los factores $\chi$. Escribiendo $a(t) = \alpha\chi(t)$,

$$h_n = \operatorname{Exp}_{f_n} \mathbf{X}_n = (\cos a \cos(n\theta), \cos a \sin(n\theta), \sin a, t).$$

El vector que realiza la comparación inversa es

$$\mathbf{Y}_n = \log_{h_n} f_n = a(\sin a \cos(n\theta), \sin a \sin(n\theta), -\cos a, 0).$$

En $S^1 \times [-1,1]$ se cumple $|\nabla_{\partial_\theta} \mathbf{Y}_n| = n\alpha \sin\alpha$. Por consiguiente, la comparación directa puede ser arbitrariamente pequeña con un radio independiente de $n$, mientras que la inversa no queda acotada con ese radio. Cada $f_n$ tiene derivadas acotadas, pero la familia no tiene un perfil común. Los entornos exponenciales de radio constante sobre la unión de todas las clases no satisfacen, por sí solos, el axioma de inversión. La construcción local de variedades de mapeos que utilizaremos más adelante conserva las cotas del centro de cada carta; véase también el desarrollo de cartas en [49, §5].

En la construcción siguiente escribimos $r$ para el orden de cualquiera de las dos normas. Fijemos una clase con perfil $\mathbf{B}$ y una de las dos uniformidades del teorema. Abreviemos por $\mathcal{V}_\varepsilon$ sus entornos uniformes exponenciales. Las estimaciones de inversión y composición permiten elegir recursivamente una sucesión racional decreciente $\varepsilon_n \to 0^+$ tal que los entornos uniformes simétricos

$$\mathcal{W}_n := \mathcal{V}_{\varepsilon_n} \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_n}^{-1}$$

sean cofinales y satisfagan $\mathcal{W}_{n+1} \circ \mathcal{W}_{n+1} \circ \mathcal{W}_{n+1} \subseteq \mathcal{W}_n$. Definimos

$$\omega(f,h) := \inf\big(\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_0,\ (f,h) \in \mathcal{W}_n\} \cup \{+\infty\}\big)$$

y, para una cadena $f = f_0, f_1, \dots, f_N = h$ cuyos vértices $f_i$, con $i \in \{0,\dots,N\}$, pertenecen a la clase fijada, ponemos

$$d_{\mathrm{cad}}(f,h) := \inf\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \omega(f_i, f_{i+1}) \,\middle|\, N \in \mathbb{N},\ f = f_0,\ f_N = h \right\}, \tag{27.7}$$

con valor $+\infty$ cuando no existe una cadena de coste finito. La Proposición 27.2.12 da

$$\mathcal{W}_n \subseteq \{(f,h) \mid d_{\mathrm{cad}}(f,h) \le 2^{-n}\} \quad \text{y} \quad \{(f,h) \mid d_{\mathrm{cad}}(f,h) < 2^{-n}\} \subseteq \mathcal{W}_{n-1}, \qquad n \ge 1.$$

Por lo tanto, (27.7) genera la uniformidad en cada componente de distancia finita y su truncación por uno la metriza en todo el espacio. La construcción no presupone que una componente completa quepa en una sola carta exponencial.

**Definición 27.2.18.** (Rebanada, tubo equivariante y tipos de órbita) Sea $G$ un grupo de Lie de Banach que actúa suavemente sobre una variedad de Banach $\mathcal{X}$, y sea $x \in \mathcal{X}$. Supongamos que el estabilizador $G_x$ es un subgrupo de Lie de Banach cerrado y escindido, de modo que el cociente asociado que sigue posee su estructura de variedad. Una *rebanada* en $x$ es una subvariedad $S \subseteq \mathcal{X}$ que contiene a $x$, es invariante por el estabilizador $G_x$ y para la cual el mapeo

$$G \times_{G_x} S \longrightarrow \mathcal{X}, \qquad [g,s] \longmapsto g \cdot s,$$

es un difeomorfismo sobre un entorno $G$–invariante de la órbita $G \cdot x$. Aquí $G \times_{G_x} S$ es el cociente de $G \times S$ por $(g,s) \sim (gh^{-1}, h \cdot s)$, con $h \in G_x$. La imagen de este difeomorfismo se llama *tubo equivariante* de la órbita. También usaremos la versión topológica de esta noción: si $G$ es un grupo topológico y su acción es continua, se exige que el mismo mapeo asociado sea un homeomorfismo sobre un abierto invariante, y se habla de *rebanada topológica*. La regularidad diferenciable de $S$ o del tubo se añade como una conclusión separada. Esta distinción permite formular rebanadas para difeomorfismos Sobolev, cuyas operaciones presentan pérdida de derivadas y no forman un grupo de Lie de Banach a nivel fijo.
Una *cuasiestratificación por tipos de órbita* es una partición $\mathcal{X} = \coprod_{(H)} \mathcal{X}_{(H)}$, donde $\mathcal{X}_{(H)} := \{y \in \mathcal{X} \mid G_y \text{ es conjugado con } H\}$, que cumple las condiciones siguientes: cada $\mathcal{X}_{(H)}$ es una subvariedad localmente cerrada; las rebanadas proporcionan los modelos locales de la partición; y se satisface la condición de frontera

$$\mathcal{X}_{(K)} \cap \overline{\mathcal{X}_{(H)}} \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad H \text{ es conjugado con un subgrupo de } K.$$

El prefijo *cuasi* indica que no se exige que la familia de tipos sea localmente finita. Cuando un resultado externo añada regularidad o segunda numerabilidad a los estratos y al cociente, esas propiedades se enunciarán como parte de sus hipótesis y conclusiones.

**Lema 27.2.19.** (Productos, derivadas y aproximación en la escala de Hilbert) Sea $M$ una variedad suave compacta de dimensión $m$, con o sin frontera, y sean $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \to M$ haces vectoriales suaves de rango finito, provistos de métricas fibradas y conexiones suaves. Se tienen las propiedades siguientes.

(a) Para $a > m/2$, $0 \le r \le a$ y un homomorfismo suave $B : \mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \to \mathbf{G}$, existe $C > 0$ tal que

$$\|B(\mathbf{v} \otimes \mathbf{z})\|_{H^r(M,\mathbf{G})} \le C \|\mathbf{v}\|_{H^a(M,\mathbf{E})} \|\mathbf{z}\|_{H^r(M,\mathbf{F})}. \tag{27.8}$$

(b) Para $r \ge 0$, la derivada covariante es un operador lineal continuo

$$\nabla : H^r(M,\mathbf{E}) \longrightarrow H^{r-1}(M, T^*M \otimes \mathbf{E}).$$

En particular, si $s > m/2 + 1$, la contracción de esta derivada satisface

$$\|\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}\|_{H^{s-1}(M,TM)} \le C\|\mathbf{v}\|_{H^s(M,TM)}\|\mathbf{z}\|_{H^s(M,TM)}. \tag{27.9}$$

(c) Para todo $r \ge 0$, $\Gamma(\mathbf{E})$ es denso en $H^r(M,\mathbf{E})$. Si $r_0, r_1 \ge 0$ y $0 < \theta < 1$, entonces

$$[H^{r_0}(M,\mathbf{E}), H^{r_1}(M,\mathbf{E})]_\theta = H^{(1-\theta)r_0+\theta r_1}(M,\mathbf{E})$$

con normas equivalentes.

*Demostración.* Fijemos una cubierta finita por cartas interiores y de frontera, marcos suaves y una partición de la unidad $(\rho_i)_{i=1}^N$ subordinada a ella. Elegimos cortes $\chi_i$ con soporte en las mismas cartas y con $\chi_i = 1$ en una vecindad de $\operatorname{supp}\rho_i$. La equivalencia local de normas para haces y las construcciones de los Teoremas 6.5.2 y 14.5.9 permiten representar continuamente $\rho_i\mathbf{v}$ por funciones de $H^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{K}^{\operatorname{rank}\mathbf{E}})$: en las cartas de frontera se usa la extensión del semiespacio, y en las interiores se prolonga por cero después de multiplicar por el corte. Para volver a $M$ se restringe a la carta y se multiplica por $\chi_i$. La suma de estas operaciones devuelve $\mathbf{v}$.

Probemos primero el producto escalar en $\mathbb{R}^m$. Para $a > m/2$, Cauchy–Schwarz da

$$\|\widehat{v}\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \le \left(\int_{\mathbb{R}^m} \langle\xi\rangle^{-2a}\, d\xi\right)^{1/2} \|v\|_{H^a(\mathbb{R}^m)}.$$

La integral es finita. La desigualdad $\langle\xi\rangle^a \le C_a(\langle\xi-\zeta\rangle^a + \langle\zeta\rangle^a)$, la fórmula de Fourier del producto y Young para convoluciones implican, inicialmente para funciones de Schwartz,

$$\|vz\|_{H^a(\mathbb{R}^m)} \le C_a\big(\|v\|_{H^a(\mathbb{R}^m)}\|\widehat{z}\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} + \|\widehat{v}\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}\|z\|_{H^a(\mathbb{R}^m)}\big) \le C\|v\|_{H^a(\mathbb{R}^m)}\|z\|_{H^a(\mathbb{R}^m)}.$$

La densidad de Schwartz de la Proposición 6.1.6 extiende este producto: si $v_j \to v$ y $z_j \to z$ en $H^a(\mathbb{R}^m)$, la desigualdad aplicada a $(v_j - v_k)z_j + v_k(z_j - z_k)$ prueba que $(v_j z_j)$ es de Cauchy. El encaje en $C^0(\mathbb{R}^m)$ identifica su límite con $vz$. Por otra parte, $\|vz\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \le \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}\|z\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$. Interpolamos estas dos cotas del operador lineal $z \mapsto vz$, manteniendo $v$ fijo; el Teorema 6.3.11, con $p = q = 2$, da la cota en $H^r(\mathbb{R}^m)$ para $0 \le r \le a$. Se aplica componente a componente y a los coeficientes suaves localizados de $B$. Las finitas operaciones de localización anteriores prueban (a).

En un marco local, $\nabla_j\mathbf{v}$ tiene componentes $\partial_j v^b + \sum_{c=1}^{\operatorname{rank}\mathbf{E}} \Gamma^b_{jc} v^c$. La derivación euclidiana de la misma proposición y la continuidad de los multiplicadores suaves prueban (b). Para la última estimación se toma $a = r = s - 1 > m/2$ en (a), se usa $H^s(M,TM) \hookrightarrow H^{s-1}(M,TM)$ y se contrae $\mathbf{v}\otimes\nabla\mathbf{z}$.

Para (c), representemos cada $\rho_i\mathbf{v}$ por una extensión $V_i$ como al comienzo de la prueba. Tomemos $V_{i,j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K}^{\operatorname{rank}\mathbf{E}})$ con $V_{i,j} \to V_i$ en el espacio $H^r$ indicado. Al restringir, reconstruir en los marcos y multiplicar por $\chi_i$, obtenemos secciones suaves $\mathbf{v}_j$ en todo $M$, incluidas las cartas de frontera, y

$$\|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}\|_{H^r(M,\mathbf{E})} \le C\sum_{i=1}^N \|V_{i,j} - V_i\|_{H^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{K}^{\operatorname{rank}\mathbf{E}})} \longrightarrow 0.$$

Finalmente, los operadores de localización y reconstrucción pueden elegirse simultáneamente para $r_0$ y $r_1$:

el operador de extensión euclidiano es universal. Son, por tanto, una corretracción y una retracción entre los espacios de secciones y los productos finitos de espacios euclidianos. Interpolar ambas identidades, mediante el Teorema 6.3.11, prueba la igualdad de (c). □

## 27.3 Variedades Sobolev de mapeos

Sean $(M^m, \mathbf{g})$ y $(N^n, \mathbf{h}_N)$ variedades riemannianas suaves y finito–dimensionales, con $N$ sin frontera; se permite que $M$ tenga frontera. Sean $1 < p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$. La condición básica

$$rp > m \tag{27.10}$$

garantiza que las clases $W^{r,p}$ poseen representantes continuos. Esta continuidad es indispensable: sin ella no se puede exigir que dos mapeos tomen valores en una misma vecindad normal punto a punto.

**Definición 27.3.1.** (Mapeos Sobolev) Sea $M$ una variedad suave compacta con o sin frontera y sea $N$ una variedad suave sin frontera. Un mapeo continuo $f : M \longrightarrow N$ es de clase $W^{r,p}$ si, para cartas finitas en la base y el blanco subordinadas a la imagen de $f$, sus representaciones coordenadas pertenecen a $W^{r,p}$. El espacio resultante se denota por $W^{r,p}(M, N)$.

Si $f$ sólo es Sobolev, $f^*TN$ es inicialmente un haz continuo. La notación $W^{r,p}(M, f^*TN)$ se define mediante las trivializaciones inducidas por cartas de $N$: sus matrices de transición son superposiciones suaves de $f$ y pertenecen localmente a $W^{r,p}$. Como $rp > m$, la multiplicación por esas matrices y por sus inversas es continua en $W^{r,p}$. Una partición finita de la unidad proporciona así normas equivalentes en el espacio de secciones. No se atribuye suavidad a $f^*TN$ antes de construirlo. Si el centro $f$ es suave, esta definición coincide con la norma covariante del capítulo sobre Sobolev en haces, por el Lema 9.1.28.

Fijemos $f \in W^{r,p}(M, N)$ con $M$ compacta. El mapeo

$$\mathcal{E} : TN \supset \mathcal{O} \longrightarrow N \times N, \qquad v \longmapsto \big(\pi(v), \exp_{\pi(v)} v\big),$$

es un difeomorfismo local a lo largo de la sección nula. Como $f(M)$ es compacto, existen un entorno $\mathcal{O}_f$ de la sección nula sobre $f(M)$ y un número $\rho_f > 0$ tales que $|v|_{\mathbf{h}_N} < \rho_f$ implica $v \in \mathcal{O}_f$ y $\mathcal{E}$ es inyectivo en ese conjunto. Por el encaje de Sobolev,

$$\mathcal{V}_f := \{\mathbf{X} \in W^{r,p}(M, f^*TN) \mid \|\mathbf{X}\|_{C^0(M, f^*TN; f^*\mathbf{h}_N)} < \rho_f\}$$

es abierto. Definimos

$$\operatorname{Exp}_f(\mathbf{X})(x) := \exp^N_{f(x)} \mathbf{X}(x). \tag{27.11}$$

**Lema 27.3.2.** (Superposición en el régimen de álgebra) Sea $M$ una variedad suave compacta con o sin frontera, sea $U \subseteq \mathbb{R}^a$ abierto y sea $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^b$ suave. Si $rp > m$, la superposición $u \mapsto F \circ u$ es suave en el abierto $\{u \in W^{r,p}(M, \mathbb{R}^a) \mid u(M) \subseteq U\}$. En cada vecindad cuyos valores quedan en un compacto $K \Subset U$, las estimaciones dependen sólo de la geometría de $M$, $r$, $p$, una cota para la norma $W^{r,p}$ de los argumentos y las cotas de las derivadas de $F$ en una vecindad de $K$. Su diferencial es

$$D(F_*)(u)v = (DF \circ u)v.$$

*Demostración.* Como $rp > m$, el encaje de Sobolev proporciona a cada clase un representante continuo; en lo que sigue identificamos la clase con ese representante. Pongamos

$$\mathcal{U} := \{u \in W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a) \mid u(M) \subseteq U\}.$$

Primero comprobamos que $\mathcal{U}$ es abierto. Si $u \in \mathcal{U}$, la compacidad de $M$ y la continuidad de $u$ implican que $u(M)$ es un compacto contenido en $U$. Si $U \neq \mathbb{R}^a$, ponemos $d_u := \operatorname{dist}(u(M), \mathbb{R}^a \setminus U) > 0$; si $U = \mathbb{R}^a$, fijamos simplemente $d_u := 1$. Sea $C_{\mathrm{emb}} > 0$ una constante del encaje $W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a) \hookrightarrow C^0(M,\mathbb{R}^a)$. Si $\|v\|_{W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a)} < \frac{d_u}{2C_{\mathrm{emb}}}$, entonces $\|v\|_{C^0(M,\mathbb{R}^a)} < \frac{d_u}{2}$ y $(u+v)(M) \subseteq U$. Así, $\mathcal{U}$ es abierto.

Fijemos ahora un subconjunto acotado $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ cuyas imágenes estén contenidas en un mismo compacto $K \Subset U$. Elegimos otro compacto $K_1 \Subset U$ cuya parte interior contiene a $K$. Al disminuir $\delta > 0$, el encaje anterior asegura que, si $u \in \mathcal{B}$ y $\|v\|_{W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a)} < \delta$, entonces $(u+tv)(M) \subseteq K_1$ para todo $t \in [0,1]$.

Para una función suave $G\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^c$, la fórmula de Faà di Bruno del Teorema 1.1.19, aplicada en cartas, expresa cada derivada de orden a lo más $r$ de $G \circ u$ como una suma finita de términos de la forma

$$(D^\ell G \circ u)\big[D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_\ell}u\big], \qquad 1 \le \ell \le r, \quad |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_\ell| \le r, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0^m, \quad |\alpha_i| \ge 1 \quad (1 \le i \le \ell).$$

Para estimar cada producto, trabajamos en un dominio coordenado acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ con cortes fijos, y escribimos $u$ para su representación local. Si $d_i = |\alpha_i|$, elegimos $q_i = rp/d_i$. El encaje de Sobolev de orden $r - d_i$ da

$$\|D^{\alpha_i}u\|_{L^{q_i}(\Omega,\mathbb{R}^a)} \le C\|u\|_{W^{r,p}(\Omega,\mathbb{R}^a)}.$$

En efecto, $1/p - (r-d_i)/m \le d_i/(rp)$ porque $rp > m$; si $d_i = r$ se usa simplemente $q_i = p$. Como $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} 1/q_i = \sum_{i=1}^{\ell} d_i/(rp) \le 1/p$, Hölder y la medida finita de la región controlan el producto en $L^p$. El factor $D^\ell G \circ u$ se controla por su supremo en $K_1$. Este argumento, aplicado también a Leibniz, prueba la cota de álgebra

$$\|vw\|_{W^{r,p}(M)} \le C\|v\|_{W^{r,p}(M)}\|w\|_{W^{r,p}(M)}.$$

Al sumar los multiíndices y las finitas cartas obtenemos una constante $C = C(M,r,p,\mathcal{B},K_1,G) > 0$ tal que

$$\|G \circ u\|_{W^{r,p}(M,\mathbb{R}^c)} \le C \qquad (u \in \mathcal{B}), \tag{27.12}$$

y, si $u_0, u_1 \in \mathcal{B}$ y el segmento entre sus valores permanece en $K_1$,

$$\|G \circ u_1 - G \circ u_0\|_{W^{r,p}(M,\mathbb{R}^c)} \le C\|u_1 - u_0\|_{W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a)}. \tag{27.13}$$

En efecto, para funciones suaves la primera cota se obtiene término a término mediante la fórmula anterior. Para la segunda se escribe

$$G \circ u_1 - G \circ u_0 = \int_0^1 (DG \circ (u_0 + t(u_1 - u_0)))(u_1 - u_0)\,dt$$

y se aplican las mismas estimaciones de producto. Para extender las cotas, sea $u \in \mathcal{B}$ y elijamos, por Meyers–

Serrin 9.4.8 si hay frontera y 9.1.48 si no la hay, una sucesión $u_j \in C^\infty(M,\mathbb{R}^a)$ con $u_j \to u$ en $W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a)$. El encaje en $C^0(M,\mathbb{R}^a)$ da convergencia uniforme. Después de descartar un número finito de términos, los valores de $u_j$ están en $K_1$ y sus normas de Sobolev tienen una misma cota. Los segmentos entre $u_j(x)$ y $u_k(x)$ quedan en una vecindad compacta de $K$ contenida en $U$, al hacer la aproximación suficientemente pequeña. Por la desigualdad ya probada para argumentos suaves,

$$\|G\circ u_j - G\circ u_k\|_{W^{r,p}(M,\mathbb{R}^c)} \le C\|u_j-u_k\|_{W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a)} \longrightarrow 0.$$

El límite existe por completitud y coincide con $G\circ u$ por la convergencia uniforme. Al tomar normas y límites obtenemos (27.12). Para dos argumentos $u_0, u_1$, se eligen ambas aproximaciones en el mismo compacto y se aplica la cota suave a sus diferencias; sus límites dan (27.13). Las constantes dependen de las cotas de Sobolev declaradas y de las derivadas de $G$ en la vecindad compacta elegida, sin depender de $j$ ni de $k$.
Para $q \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$A_q(u)[v_1,\dots,v_q] := (D^qF\circ u)[v_1,\dots,v_q],$$

con la convención $A_0(u) = F\circ u$. La estimación de producto y (27.12), aplicada a $G = D^qF$, muestran que $A_q(u)$ es un operador $q$–lineal continuo de $W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a)^q$ en $W^{r,p}(M,\mathbb{R}^b)$ y que $u \mapsto A_q(u)$ es continua en norma de operadores. Además, para cualesquiera $w_1,\dots,w_q \in W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a)$, el teorema fundamental del cálculo da, punto a punto,

$$\big(A_q(u+v) - A_q(u) - A_{q+1}(u)[v]\big)[w_1,\dots,w_q] = \int_0^1 (1-t)(D^{q+2}F\circ(u+tv))[v,v,w_1,\dots,w_q]\,dt.$$

Al tomar la norma de operadores y aplicar de nuevo las cotas anteriores, existen $\delta, C_q > 0$ tales que

$$\|A_q(u+v) - A_q(u) - A_{q+1}(u)[v]\|_{\mathcal{L}^q(W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a);W^{r,p}(M,\mathbb{R}^b))} \le C_q\|v\|^2_{W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a)}$$

para $u \in \mathcal{B}$ y $\|v\|_{W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a)} < \delta$. Para $q = 0$, dividir el resto por $\|v\|_{W^{r,p}(M,\mathbb{R}^a)}$ prueba que $DF_* = A_1$. Si se ha identificado $D^qF_* = A_q$, la misma estimación en norma de operadores prueba que $A_q$ es diferenciable con diferencial $A_{q+1}$; la continuidad ya obtenida da $F_* \in C^{q+1}$. Este paso, para cada $q \in \mathbb{N}_0$, identifica $A_q = D^qF_*$ en todos los órdenes. En particular,

$$D(F_*)(u)v = (DF\circ u)v,$$

y $F_*$ es suave en $\mathcal{U}$. □

**Corolario 27.3.3.** (Superposición en órdenes reales de Hilbert) El lema anterior vale con $W^{r,p}$ sustituido por $H^s$, para todo índice real $s > m/2$. En consecuencia, las construcciones compactas de este capítulo que emplean $H^s$ admiten también índices no enteros.

*Demostración.* Explicamos la estimación que permite tratar esos índices. Localizamos en una carta mediante cortes y usamos el operador de extensión del capítulo de trazas cuando la carta encuentra la frontera. Basta estimar la superposición sobre funciones de $H^s(\mathbb{R}^m)$, multiplicando el resultado por un corte fijo $\chi$. Alrededor de un argumento dado, todos los valores están en un compacto de $U$. Extendemos $F$ desde una vecindad de ese compacto a un mapeo suave en todo $\mathbb{R}^a$, con derivadas acotadas; la extensión no cambia la superposición que estamos estudiando.
Tomemos los operadores de baja frecuencia $S_j$ y los bloques $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$, para $j \in \mathbb{N}_0$, de una descomposi-

ción diádica inhomogénea. La convergencia $S_j u \to u$ en $C^0$ y en $H^s$ da la identidad telescópica

$$F(u) = F(S_0 u) + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Delta_j u, \qquad a_j(x) = \int_0^1 DF\big(S_j u(x) + t\Delta_j u(x)\big)\, dt.$$

Para cada $N \in \mathbb{N}_0$, Bernstein y la regla de la cadena dan

$$\|D^\alpha a_j\|_\infty \le C_N 2^{j|\alpha|}, \qquad j \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^m, \quad |\alpha| \le N.$$

Aquí $C_N$ depende de una cota para $\|u\|_\infty$ y de las derivadas de $F$ hasta el orden $N+1$. Al aplicar Leibniz al producto y Bernstein al bloque $\Delta_j u$, obtenemos $\|D^\alpha(\chi a_j \Delta_j u)\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^b)} \le C_N 2^{j|\alpha|}\|\Delta_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^a)}$. Si $k > j$, los momentos nulos del núcleo de $\Delta_k$ permiten restar el polinomio de Taylor de orden $N-1$ del producto. El resto integral de Taylor, junto con la cota anterior, da

$$\|\Delta_k(\chi a_j \Delta_j u)\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^b)} \le C_N \min\{1, 2^{-N(k-j)}\}\|\Delta_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^a)}, \qquad j,k \in \mathbb{N}_0.$$

Para $k \le j$ se ha usado simplemente la cota $L^1$ del núcleo de $\Delta_k$ y la cota uniforme de $a_j$. Elegimos un entero $N > s$. Después de multiplicar por $2^{ks}$, las dos regiones producen respectivamente los factores $2^{-(N-s)(k-j)}$ y $2^{-s(j-k)}$. Ambas sucesiones son sumables. La desigualdad de convolución en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ y la caracterización $H^s = F^s_{2,2}$ del capítulo de regularidad intermedia implican

$$\|\chi F(u)\|_{H^s(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^b)} \le C\big(1 + \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^a)}\big).$$

El término de baja frecuencia se estima derivando $\chi F(S_0 u)$ hasta orden $N$; el soporte compacto de $\chi$ hace finita su norma $L^2$.

Aplicamos esta cota también a $DF, D^2F, \dots$. Como $H^s$ es un álgebra, la identidad integral para $F(u+v)-F(u)$ proporciona continuidad local Lipschitz, y el resto integral de segundo orden proporciona diferenciabilidad con diferencial $(DF \circ u)v$. Para cada $q \in \mathbb{N}_0$, aplicar el mismo resto a $D^q F$ identifica el diferencial de $A_q$ con $A_{q+1}$, exactamente como en la prueba anterior. Las estimaciones son locales en norma $H^s$ y la cubierta de $M$ es finita; al reagruparlas se obtiene la suavidad afirmada. □

**Teorema 27.3.4.** (Cartas exponenciales) Sean $M$ una variedad suave compacta con o sin frontera y $N$ una variedad riemanniana suave, finito–dimensional y sin frontera, y supongamos que $rp > m$. Para $\rho_f$ suficientemente pequeño, el mapeo (27.11) es un difeomorfismo de $\mathcal{V}_f$ sobre un abierto de $W^{r,p}(M,N)$. Estas cartas definen una variedad de Banach independiente de la métrica auxiliar de $N$. El operador

$$J_f := D(\operatorname{Exp}_f^{-1})_f \colon T_f W^{r,p}(M,N) \longrightarrow W^{r,p}(M, f^*TN)$$

es un isomorfismo lineal continuo cuyo inverso es $D\operatorname{Exp}_f(0)$. En particular,

$$T_f W^{r,p}(M,N) \cong W^{r,p}(M, f^*TN) \tag{27.14}$$

canónicamente.

La construcción se remonta a [85, Secciones 6–8] y [111, Capítulos II–III].

*Demostración.* Sea $\mathcal{W}_f := \mathcal{E}(\mathcal{O}_f)$. La inversa de $\operatorname{Exp}_f$ en el conjunto de los $h$ para los cuales $(f(x), h(x)) \in \mathcal{W}_f$ para todo $x$ es

$$\log_f(h)(x) := \mathcal{E}^{-1}(f(x), h(x)) = \exp_{f(x)}^{-1} h(x).$$

La condición sobre $(f,h)$ es abierta en la topología $C^0$ porque $M$ es compacta y la gráfica de $(f,h)$ es compacta dentro de $\mathcal{W}_f$; por $W^{r,p} \hookrightarrow C^0$, también es abierta en la topología Sobolev.
Para probar la suavidad, elegimos una cubierta finita de $M$ sobre la cual $f^*TN$ se trivializa y cartas de $N$ que contienen los compactos relevantes. En esas coordenadas, $\mathbf{X} \mapsto \operatorname{Exp}_f \mathbf{X}$ y $h \mapsto \log_f h$ son operadores de superposición por mapeos suaves cuyas derivadas están acotadas en un compacto. El Lema 27.3.2 prueba que son suaves; una partición finita de la unidad reagrupa las expresiones locales.
Si las cartas están centradas en $f$ y $g$, el cambio de coordenadas tiene la expresión intrínseca

$$\Theta_{gf}(\mathbf{X})(x) := \exp_{g(x)}^{-1}\big(\exp_{f(x)} \mathbf{X}(x)\big). \tag{27.15}$$

El argumento anterior, aplicado al mapeo suave $(y,z,v) \mapsto \exp_z^{-1}(\exp_y v)$ en el dominio donde está definido, prueba que (27.15) es suave. Esto verifica directamente la compatibilidad del atlas. Si se cambia la métrica auxiliar, la misma fórmula con las dos exponenciales muestra que la identidad entre los dos atlas es suave en ambos sentidos. Finalmente, $D\operatorname{Exp}_f(0)\mathbf{X} = \mathbf{X}$ punto a punto. Como $\operatorname{Exp}_f$ y su inversa son suaves, sus diferenciales son continuos; al diferenciar las dos identidades de inversas se obtiene $J_f D\operatorname{Exp}_f(0) = \mathrm{id}$ y $D\operatorname{Exp}_f(0) J_f = \mathrm{id}$. Esta identificación no depende de la carta y da (27.14). □

**Proposición 27.3.5.** (Evaluación y composición) Sean $M$ una variedad suave compacta con o sin frontera y $N$ y $P$ variedades suaves sin frontera. Bajo las demás hipótesis del teorema anterior:

(i) para cada $x \in M$, la evaluación $\operatorname{ev}_x(f) = f(x)$ es suave;

(ii) la evaluación conjunta $\operatorname{ev}\colon W^{r,p}(M,N) \times M \longrightarrow N$ es continua;

(iii) si $r > \frac{m}{p} + j$, la evaluación conjunta es de clase $C^j$;

(iv) si $H\colon N \longrightarrow P$ es suave, el mapeo $f \mapsto H \circ f$ es suave en los abiertos donde las derivadas de $H$ necesarias están uniformemente acotadas;

(v) el mapeo $(f,\eta) \mapsto f \circ \eta$ presenta pérdida de derivadas: en el caso de Hilbert, para $s > \frac{m}{2} + 1$,

$$H^{s+j}(M,N) \times \operatorname{Diff}^s(M) \longrightarrow H^s(M,N), \qquad (f,\eta) \longmapsto f \circ \eta,$$

es de clase $C^j$, mientras que en el mismo nivel $H^s \times \operatorname{Diff}^s \longrightarrow H^s$ sólo se afirma continuidad en general.

Las estimaciones de composición usadas en el último inciso son las de [46, Sección 2].

*Demostración.* En coordenadas exponenciales, la evaluación tiene la forma $(\mathbf{X}, x) \mapsto \exp_{f(x)} \mathbf{X}(x)$. El encaje continuo $W^{r,p} \hookrightarrow C^0$ hace continua la evaluación puntual, y si $r > \frac{m}{p} + j$, el encaje $W^{r,p} \hookrightarrow C^j$ permite diferenciar esta fórmula $j$ veces respecto de $x$ y de $\mathbf{X}$; cada diferencial es una suma finita de evaluaciones de derivadas de $\mathbf{X}$ multiplicadas por coeficientes suaves de la exponencial. Esto prueba los tres primeros

incisos. El cuarto es el Lema 27.3.2. Para el último, la primera derivada formal respecto de $\eta$ contiene

$$D_\eta(f\circ\eta)\mathbf{Y} = (df\circ\eta)\mathbf{Y},$$

y consume una derivada de $f$. La iteración consume $j$ derivadas. Las estimaciones de composición citadas prueban la continuidad y las afirmaciones $C^j$ con esos dominios exactos. □

En una base no compacta las cartas requieren estimaciones comunes en la variable espacial, pero sus constantes pueden depender del centro. Conviene construir primero el atlas y mantener separada esta cuestión de la completación de una clase con perfil fijado.

Fijemos $k \geq r > m/p+1$ y un radio normal $\rho$ como en el Lema 27.2.15. Para cada centro suave $f \in C_b^{\infty,r}(M,N)$ ponemos

$$\mathcal{V}_f = \{\mathbf{X}\in W^{r,p}(M,f^*TN)\mid \|\mathbf{X}\|_\infty<\rho\},\qquad \mathcal{U}_f=\operatorname{Exp}_f(\mathcal{V}_f),\qquad \Omega^{p,r}(M,N)=\bigcup_{f\in C_b^{\infty,r}(M,N)}\mathcal{U}_f.$$

Los elementos de esta unión son mapeos concretos; si dos imágenes exponenciales coinciden punto a punto, representan el mismo elemento. Damos a la unión la topología de estas cartas. La compatibilidad y la apertura de los traslapes se comprueban en la demostración siguiente.

**Teorema 27.3.6.** (Cartas Sobolev en una base completa no compacta) Sean $(M^m,\mathbf{g})$ y $(N^n,\mathbf{h})$ suaves, completas, sin frontera y de geometría acotada de orden $k$. Sean $1<p<\infty$ y $k\geq r>m/p+1$, con $k,r\in\mathbb{N}$. Las cartas anteriores dotan a $\Omega^{p,r}(M,N)$ de una estructura de variedad de Banach de clase $C^{k+1-r}$, y de Hilbert si $p=2$. En el caso de geometría acotada de todos los órdenes, el atlas es suave. Si $\Phi_f(\mathbf{Y})=\operatorname{Exp}_f\mathbf{Y}$ es una carta centrada en $f$, entonces

$$J_f := D(\Phi_f^{-1})_f:\ T_f\Omega^{p,r}(M,N)\longrightarrow W^{r,p}(M,f^*TN)$$

es lineal y bicontinuo, con inversa $D\Phi_f(0)$.

*Demostración.* La norma de Sobolev controla la norma uniforme, de modo que $\mathcal{V}_f$ es abierta. La exponencial es inyectiva en ese conjunto por la elección de $\rho$. Las estimaciones de localización del capítulo de geometría acotada permiten trabajar en bolas y trivializaciones de tamaño común; sus constantes dependen ahora de las cotas de las derivadas del centro $f$.

En estas representaciones, una superposición tiene la forma $\mathbf{X}\mapsto F(x,\mathbf{X}(x))$. Las derivadas mixtas necesarias de $F$ están uniformemente acotadas en el dominio normal. Hasta orden espacial $r$ y orden de diferenciación respecto de la sección $k+1-r$, estas cotas se obtienen de las ecuaciones de Jacobi y transporte, con la recurrencia (13.4); ésta es también la estimación local empleada en [49, Teorema 5.2]. Al derivar $r$ veces en $x$, la regla de la cadena sólo utiliza las derivadas del centro hasta orden $r$ y las derivadas mixtas de la exponencial hasta orden $r+(k+1-r)=k+1$.

En una base de volumen infinito no se puede estimar una constante por su norma $L^p$. Por eso se aplica el argumento de superposición a diferencias. Si $F(x,0)=0$, la identidad

$$F(x,\mathbf{X}(x))=\int_0^1 D_vF(x,t\mathbf{X}(x))\mathbf{X}(x)\,dt$$

asegura que cada término de su derivada espacial contiene una derivada de $\mathbf{X}$, incluso cuando todas las restantes derivadas recaen en $x$. Los productos de Sobolev y las cotas uniformes de los coeficientes dan una cota $W^{r,p}$ en cada bola. La suma de las potencias $p$ de esas cotas converge por la multiplicidad finita de la cubierta. Para un centro $\mathbf{X}_0$ distinto de cero se usa la identidad análoga con $F(x,\mathbf{X}) - F(x,\mathbf{X}_0)$ y el factor $\mathbf{X} - \mathbf{X}_0$. El resto integral de Taylor en la variable $v$ prueba la diferenciabilidad; al repetirlo para $D_v^a F$, con $a \in \{0,\dots,k-r\}$, se obtienen los órdenes sucesivos. En el último orden, la continuidad se sigue de la continuidad uniforme de los coeficientes en el dominio normal y de las mismas estimaciones de producto. Así se obtiene $C^{k+1-r}$ sin integrar ningún término constante.

Consideremos un traslape y escribamos $h = \operatorname{Exp}_f \mathbf{X}_0 = \operatorname{Exp}_g \mathbf{Y}_0$, con centros suaves $f, g$. Entonces $d(f(x), g(x)) < 2\rho$ para todo $x$. La función de transición es

$$\Psi(x,v) = \log_{g(x)}\bigl(\exp_{f(x)} v\bigr).$$

Una vecindad suficientemente pequeña de $\mathbf{X}_0$ en $W^{r,p}$ mantiene los argumentos en el dominio normal. Para justificar la integrabilidad de la transición escribimos

$$\Psi(x,\mathbf{X}(x)) - \Psi(x,\mathbf{X}_0(x)) = \int_0^1 D_v\Psi\bigl(x, \mathbf{X}_0(x) + t(\mathbf{X}(x) - \mathbf{X}_0(x))\bigr)\bigl(\mathbf{X}(x) - \mathbf{X}_0(x)\bigr)\,dt.$$

El segundo término del miembro izquierdo es precisamente $\mathbf{Y}_0 \in W^{r,p}(M, g^{*}TN)$. El argumento anterior muestra que la diferencia pertenece a ese espacio y depende de $\mathbf{X}$ con la regularidad indicada. Al reducir la vecindad, su norma uniforme es menor que $\rho - \|\mathbf{Y}_0\|_{\infty}$. Éste es el margen positivo que prueba la apertura del traslape. Intercambiar $f$ y $g$ da la transición inversa.

Las evaluaciones puntuales son continuas en cada carta. Dos mapeos distintos difieren en algún punto de $M$, y dos vecindades disjuntas de sus valores en $N$ los separan; el espacio construido es Hausdorff. Quedan verificados los requisitos de una variedad de Banach de la Definición 24.1.1.

Si $h$ tiene regularidad Sobolev, las secciones de $h^{*}TN$ se definen en trivializaciones Sobolev, como en el caso compacto, o transportándolas desde un centro suave de una carta que contenga a $h$. Las matrices de transporte y de cambio de trivialización son multiplicadores en $W^{r,p}$ por las estimaciones anteriores. Las normas así obtenidas son equivalentes. Esto permite recentrar las cartas en $h$ sin suponer que $h^{*}TN$ sea un haz suave. Finalmente, $D\Phi_h(0)\mathbf{X} = \mathbf{X}$ punto a punto; al diferenciar las identidades de inversas se obtienen los dos operadores continuos del enunciado. □

Los centros suaves son densos localmente: aproximamos una sección $\mathbf{X} \in \mathcal{V}_f$ por secciones suaves de soporte compacto en $W^{r,p}(M, f^{*}TN)$. El encaje uniforme mantiene las aproximaciones dentro de $\mathcal{V}_f$, y sus imágenes por $\operatorname{Exp}_f$ convergen al mapeo inicial. Los radios de las cartas y las constantes de sus transiciones pueden variar con el centro. Esta afirmación local no atribuye una uniformidad de radio constante a todos los mapeos con derivadas acotadas.

## 27.4 Espacios de métricas, conexiones y teoría calibre

### 27.4.1 Métricas riemannianas

Sea $M^m$ una variedad suave compacta con o sin frontera y sea $s > \frac{m}{2}$. Definimos

$$\mathrm{Met}^s(M) := \{\mathbf{g} \in H^s(M, S^2T^*M) \mid \mathbf{g}_x \text{ es positiva definida para todo } x \in M\}.$$

**Proposición 27.4.1.** (Apertura de la positividad) Sea $M^m$ una variedad suave compacta con o sin frontera y sea $s > \frac{m}{2}$. Entonces $\mathrm{Met}^s(M)$ es un abierto del espacio de Hilbert $H^s(M, S^2T^*M)$. En particular es una variedad de Hilbert y $T_{\mathbf{g}}\mathrm{Met}^s(M) = H^s(M, S^2T^*M)$.

*Demostración.* Por compacidad, el menor valor propio de $\mathbf{g}$ respecto de una métrica auxiliar $\mathbf{g}_0$ tiene un mínimo $c_{\mathbf{g}} > 0$. El encaje

$$H^s(M, S^2T^*M) \hookrightarrow C^0(M, S^2T^*M; \mathbf{g}_0)$$

proporciona $C > 0$ tal que

$$\|\mathbf{h}\|_{C^0(M,S^2T^*M;\mathbf{g}_0)} \le C\|\mathbf{h}\|_{H^s(M,S^2T^*M)}.$$

Si $\|\mathbf{h}\|_{H^s(M,S^2T^*M)} < \frac{c_{\mathbf{g}}}{2C}$, entonces $(\mathbf{g}+\mathbf{h})(v,v) \ge (\frac{c_{\mathbf{g}}}{2})|v|^2_{\mathbf{g}_0}$ para todo $v \in T_xM$. Así, la bola correspondiente está contenida en $\mathrm{Met}^s(M)$. Al ser un abierto, su espacio tangente es el espacio modelo. $\square$

En una variedad no compacta el menor valor propio puede tender a cero en el infinito; la positividad no es abierta en una topología Sobolev absoluta. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ la métrica $\mathbf{g} = e^{-2x^2}(\mathbf{d}x)^2$ es positiva, pero existen funciones de corte $\chi_j$, trasladadas hacia $j$ y con derivadas uniformemente acotadas, tales que $\mathbf{h}_j = -2e^{-2x^2}\chi_j dx^2$ converge a cero en cada $H^s$ mientras que $\mathbf{g}+\mathbf{h}_j$ es negativa donde $\chi_j = 1$. La dificultad desaparece al trabajar dentro de una clase de equivalencia uniforme.

Dos métricas $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}'$ son *cuasi–isométricas* si existe $C \ge 1$ tal que

$$C^{-1}\mathbf{g} \le \mathbf{g}' \le C\mathbf{g} \tag{27.16}$$

en el sentido de la Definición 2.1.5; es decir, una misma constante $C$ satisface

$$C^{-1}\mathbf{g}_x(v,v) \le \mathbf{g}'_x(v,v) \le C\mathbf{g}_x(v,v) \qquad (x \in M,\ v \in T_xM).$$

Equivalentemente, las normas tangentes verifican

$$C^{-1/2}|v|_{\mathbf{g}} \le |v|_{\mathbf{g}'} \le C^{1/2}|v|_{\mathbf{g}} \qquad (x \in M,\ v \in T_xM).$$

Esta condición controla los valores de las métricas en todas las fibras con constantes comunes; el control de las conexiones se añade en el funcional siguiente. Si $\nabla^{\mathbf{g}}$ y $\nabla^{\mathbf{g}'}$ son sus conexiones de Levi–Civita, definimos el funcional de comparación

$$\delta_{b,q;\mathbf{g}}(\mathbf{g},\mathbf{g}') := \|\mathbf{g}-\mathbf{g}'\|_{\infty;\mathbf{g}} + \sum_{j=0}^{q-1} \|(\nabla^{\mathbf{g}})^j(\nabla^{\mathbf{g}'} - \nabla^{\mathbf{g}})\|_{\infty;\mathbf{g}}. \tag{27.17}$$

Las normas infinitas se toman con las métricas de los haces indicados; cuando puede haber confusión, se añade la métrica después del punto y coma. La diferencia de conexiones es un tensor de tipo $(1,2)$, de modo que todos los términos están definidos intrínsecamente.

Para $k \in \mathbb{N}_0$ denotamos por $\mathrm{Met}(I, B_k)(M)$ el conjunto de las métricas riemannianas suaves $\mathbf{g}$ que satisfacen las

condiciones $(I)$ y $(B_k)$ de la Definición 27.2.14; es decir, existen constantes $i_{\mathbf{g}}, K_0(\mathbf{g}), \dots, K_k(\mathbf{g}) > 0$ tales que

$$\operatorname{inj}(M,\mathbf{g}) \geq i_{\mathbf{g}}, \qquad \|(\nabla^{\mathbf{g}})^j \mathbf{R}_{\mathbf{g}}\|_{\infty;\mathbf{g}} \leq K_j(\mathbf{g}) \quad (0 \leq j \leq k).$$

La primera condición implica que $(M,\mathbf{g})$ es completa. En la construcción Sobolev siguiente, ambas métricas de cada par pertenecen a este conjunto.

Si $\mathbf{T}$ es un campo tensorial de tipo fijo y $j \in \mathbb{N}_0$, usaremos $\|\mathbf{T}\|_{b,j;\mathbf{g}} := \displaystyle\sum_{a=0}^{j} \|(\nabla^{\mathbf{g}})^a \mathbf{T}\|_{\infty;\mathbf{g}}$. Para $1 < p < \infty$ pondremos además

$$\|\mathbf{T}\|_{p,j;\mathbf{g}} := \left( \sum_{a=0}^{j} \int_M |(\nabla^{\mathbf{g}})^a \mathbf{T}|_{\mathbf{g}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ambas notaciones se emplearán únicamente cuando el miembro derecho sea finito.

**Teorema 27.4.2.** (Comparación uniforme de métricas) Sea $M^m$ suave y sin frontera. Para $q \in \mathbb{N}$, los conjuntos

$$\mathcal{U}_\varepsilon^{b,q} := \left\{ (\mathbf{g},\mathbf{g}') \mid \mathbf{g} \text{ y } \mathbf{g}' \text{ son cuasi–isométricas y } \delta_{b,q;\mathbf{g}}(\mathbf{g},\mathbf{g}') < \varepsilon \right\}$$

generan una uniformidad separada y metrizable sobre las métricas suaves completas. En el régimen Sobolev fijamos una métrica de referencia $\mathbf{g}_0 \in \operatorname{Met}(I,B_k)(M)$, $1 < p < \infty$ y $k \geq r > m/p + 1$. La comparación intrínseca se escribe

$$\delta_{p,r;\mathbf{g}}(\mathbf{g},\mathbf{g}')^p := \int_M \left( |\mathbf{g} - \mathbf{g}'|_{\mathbf{g}}^p + \sum_{j=0}^{r-1} |(\nabla^{\mathbf{g}})^j (\nabla^{\mathbf{g}'} - \nabla^{\mathbf{g}})|_{\mathbf{g}}^p \right) d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{27.18}$$

Sobre el espacio afín $\mathbf{g}_0 + W^{r,p}(M, S^2T^*M; \mathbf{g}_0)$ usaremos la distancia

$$d_{\mathbf{g}_0}(\mathbf{g},\mathbf{g}') := \|\mathbf{g}' - \mathbf{g}\|_{p,r;\mathbf{g}_0}.$$

En cada conjunto de métricas suaves que satisfacen, para números fijos $\lambda > 0$ y $R > 0$,

$$\mathbf{g} \geq \lambda \mathbf{g}_0, \qquad \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_0\|_{p,r;\mathbf{g}_0} \leq R,$$

existen $c, C > 0$ comunes a todos sus pares tales que

$$c\, d_{\mathbf{g}_0}(\mathbf{g},\mathbf{g}') \leq \delta_{p,r;\mathbf{g}}(\mathbf{g},\mathbf{g}') \leq C\, d_{\mathbf{g}_0}(\mathbf{g},\mathbf{g}').$$

Las constantes dependen de $\lambda, R, p, r$ y de los datos de $\mathbf{g}_0$.

*Demostración.* Si $\|\mathbf{g}' - \mathbf{g}\|_{\infty;\mathbf{g}} < 1/2$, para todo $x \in M$ y $v \in T_xM$ la desigualdad de Cauchy–Schwarz en el producto interno tensorial da

$$|(\mathbf{g}' - \mathbf{g})_x(v,v)| \leq |\mathbf{g}' - \mathbf{g}|_{\mathbf{g}}(x) |v|_{\mathbf{g}}^2 \leq \frac{1}{2} \mathbf{g}_x(v,v).$$

Al sumar $\mathbf{g}_x(v,v)$ se obtiene

$$\frac{1}{2} \mathbf{g}_x(v,v) \leq \mathbf{g}'_x(v,v) \leq \frac{3}{2} \mathbf{g}_x(v,v).$$

Por la Proposición 7.1.9, las normas tensoriales puntuales son comparables con constantes que sólo dependen del tipo tensorial. La fórmula de cambio de conexión (27.21), demostrada a continuación, expresa las derivadas en la nueva conexión como sumas finitas de productos de las derivadas de su diferencia. Aplicada a $\mathbf{g}' - \mathbf{g}$ y a $\nabla^{\mathbf{g}'} - \nabla^{\mathbf{g}}$, proporciona polinomios sin término constante que controlan la inversión. Para tres métricas, se suman sus diferencias de conexiones y se aplica esa misma fórmula al cambiar la conexión en el segundo sumando. Se obtienen los polinomios correspondientes a la composición, independientes de las métricas. Esto verifica los axiomas de inversión y composición; los otros axiomas proceden de la diagonal y del control de orden cero. Los radios racionales y la metrización por cadenas completan el argumento, también formulado en [50, Proposición 2.1].

Para las normas Sobolev, el encaje proporciona $\|\mathbf{g} - \mathbf{g}_0\|_{\infty;\mathbf{g}_0} \le C_S R$. La misma evaluación sobre $(v, v)$ da $\mathbf{g}_x(v,v) \le (1 + C_S R)(\mathbf{g}_0)_x(v,v)$ para todo $x$ y $v$. Junto con la cota inferior del enunciado y la Proposición 7.1.9, esto implica

$$(1 + C_S R)^{-1}\mathbf{g}_0^{-1} \le \mathbf{g}^{-1} \le \lambda^{-1}\mathbf{g}_0^{-1}, \qquad \lambda^{m/2} \le \frac{d\lambda_{\mathbf{g}}}{d\lambda_{\mathbf{g}_0}} \le (1 + C_S R)^{m/2}.$$

La comparación de las métricas inversas se evalúa en covectores, y el cociente de medidas es la función positiva descrita en esa proposición. Estas cotas son comunes a todas las métricas del conjunto considerado. La fórmula de Koszul (27.19) expresa la diferencia de conexiones mediante la inversa de una métrica y la primera derivada de la otra. Diferenciar la identidad $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{g} = I$ da $\nabla \mathbf{g}^{-1} = -\mathbf{g}^{-1}(\nabla \mathbf{g})\mathbf{g}^{-1}$; en cada orden siguiente, Leibniz deriva uno de los factores existentes. Así, hasta orden $r-1$, las derivadas de la inversa y de la diferencia de conexiones se controlan por $\lambda, R$ y las estimaciones de producto. En particular, $\nabla^{\mathbf{g}} - \nabla^{\mathbf{g}_0}$ queda acotada en $W^{r-1,p}$ con esos datos.

Pongamos $\mathbf{h} = \mathbf{g}' - \mathbf{g}$ y $\mathbf{D} = \nabla^{\mathbf{g}'} - \nabla^{\mathbf{g}}$. Koszul y los productos dan $\|\mathbf{D}\|_{p,r-1;\mathbf{g}_0} \le C\|\mathbf{h}\|_{p,r;\mathbf{g}_0}$. Para la desigualdad inversa usamos la identidad de compatibilidad métrica

$$(\nabla^{\mathbf{g}}_X \mathbf{h})(Y,Z) = \mathbf{g}'(\mathbf{D}(X,Y),Z) + \mathbf{g}'(Y,\mathbf{D}(X,Z)).$$

Partiendo del orden cero de $\mathbf{h}$, derivamos esta identidad hasta orden $r-1$. En el paso de orden $j$ a $j+1$, los términos en los que se deriva $\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \mathbf{h}$ contienen derivadas de $\mathbf{h}$ de orden a lo más $j$, ya controladas; los restantes contienen una derivada de $\mathbf{D}$ de orden a lo más $j$. La estimación de módulo para $W^{r-1,p}$, válida porque $r - 1 > m/p$, controla todos esos productos. La fórmula de cambio de conexión permite expresar cada norma con $\mathbf{g}_0$, y los cocientes de volúmenes están acotados. Se obtiene $\|\mathbf{h}\|_{p,r;\mathbf{g}_0} \le C(\|\mathbf{h}\|_{p,0;\mathbf{g}} + \|\mathbf{D}\|_{p,r-1;\mathbf{g}})$, que es la desigualdad restante. □

La referencia fija es esencial en la afirmación Sobolev. En $S^1$, con $\theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, tomemos $\mathbf{g}_a = a^2 d\theta^2$ y $\mathbf{h}_a = a^6 d\theta^2$, para $0 < a < 1$. Sus conexiones coinciden y ambas métricas son completas y de geometría acotada, aunque no con datos comunes al variar $a$. Para $p = 2$ y cualquier orden entero $r \ge 1$,

$$\delta_{2,r;\mathbf{g}_a}(\mathbf{g}_a, \mathbf{h}_a) = \sqrt{2\pi}\, a^{1/2}(1 - a^4), \qquad \delta_{2,r;\mathbf{h}_a}(\mathbf{h}_a, \mathbf{g}_a) = \sqrt{2\pi}\, a^{-5/2}(1 - a^4).$$

El primer miembro tiende a cero y el segundo a infinito. Así, la condición $\delta_{p,r;\mathbf{g}} < \varepsilon$ sobre todas las métricas, sin datos comunes, no satisface el axioma de inversión. La distancia $d_{\mathbf{g}_0}$ sí es simétrica y satisface la desigualdad triangular; la comparación anterior permite usar las expresiones intrínsecas en cada vecindad con cotas fijadas.

**Proposición 27.4.3.** (Comparación de normas tensoriales en una componente) Sea $M$ una variedad suave sin frontera, sean $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}'$ métricas suaves cuasi–isométricas y sea $\mathbf{T}$ un campo tensorial de tipo fijo.

(i) Si $\delta_{b,q;\mathbf{g}}(\mathbf{g},\mathbf{g}') < \infty$, entonces, para cada $0 \le j \le q$, existen constantes $c_{b,j}, C_{b,j} > 0$ tales que

$$c_{b,j}\|\mathbf{T}\|_{b,j;\mathbf{g}} \le \|\mathbf{T}\|_{b,j;\mathbf{g}'} \le C_{b,j}\|\mathbf{T}\|_{b,j;\mathbf{g}}.$$

(ii) Si $\mathbf{g},\mathbf{g}'$ pertenecen al espacio afín basado en $\mathbf{g}_0$ del teorema anterior y tienen una cota inferior positiva respecto de $\mathbf{g}_0$, entonces, para cada $0 \le j \le r$, existen constantes $c_{p,j}, C_{p,j} > 0$ tales que

$$c_{p,j}\|\mathbf{T}\|_{p,j;\mathbf{g}} \le \|\mathbf{T}\|_{p,j;\mathbf{g}'} \le C_{p,j}\|\mathbf{T}\|_{p,j;\mathbf{g}}.$$

Las constantes dependen del tipo tensorial, de una constante de cuasi–isometría entre $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}'$ y de las normas de $(\nabla^{\mathbf{g}})^a(\nabla^{\mathbf{g}'} - \nabla^{\mathbf{g}})$ hasta el orden requerido, pero no de $\mathbf{T}$.

*Demostración.* Pongamos $\mathbf{D} := \nabla^{\mathbf{g}'} - \nabla^{\mathbf{g}}$. La identidad de Koszul da

$$2\mathbf{g}'\big(\mathbf{D}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\mathbf{Z}\big) = (\nabla^{\mathbf{g}}_{\mathbf{X}}\mathbf{g}')(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) + (\nabla^{\mathbf{g}}_{\mathbf{Y}}\mathbf{g}')(\mathbf{X},\mathbf{Z}) - (\nabla^{\mathbf{g}}_{\mathbf{Z}}\mathbf{g}')(\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{27.19}$$

Si $C^{-1}\mathbf{g} \le \mathbf{g}' \le C\mathbf{g}$, la Proposición 7.1.9, aplicada con constantes $C^{-1}$ y $C$, da, para un tensor de tipo $(a,b)$,

$$C^{-(a+b)/2}|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}} \le |\mathbf{T}|_{\mathbf{g}'} \le C^{(a+b)/2}|\mathbf{T}|_{\mathbf{g}}, \tag{27.20}$$

y el cociente de los elementos de volumen satisface

$$C^{-m/2} \le \rho(x) := \frac{\sqrt{\det(\mathbf{g}'_x)}}{\sqrt{\det(\mathbf{g}_x)}} \le C^{m/2}.$$

Los determinantes se calculan en una misma carta, y el cociente es independiente de ella. Para $1 \le p < \infty$ se tiene

$$\|\mathbf{T}\|^p_{L^p(M,\mathbf{g}')} = \int_M |\mathbf{T}|^p_{\mathbf{g}'}\rho\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Al elevar (27.20) a la potencia $p$, multiplicar por las cotas de $\rho$ e integrar, obtenemos

$$C^{-(a+b)/2-m/(2p)}\|\mathbf{T}\|_{L^p(M,\mathbf{g})} \le \|\mathbf{T}\|_{L^p(M,\mathbf{g}')} \le C^{(a+b)/2+m/(2p)}\|\mathbf{T}\|_{L^p(M,\mathbf{g})}.$$

Para la norma uniforme basta tomar supremos en la comparación puntual. Estas estimaciones comparan el mismo tensor $\mathbf{T}$; el siguiente paso compara las derivadas obtenidas con las dos conexiones.
La expansión local de la derivada covariante del Lema 9.1.28 y la regla de Leibniz de la Proposición 9.1.40 permiten escribir, para $j \in \mathbb{N}$,

$$(\nabla^{\mathbf{g}'})^j\mathbf{T} = (\nabla^{\mathbf{g}})^j\mathbf{T} + \sum_{\ell=1}^{j}\ \sum_{i_0+\cdots+i_\ell=j-\ell} C_{j,\boldsymbol{i}}(\nabla^{\mathbf{g}})^{i_1}\mathbf{D} * \cdots * (\nabla^{\mathbf{g}})^{i_\ell}\mathbf{D} * (\nabla^{\mathbf{g}})^{i_0}\mathbf{T}. \tag{27.21}$$

En la suma interior, $\boldsymbol{i} = (i_0,\dots,i_\ell)$ recorre $\mathbb{N}_0^{\ell+1}$ bajo la restricción indicada. Los coeficientes son universales;

cada término con $*$ representa la suma finita de las contracciones y permutaciones que fija el tipo tensorial. No se suponen conmutativos los endomorfismos que aparecen. Para $j=1$ se obtiene $\nabla^{\mathbf{g}'}\mathbf{T}=\nabla^{\mathbf{g}}\mathbf{T}+\mathbf{D}*\mathbf{T}$; al derivar nuevamente, la derivada puede actuar sobre cualquiera de los factores ya presentes o introducir un nuevo factor $\mathbf{D}$. En el primer caso, uno de los $i_a$, con $a\in\{0,\dots,\ell\}$, aumenta en uno, y la suma de los índices pasa de $j-\ell$ a $(j+1)-\ell$. En el segundo, $\ell$ aumenta en uno y se añade un índice cero; la suma permanece igual a $(j+1)-(\ell+1)$. Son todos los términos del orden $j+1$, y sus órdenes y tipos son los de la fórmula. Esto completa el paso inductivo.

En la uniformidad $b,q$, las cotas supremas de las derivadas de $\mathbf{D}$ y (27.20) controlan término a término (27.21). En la uniformidad Sobolev, $r>m/p+1$ implica que $W^{r-1,p}$ es un álgebra y que sus secciones actúan como multiplicadores sobre los órdenes inferiores. Los teoremas de producto y módulo aplicados a cada contracción proporcionan la cota superior del inciso (ii). Al intercambiar $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}'$ se obtienen las desigualdades inversas en ambos casos. □

Fijada $\mathbf{g}_0\in\operatorname{Met}(I,B_k)(M)$, denotemos por $\operatorname{Met}^{p,r}_{\mathbf{g}_0}(M)$ el conjunto

$$\left\{\mathbf{g}_0+\mathbf{h}\;\middle|\;\mathbf{h}\in W^{r,p}(M,S^2T^*M;\mathbf{g}_0),\quad \mathbf{g}_0+\mathbf{h}\geq c\mathbf{g}_0\text{ para algún }c>0\right\}.$$

Ésta será la componente afín positiva que se considera cuando se escribe $\operatorname{Met}^{p,r}(I,B_k)(M)$ con una referencia fijada. El espacio afín completo es $\mathbf{g}_0+W^{r,p}$; la positividad uniforme selecciona un abierto de él, que no tiene por qué ser completo para la distancia afín. En la versión uniforme, sea $B^q_{\mathbf{g}_0}$ la completación de las secciones suaves acotadas hasta orden $q$ para $\|\cdot\|_{b,q;\mathbf{g}_0}$. Definimos $\operatorname{Met}^{b,q}_{\mathbf{g}_0}(M)$ exigiendo $\mathbf{h}\in B^q_{\mathbf{g}_0}$ y la misma desigualdad positiva uniforme.

**Teorema 27.4.4.** (Variedades afines de métricas) Sea $M^m$ suave, completa y sin frontera respecto de $\mathbf{g}_0\in\operatorname{Met}(I,B_k)(M)$. Si $1<p<\infty$ y $k\geq r>m/p+1$, el espacio $\operatorname{Met}^{p,r}_{\mathbf{g}_0}(M)$ es un abierto convexo de $\mathbf{g}_0+W^{r,p}(M,S^2T^*M;\mathbf{g}_0)$. Es una variedad suave de Banach, y de Hilbert si $p=2$. Para la carta afín $\Phi_{\mathbf{g}}(\mathbf{g}')=\mathbf{g}'-\mathbf{g}$,

$$J_{\mathbf{g}}:=D\Phi_{\mathbf{g}}(\mathbf{g}):T_{\mathbf{g}}\operatorname{Met}^{p,r}_{\mathbf{g}_0}(M)\longrightarrow H^{r,p}(M,S^2T^*M;\mathbf{g}_0)$$

es la identidad lineal y bicontinua. Se usa aquí la equivalencia de las normas $W^{r,p}$ y $H^{r,p}$ para órdenes enteros del capítulo de geometría acotada. La construcción uniforme es un abierto convexo modelado en $B^q_{\mathbf{g}_0}$.

*Demostración.* Si $\mathbf{g}\geq c\mathbf{g}_0$, el encaje uniforme da $\|\mathbf{k}\|_{\infty;\mathbf{g}_0}\leq C_S\|\mathbf{k}\|_{p,r;\mathbf{g}_0}$. La condición $\|\mathbf{k}\|_{p,r;\mathbf{g}_0}<c/(2C_S)$ implica $\mathbf{g}+\mathbf{k}\geq(c/2)\mathbf{g}_0$, lo que prueba apertura. La combinación convexa de dos métricas con cotas inferiores $c_1,c_2>0$ tiene cota inferior $(1-t)c_1+tc_2>0$, para $t\in[0,1]$; por ello el conjunto es convexo. Los cambios entre cartas afines son traslaciones, con diferencial identidad. La afirmación uniforme se prueba igual, usando que la norma $B^q_{\mathbf{g}_0}$ controla la norma infinita.

En la componente Sobolev, la positividad puntual ya implica una cota inferior uniforme. Para verlo, $\mathbf{h}\in W^{r,p}$ tiene primera derivada acotada y tiende uniformemente a cero en el infinito. Si esta última afirmación fallara, habría $\varepsilon>0$ y puntos $x_j$ que escapan de todo compacto, con $|\mathbf{h}(x_j)|\geq\varepsilon$. La cota de $\nabla\mathbf{h}$ y el transporte paralelo darían $|\mathbf{h}|\geq\varepsilon/2$ en bolas de un mismo radio positivo alrededor de esos puntos. Se puede extraer una familia de bolas disjuntas; sus volúmenes tienen una cota inferior común por la geometría acotada. Entonces la suma de las integrales de $|\mathbf{h}|^p$ sería infinita, contradicción. Fuera de un compacto se cumple, por tanto, $\mathbf{g}_0+\mathbf{h}\geq\frac{1}{2}\mathbf{g}_0$. Dentro de él, la continuidad y la positividad dan un mínimo positivo para el menor valor propio.

Las secciones suaves de soporte compacto aproximan a $\mathbf{h}$ en $W^{r,p}$. La convergencia uniforme asegura que las aproximaciones conservan una cota inferior positiva. Las métricas suaves resultantes coinciden con $\mathbf{g}_0$ fuera de un compacto, son completas y satisfacen $(I)$ y $(B_k)$, con constantes que pueden depender de la aproximación. Esto relaciona el modelo afín con la aproximación por métricas suaves. No afirma que el límite conserve las cotas de curvatura de orden $k$: para ello haría falta controlar las derivadas adicionales de la métrica. □

Las cartas afines son las utilizadas en el estudio de espacios de métricas sobre variedades abiertas; véase [50]. La Proposición 27.4.3 explica por qué, dentro de cada vecindad con cotas comunes, pueden emplearse las normas intrínsecas de otra métrica de la componente. La métrica de referencia fija hace explícita la topología en la que se realizan la completación y la apertura de la positividad.

En una base compacta, o en una componente Hilbert Sobolev de una base no compacta, la métrica de Ebin se define por

$$G_{\mathbf{g}}(\mathbf{h},\mathbf{k}) := \int_M \operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\mathbf{h}\circ\mathbf{k})\, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{27.22}$$

En el caso no compacto los vectores tangentes pertenecen a $L^2$ y las métricas son uniformemente equivalentes a la referencia; Hölder garantiza así que la integral es finita. Para una componente $W^{r,p}$ con $p \neq 2$ hay que exigir adicionalmente esa integrabilidad. En una topología $H^s$ con $s > 0$ esta métrica sólo controla la norma $L^2$ y es, por lo tanto, débil. La existencia de una conexión o de una exponencial no puede deducirse únicamente de la fórmula de Koszul.

## 27.4.2 Conexiones y transformaciones calibre

Sea $\mathbf{P} \longrightarrow M$ un haz principal con grupo estructural compacto $G$ y álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, provista de un producto interno Ad–invariante. Denotamos por $h_{\mathrm{ad}}$ la métrica inducida en el haz adjunto y por $\operatorname{ad}\mathbf{P} := \mathbf{P}\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g}$ el haz adjunto.

**Proposición 27.4.5.** (Estructura afín del espacio de conexiones) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \longrightarrow M$ un haz principal suave. Fijada una conexión suave $A_0$, toda conexión suave se escribe de manera única como $A_0 + \mathbf{a}$, con $\mathbf{a} \in \Omega^1(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$. En consecuencia, para todo índice Sobolev $s$ para el cual se haya fijado la completación,

$$\mathcal{A}^s(\mathbf{P}) := A_0 + H^s(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P})$$

es un espacio afín y

$$T_A\mathcal{A}^s(\mathbf{P}) = H^s(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P}).$$

*Demostración.* La afirmación suave es el Teorema 2.6.23: la diferencia de dos formas de conexión principal es horizontal y Ad–equivariante, y por ello desciende a una única forma con valores en $\operatorname{ad}\mathbf{P}$. Completar el espacio vectorial modelador en $H^s$ da la segunda afirmación. No se identifica aquí una conexión principal con una conexión arbitraria de un haz vectorial. □

**Proposición 27.4.6.** (Acción calibre derecha y curvatura) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \longrightarrow M$ un haz principal suave. La convención fijada en (2.49) define una acción derecha:

$$A \triangleleft \mathbf{u} := \operatorname{Ad}_{\mathbf{u}^{-1}} A + \mathbf{u}^{-1} d\mathbf{u}, \qquad (A \triangleleft \mathbf{u}) \triangleleft \mathbf{v} = A \triangleleft (\mathbf{u}\mathbf{v}). \tag{27.23}$$

En una representación matricial, la primera fórmula se escribe $A \triangleleft \mathbf{u} = \mathbf{u}^{-1} A \mathbf{u} + \mathbf{u}^{-1} d\mathbf{u}$. Además,

$$\mathbf{F}_{A+\mathbf{a}} = \mathbf{F}_A + d_A \mathbf{a} + \frac{1}{2}[\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}], \tag{27.24}$$

$$\mathbf{F}_{A \triangleleft \mathbf{u}} = \mathrm{Ad}_{\mathbf{u}^{-1}} \mathbf{F}_A. \tag{27.25}$$

Para la prolongación Sobolev sobre una base compacta se fija $s > m/2$; en una base no compacta se imponen las hipótesis de la componente calibre que se construye más adelante. Si

$$\Phi \colon \mathcal{A}^s(\mathbf{P}) \times \mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P}) \longrightarrow \mathcal{A}^s(\mathbf{P}), \qquad \Phi(A, \mathbf{u}) = A \triangleleft \mathbf{u},$$

y trivializamos $T_{\mathbf{u}} \mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P})$ mediante la traslación izquierda, escribiendo un vector tangente como $\mathbf{u}\xi$, entonces

$$D\Phi_{(A,\mathbf{u})}(\mathbf{a}, \mathbf{u}\xi) = \mathrm{Ad}_{\mathbf{u}^{-1}} \mathbf{a} + d_{A \triangleleft \mathbf{u}} \xi. \tag{27.26}$$

*Demostración.* Las dos primeras identidades son las Proposiciones 2.6.35 y 2.6.21, escritas en una sección local. En particular, el orden de $\mathbf{uv}$ en (27.23) no es una convención implícita: procede de la acción derecha ya demostrada.

Para calcular el diferencial, tomamos una curva $A(t)$ con $A(0) = A$, $\dot{A}(0) = \mathbf{a}$, y la curva exacta $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} \exp_G(t\xi)$. Por la ley de acción,

$$A(t) \triangleleft \mathbf{u}(t) = \big(A(t) \triangleleft \mathbf{u}\big) \triangleleft \exp_G(t\xi).$$

La variación del primer factor es $\mathrm{Ad}_{\mathbf{u}^{-1}} \mathbf{a}$, mientras que la derivada de $B \triangleleft \exp_G(t\xi)$ en $t = 0$ es $d_B \xi$. Tomando $B = A \triangleleft \mathbf{u}$ se obtiene (27.26). □

**Teorema 27.4.7.** (Grupo calibre Sobolev y rebanada de Coulomb compacta) Sea $(M^m, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave, compacta, conexa y sin frontera; sea $G$ compacto, sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal derecho y sea $A$ una conexión suave. Si $s > \frac{m}{2}$, entonces

$$\mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P}) := H^{s+1}(M, \mathrm{Ad}(\mathbf{P}))$$

es un grupo de Lie de Hilbert modelado sobre $H^{s+1}(M, \mathrm{ad}\,\mathbf{P})$, y su acción derecha sobre $\mathcal{A}^s(\mathbf{P})$ es suave. La acción infinitesimal es

$$\xi \longmapsto d_A \xi. \tag{27.27}$$

Pongamos

$$K_A := \ker\big(d_A : H^{s+1}(M, \mathrm{ad}\,\mathbf{P}) \longrightarrow H^s(M, T^*M \otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P})\big)$$

y, usando el producto $L^2$ inducido por $\mathbf{g}$ y por la métrica Ad–invariante de $\mathrm{ad}\,\mathbf{P}$, definamos

$$X_A^{s+1} := H^{s+1}(M, \mathrm{ad}\,\mathbf{P}) \cap K_A^{\perp_{L^2}}, \qquad Y_A^{s-1} := \Big\{ \mathbf{f} \in H^{s-1}(M, \mathrm{ad}\,\mathbf{P}) \,\Big|\, \langle \mathbf{f}, \zeta \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0 \text{ para toda } \zeta \in K_A \Big\}.$$

Cuando $s \geq 1$, el último espacio es precisamente $H^{s-1}(M, \mathrm{ad}\,\mathbf{P}) \cap K_A^{\perp_{L^2}}$; la formulación por el anulador sigue teniendo sentido si $s - 1 < 0$, pues $K_A$ consta de secciones suaves. Entonces

$$\Delta_A^{(0)} := d_A^* d_A : X_A^{s+1} \xrightarrow{\cong} Y_A^{s-1} \tag{27.28}$$

es un isomorfismo de Hilbert y

$$H^s(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P}) = d_A X_A^{s+1} \oplus \ker\bigl(d_A^* : H^s(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P}) \longrightarrow H^{s-1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})\bigr). \tag{27.29}$$

El estabilizador

$$\operatorname{Stab}(A) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P}) \mid A \triangleleft \mathbf{u} = A\}$$

es un grupo de Lie compacto finito–dimensional, con álgebra de Lie $K_A$. Más precisamente, si $p \in \mathbf{P}$ y $\operatorname{Hol}_p(A) \subseteq G$ es el grupo de holonomía basado en $p$, la evaluación en $p$ induce un isomorfismo de grupos de Lie

$$\operatorname{Stab}(A) \xrightarrow{\cong} Z_G\bigl(\operatorname{Hol}_p(A)\bigr). \tag{27.30}$$

Finalmente, si

$$\mathcal{S}_A^s := A + \ker\bigl(d_A^* : H^s(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P}) \to H^{s-1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})\bigr),$$

existen una vecindad abierta $\mathcal{U}_A$ de $A$ en $\mathcal{A}^s(\mathbf{P})$ y una vecindad abierta $\mathcal{W}_A$ de $[A, e]$ en $\mathcal{S}_A^s \times_{\operatorname{Stab}(A)} \mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P})$ para las cuales la restricción del mapeo

$$\mathcal{W}_A \longrightarrow \mathcal{U}_A, \qquad [B, \mathbf{u}] \longmapsto B \triangleleft \mathbf{u}, \tag{27.31}$$

es un difeomorfismo. Aquí la relación de equivalencia está inducida por

$$(B, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{h} = (B \triangleleft \mathbf{h}, \mathbf{h}^{-1}\mathbf{u}), \qquad \mathbf{h} \in \operatorname{Stab}(A).$$

Además, se puede elegir una vecindad abierta $\mathcal{S}_0$ de $A$ en $\mathcal{S}_A^s$, invariante por $\operatorname{Stab}(A)$, de modo que

$$\mathcal{S}_0 \times_{\operatorname{Stab}(A)} \mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P}) \longrightarrow \mathcal{A}^s(\mathbf{P}), \qquad [B, \mathbf{u}] \longmapsto B \triangleleft \mathbf{u},$$

sea un difeomorfismo sobre un abierto invariante que contiene la órbita de $A$. Toda conexión suficientemente próxima a $A$ tiene un representante en $\mathcal{S}_0$, único módulo $\operatorname{Stab}(A)$. La unicidad se refiere a los representantes en esta vecindad de Coulomb, no a todo el hiperplano afín $\mathcal{S}_A^s$.

*Demostración.* Como $s > \frac{m}{2}$, se tiene $s + 1 > \frac{m}{2} + 1$ y, en particular,

$$H^{s+1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}) \hookrightarrow C^0(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}; h_{\mathrm{ad}}).$$

El exponencial de Lie es Ad–equivariante y, por ello, induce un mapeo fibrado

$$\operatorname{Exp}\colon \operatorname{ad}\mathbf{P} \longrightarrow \operatorname{Ad}(\mathbf{P}), \qquad [p, \xi] \longmapsto [p, \exp_G \xi].$$

Elegimos, respecto del producto interno Ad–invariante, una bola Ad–invariante $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}$ en la que $\exp_G$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Para cada sección $\mathbf{u}$ del haz de grupos, la fórmula

$$\Theta_{\mathbf{u}}(\xi) := \mathbf{u}\,\operatorname{Exp}(\xi), \qquad \|\xi\|_{C^0(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}; h_{\mathrm{ad}})} < \operatorname{rad}(\mathcal{O}),$$

posee la inversa puntual $v \mapsto \log_G(\mathbf{u}^{-1}v)$. En una cubierta finita que trivializa los dos haces, ambas fórmulas son operadores de superposición. El Lema 27.3.2 prueba que son suaves en $H^{s+1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$; equiva-

lentemente, su diferencial en cero es la identidad y el Teorema 23.3.3 proporciona la misma inversa local. Estas cartas, trasladadas por cada $\mathbf{u}$, construyen la estructura de grupo de Lie de Hilbert y la identificación $T_{\mathbf{u}}\mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P}) = \mathbf{u}H^{s+1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$.

En estas cartas, la multiplicación y la inversión son superposiciones de los mapeos suaves finito–dimensionales de $G$, luego son suaves. Asimismo,

$$H^{s+1}(M, \operatorname{End}(\operatorname{ad}\mathbf{P}))\cdot H^s(M, T^*M\otimes\operatorname{ad}\mathbf{P}) \longrightarrow H^s(M, T^*M\otimes\operatorname{ad}\mathbf{P}), \qquad \mathbf{u}\longmapsto \mathbf{u}^{-1}d_A\mathbf{u} : \mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P}) \longrightarrow H^s(M, T^*M\otimes\operatorname{ad}\mathbf{P})$$

son mapeos suaves en cartas. Aquí $\mathbf{u}^{-1}d_A\mathbf{u} := A\triangleleft\mathbf{u} - A$ es una forma global con valores en $\operatorname{ad}\mathbf{P}$. El término $\mathbf{u}^{-1}d\mathbf{u}$ por separado se usa en una trivialización local: se combina con el potencial de conexión para dar esa forma global. Para los índices reales se aplica el Corolario 27.3.3. Esto construye el grupo de Lie y prueba la suavidad de la acción. La fórmula (27.26), con $\mathbf{u} = e$, da (27.27).

El operador $\Delta_A^{(0)} = d_A^* d_A$ es elíptico, formalmente autoadjunto y no negativo. Su realización autoadjunta y su dominio se obtienen del Corolario 11.4.5; en la variedad cerrada, la Proposición 15.7.2 prueba que su resolvente es compacto. Por el teorema espectral, $K_A = \ker\Delta_A^{(0)}$ es finito–dimensional, consta de secciones suaves y existe $\lambda_A > 0$ tal que

$$\langle\Delta_A^{(0)}\xi,\xi\rangle_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})} \geq \lambda_A\|\xi\|^2_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})}, \qquad \xi\in H^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})\cap K_A^{\perp_{L^2}}.$$

La estimación elíptica y la regularidad elíptica, aplicadas en cada nivel Sobolev, prueban que (27.28) es biyectivo con inversa continua.

Para $\mathbf{a}\in H^s(M, T^*M\otimes\operatorname{ad}\mathbf{P})$ definimos

$$\xi := (\Delta_A^{(0)}|_{X_A^{s+1}})^{-1}d_A^*\mathbf{a}, \qquad \mathbf{b} := \mathbf{a} - d_A\xi.$$

Como, para $\zeta\in K_A$, $\langle d_A^*\mathbf{a},\zeta\rangle = \langle\mathbf{a}, d_A\zeta\rangle = 0$, se tiene $d_A^*\mathbf{a}\in Y_A^{s-1}$; la fórmula está bien definida, y $d_A^*\mathbf{b} = 0$. Si $d_A\xi$ pertenece también a $\ker d_A^*$, entonces $\Delta_A^{(0)}\xi = 0$; como $\xi\perp K_A$, resulta $\xi = 0$. Esto prueba la suma directa en (27.29). La fórmula anterior muestra además que sus proyecciones son continuas.

Probemos que todo elemento del estabilizador Sobolev es suave. Si $\mathbf{u}\in\mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P})$ satisface $A\triangleleft\mathbf{u} = A$, la fórmula local (27.23) da, en sentido débil,

$$\mathbf{u}^{-1}d\mathbf{u} = A - \operatorname{Ad}_{\mathbf{u}^{-1}}A.$$

Como $s+1 > \frac{m}{2}+1$, la sección $\mathbf{u}$ es continua. En una trivialización del haz de grupos denotemos por $\widehat{u}$ su representación local. En coordenadas del grupo, la última igualdad es un sistema $\partial_j\widehat{u} = F_j(x,\widehat{u})$ con $F_j$ suave. Para obtener la ganancia de una derivada, supongamos que $\widehat{u}\in H^{s+1+j}_{\mathrm{loc}}$, con $j\in\mathbb{N}_0$. La superposición suave, aplicada al mapeo $(x,z)\mapsto F_i(x,z)$ en una carta relativamente compacta, da $F_i(x,\widehat{u})\in H^{s+1+j}_{\mathrm{loc}}$ para cada $i\in\{1,\dots,m\}$. La ecuación proporciona entonces todas las derivadas primeras de $\widehat{u}$ en ese espacio; la caracterización local de Sobolev por derivadas implica $\widehat{u}\in H^{s+2+j}_{\mathrm{loc}}$. Los cortes en cartas algo menores justifican cada paso. Partiendo de $j = 0$, esta implicación aumenta la regularidad una unidad en cada etapa. Una cubierta finita y los encajes de Sobolev dan $\mathbf{u}\in C^\infty$. La igualdad es entonces clásica y el Teorema 2.6.36 muestra que $\mathbf{u}$ es una sección paralela y que la evaluación induce el isomorfismo de grupos (27.30). Recíprocamente, una sección paralela suave pertenece a $H^{s+1}$ porque $M$ es compacta, así que no se pierde ningún elemento. La evaluación puntual es suave en $H^{s+1}$ por el encaje en $C^0$. En la dirección inversa, la prolongación de $c\in Z_G(\operatorname{Hol}_p(A))$ se escribe en una trivialización como $h(x)^{-1}c\,h(x)$, donde $h(x)$ depende suavemente del

transporte paralelo elegido localmente. Por ello la inversa también es suave y (27.30) es un isomorfismo de grupos de Lie. La Proposición 1.9.16 muestra que el centralizador es un subgrupo de Lie cerrado del grupo compacto $G$ y, por lo tanto, es compacto y finito–dimensional. Finalmente, (2.52) identifica su álgebra de Lie con $K_A$.

Aplicamos ahora el teorema de la función implícita. Para $\mathbf{a}$ y $\xi$ pequeños, con $\xi \in X_A^{s+1}$, ponemos

$$\mathscr{F}(\mathbf{a}, \xi) := d_A^*\big((A + \mathbf{a}) \triangleleft \exp_G(-\xi) - A\big) \in Y_A^{s-1}.$$

La imagen pertenece a $Y_A^{s-1}$ porque $d_A^*$ toma valores ortogonales a $K_A$. La fórmula diferencial de la acción da

$$D_\xi \mathscr{F}(0,0)\eta = -d_A^* d_A \eta = -\Delta_A^{(0)}\eta, \tag{27.32}$$

sin un signo indeterminado. Por (27.28), el Teorema 23.3.8 produce una única función suave $\mathbf{a} \mapsto \xi(\mathbf{a}) \in X_A^{s+1}$ tal que

$$d_A^*\big((A + \mathbf{a}) \triangleleft \exp_G(-\xi(\mathbf{a})) - A\big) = 0.$$

Equivalentemente, el mapeo

$$\Psi(\mathbf{b}, \xi) := (A + \mathbf{b}) \triangleleft \exp_G(\xi) - A, \qquad d_A^*\mathbf{b} = 0, \qquad \xi \in X_A^{s+1},$$

tiene diferencial

$$D\Psi_{(0,0)}(\mathbf{b}, \xi) = \mathbf{b} + d_A \xi,$$

que es un isomorfismo por (27.29). El Teorema 23.3.3 da la parametrización local única por $(\mathbf{b}, \xi)$.

Resta incorporar el estabilizador sin confundirlo con las direcciones $K_A$. Abreviemos

$$H := \mathrm{Stab}(A), \qquad \mathfrak{h} := K_A, \qquad X := X_A^{s+1}.$$

El espacio afín de Coulomb $\mathcal{S}_A^s$ es $H$–invariante: si $\mathbf{h}$ es paralelo, entonces

$$(A + \mathbf{b}) \triangleleft \mathbf{h} = A + \mathrm{Ad}_{\mathbf{h}^{-1}}\mathbf{b}, \qquad d_A^* \mathrm{Ad}_{\mathbf{h}^{-1}}\mathbf{b} = \mathrm{Ad}_{\mathbf{h}^{-1}} d_A^*\mathbf{b}.$$

La misma identidad muestra que $\mathrm{Ad}_{\mathbf{h}}$ conmuta con $d_A$. Como $\mathbf{h}$ es paralelo y el producto en $\mathfrak{g}$ es Ad–invariante, $\mathrm{Ad}_{\mathbf{h}}$ conmuta con las derivadas covariantes de la conexión $A$. Elegimos la norma equivalente de Sobolev construida con esa conexión; para órdenes reales podemos usar las potencias de $I + \nabla_A^*\nabla_A$. El endomorfismo paralelo conmuta con este operador y sus potencias. Por ello es una isometría de $H^{s+1}(M, \mathrm{ad}\,\mathbf{P})$. En particular, deja invariantes tanto $K_A$ como su complemento ortogonal $X$. Así,

$$H^{s+1}(M, \mathrm{ad}\,\mathbf{P}) = \mathfrak{h} \oplus X$$

es una descomposición $\mathrm{Ad}_H$–invariante.

Construimos ahora el tubo que se necesita. Mediante traslación izquierda, el subhaz complementario a $TH$ en la restricción del tangente del grupo calibre a $H$ es

$$N_{\mathbf{h}}H := (dL_{\mathbf{h}})_e X, \qquad NH \cong H \times X, \qquad (\mathbf{h}, \xi) \longmapsto (dL_{\mathbf{h}})_e \xi.$$

La invariancia de $X$ hace que esta identificación sea compatible también con las traslaciones derechas por

elementos de $H$. Consideremos

$$\Theta\colon H\times X\longrightarrow \mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P}),\qquad \Theta(\mathbf{h},\xi):=\mathbf{h}\,\mathrm{Exp}(\xi).$$

Este mapeo es suave por la estructura de grupo de Lie ya construida. Al trivializar por la izquierda en $(\mathbf{h},0)$, su diferencial es

$$(dL_{\mathbf{h}^{-1}})_{\mathbf{h}}D\Theta_{(\mathbf{h},0)}\big((dL_{\mathbf{h}})_e\eta,\xi\big)=\eta+\xi,\qquad (\eta,\xi)\in\mathfrak{h}\oplus X.$$

Es un isomorfismo. El teorema de la función inversa da, alrededor de cada $(\mathbf{h},0)$, un abierto producto $W_{\mathbf{h}}\times B_X(0,r_{\mathbf{h}})$ en el que $\Theta$ es un difeomorfismo sobre su imagen, con $\mathbf{h}\in W_{\mathbf{h}}\subseteq H$ y $r_{\mathbf{h}}>0$. Los abiertos $W_{\mathbf{h}}$ cubren $H$. Elegimos una subcubierta $W_{\mathbf{h}_1},\dots,W_{\mathbf{h}_N}$ y ponemos

$$\varepsilon_0:=\min_{1\le i\le N} r_{\mathbf{h}_i}>0.$$

Si $\mathbf{h}\in H$ y $\|\xi\|_{H^{s+1}(M,\mathrm{ad}\,\mathbf{P})}<\varepsilon_0$, algún $W_{\mathbf{h}_i}$ contiene a $\mathbf{h}$ y $(\mathbf{h},\xi)\in W_{\mathbf{h}_i}\times B_X(0,r_{\mathbf{h}_i})$. Por lo tanto, $\Theta$ es un difeomorfismo local en todo $H\times B_X(0,\varepsilon_0)$. Aquí y en lo sucesivo, $B_X$ denota una bola para la norma $H^{s+1}(M,\mathrm{ad}\,\mathbf{P})$ restringida a $X$.

La inyectividad puede hacerse uniforme. Si no existiera $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ para el cual $\Theta$ fuera inyectiva, habría sucesiones

$$\mathbf{h}_j,\mathbf{k}_j\in H,\qquad \xi_j,\eta_j\in X,\qquad \|\xi_j\|_{H^{s+1}(M,\mathrm{ad}\,\mathbf{P})},\|\eta_j\|_{H^{s+1}(M,\mathrm{ad}\,\mathbf{P})}\longrightarrow 0,$$

con $(\mathbf{h}_j,\xi_j)\neq(\mathbf{k}_j,\eta_j)$ y $\Theta(\mathbf{h}_j,\xi_j)=\Theta(\mathbf{k}_j,\eta_j)$. Tras extraer subsucesiones, la compacidad de $H$ da $\mathbf{h}_j\to\mathbf{h}$ y $\mathbf{k}_j\to\mathbf{k}$. Al pasar al límite se obtiene $\mathbf{h}=\mathbf{k}$. Los dos pares pertenecen entonces, para $j$ grande, a un mismo dominio de inversa local de $\Theta$ alrededor de $(\mathbf{h},0)$, lo cual fuerza $(\mathbf{h}_j,\xi_j)=(\mathbf{k}_j,\eta_j)$, una contradicción. Por consiguiente, para algún $\varepsilon>0$,

$$\Theta\colon H\times B_X(0,\varepsilon)\xrightarrow{\ \cong\ }\mathcal{N}_\varepsilon:=\Theta\big(H\times B_X(0,\varepsilon)\big)\tag{27.33}$$

es un difeomorfismo. Su imagen es abierta porque $\Theta$ es un difeomorfismo local, y contiene a $H$. De este modo (27.33) es efectivamente un entorno tubular de $H$, obtenido del haz normal complementario $NH$, y no una mera carta en la identidad. La terminología coincide con la Definición 2.12.2: como en las coordenadas de Fermi, se identifica una vecindad de la sección cero de un haz normal con una vecindad de la subvariedad; aquí el difeomorfismo es $\Theta$ y no una exponencial riemanniana de la variedad de Hilbert.

La bola $B_X(0,\varepsilon)$ es $H$–invariante para la norma anterior. El tubo es equivariante para la acción derecha

$$(\mathbf{h},\xi)\cdot\mathbf{k}=(\mathbf{hk},\mathrm{Ad}_{\mathbf{k}^{-1}}\xi),\qquad \Theta((\mathbf{h},\xi)\cdot\mathbf{k})=\Theta(\mathbf{h},\xi)\mathbf{k},$$

y también para las traslaciones izquierdas. Esto es precisamente la compatibilidad requerida por el cociente asociado.

Para concluir, escogemos una vecindad abierta $H$–invariante

$$\mathcal{S}_0\subset\mathcal{S}^s_A,\qquad A\in\mathcal{S}_0,$$

y reducimos simultáneamente $\mathcal{S}_0$ y $\varepsilon$ de modo que el difeomorfismo local $\Psi$ obtenido arriba sea inyectivo

en $(\mathcal{S}_0 - A)\times B_X(0,\varepsilon)$. Sea $q$ la proyección al cociente asociado y pongamos

$$\mathcal{W}_A := q(\mathcal{S}_0 \times \mathcal{N}_\varepsilon).$$

Podemos tomar $\mathcal{S}_0$ como una bola para una norma $H$–invariante, obtenida promediando cualquier norma equivalente sobre el grupo compacto. La acción de $H$ en $\mathcal{S}_A^s \times \mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P})$ es libre por su segundo factor y propia por la compacidad de $H$; en particular, la proyección $q$ es abierta y $\mathcal{W}_A$ es una vecindad abierta de $[A,e]$. Si $\mathbf{u} = \mathbf{h}\exp(\xi)$ pertenece a $\mathcal{N}_\varepsilon$, entonces, en el cociente asociado,

$$[B, \mathbf{h}\exp(\xi)] = [B \triangleleft \mathbf{h}, \exp(\xi)],$$

con $B \triangleleft \mathbf{h} \in \mathcal{S}_0$ después de reducir $\mathcal{S}_0$ de forma invariante. Este representante es único. En efecto, si

$$[B_1, \exp(\xi_1)] = [B_2, \exp(\xi_2)],$$

existe $\mathbf{k} \in H$ tal que $B_2 = B_1 \triangleleft \mathbf{k}$ y $\exp(\xi_2) = \mathbf{k}^{-1}\exp(\xi_1)$. Luego

$$\Theta(e, \xi_1) = \Theta(\mathbf{k}, \xi_2),$$

y la inyectividad del tubo implica $\mathbf{k} = e$, $\xi_1 = \xi_2$ y $B_1 = B_2$. Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_0 \times B_X(0,\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{W}_A, \qquad (B,\xi) \longmapsto [B, \exp(\xi)]$$

es una carta suave biyectiva, con inversa suave inducida por (27.33). En esta carta, el mapeo (27.31) coincide con

$$(B,\xi) \longmapsto B \triangleleft \exp(\xi),$$

es decir, la parametrización $\Psi$ trasladada por $A$. Su imagen $\mathcal{U}_A$ es abierta y la restricción es un difeomorfismo. Esto prueba la parametrización local. Para obtener una rebanada respecto del grupo completo hay que controlar también las transformaciones calibre que no se han elegido previamente en $\mathcal{N}_\varepsilon$.

Fijemos una representación unitaria fiel de $G$, con haz vectorial asociado $\mathbf{E}$. Las transformaciones calibre se representan como endomorfismos unitarios de $\mathbf{E}$, y $d_A\mathbf{u}$ denota aquí su derivada covariante antes de multiplicar por $\mathbf{u}^{-1}$. La estimación elíptica para la conexión fija $A$ da

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{s+1}(M,\operatorname{End}\mathbf{E})} \le C_A\left(\|d_A\mathbf{u}\|_{H^s(M,T^*M\otimes\operatorname{End}\mathbf{E})} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\operatorname{End}\mathbf{E})}\right).$$

Esta estimación se aplica a endomorfismos arbitrarios, no sólo a elementos del grupo. Si $(A+\mathbf{b}_1)\triangleleft\mathbf{u} = A+\mathbf{b}_2$, la fórmula de la acción equivale a

$$d_A\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\mathbf{u}.$$

Los productos de Sobolev implican

$$\|d_A\mathbf{u}\|_{H^s(M,T^*M\otimes\operatorname{End}\mathbf{E})} \le C\left(\|\mathbf{b}_1\|_{H^s(M,T^*M\otimes\operatorname{End}\mathbf{E})} + \|\mathbf{b}_2\|_{H^s(M,T^*M\otimes\operatorname{End}\mathbf{E})}\right)\|\mathbf{u}\|_{H^{s+1}(M,\operatorname{End}\mathbf{E})}.$$

Además, $\|\mathbf{u}\|_{L^2(M,\operatorname{End}\mathbf{E})}$ tiene una cota común porque $\mathbf{u}$ es unitario y $M$ tiene volumen finito. Si las normas de $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ son suficientemente pequeñas, la primera estimación absorbe el término que contiene $\|\mathbf{u}\|_{H^{s+1}(M,\operatorname{End}\mathbf{E})}$

y da una cota uniforme para esa norma.

Supongamos que existen $\mathbf{b}_{1,j}, \mathbf{b}_{2,j} \to 0$ en $H^s$ y transformaciones $\mathbf{u}_j$ que relacionan ambas conexiones pero permanecen fuera de $\mathcal{N}_\varepsilon$. La cota anterior y Rellich permiten extraer una subsucesión convergente en $H^s$ y, por el encaje, en $C^0$, hacia una sección $\mathbf{u}$ con valores en el grupo. La identidad diferencial muestra que $d_A \mathbf{u}_j \to 0$ en $H^s$, de modo que $d_A \mathbf{u} = 0$ en distribuciones. El argumento de regularidad del estabilizador prueba que $\mathbf{u} \in H = \mathrm{Stab}(A)$. Aplicando la estimación elíptica a $\mathbf{u}_j - \mathbf{u}$, obtenemos

$$\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{H^{s+1}(M, \mathrm{End}\,\mathbf{E})} \le C_A \left( \|d_A \mathbf{u}_j\|_{H^s(M, T^*M \otimes \mathrm{End}\,\mathbf{E})} + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{L^2(M, \mathrm{End}\,\mathbf{E})} \right) \longrightarrow 0.$$

Esto contradice que $\mathcal{N}_\varepsilon$ sea una vecindad abierta de $H$. Por consiguiente, al reducir $\mathcal{S}_0$, toda transformación que relaciona dos puntos de $\mathcal{S}_0$ pertenece a $\mathcal{N}_\varepsilon$.

Escribamos esa transformación como $\mathbf{u} = \mathbf{h}\exp \xi$, con $\mathbf{h} \in H$ y $\xi \in X$. Si $B_1 \triangleleft \mathbf{u} = B_2$, con $B_1, B_2 \in \mathcal{S}_0$, la invariancia por $H$ mantiene $B_1 \triangleleft \mathbf{h}$ en $\mathcal{S}_0$. La inyectividad de la parametrización $\Psi$ compara los pares $(B_1 \triangleleft \mathbf{h}, \xi)$ y $(B_2, 0)$ y da $\xi = 0$, $B_2 = B_1 \triangleleft \mathbf{h}$. Esto prueba la unicidad respecto de cualquier elemento del grupo.

Finalmente, el diferencial de la parametrización sigue siendo invertible en $(B, e)$ para todo $B$ en una vecindad suficientemente pequeña de $A$, por continuidad y apertura del conjunto de isomorfismos. La traslación de la acción lleva esta propiedad a $(B, \mathbf{u})$ para cualquier $\mathbf{u}$. El mapeo desde el cociente asociado es así un difeomorfismo local en todos sus puntos, y el argumento anterior prueba su inyectividad. Su imagen es abierta e invariante, contiene la órbita de $A$ y, al ser un mapeo abierto e inyectivo con inversas locales suaves, es un difeomorfismo sobre esa imagen. Esto completa la construcción de la rebanada. □

La ganancia de una derivada en el elemento calibre es visible tanto en $\mathbf{u}^{-1} d\mathbf{u}$ como en el isomorfismo elíptico usado en el argumento de Coulomb.

En una base compacta, $d_A^* d_A$ tiene resolvente compacto: su espectro es discreto, cada espacio propio es finito–dimensional y no hay espectro esencial. La estimación elíptica en $(\ker d_A)^\perp$ sustituye, en este caso, la hipótesis adicional de brecha que aparece en una base no compacta.

En una base completa, no compacta y sin frontera diremos que una conexión suave $B$ satisface la condición de conexión $(B_k)$ si existen constantes $D_0, \dots, D_k > 0$ tales que

$$\|(\nabla^B)^i \mathbf{F}_B\|_\infty \le D_i, \qquad 0 \le i \le k. \tag{27.34}$$

Fijada $A_0$, definimos su componente afín Sobolev por

$$\mathcal{A}^r_{A_0}(\mathbf{P}) := A_0 + H^r(M, T^*M \otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P}).$$

En la base no compacta tampoco se exige que una transformación calibre sea integrable como función con valores en $G$. Fijemos una representación unitaria fiel de $G$ y usemos la conexión inducida por $A_0$. Consideramos las secciones $\mathbf{u}$ de $\mathrm{Ad}(\mathbf{P})$ de clase $H^{r+1}_{\mathrm{loc}}$ para las que

$$\mathbf{u}^{-1} d_{A_0} \mathbf{u} := A_0 \triangleleft \mathbf{u} - A_0 \in H^r(M, T^*M \otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P}).$$

Este conjunto es $\mathcal{G}^{r+1}(A_0)$. Su topología se describe mediante las cartas $\xi \mapsto \mathbf{u}\exp \xi$, con $\xi \in H^{r+1}(M, \mathrm{ad}\,\mathbf{P})$ de norma uniforme pequeña. Las normas se basan siempre en $A_0$ y $\mathbf{g}$.

La definición es compatible con el producto. Si $\mathbf{b}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{-1} d_{A_0}\mathbf{u}$, la ley de acción da

$$\mathbf{b}_{\mathbf{uv}} = \mathrm{Ad}_{\mathbf{v}^{-1}}\,\mathbf{b}_{\mathbf{u}} + \mathbf{b}_{\mathbf{v}}, \qquad \mathbf{b}_{\mathbf{u}^{-1}} = -\,\mathrm{Ad}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{b}_{\mathbf{u}}.$$

Los coeficientes $\mathbf{u}$ son acotados porque $G$ es compacto. De $d_{A_0}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{b}_{\mathbf{u}}$ se obtienen las estimaciones de sus derivadas: en el paso del orden $j$ al $j+1$, Leibniz deriva uno de los factores $\mathbf{b}_{\mathbf{u}}$ o añade un nuevo factor al derivar $\mathbf{u}$. Para $j \in \{0,\dots,r\}$, los productos de Sobolev, con $r > m/2$, controlan todos los términos. En particular, $\mathrm{Ad}_{\mathbf{u}}$ y su inversa son multiplicadores en $H^r$. Las dos identidades anteriores conservan la condición de pertenencia y las cartas construyen el grupo de Lie de Hilbert descrito en [55, §3]. Su acción en la componente afín se escribe

$$(A_0 + \mathbf{a}) \triangleleft \mathbf{u} = A_0 + \mathbf{b}_{\mathbf{u}} + \mathrm{Ad}_{\mathbf{u}^{-1}}\,\mathbf{a}.$$

Sea $\mathcal{G}_e^{r+1}(A_0)$ la componente de la identidad de este grupo. Una sección constante central $c \in Z(G)$ tiene $d_{A_0} c = 0$, de modo que pertenece al grupo completo aunque pueda no pertenecer a esa componente. Si $Z(G)$ es numerable, ponemos

$$\mathcal{G}_{\bullet}^{r+1}(A_0) := \bigcup_{c \in Z(G)} c\,\mathcal{G}_e^{r+1}(A_0).$$

Si el centro no es numerable, ponemos $\mathcal{G}_{\bullet}^{r+1}(A_0) = \mathcal{G}_e^{r+1}(A_0)$. Las componentes seleccionadas forman un subgrupo. Como el modelo Hilbert es separable, la componente de la identidad es segunda numerable; una unión numerable de sus trasladadas conserva esa propiedad. Ésta es la restricción empleada en el teorema de rebanada.

**Definición 27.4.8.** (Espectro esencial y brecha espectral) Sea $L$ un operador autoadjunto no negativo y densamente definido en un espacio de Hilbert. Su *espectro esencial* $\sigma_{\mathrm{e}}(L)$ es el conjunto de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales $L - \lambda I \colon \mathcal{D}(L) \longrightarrow H$ no es Fredholm, donde $\mathcal{D}(L)$ lleva la norma del grafo. Diremos que existe una *brecha espectral sobre el núcleo* si existe $\gamma > 0$ tal que

$$\langle Lu, u\rangle \geq \gamma \|u\|^2, \qquad u \in \mathcal{D}(L) \cap (\ker L)^{\perp}.$$

Si $\inf \sigma_{\mathrm{e}}(L|_{(\ker L)^{\perp}}) > 0$, también se obtiene esa brecha, con la convención $\inf \varnothing = +\infty$. En efecto, por debajo del espectro esencial sólo puede haber valores propios aislados de multiplicidad finita. Una sucesión de valores propios positivos que tendiera a cero haría que cero perteneciera al espectro esencial. Tampoco puede ser cero un valor propio de la restricción a $(\ker L)^{\perp}$. Por tanto, su espectro queda separado de cero. El teorema espectral da la desigualdad, y el inverso sobre el complemento del núcleo es acotado; de aquí se sigue que el rango de $L$ es cerrado.

**Teorema 27.4.9.** (Eichhorn–Heber: rebanada calibre en una variedad completa no compacta) Sea $(M^m, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave, completa, no compacta y sin frontera, de geometría acotada: tiene radio de inyectividad positivo y cotas de curvatura $(B_k)$. Sea $\mathbf{P} \longrightarrow M$ un haz principal con grupo compacto, sea $A_0$ una conexión que satisface (27.34) y

$$\mathrm{YM}(A_0) = \frac{1}{2}\int_M |\mathbf{F}_{A_0}|^2_{\mathbf{g},h_{\mathrm{ad}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} < \infty,$$

y supongamos

$$k - 1 \geq r > \frac{m}{2} + 2.$$

Para $A \in \mathcal{A}^r_{A_0}(\mathbf{P})$, supongamos la brecha espectral

$$\inf \sigma_{\mathrm{e}}\left(\Delta_A^{(0)} \restriction_{(\ker \Delta_A^{(0)})^\perp}\right) > 0.$$

Entonces $d_A : H^{r+1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}) \to H^r(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P})$ tiene rango cerrado en $H^r$ y admite como complemento el núcleo de $d_A^* : H^r \to H^{r-1}$. La suma es ortogonal respecto del producto $L^2$, y la órbita de $A$ bajo $\mathcal{G}^{r+1}_\bullet(A_0)$ posee un tubo equivariante y una rebanada. Si, además, la misma brecha se cumple para la conexión de referencia,

$$\inf \sigma_{\mathrm{e}}\left(\Delta_{A_0}^{(0)} \restriction_{(\ker \Delta_{A_0}^{(0)})^\perp}\right) > 0,$$

el cociente de la componente por el subgrupo $\mathcal{G}^{r+1}_\bullet(A_0)$ correspondiente a $A_0$ posee una cuasiestratificación regular determinada por las clases de conjugación de los estabilizadores.

La descomposición de Hodge empleada aquí es la Proposición 4.12, p. 282, y la rebanada es el Teorema 4.17, pp. 283–284, de [55], ambos bajo la brecha correspondiente a $A$. La cuasiestratificación es su Teorema 5.13, pp. 285–286, y requiere la brecha en $A_0$. Estas condiciones convierten el rango de $d_A$ en un subespacio cerrado y hacen posible separar las direcciones de órbita de las direcciones de Coulomb. La prueba completa requiere teoría elíptica con coeficientes Sobolev sobre una variedad no compacta y no se reduce al teorema de la función implícita local.

Existe un resultado paralelo para la acción de difeomorfismos sobre métricas. Para una métrica $\mathbf{g}$, denotamos por $\Delta^{(0)}_{\mathbf{g}} = d^*_{\mathbf{g}} d$ la realización autoadjunta no negativa del laplaciano de Beltrami sobre $L^2(M, d\lambda_{\mathbf{g}})$.

**Teorema 27.4.10.** (Eichhorn: rebanada para métricas de curvatura negativa) Sea $(M^m, \mathbf{g}_0)$ una variedad riemanniana suave, completa, no compacta y sin frontera, con radio de inyectividad positivo y curvatura y derivadas acotadas, y sea $r > \frac{m}{2} + 2$. Supongamos $K_{\mathbf{g}_0} \le -c < 0$. Sea $\mathbf{g}$ una métrica de la componente Sobolev de orden $r$ de $\mathbf{g}_0$, con curvatura seccional estrictamente negativa, radio de inyectividad positivo y $\mathrm{Rm}_{\mathbf{g}}, \nabla \mathrm{Rm}_{\mathbf{g}}$ uniformemente acotados. Exijamos además la igualdad positiva de brechas

$$\inf \sigma_{\mathrm{e}}(\Delta^{(0)}_{\mathbf{g}_0}) = \inf \sigma_{\mathrm{e}}(\Delta^{(0)}_{\mathbf{g}}) > 0.$$

Entonces el componente de la identidad del grupo de difeomorfismos de orden $r+1$ actúa propiamente en este conjunto admisible y la órbita de $\mathbf{g}$ admite una rebanada topológica. La acción se considera continua en los niveles Sobolev indicados; su diferenciación requiere los cambios de nivel propios de la composición y del pullback.

Este resultado es el Teorema 5.8 de [52, p. 115]. La conclusión utiliza conjuntamente la curvatura negativa, las condiciones uniformes $(I)$ y $(B_1)$, la pertenencia a la componente y la igualdad de brechas espectrales. Su demostración construye el tubo equivariante y establece la propiedad de la acción mediante teoría elíptica uniforme.

## 27.5 Grupos de difeomorfismos, escalas de Hilbert e ILH

### 27.5.1 El grupo Sobolev a regularidad fija

Sea $M^m$ una variedad suave compacta con o sin frontera y sea $s > \frac{m}{2} + 1$. Si $\partial M = \varnothing$, el conjunto

$$\mathrm{Diff}^s(M) := \{\eta \in H^s(M,M) \mid \eta \text{ es biyectiva y } \eta^{-1} \in H^s(M,M)\}$$

es abierto en $H^s(M,M)$ y, por lo tanto, una variedad de Hilbert. Si $\partial M \neq \varnothing$, introducimos el doble $DM$, que es una variedad finito–dimensional sin frontera. En este caso, $\mathrm{Diff}^s(M)$ consta de los difeomorfismos $C^1$ de $M$ cuyas representaciones en cartas, y las de sus inversas, son $H^s$; en las cartas de frontera se usan los espacios de restricción al semiespacio. Trabajamos cerca de uno de estos difeomorfismos $\eta \in \mathrm{Diff}^s(M)$ dentro de $H^s(M, DM)$. Elegimos en $DM$ una métrica producto en un collar de $\partial M$; así, $\partial M$ es totalmente geodésica. En la carta exponencial centrada en $\eta$, la condición de llevar la frontera a la frontera equivale a

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{X}) \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial M, (\eta|_{\partial M})^* T\partial M).$$

En efecto, una geodésica suficientemente corta con ambos extremos en $\partial M$ es la geodésica de la métrica inducida en esa hipersuperficie; su vector inicial es tangente. La implicación inversa se sigue de que la hipersuperficie es totalmente geodésica.

El operador que toma la componente normal de la traza,

$$H^s(M, \eta^* TDM) \longrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial M, (\eta|_{\partial M})^* N\partial M),$$

es continuo y sobreyectivo. El operador de extensión de trazas en el collar, seguido de la inclusión del haz normal, proporciona una inversa derecha continua. Su núcleo es, por tanto, un subespacio cerrado complementado. Las trivializaciones Sobolev del haz inducido se justifican mediante $H^{s-1/2}(\partial M)$, que es un álgebra en este rango.

Queda comprobar que los mapeos de esa carta toman valores en $M$ y son difeomorfismos. En coordenadas de collar con coordenada interior $t \geq 0$, la componente normal de $\eta$ vale cero en $t = 0$ y su derivada normal es estrictamente positiva allí. La compacidad de la frontera da una cota inferior positiva en un collar menor. Una perturbación suficientemente pequeña en $C^1$ conserva esa cota y, al integrar desde $t = 0$, lleva el collar interior al interior. Fuera del collar, la imagen por $\eta$ queda a distancia positiva de la frontera, condición que se conserva por proximidad $C^0$.

La diferencial permanece invertible y la restricción a la frontera es un difeomorfismo local. Para la inyectividad global, cubrimos $M$ por un número finito de cartas en las que las perturbaciones pequeñas de $\eta$ son inyectivas, usando la estimación de la función inversa. Existe entonces $\delta > 0$ tal que dos puntos a distancia menor que $\delta$ pertenecen a una de esas cartas. Los pares de puntos a distancia al menos $\delta$ forman un compacto, y sus imágenes por $\eta$ están separadas por una distancia positiva. Una perturbación pequeña en $C^0$ conserva esta separación. Así no puede aparecer ninguna identificación de puntos. La imagen es abierta, también en las cartas de frontera, y cerrada por compacidad; encuentra cada componente que encuentra $\eta$, por lo que es todo $M$. La inversa es $H^s$ por las estimaciones de inversión Sobolev.

El encaje $H^s \hookrightarrow C^1$ hace aplicable este argumento en una vecindad Sobolev de $\eta$. Obtenemos una carta de $\mathrm{Diff}^s(M)$ sobre el núcleo de la traza normal. Su espacio tangente en $\eta$ consta de secciones de $\eta^* TM$ con traza tangente a la frontera. La construcción es la del Lema 6.6 de [46]; utiliza una variedad de Hilbert sin frontera, modelada en ese núcleo.

La localización cerca de difeomorfismos es parte del argumento. El conjunto de todos los mapeos de pares $M \to M$ puede tener restricciones adicionales impuestas por la positividad de la coordenada normal. Por ejemplo,

en el mapeo constante cero de $[0,1]$ a sí mismo, toda variación diferenciable con parámetro de ambos signos tiene velocidad cero en cada punto, pues el valor cero es un mínimo. No se obtiene allí el modelo lineal anterior.

**Teorema 27.5.1.** (Ebin–Marsden) Sea $M$ una variedad suave compacta con o sin frontera. Si $s > \frac{m}{2} + 1$, el espacio anterior es un grupo topológico. Para $\eta \in \mathrm{Diff}^s(M)$, la traslación derecha $R_\eta(\varphi) = \varphi \circ \eta$ es suave. En cambio, la traslación izquierda y la inversión no son, en general, suaves en el mismo nivel. Más precisamente, para $j \in \mathbb{N}_0$,

$$L_\eta \colon \mathrm{Diff}^s(M) \longrightarrow \mathrm{Diff}^s(M) \quad \text{es } C^j \text{ si } \eta \in \mathrm{Diff}^{s+j}(M),$$

y la inversión es $C^j$ como mapeo $\mathrm{Diff}^{s+j}(M) \longrightarrow \mathrm{Diff}^s(M)$. Por ello $\mathrm{Diff}^s(M)$ no es un grupo de Lie de Hilbert en el sentido usual.

La continuidad y las afirmaciones de regularidad se obtienen de los lemas de composición $\alpha$ y $\omega$ de la Sección 2 de [46]; la restricción a los subespacios que preservan la frontera se establece en su Sección 6. La pérdida aparece ya al diferenciar:

$$DL_\eta(\varphi)\mathbf{X} = (d\eta \circ \varphi)\mathbf{X},$$

que contiene una derivada de $\eta$. La derivada de $\eta \mapsto \eta^{-1}$ se obtiene de $\eta \circ \eta^{-1} = \mathrm{id}$ y contiene igualmente $d\eta^{-1}$.

**Lema 27.5.2.** (Composición en niveles inferiores y diferenciación de curvas) Sea $M$ una variedad suave compacta de dimensión $m$, con o sin frontera, y sea $s > m/2 + 1$. Para $0 \le r \le s$, la composición define un mapeo continuo

$$H^r(M,\mathbb{R}^d) \times \mathrm{Diff}^s(M) \longrightarrow H^r(M,\mathbb{R}^d), \qquad (F,\eta) \longmapsto F \circ \eta.$$

Para cada $\eta_0$ existe una vecindad $\mathcal{U}$ y una constante $C_{r,\mathcal{U}}$ con

$$\|F \circ \eta\|_{H^r(M,\mathbb{R}^d)} \le C_{r,\mathcal{U}} \|F\|_{H^r(M,\mathbb{R}^d)}, \qquad \eta \in \mathcal{U}. \tag{27.35}$$

Si $F \in C^1(I, H^s(M,\mathbb{R}^d))$ y $\eta \in C^1(I, \mathrm{Diff}^s(M))$, entonces $z = F \circ \eta^{-1}$ pertenece a $C(I, H^s(M,\mathbb{R}^d)) \cap C^1(I, H^{s-1}(M,\mathbb{R}^d))$ y

$$\partial_t z = (\partial_t F) \circ \eta^{-1} - dz(\mathbf{v}), \qquad \mathbf{v} = \dot\eta \circ \eta^{-1}. \tag{27.36}$$

En marcos locales, las mismas conclusiones valen para secciones a lo largo de $\eta$; al usar derivadas covariantes la fórmula es $\partial_t \mathbf{z} = (\nabla_t \mathbf{F}) \circ \eta^{-1} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{z}$.

*Demostración.* Para $r = s$ usamos la composición continua de la Proposición 27.3.5. Su continuidad en $(0,\eta_0)$ y su linealidad en $F$ proporcionan una cota uniforme para la norma del operador $R_\eta : F \mapsto F \circ \eta$ cuando $\eta$ está en una vecindad de $\eta_0$: basta aplicar la continuidad en una bola de radio $\delta$ y luego escalar $F$. Para $r = 0$, el cambio de variables da

$$\|F \circ \eta\|^2_{L^2(M,\mathbb{R}^d)} = \int_M |F(y)|^2 J_{\eta^{-1}}(y)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y) \le \|J_{\eta^{-1}}\|_{L^\infty(M)} \|F\|^2_{L^2(M,\mathbb{R}^d)}.$$

El jacobiano está uniformemente acotado cerca de $\eta_0$ porque la inversión es continua y $H^s(M,TM) \hookrightarrow C^1(M,TM)$. Interpolamos estos dos operadores mediante el Lema 27.2.19 y obtenemos (27.35) para todo $r \in [0,s]$.

Para comprobar continuidad conjunta, sean $F_j \to F$ en $H^r(M,\mathbb{R}^d)$ y $\eta_j \to \eta$ en $\mathrm{Diff}^s(M)$. Elijamos $G \in C^\infty(M,\mathbb{R}^d)$ con $\|F-G\|_{H^r(M,\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$. Para $j$ grande, todos los operadores de composición considerados tienen una misma cota, y

$$\begin{aligned}\|F_j\circ\eta_j - F\circ\eta\|_{H^r(M,\mathbb{R}^d)} \le C\|F_j - F\|_{H^r(M,\mathbb{R}^d)} + 2C\varepsilon \\ + \|G\circ\eta_j - G\circ\eta\|_{H^r(M,\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

El último término tiende a cero incluso en $H^s(M,\mathbb{R}^d)$, por la superposición suave con $G$. Primero hacemos $j\to\infty$ y después $\varepsilon\to 0$.

Para las curvas, la continuidad ya probada da $z \in C(I, H^s(M,\mathbb{R}^d))$. La evaluación y el encaje en $C^1$ permiten diferenciar, en cada punto, la identidad $F(t,x) = z(t,\eta(t,x))$, lo que da (27.36) puntualmente. Su miembro derecho es una curva continua en $H^{s-1}(M,\mathbb{R}^d)$: el primer término lo es por composición, y el segundo por la estimación de producto y derivación del Lema 27.2.19. Denotemos ese miembro por $b(t)$. La integral $z(t_*)+\int_{t_*}^{t} b(\tau)\,d\tau$ existe en $H^{s-1}(M,\mathbb{R}^d)$. La evaluación puntual es continua en este espacio porque $s-1 > m/2$; al evaluarla se obtiene la misma identidad integral que satisface $z(t,x)$. Ambas funciones coinciden y, por el teorema fundamental del cálculo para la integral de Bochner, $z$ es de clase $C^1$ en $H^{s-1}(M,\mathbb{R}^d)$ con derivada $b$. Para secciones se realiza el cálculo en una cubierta finita de marcos. Los coeficientes de conexión añaden las contracciones suaves de la derivada covariante y satisfacen las mismas estimaciones de producto; las fórmulas coinciden en los traslapes por la regla de transformación de una conexión. □

**Teorema 27.5.3.** (Difeomorfismos Sobolev de una variedad completa no compacta) Sea $(M^m,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave, orientada, completa, no compacta y sin frontera, de geometría acotada de orden $k$. Para $1<p<\infty$ y $k>r>\frac{m}{p}+1$, sea

$$\mathcal{D}^{p,r}(M) := \left\{ \eta \in \Omega^{p,r}(M,M) \;\middle|\; \begin{array}{l} \eta \text{ es un difeomorfismo } C^1 \text{ que preserva la orientación,} \\ \inf\limits_{x\in M} \lambda_{\min}(d\eta_x) > 0 \end{array} \right\},$$

donde $\lambda_{\min}(d\eta_x) := \inf\limits_{\substack{v\in T_xM \\ |v|_{\mathbf{g},x}=1}} |d\eta_x v|_{\mathbf{g},\eta(x)}$. Entonces $\mathcal{D}^{p,r}(M)$ es abierto en $\Omega^{p,r}(M,M)$ y cada componente es una variedad de Banach de clase $C^{k+1-r}$, de Hilbert para $p=2$. La componente $\mathcal{D}^{p,r}_0(M)$ de la identidad es un grupo topológico metrizable para la composición y la inversión.

La apertura puede verse en las cartas construidas. Si $\eta$ pertenece al conjunto anterior y $h$ es suficientemente próximo en una carta, la proximidad $C^1$ conserva una cota inferior positiva para $dh$. La cota uniforme de $d\eta^{-1}$ implica además que $F=\eta^{-1}\circ h$ tiene desplazamiento uniforme pequeño respecto de la identidad. Un mapeo con desplazamiento acotado sobre una variedad completa finito–dimensional es propio: la preimagen de un compacto queda en una vecindad métrica cerrada y acotada de ese compacto, que es compacta por Hopf–Rinow. Como $F$ es un difeomorfismo local, es un recubrimiento propio. Si el desplazamiento es menor que el radio de inyectividad, la homotopía $F_t(x)=\exp_x(t\log_x F(x))$ lo une a la identidad. En cada componente, $F_*$ induce por ello un isomorfismo del grupo fundamental, y el número de hojas del recubrimiento es uno. Se obtiene la inyectividad y la sobreyectividad de $F$, y por tanto de $h$. Los argumentos de recubrimientos y continuación son los del capítulo de cálculo en dimensión infinita.

Las estimaciones de composición Sobolev se aplican en cartas uniformes: la cota inferior de $d\eta$ controla el ja-

cobiano del cambio de variables, y las cotas de las derivadas del centro controlan los coeficientes. En una vecindad fijada, los productos e inversos de elementos próximos a la identidad vuelven a pertenecer a las cartas Sobolev de la identidad y dependen continuamente de ellos. Para la continuidad se aproxima primero el factor exterior por un mapeo suave, se aplica la estimación uniforme al error y se usa después la continuidad para ese mapeo fijo. En una componente conexa, todo elemento es producto de un número finito de elementos de cualquier vecindad simétrica de la identidad: la unión de esos productos es un subgrupo abierto y también cerrado en la componente. Las estimaciones locales se trasladan a cada producto finito. Se obtiene así el grupo topológico $\mathcal{D}_0^{p,r}(M)$, con una base numerable de vecindades en la identidad. Los pares $(a,b)$ con $a^{-1}b$ en una de esas vecindades forman la base de su uniformidad izquierda. La continuidad del producto permite elegir vecindades simétricas cuyos cubos estén contenidos en la anterior; la Proposición 27.2.12 proporciona una métrica compatible. Éstas son las propiedades de los Teoremas 6.4 y 6.5 de [49, §6] que utilizamos aquí.

La topología conserva control global en las normas de Sobolev de las cartas. A regularidad fija se obtiene un grupo topológico; las propiedades diferenciables que se recuperan al subir de nivel motivan la torre ILH.

### 27.5.2 Escalas de Hilbert y torres ILH

La pérdida de derivadas anterior conduce de manera natural a trabajar con una escala de espacios, en lugar de fijar una sola regularidad.

**Definición 27.5.4.** (Escala de Hilbert) Sea $s_0 \in \mathbb{Z}$. Una *escala de Hilbert* es una familia $(H^s)_{s\in\mathbb{Z},\ s\ge s_0}$ con inclusiones continuas y densas $H^{s+1} \hookrightarrow H^s$. Su núcleo suave es $H^\infty := \bigcap_{s\in\mathbb{Z},\ s\ge s_0} H^s$, provisto de la topología inicial de las inclusiones $H^\infty \longrightarrow H^s$; equivalentemente, $H^\infty = \varprojlim_{s\in\mathbb{Z},\ s\ge s_0} H^s$.

**Definición 27.5.5.** (Compatibilidad diferenciable con pérdida) Fijemos $\ell \in \mathbb{N}_0$ y $s \in \mathbb{Z}$ con $s \ge s_0$. Una familia de mapeos $F^s \colon \mathcal{U}^{s+\ell} \longrightarrow \mathcal{N}^s$ es una *prolongación entre niveles de clase* $\ell$ de $F^\infty$ si sus restricciones son compatibles con las inclusiones, cada $F^s$ es de clase $C^\ell$ y, para $0 \le j \le \ell$, sus diferenciales, expresados en cartas compatibles, satisfacen en vecindades con datos de control comunes una estimación

$$\|D^j F^s(x)(v_1,\dots,v_j)\|_{H^s} \le C\,\mathcal{P}(\|x\|_{H^{s+\ell}}) \prod_{i=1}^{j} \|v_i\|_{H^{s+\ell}},$$

donde $\mathcal{P}$ es un polinomio independiente de la aproximación suave. La constante puede depender de las cartas y de sus datos de control. En el caso de difeomorfismos se fija, además de las cotas Sobolev, una cota común para $\|(d\eta)^{-1}\|_\infty$; la acotación de las normas $H^s(\Omega,\mathbb{R}^m)$ de las expresiones coordenadas de $\eta$, en los dominios $\Omega$ de las cartas fijadas, por sí sola no impide que la diferencial se aproxime a una matriz singular. Diremos que $F^\infty$ es *suave en la torre ILH* si admite estas prolongaciones para todo $\ell$. Esta definición utiliza el cálculo de Banach en cada nivel y registra explícitamente las derivadas que deben recuperarse al ascender en la escala.

**Definición 27.5.6.** (Torre ILH compatible) Una *torre ILH* modelada sobre $(H^s)$ es una familia de variedades de Hilbert $(\mathcal{M}^s)_{s\in\mathbb{Z},\ s\ge s_0}$ con inclusiones suaves y densas $\mathcal{M}^{s+1} \hookrightarrow \mathcal{M}^s$, cuyas cartas se restringen de manera compatible y cuyo núcleo es $\mathcal{M}^\infty := \bigcap_{s\in\mathbb{Z},\ s\ge s_0} \mathcal{M}^s$. Una torre de grupos ILH posee, además, una operación de grupo en $G^\infty$ y prolongaciones de la multiplicación y la inversión entre niveles. Las regularidades de

esas prolongaciones y la pérdida de derivadas se especifican en la Definición 27.5.5; la mera igualdad $G^\infty = \bigcap_{s\in\mathbb{Z},\, s\geq s_0} G^s$ no basta.

**Proposición 27.5.7.** Si cada $H^{s+1}$ es denso en $H^s$, entonces $H^\infty$, con las normas $\|\cdot\|_{H^s}$, es un espacio de Fréchet. Una sucesión converge en $H^\infty$ si y sólo si converge en cada nivel $H^s$.

*Demostración.* La métrica

$$d(u,v) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\, \frac{\|u-v\|_{H^{s_0+j}}}{1+\|u-v\|_{H^{s_0+j}}}$$

genera la topología proyectiva. Si $(u_n)$ es de Cauchy, converge en cada $H^s$ a un elemento $u_s$. La continuidad de las inclusiones muestra que estos límites son compatibles y representan un único $u \in \bigcap_{s\in\mathbb{Z},\, s\geq s_0} H^s$; entonces $u_n \to u$ en todas las normas. □

**Proposición 27.5.8.** (Núcleo suave de la escala de Sobolev) Si $M$ es una variedad suave compacta con o sin frontera y $\mathbf{E} \longrightarrow M$ es un haz vectorial suave, entonces $\Gamma(\mathbf{E}) = \bigcap_{s\in\mathbb{Z},\, s\geq s_0} H^s(M,\mathbf{E})$ como espacios localmente convexos: la topología proyectiva de las normas Sobolev coincide con la topología usual de convergencia uniforme de todas las derivadas. Si $M$ es no compacta, siempre se tiene $\bigcap_{s\in\mathbb{Z},\, s\geq s_0} H^s(M,\mathbf{E}) \subseteq \Gamma(\mathbf{E})$, pero la inclusión puede ser estricta porque una sección suave no tiene por qué ser integrable en el infinito.

*Demostración.* Supongamos primero que $M$ es compacta. Fijado $s$, elijamos un entero $k \geq \max\{s,0\}$. La inclusión de la escala y la equivalencia entre la norma $H^k$ y la norma covariante de orden $k$ proporcionan constantes $A_{s,k}, B_k > 0$ tales que, para $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{E})$,

$$\|\mathbf{u}\|_{H^s(M,\mathbf{E})} \leq A_{s,k}\|\mathbf{u}\|_{H^k(M,\mathbf{E})} \leq B_k \lambda_{\mathbf{g}}(M)^{1/2} \sum_{\ell=0}^{k} \|\nabla^\ell \mathbf{u}\|_{C^0(M,T^{(0,\ell)}(TM)\otimes\mathbf{E};\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathbf{E}})}.$$

Así, cada inclusión $\Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow H^s(M,\mathbf{E})$ es continua. En el sentido inverso, dado $j$, elegimos $s > j + m/2$. El encaje de Sobolev da $\|\mathbf{u}\|_{C^j(M,\mathbf{E})} \leq C_{s,j}\|\mathbf{u}\|_{H^s(M,\mathbf{E})}$. Por lo tanto, las normas de la escala y las seminormas $C^j$ generan la misma topología. En una base no compacta, incluso una sección paralela no nula puede tener norma $L^2$ infinita, lo que prueba la última afirmación. □

**Definición 27.5.9.** (Terminología *strong ILH*) Reservaremos la expresión *grupo de Lie strong ILH* para la noción de Omori [110, cap. I, §1.1]. Ésta exige una cadena de Hilbert, una carta compatible en la identidad y las condiciones $(N,1)$–$(N,7)$ para las prolongaciones de la multiplicación, las traslaciones, sus diferenciales iterados, la inversión y la conjugación por elementos suaves. Una torre ILH compatible en el sentido de las definiciones anteriores no se considerará *strong ILH* mientras no se hayan verificado esos axiomas.

**Observación 27.5.10.** (Tres formas de control uniforme) Las nociones utilizadas en este capítulo actúan sobre objetos distintos. La regularidad uniforme de Amann es una propiedad coordinada del atlas y de la métrica de la base; la geometría acotada es su formulación intrínseca mediante radio de inyectividad, curvatura y, si hay frontera, datos del collar. Una uniformidad de Eichhorn se impone sobre un espacio de

configuraciones y sirve para definir proximidad global, componentes y completaciones. Una torre ILH, por último, organiza una familia de completaciones de Hilbert y las pérdidas de regularidad entre ellas.
Los Teoremas 13.2.5 y 14.4.8 relacionan las dos primeras nociones, sin y con frontera. Ninguna de ellas determina por sí sola una uniformidad sobre configuraciones, y una uniformidad tampoco proporciona las cartas y estimaciones entre niveles que requiere una torre ILH.

**Proposición 27.5.11.** (Operaciones en el núcleo de difeomorfismos) Sea $M$ una variedad suave compacta con o sin frontera y sea $s_0 \in \mathbb{Z}$ con $s_0 > \frac{m}{2} + 1$. Entonces

$$\mathrm{Diff}^\infty(M) = \bigcap_{s\in\mathbb{Z},\ s\geq s_0} \mathrm{Diff}^s(M)$$

y la composición y la inversión son suaves en el sentido de la Definición 27.5.5. Más precisamente, para cada $\ell \geq 0$,

$$\mathrm{Diff}^{s+\ell}(M) \times \mathrm{Diff}^s(M) \longrightarrow \mathrm{Diff}^s(M), \qquad (\eta, \varphi) \longmapsto \eta \circ \varphi,$$

y

$$\mathrm{Diff}^{s+\ell}(M) \longrightarrow \mathrm{Diff}^s(M), \qquad \eta \longmapsto \eta^{-1},$$

son de clase $C^\ell$.

*Demostración.* La igualdad conjuntista se sigue de la Proposición 27.5.8 aplicada en cartas y de la misma afirmación para la inversa. Las estimaciones se obtienen derivando la composición. La derivación respecto del argumento interior $\varphi$ consume derivadas espaciales del factor exterior $\eta$. En coordenadas, para $j \in \{1,\dots,\ell\}$, su término principal es

$$D^j_\varphi(\eta\circ\varphi)[\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_j] = (D^j\eta\circ\varphi)[\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_j].$$

La dependencia respecto del factor exterior es lineal en esas coordenadas; las derivadas mixtas se obtienen sustituyendo $\eta$ por su variación en esta fórmula. Los cambios de carta añaden superposiciones suaves y productos del mismo orden. El espacio $H^s$, con $s > m/2+1$, es un álgebra, y las estimaciones de composición controlan cada término a partir de las normas $H^{s+\ell}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ de las expresiones coordenadas de $\eta$, sobre los dominios $\Omega$ de las cartas fijadas, y de los datos comunes de la vecindad de $\varphi$. Para la inversión se deriva $\eta\circ\eta^{-1} = \mathrm{id}$; cada derivada de orden $\ell$ es una suma finita de productos de diferenciales espaciales del factor exterior y de factores $(d\eta\circ\eta^{-1})^{-1}$. El primer paso es $D(\eta^{-1})[\mathbf{X}] = -(d\eta\circ\eta^{-1})^{-1}(\mathbf{X}\circ\eta^{-1})$. Al pasar del orden $j$ al $j+1$, Leibniz deriva uno de esos factores; la regla $D(B^{-1})[C] = -B^{-1}CB^{-1}$ trata los factores inversos y la regla de la cadena trata los compuestos. Se necesita a lo más una derivada espacial adicional de $\eta$ en cada paso, hasta el orden $\ell$. La cota inferior de $d\eta$ en una vecindad de un difeomorfismo controla los inversos matriciales. Esto prueba las prolongaciones y sus cotas en cada nivel. □

Esta definición no afirma que cada $G^s$ sea un grupo de Lie de Hilbert. En el ejemplo de los difeomorfismos, $G^s$ es un grupo topológico con traslaciones derechas suaves; la operación suave reaparece en el límite porque toda pérdida finita puede pagarse ascendiendo un número finito de niveles.

Las escalas no eliminan la pérdida de derivadas; la registran. Un argumento a regularidad fija debe cerrar en un mismo $H^s$. Un argumento ILH puede subir temporalmente a $H^{s+j}$ y descender después, siempre que las estimaciones sean uniformes y compatibles. Esta distinción será decisiva al interpretar los operadores diferenciales

geométricos del capítulo siguiente como campos en escalas de espacios funcionales.

**Observación 27.5.12.** (Jerarquía de estructuras) Una variedad de Hilbert a nivel fijo, una torre compatible y un grupo de Lie *strong ILH* son estructuras sucesivamente más fuertes. La identidad $G^\infty = \bigcap_{s\in\mathbb{Z},\ s\geq s_0} G^s$ no proporciona por sí sola cartas compatibles ni estimaciones de pérdida, y estas cartas tampoco implican automáticamente los axiomas de Omori. En lo que sigue, las construcciones a regularidad fija se tratan con cálculo de Banach y las operaciones con pérdida se organizan mediante la Definición 27.5.5.

# 28

# Aplicaciones geométricas en dimensión infinita

Las construcciones del capítulo anterior adquieren su sentido más claro cuando una ecuación puede reconocerse como una condición geométrica sobre un espacio de configuraciones. En este capítulo aplicaremos ese punto de vista a los mapeos armónicos, las ecuaciones de Yang–Mills y la ecuación de Euler de un fluido incompresible. Aunque los problemas son distintos, en todos ellos la incógnita deja de verse como una colección de componentes y pasa a ser un punto de una variedad infinita dimensional.

El procedimiento será el mismo en cada aplicación. Primero se identifica el espacio de configuraciones y su espacio tangente; después se introduce el funcional o la métrica natural y se calcula su variación en una dirección arbitraria. La integración por partes revela entonces la ecuación diferencial correspondiente. Las simetrías también forman parte del problema: la invariancia por reparametrizaciones o por transformaciones de calibre produce direcciones degeneradas y obliga a distinguir la ecuación geométrica de una elección particular de coordenadas o de calibre.

Las métricas $L^2$ utilizadas en estas aplicaciones son, en general, débiles respecto de las topologías de Sobolev elegidas. Por ello, expresiones como «gradiente de la energía» se entenderán primero en sentido formal $L^2$: el operador resultante suele perder derivadas y no define por sí solo un campo vectorial sobre el espacio de configuraciones con esa regularidad. Cuando se necesite una ecuación de evolución o un spray suave, se indicará la escala de regularidad o el mecanismo elíptico que recupera las derivadas necesarias. La interpretación geométrica de estas ecuaciones depende, por tanto, de las estimaciones que controlan la pérdida y la recuperación de derivadas.

**Tres problemas, tres geometrías**

La teoría de mapeos armónicos se desarrolló al extender la energía de Dirichlet a mapeos entre variedades; Yang–Mills convirtió la curvatura de una conexión en un funcional central de la teoría calibre; Arnold y, en un marco analítico preciso, Ebin y Marsden interpretaron las ecuaciones de Euler como geodésicas en un grupo de difeomorfismos. Los tres ejemplos muestran que la geometría del espacio de configuraciones no es decorativa: determina las variables, las simetrías y la regularidad en la que la ecuación queda bien planteada [46].

## 28.1 Mapeos armónicos

El primer ejemplo prolonga a mapeos entre variedades el funcional de Dirichlet del cálculo de variaciones. Sean $(M^m, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con o sin frontera y $(N, \mathbf{h})$ una variedad riemanniana finito–dimensional sin frontera. Para un mapeo suave $f\colon M \longrightarrow N$, la diferencial es una sección de $T^*M \otimes f^*TN$, y su *energía de Dirichlet* es

$$\mathcal{E}(f) := \frac{1}{2}\int_M |df|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{28.1}$$

La conexión de Levi–Civita de $\mathbf{h}$ induce una conexión, todavía denotada por $\nabla$, sobre $f^*TN$ y sobre $T^*M \otimes f^*TN$. La *tensión* de $f$ es

$$\boldsymbol{\tau}(f) := \operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla df) = \sum_{i=1}^{m} \big(\nabla_{\mathbf{e}_i} df(\mathbf{e}_i) - df(\nabla^M_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_i)\big), \tag{28.2}$$

donde $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^m$ es cualquier marco ortonormal local. La expresión es tensorial y, por lo tanto, no depende del marco elegido.

**Proposición 28.1.1.** (Primera variación de la energía) Sean $(M^m, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta, con o sin frontera, y $(N, \mathbf{h})$ una variedad riemanniana sin frontera. Sea $f_t$ una variación suave de $f = f_0$ y sea

$$\mathbf{V} := \partial_t f_t|_{t=0} \in \Gamma(f^*TN).$$

Entonces

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{E}(f_t) = -\int_M \langle \boldsymbol{\tau}(f), \mathbf{V}\rangle_{\mathbf{h}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} \langle df(\boldsymbol{\nu}), \mathbf{V}\rangle_{\mathbf{h}}\, d\sigma_{\mathbf{g}}, \tag{28.3}$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es la normal unitaria exterior cuando $\partial M \neq \varnothing$.

*Demostración.* Consideremos el mapeo

$$F\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow N, \qquad F(t,x) := f_t(x).$$

Como la conexión de Levi–Civita de $N$ no tiene torsión y los campos $\partial_t$ y $\mathbf{e}_i$ conmutan,

$$\nabla_{\partial_t} df_t(\mathbf{e}_i) = \nabla_{\mathbf{e}_i} \partial_t f_t.$$

Evaluando en $t = 0$, obtenemos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{1}{2}|df_t|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}} = \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{V}, df(\mathbf{e}_i)\rangle_{\mathbf{h}}.$$

Definamos la 1-forma

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) := \langle \mathbf{V}, df(\mathbf{X})\rangle_{\mathbf{h}}.$$

La regla de Leibniz y la definición de la tensión dan

$$\operatorname{div}_{\mathbf{g}} \boldsymbol{\alpha}^\sharp = \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{V}, df(\mathbf{e}_i)\rangle_{\mathbf{h}} + \langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\tau}(f)\rangle_{\mathbf{h}}.$$

Por consiguiente,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{E}(f_t) = \int_M \operatorname{div}_{\mathbf{g}} \boldsymbol{\alpha}^{\sharp}\, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M \langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\tau}(f)\rangle_{\mathbf{h}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

El teorema de Stokes transforma el primer término en

$$\int_{\partial M} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\nu})\, d\sigma_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M} \langle \mathbf{V}, df(\boldsymbol{\nu})\rangle_{\mathbf{h}}\, d\sigma_{\mathbf{g}}.$$

□

Si $\partial M = \varnothing$, o si se fija la traza de $f$ y se admiten únicamente variaciones con $\operatorname{Tr}\mathbf{V} = 0$, el término de frontera desaparece. En este problema variacional, el representante formal $L^2$ del diferencial es

$$\operatorname{grad}_{L^2} \mathcal{E}(f) = -\boldsymbol{\tau}(f). \tag{28.4}$$

En consecuencia, para esas variaciones los puntos críticos son exactamente los mapeos que satisfacen $\boldsymbol{\tau}(f) = 0$, llamados *mapeos armónicos*. Las variaciones de soporte compacto en el interior prueban la necesidad de la ecuación, y la primera variación prueba su suficiencia. Si se permite variar libremente la traza, hay que imponer además $df(\boldsymbol{\nu}) = 0$ en la frontera: una vez anulada la tensión, la extensión de cualquier campo suave de la frontera hace arbitraria la traza de $\mathbf{V}$ en el término restante. Por ello, con variaciones libres el término de frontera no puede descartarse ni representarse en general por un gradiente $L^2$ interior. Esta formulación variacional se remonta a [85]; el cálculo anterior fija además la convención de signos que utilizaremos.

**Proposición 28.1.2.** (Linealización de la tensión y segunda variación) Sean $(M^m, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta sin frontera, $(N, \mathbf{h})$ una variedad riemanniana sin frontera y $f : M \longrightarrow N$ un mapeo suave. Definamos

$$\nabla^*\nabla := -\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^2)$$

sobre las secciones de $f^*TN$. La derivada de la tensión se entiende covariantemente: se transporta $\boldsymbol{\tau}(f_t)$ a $f^*TN$ a lo largo de la variación y se deriva en $t = 0$. Denotamos esta derivada por $D\boldsymbol{\tau}(f)[\mathbf{V}]$. Para toda variación con campo variacional $\mathbf{V}$,

$$D\boldsymbol{\tau}(f)[\mathbf{V}] = -\nabla^*\nabla\mathbf{V} + \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Rm}_{\mathbf{h}}\big(\mathbf{V}, df(\mathbf{e}_i)\big) df(\mathbf{e}_i). \tag{28.5}$$

Si $f$ es armónico, la linealización de $-\boldsymbol{\tau}$ es el operador de Jacobi

$$J_f\mathbf{V} = \nabla^*\nabla\mathbf{V} - \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Rm}_{\mathbf{h}}\big(\mathbf{V}, df(\mathbf{e}_i)\big) df(\mathbf{e}_i). \tag{28.6}$$

La Hessiana de la energía está dada por

$$D^2\mathcal{E}(f)[\mathbf{V},\mathbf{W}] = \int_M \left( \langle \nabla\mathbf{V}, \nabla\mathbf{W}\rangle_{\mathbf{g}, f^*\mathbf{h}} - \sum_{i=1}^{m} \big\langle \operatorname{Rm}_{\mathbf{h}}\big(\mathbf{V}, df(\mathbf{e}_i)\big) df(\mathbf{e}_i), \mathbf{W}\big\rangle_{f^*\mathbf{h}} \right) d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{28.7}$$

En particular,

$$D^2\mathcal{E}(f)[\mathbf{V},\mathbf{V}] = \int_M \left( |\nabla \mathbf{V}|^2_{\mathbf{g},f^*\mathbf{h}} - \sum_{i=1}^{m} \big\langle \mathrm{Rm}_{\mathbf{h}}\big(\mathbf{V}, df(\mathbf{e}_i)\big) df(\mathbf{e}_i), \mathbf{V} \big\rangle_{f^*\mathbf{h}} \right) d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{28.8}$$

*Demostración.* Sea $F(t,x) = f_t(x)$ y extendamos localmente el marco $(\mathbf{e}_i)$ sin dependencia respecto de $t$. La ausencia de torsión implica

$$\nabla_{\partial_t} df_t(\mathbf{e}_i) = \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{V}.$$

Al conmutar una vez más las derivadas covariantes,

$$(\nabla_{\partial_t}\nabla_{\mathbf{e}_i} - \nabla_{\mathbf{e}_i}\nabla_{\partial_t}) df_t(\mathbf{e}_i) = \mathrm{Rm}_{\mathbf{h}}\big(dF(\partial_t), dF(\mathbf{e}_i)\big) df_t(\mathbf{e}_i),$$

de modo que, en $t=0$,

$$\nabla_{\partial_t}\nabla_{\mathbf{e}_i} df_t(\mathbf{e}_i) = \nabla_{\mathbf{e}_i}\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{V} + \mathrm{Rm}_{\mathbf{h}}\big(\mathbf{V}, df(\mathbf{e}_i)\big) df(\mathbf{e}_i).$$

En un punto dado elegimos el marco de modo que $\nabla^M_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_i = 0$. Al tomar la traza obtenemos (28.5); como ambos miembros son tensoriales, la identidad es válida en todo punto y para cualquier marco.
Supongamos ahora que $\boldsymbol{\tau}(f) = 0$. Al diferenciar la primera variación en una segunda dirección, el término producido por la variación del segundo campo queda multiplicado por $\boldsymbol{\tau}(f)$ y se anula. Por ello,

$$D^2\mathcal{E}(f)[\mathbf{V},\mathbf{W}] = \int_M \langle J_f \mathbf{V}, \mathbf{W}\rangle_{f^*\mathbf{h}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La integración por partes de $\nabla^*\nabla$ proporciona (28.7). Las simetrías del tensor de curvatura muestran que esta forma es simétrica. Finalmente, el símbolo principal de $J_f$ es

$$\sigma_2(J_f)(x,\xi) = -|\xi|^2_{\mathbf{g}}\,\mathrm{id}_{T_{f(x)}N}, \qquad x \in M, \quad \xi \in T^*_xM \setminus \{0\},$$

con la convención de símbolo del capítulo de operadores diferenciales, que sustituye $\partial_j$ por $\xi_j$ sin introducir el factor $i$. El signo procede del término principal $-g^{ij}\partial_i\partial_j$. Por ello $J_f$ es elíptico; la integración por partes y las simetrías de curvatura prueban separadamente su autoadjunción formal. □

Pasemos a la formulación en espacios de Sobolev. Fijemos un entero

$$s > \frac{m}{2} + 1.$$

Las cartas exponenciales convierten $H^s(M,N)$ en una variedad de Hilbert. Más precisamente, el Teorema 27.3.4 construye el isomorfismo

$$\mathcal{I}_f : H^s(M, f^*TN) \longrightarrow T_f H^s(M,N), \qquad \mathcal{I}_f(\mathbf{V}) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Exp}_f(t\mathbf{V}).$$

En la carta $\mathrm{Exp}_f$, este mapeo y su inverso se representan mediante la identidad del espacio modelo. En particular,

$$T_f H^s(M,N) \cong H^s(M, f^*TN).$$

La tensión contiene dos derivadas de $f$, de modo que su codominio natural tiene dos órdenes menos de regu-

laridad. Para describirlo, consideremos

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{s-2} := \coprod_{\widetilde{f}\in H^s(M,N)} \left(\{\widetilde{f}\}\times H^{s-2}(M,\widetilde{f}^*TN)\right), \qquad \pi_{\boldsymbol{\mathcal{T}}^{s-2}}(\widetilde{f},\mathbf{V}) := \widetilde{f}.$$

Sea $\mathcal{U}_f$ el dominio de una carta exponencial centrada en $f$. Si $\widetilde{f} = \operatorname{Exp}_f(u) \in \mathcal{U}_f$, el transporte paralelo a lo largo de

$$t \longmapsto \exp^N_{f(x)}(tu(x))$$

define una isometría fibrada

$$P_{f,\widetilde{f}}\colon \widetilde{f}^*TN \longrightarrow f^*TN.$$

La correspondiente trivialización es

$$\Theta_f : \pi^{-1}_{\boldsymbol{\mathcal{T}}^{s-2}}(\mathcal{U}_f) \longrightarrow \mathcal{U}_f \times H^{s-2}(M, f^*TN), \qquad \Theta_f(\widetilde{f},\mathbf{V}) := \left(\widetilde{f}, P_{f,\widetilde{f}}\mathbf{V}\right).$$

Estas trivializaciones dotan a $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{s-2}$ de una estructura de haz de Banach suave. El punto analítico es la continuidad de la multiplicación entre los coeficientes de los cambios de trivialización y las secciones. Tras multiplicar por los cortes fijos de una trivialización y extender a $\mathbb{R}^m$, escribimos

$$a\colon \mathbb{R}^m \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n), \qquad W\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

En esas representaciones se tiene

$$\|aW\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \le C_s \|a\|_{H^s(\mathbb{R}^m,\operatorname{End}(\mathbb{R}^n))} \|W\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}, \tag{28.9}$$

donde $a$ es matricial y $W$ representa localmente una sección. La constante depende de $M$, de $s$ y de las trivializaciones, pero no de $a$ ni de $W$.

Para comprobar la estimación se aplica la regla de Leibniz a cada derivada de orden a lo más $s-2$. Si $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^m$, $|\alpha|\le s-2$ y $\beta_i\le\alpha_i$ para $i\in\{1,\dots,m\}$, las regularidades de los dos factores satisfacen

$$(s-|\beta|)+(s-2-|\alpha-\beta|) = 2s-2-|\alpha| \ge s > \frac{m}{2}.$$

Pongamos $a_1 = s-|\beta|$ y $a_2 = s-2-|\alpha-\beta|$. Ambos son no negativos y $a_1+a_2 > m/2$. Podemos elegir $p_1,p_2\in[2,\infty]$ con $1/p_1+1/p_2 = 1/2$ de modo que los encajes $H^{a_i}(\mathbb{R}^m)\hookrightarrow L^{p_i}(\mathbb{R}^m)$ sean continuos. Si alguno de los $a_i$ es cero, se toma $p_i = 2$ y el otro exponente es infinito, permitido porque el otro orden es mayor que $m/2$. Si ambos son positivos, la desigualdad estricta permite elegir los exponentes alejados de cualquier extremo crítico que exigiría $L^\infty$. Hölder estima entonces cada producto en $L^2$. Al sumar sobre los multiíndices y las finitas cartas se obtiene (28.9).

En un traslape de cartas centradas en $f_0$ y $f_1$,

$$\Theta_{f_1}\circ\Theta_{f_0}^{-1}(\widetilde{f},W) = \left(\widetilde{f}, P_{f_1,\widetilde{f}}P^{-1}_{f_0,\widetilde{f}}W\right).$$

El coeficiente

$$\widetilde{f} \longmapsto P_{f_1,\widetilde{f}}P^{-1}_{f_0,\widetilde{f}}$$

depende suavemente de $\widetilde{f}$, con valores en $H^s(M,\operatorname{Hom}(f_0^*TN,f_1^*TN))$, por el Lema 27.3.2. La estimación (28.9)

prueba la suavidad del cambio de trivialización y de su inverso.

Para ver los términos que deben estimarse, en coordenadas de $M$ y $N$ la tensión tiene componentes

$$\tau^{\alpha}(f)=\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left(\partial_i\partial_j f^{\alpha}-\sum_{a=1}^{m}\Gamma_{ij}^{a}\partial_a f^{\alpha}+\sum_{\beta,\gamma=1}^{\dim N}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(f)\partial_i f^{\beta}\partial_j f^{\gamma}\right),\qquad \alpha\in\{1,\dots,\dim N\}.$$

En cada dominio coordenado fijo $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$, el primer término pertenece a $H^{s-2}(\Omega)$; los coeficientes de la base son suaves. Las primeras derivadas de las componentes de $f$ pertenecen a $H^{s-1}(\Omega)$, que es un álgebra, y $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(f)$ depende suavemente de las componentes de $f$ con valores en $H^{s}(\Omega)$. La estimación (28.9) controla la multiplicación en el nivel inferior. Cada diferenciación respecto de $f$ sustituye uno de los factores por su variación o deriva una superposición; no añade una derivada espacial a los vectores de variación. Esto prueba la suavidad con valores en las fibras $H^{s-2}(M,f^{*}TN)$. Para la energía se aplican los mismos productos a $|df|^2$, seguidos de la integral continua en $L^1$. Por ello

$$\mathcal{E}\colon H^{s}(M,N)\longrightarrow\mathbb{R}$$

es suave. Del mismo modo, la tensión define la sección suave

$$\boldsymbol{\tau}\colon H^{s}(M,N)\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{T}}^{s-2},\qquad f\longmapsto (f,\boldsymbol{\tau}(f)),\qquad \pi_{\boldsymbol{\mathcal{T}}^{s-2}}\circ\boldsymbol{\tau}=\mathrm{id}_{H^{s}(M,N)}. \tag{28.10}$$

Para calcular su derivada vertical en $f$ empleamos la trivialización por transporte paralelo centrada precisamente en $f$. Se obtiene así el operador lineal continuo

$$D\boldsymbol{\tau}(f)\colon H^{s}(M,f^{*}TN)\longrightarrow H^{s-2}(M,f^{*}TN),$$

cuya expresión sobre mapeos suaves es (28.5). Si $f$ es armónico, $J_f=-D\boldsymbol{\tau}(f)$ tiene el mismo dominio y el mismo codominio. En otra trivialización, la derivada del cambio de marco produce un término multiplicado por $\boldsymbol{\tau}(f)$; por eso la linealización en un cero es independiente de esa elección. Para mapeos no armónicos, la expresión intrínseca anterior es la derivada covariante, no la derivada ordinaria de todas las representaciones a la vez.

Por lo tanto, $-\boldsymbol{\tau}(f)$ no pertenece en general al espacio tangente $T_f H^{s}(M,N)$, sino a la fibra de menor regularidad $H^{s-2}(M,f^{*}TN)$. Una alternativa consiste en utilizar una métrica fuerte en el espacio de mapeos. El representante del diferencial respecto de una métrica de ese tipo se obtiene regularizando formalmente mediante

$$(1+\nabla^{*}\nabla)^{-s}(-\boldsymbol{\tau}(f)).$$

Su construcción requiere estudiar la dependencia respecto de $f$ de los operadores elípticos involucrados.

La finitud de la energía sólo requiere que $df$ sea cuadrado integrable, mientras que la estructura de variedad y la evaluación puntual requieren una regularidad mayor que $\frac{m}{2}$. Esta diferencia entre el nivel energético y el nivel geométrico aparece también en las cuestiones de compacidad. En dimensión dos, por ejemplo, una sucesión con energía acotada puede concentrar energía y producir burbujas; en una base no compacta puede además perderla en el infinito.

## 28.2 Yang–Mills y reducción calibre

La segunda aplicación tiene una simetría adicional. Una conexión no es un objeto aislado: el grupo calibre transforma conexiones distintas que describen la misma geometría. Esta invariancia hace degenerada a la Hessiana del

funcional de Yang–Mills en las direcciones tangentes a las órbitas calibre y conduce naturalmente a la condición de Coulomb.

Sea $(M^m, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con o sin frontera y sea $\mathbf{P} \longrightarrow M$ un haz principal con grupo estructural compacto $G$. Denotemos por

$$\operatorname{ad}\mathbf{P} := \mathbf{P} \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$$

su haz adjunto y fijemos en $\mathfrak{g}$ un producto interno Ad-invariante. Denotamos por $\mathbf{h}_{\mathrm{ad}}$ la métrica inducida en $\operatorname{ad}\mathbf{P}$.

La curvatura de una conexión $\mathbf{A}$ es una 2-forma con valores en el haz adjunto:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A}} \in \Omega^2(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}) := \Gamma\left(\Lambda^2(T^*M) \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P}\right).$$

El superíndice 2 indica el grado de la forma: para cada $x \in M$, $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}(x)$ recibe dos vectores de $T_xM$, depende alternadamente de ellos y toma valores en $(\operatorname{ad}\mathbf{P})_x$.

El espacio de conexiones es afín, modelado en $\Omega^1(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$. Si $\mathbf{a}$ es una 1-forma con valores en $\operatorname{ad}\mathbf{P}$, la curvatura de $\mathbf{A} + \mathbf{a}$ satisface

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A}+\mathbf{a}} = \mathbf{F}_{\mathbf{A}} + d_{\mathbf{A}}\mathbf{a} + \frac{1}{2}[\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}]. \tag{28.11}$$

El funcional de Yang–Mills es

$$\mathrm{YM}(\mathbf{A}) := \frac{1}{2}\int_M |\mathbf{F}_{\mathbf{A}}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathrm{ad}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{28.12}$$

**Proposición 28.2.1.** (Primera variación de Yang–Mills) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con o sin frontera, sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal con grupo estructural compacto y sea $\mathbf{A}$ una conexión suave. Para $\mathbf{a} \in \Omega^1(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$,

$$D\,\mathrm{YM}(\mathbf{A})[\mathbf{a}] = \int_M \langle d^*_{\mathbf{A}}\mathbf{F}_{\mathbf{A}}, \mathbf{a}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathrm{ad}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_{\partial M} \langle \iota_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{F}_{\mathbf{A}}, \mathbf{a}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathrm{ad}}}\, d\sigma_{\mathbf{g}}. \tag{28.13}$$

Aquí $\boldsymbol{\nu}$ es la normal unitaria exterior y

$$d^*_{\mathbf{A}}\mathbf{F} = -\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\nabla^{\mathbf{A}}\mathbf{F})$$

sobre las 2-formas con valores en $\operatorname{ad}\mathbf{P}$. La contracción se realiza entre el índice de derivación y el primer índice de la forma: para $\mathbf{X} \in T_xM$,

$$(d^*_{\mathbf{A}}\mathbf{F})(\mathbf{X}) = -\sum_{i=1}^{m} (\nabla^{\mathbf{A}}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{F})(\mathbf{e}_i, \mathbf{X}).$$

*Demostración.* Al sustituir $t\mathbf{a}$ en (28.11), la parte lineal en $t$ es $d_{\mathbf{A}}\mathbf{a}$. Por consiguiente,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{YM}(\mathbf{A} + t\mathbf{a}) = \int_M \langle \mathbf{F}_{\mathbf{A}}, d_{\mathbf{A}}\mathbf{a}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathrm{ad}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La forma de Green del Capítulo 9 da el adjunto y el término de frontera. Para explicitar la contracción, definamos

$$\alpha(\mathbf{X}) := \sum_{j=1}^{m} \langle \mathbf{F}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, \mathbf{e}_j), \mathbf{a}(\mathbf{e}_j)\rangle_{\mathbf{h}_{\mathrm{ad}}}.$$

En un marco ortonormal normal en el punto de cálculo, Leibniz y la antisimetría de $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ dan $\operatorname{div}\alpha^\sharp = \langle \mathbf{F}_{\mathbf{A}}, d_{\mathbf{A}}\mathbf{a}\rangle - \langle d^*_{\mathbf{A}}\mathbf{F}_{\mathbf{A}}, \mathbf{a}\rangle$. El uso de la norma de 2-formas significa que se suma una vez sobre $i < j$, y no dos

veces sobre los pares ordenados. Al integrar, $\alpha(\boldsymbol{\nu}) = \langle \iota_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{F}_{\mathbf{A}}, \mathbf{a} \rangle$ produce exactamente (28.13). $\square$

Si $M$ no tiene frontera, o si se fija la conexión tangencial inducida en $\partial M$, las variaciones admitidas anulan el término de borde. En el segundo caso se exige $\iota^* \mathbf{a} = 0$, donde $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ es la inclusión; la componente normal de $\mathbf{a}$ no contribuye porque $(\iota_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{F}_{\mathbf{A}})(\boldsymbol{\nu}) = 0$. El representante formal $L^2$ del diferencial y la ecuación interior de Euler–Lagrange son entonces

$$\operatorname{grad}_{L^2} \mathrm{YM}(\mathbf{A}) = d_{\mathbf{A}}^* \mathbf{F}_{\mathbf{A}}, \qquad d_{\mathbf{A}}^* \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = 0. \tag{28.14}$$

Si la conexión en la frontera también puede variar libremente, la condición de punto crítico incluye además $\iota_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = 0$ sobre $\partial M$. Las variaciones interiores determinan primero la ecuación de Yang–Mills; la arbitrariedad de la traza tangencial determina después esta condición natural de frontera.

Para escribir la Hessiana fijaremos el término algebraico que contiene la curvatura. Definimos punto a punto el endomorfismo

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}} : T^*M \otimes \operatorname{ad} \mathbf{P} \longrightarrow T^*M \otimes \operatorname{ad} \mathbf{P}$$

mediante

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}} \eta, \zeta \rangle_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathrm{ad}}; x} := \langle \mathbf{F}_{\mathbf{A}}, [\eta \wedge \zeta] \rangle_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathrm{ad}}; x}, \qquad \eta, \zeta \in T_x^*M \otimes (\operatorname{ad} \mathbf{P})_x.$$

La representación de Riesz en cada fibra determina un único $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}} \eta$. Sus coeficientes son contracciones algebraicas de $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ con el corchete de $\mathfrak{g}$, de modo que $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}}$ es un endomorfismo suave de orden cero. Para $1 \le i, j \le m$, $[\eta \wedge \zeta](\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = [\eta(\mathbf{e}_i), \zeta(\mathbf{e}_j)] - [\eta(\mathbf{e}_j), \zeta(\mathbf{e}_i)]$. La antisimetría del corchete implica $[\eta \wedge \zeta] = [\zeta \wedge \eta]$; por tanto, el endomorfismo $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}}$ es simétrico en cada fibra, como requiere la Hessiana.

**Proposición 28.2.2.** (Hessiana y operador con calibre fijado) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con o sin frontera, sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal con grupo estructural compacto y sea $\mathbf{A}$ una conexión suave. Para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega^1(M, \operatorname{ad} \mathbf{P})$,

$$D^2 \mathrm{YM}(\mathbf{A})[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \int_M \left( \langle d_{\mathbf{A}} \mathbf{a}, d_{\mathbf{A}} \mathbf{b} \rangle_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathrm{ad}}} + \langle \mathbf{F}_{\mathbf{A}}, [\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}] \rangle_{\mathbf{g}, \mathbf{h}_{\mathrm{ad}}} \right) d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{28.15}$$

Si $M$ es compacta sin frontera y $\mathbf{A}$ es una conexión de Yang–Mills, la Hessiana está representada por

$$H_{\mathbf{A}} \mathbf{a} = d_{\mathbf{A}}^* d_{\mathbf{A}} \mathbf{a} + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}} \mathbf{a}. \tag{28.16}$$

Además,

$$H_{\mathbf{A}}(d_{\mathbf{A}} \xi) = 0 \qquad \text{para toda } \xi \in \Omega^0(M, \operatorname{ad} \mathbf{P}).$$

El operador con calibre fijado

$$L_{\mathbf{A}} \mathbf{a} = (d_{\mathbf{A}}^* d_{\mathbf{A}} + d_{\mathbf{A}} d_{\mathbf{A}}^*) \mathbf{a} + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}} \mathbf{a} \tag{28.17}$$

tiene símbolo principal

$$\sigma_2(L_{\mathbf{A}})(x, \zeta) = -|\zeta|_{\mathbf{g}}^2 \, \mathrm{id}_{T_x^*M \otimes (\operatorname{ad} \mathbf{P})_x}, \qquad \zeta \in T_x^*M \setminus \{0\}. \tag{28.18}$$

*Demostración.* Sustituyamos $\mathbf{A} + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ en (28.11). El coeficiente de $ts$ en

$$\frac{1}{2} \| \mathbf{F}_{\mathbf{A} + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}} \|^2_{L^2(M, \Lambda^2(T^*M) \otimes \operatorname{ad} \mathbf{P})}$$

es

$$\int_M \langle d_{\mathbf{A}}\mathbf{a}, d_{\mathbf{A}}\mathbf{b}\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathrm{ad}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_M \langle \mathbf{F}_{\mathbf{A}}, [\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}]\rangle_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathrm{ad}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

lo que demuestra (28.15). Cuando $M$ es compacta sin frontera, la integración por partes del primer término da (28.16).

Sea $\xi \in \Omega^0(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$. La invariancia calibre implica, para toda conexión $\mathbf{B}$,

$$D\,\mathrm{YM}(\mathbf{B})[d_{\mathbf{B}}\xi] = 0.$$

Derivemos esta identidad en $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, en la dirección $\mathbf{b}$. El término producido por la variación de $d_{\mathbf{B}}\xi$ queda multiplicado por $D\,\mathrm{YM}(\mathbf{A})$ y se anula porque $\mathbf{A}$ es crítica. Así,

$$D^2\,\mathrm{YM}(\mathbf{A})[\mathbf{b}, d_{\mathbf{A}}\xi] = 0$$

para toda $\mathbf{b}$. La simetría de la Hessiana da

$$H_{\mathbf{A}}(d_{\mathbf{A}}\xi) = 0.$$

Finalmente, para $\zeta \in T^*_xM \setminus \{0\}$,

$$\sigma_2(d^*_{\mathbf{A}} d_{\mathbf{A}})(x,\zeta) = -\iota_{\zeta^\sharp}(\zeta \wedge \cdot),$$

mientras que

$$\sigma_2(d_{\mathbf{A}} d^*_{\mathbf{A}})(x,\zeta) = -\zeta \wedge \iota_{\zeta^\sharp}(\cdot).$$

La identidad

$$\iota_{\zeta^\sharp}(\zeta \wedge a) + \zeta \wedge \iota_{\zeta^\sharp} a = |\zeta|^2_{\mathbf{g}} a$$

muestra que la suma de ambos símbolos es $-|\zeta|^2_{\mathbf{g}}\,\mathrm{id}$. Como $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}}$ es de orden cero, se obtiene (28.18). □

En la variedad compacta sin frontera, la condición de Coulomb

$$d^*_{\mathbf{A}}\mathbf{a} = 0$$

selecciona el complemento $L^2$-ortogonal de las direcciones infinitesimales $d_{\mathbf{A}}\xi$. Sobre este subespacio, el término $d_{\mathbf{A}}d^*_{\mathbf{A}}\mathbf{a}$ se anula, de modo que $L_{\mathbf{A}}$ coincide con la Hessiana. En todo el espacio de 1-formas, dicho término completa el símbolo y produce un operador elíptico.

Sobre una base compacta sin frontera, la proyección sobre el complemento de Coulomb se obtiene resolviendo una ecuación elíptica sobre las 0-formas con valores en el haz adjunto.

**Proposición 28.2.3.** (Descomposición de Coulomb en el caso compacto) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta sin frontera, sea $\mathbf{P} \to M$ un haz principal con grupo estructural compacto, sea $\mathbf{A}$ una conexión suave y sea $s \geq 1$. Entonces

$$H^s(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P}) = \ker d^*_{\mathbf{A}} \oplus d_{\mathbf{A}}\left(H^{s+1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}) \cap (\ker d_{\mathbf{A}})^\perp\right).$$

Las dos proyecciones asociadas a esta suma directa son continuas.

*Demostración.* El operador

$$\Delta_{\mathbf{A}}^{(0)} := d_{\mathbf{A}}^{*} d_{\mathbf{A}}$$

es elíptico, no negativo y autoadjunto. Su resolvente lleva continuamente $L^2(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$ en $H^2(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$ por el Corolario 11.4.4. La inclusión

$$H^2(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}) \hookrightarrow L^2(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$$

es compacta por el Teorema 9.2.2. El teorema espectral para operadores con resolvente compacto proporciona una constante $c_{\mathbf{A}} > 0$ tal que

$$\langle \Delta_{\mathbf{A}}^{(0)} \xi, \xi \rangle_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})} \geq c_{\mathbf{A}} \|\xi\|^2_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})}, \qquad \xi \in H^2(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}) \cap (\ker d_{\mathbf{A}})^{\perp_{L^2}}.$$

Precisemos la construcción de la inversa. Sea $(\xi_j)$ una base ortonormal de autosecciones, con $\Delta_{\mathbf{A}}^{(0)} \xi_j = \lambda_j \xi_j$. El núcleo es $\ker d_{\mathbf{A}}$, pues $\langle \Delta_{\mathbf{A}}^{(0)} \xi, \xi \rangle_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})} = \|d_{\mathbf{A}} \xi\|^2_{L^2(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P})}$. Para $\mathbf{f} \in H^{s-1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$ ortogonal a ese núcleo, la serie

$$\xi = \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j^{-1} \langle \mathbf{f}, \xi_j \rangle_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})} \xi_j$$

converge en $L^2(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$, porque $\lambda_j \geq c_{\mathbf{A}} > 0$ en la suma. Además, $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 |\langle \xi, \xi_j \rangle|^2 = \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})}$; la caracterización espectral del dominio da $\Delta_{\mathbf{A}}^{(0)} \xi = \mathbf{f}$ y $\|\xi\|_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})} \leq c_{\mathbf{A}}^{-1} \|\mathbf{f}\|_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})}$. Una parametrix de orden $-2$ y el Corolario 15.6.6 dan, para todo real $s \geq 1$,

$$\|\xi\|_{H^{s+1}(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})} \leq C_s \big( \|\mathbf{f}\|_{H^{s-1}(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})} + \|\xi\|_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})} \big) \leq C_s' \|\mathbf{f}\|_{H^{s-1}(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})}.$$

La misma identidad de energía prueba la inyectividad en el complemento del núcleo. Por tanto,

$$\Delta_{\mathbf{A}}^{(0)} \colon H^{s+1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}) \cap (\ker d_{\mathbf{A}})^{\perp} \longrightarrow H^{s-1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}) \cap (\ker d_{\mathbf{A}})^{\perp}$$

es un isomorfismo topológico. Si

$$\mathbf{a} \in H^{s}(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P}),$$

entonces, para toda $\eta \in \ker d_{\mathbf{A}}$,

$$\langle d_{\mathbf{A}}^{*} \mathbf{a}, \eta \rangle_{L^2(M,\operatorname{ad}\mathbf{P})} = \langle \mathbf{a}, d_{\mathbf{A}} \eta \rangle_{L^2(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P})} = 0.$$

Por lo tanto, $d_{\mathbf{A}}^{*} \mathbf{a}$ pertenece al codominio de la restricción anterior. Existe un único

$$\xi \in H^{s+1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}) \cap (\ker d_{\mathbf{A}})^{\perp}$$

tal que

$$\Delta_{\mathbf{A}}^{(0)} \xi = d_{\mathbf{A}}^{*} \mathbf{a}.$$

Pongamos

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} - d_{\mathbf{A}} \xi.$$

Entonces $d_{\mathbf{A}}^{*} \mathbf{b} = 0$, de modo que $\mathbf{a} = \mathbf{b} + d_{\mathbf{A}} \xi$.

Si $d_{\mathbf{A}}\xi \in \ker d_{\mathbf{A}}^*$, entonces

$$\|d_{\mathbf{A}}\xi\|^2_{L^2(M,T^*M\otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P})} = \langle \Delta_{\mathbf{A}}^{(0)}\xi, \xi\rangle_{L^2(M,\mathrm{ad}\,\mathbf{P})} = 0,$$

y, por consiguiente, $d_{\mathbf{A}}\xi = 0$. La suma es directa. Finalmente, la estimación de la inversa de $\Delta_{\mathbf{A}}^{(0)}$ prueba la continuidad de las dos proyecciones. □

Fijemos ahora

$$s > \frac{m}{2} + 1$$

y una conexión suave $\mathbf{A}_0$. La completación Sobolev del espacio de conexiones es el espacio afín

$$\mathcal{A}^s(\mathbf{P}) := \mathbf{A}_0 + H^s(M, T^*M \otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P}),$$

y

$$T_{\mathbf{A}}\mathcal{A}^s(\mathbf{P}) = H^s(M, T^*M \otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P}).$$

La identidad (28.11) muestra que el mapeo de curvatura pierde una derivada:

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{A}^s(\mathbf{P}) \longrightarrow H^{s-1}\left(M, \Lambda^2(T^*M)\otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P}\right), \qquad \mathcal{F}(\mathbf{A}) := \mathbf{F}_{\mathbf{A}}.$$

El funcional

$$\mathrm{YM}\colon \mathcal{A}^s(\mathbf{P}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{YM}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\int_M |\mathbf{F}_{\mathbf{A}}|^2_{\mathbf{g},\mathbf{h}_{\mathrm{ad}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

también es suave. En efecto, la parte lineal de $\mathcal{F}$ es un operador diferencial de primer orden y la parte restante es cuadrática. Las estimaciones de producto de Sobolev controlan $[\mathbf{a}\wedge\mathbf{a}]$, mientras que la inclusión

$$H^{s-1}\left(M, \Lambda^2(T^*M)\otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P}\right) \hookrightarrow L^2\left(M, \Lambda^2(T^*M)\otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P}\right)$$

permite integrar la norma cuadrada de la curvatura.

El grupo calibre $\mathcal{G}^{s+1}(\mathbf{P}) = H^{s+1}(M, \mathrm{Ad}(\mathbf{P}))$ actúa suavemente sobre $\mathcal{A}^s(\mathbf{P})$. Para cada conexión suave $\mathbf{A}$, los operadores de la Hessiana y de Coulomb inducen mapeos lineales continuos

$$H_{\mathbf{A}}, L_{\mathbf{A}}\colon H^s(M, T^*M\otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P}) \longrightarrow H^{s-2}(M, T^*M\otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P}).$$

El gradiente de Yang–Mills pierde dos derivadas; más precisamente,

$$\mathcal{Y}\colon \mathcal{A}^s(\mathbf{P}) \longrightarrow H^{s-2}(M, T^*M\otimes \mathrm{ad}\,\mathbf{P}), \qquad \mathcal{Y}(\mathbf{A}) := d_{\mathbf{A}}^*\mathbf{F}_{\mathbf{A}}, \tag{28.19}$$

es suave.

**Observación 28.2.4.** (El caso no compacto) En una variedad completa, no compacta, sin frontera y de geometría acotada, la compacidad del resolvente utilizada en la descomposición anterior deja de estar disponible. El Teorema 27.4.9 supone que $G$ es compacto, que la conexión de referencia $\mathbf{A}_0$ tiene geometría acotada y energía de Yang–Mills finita, y que

$$k - 1 \geq r > \frac{m}{2} + 2.$$

También requiere que la conexión $\mathbf{A}$ pertenezca a la componente Sobolev considerada y que

$$\inf \sigma_{\mathrm{e}}\left(\Delta_{\mathbf{A}}^{(0)} \restriction_{(\ker \Delta_{\mathbf{A}}^{(0)})^{\perp}}\right) > 0.$$

Bajo estas hipótesis se obtiene una descomposición de Hodge y una rebanada local para la acción del subgrupo reducido $\mathcal{G}_{\bullet}^{r+1}(\mathbf{A}_0)$.

El rango considerado es el de $d_{\mathbf{A}} : H^{r+1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P}) \to H^{r}(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P})$; el complemento es el núcleo de $d_{\mathbf{A}}^* : H^{r}(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P}) \to H^{r-1}(M, \operatorname{ad}\mathbf{P})$. La ortogonalidad se mide en $L^2(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P})$, mientras que la suma y sus proyecciones son continuas en $H^{r}(M, T^*M \otimes \operatorname{ad}\mathbf{P})$. El subgrupo reducido es el definido mediante las componentes del grupo completo en el capítulo anterior. La brecha espectral garantiza que el rango de $d_{\mathbf{A}}$ sea cerrado y sustituye el argumento de resolvente compacto empleado en la base compacta.

## 28.3 Fluidos incompresibles como geodésicas

La tercera aplicación utiliza como espacio de configuraciones un grupo de difeomorfismos. La condición de incompresibilidad exige que dichos difeomorfismos preserven el volumen, y la energía cinética define sobre este grupo una métrica débil invariante a derecha. La ecuación geodésica correspondiente es la ecuación de Euler.

Sea $(M^m, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta, conexa y orientada, con o sin frontera, y sea

$$s > \frac{m}{2} + 1.$$

Denotemos por $\operatorname{Diff}^s_{\mu}(M)$ la componente de la identidad del grupo $\operatorname{Diff}^s(M)$ de difeomorfismos que preservan $d\lambda_{\mathbf{g}}$ y $\partial M$. Cuando la frontera es vacía, las condiciones que la mencionan se omiten. En esta sección $\Delta_{\mathbf{g}} = \operatorname{div}_{\mathbf{g}} \nabla$ tiene el signo del laplaciano de funciones del capítulo de geometría riemanniana; el laplaciano de Hodge $d\delta + \delta d$ que se usará al final es no negativo. Definimos

$$\mathfrak{X}^s_{\mu}(M) := \left\{ \mathbf{u} \in H^s(M, TM) \,\middle|\, \operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}) \restriction_{\partial M} = 0 \right\}. \tag{28.20}$$

La misma notación $\mathfrak{X}^t_{\mu}(M)$ se empleará para cualquier $t > 1/2$, interpretando la divergencia en distribuciones y la condición normal mediante la traza. En particular, está definida para $t = s - 1$.

**Lema 28.3.1.** (Estimación global para el problema de Neumann) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave compacta y conexa, con o sin frontera. Para $a \geq 0$, sean $f \in H^a(M)$ y, cuando $\partial M \neq \varnothing$, $h \in H^{a+1/2}(\partial M)$, con

$$\int_M f \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M} h \, d\sigma_{\mathbf{g}}.$$

Existe una única solución de media cero $q \in H^{a+2}(M)$ de $\Delta_{\mathbf{g}} q = f$, $\partial_{\boldsymbol{\nu}} q = h$, y

$$\|q\|_{H^{a+2}(M)} \leq C_a \left( \|f\|_{H^a(M)} + \|h\|_{H^{a+1/2}(\partial M)} \right). \tag{28.21}$$

Cuando la frontera es vacía se omiten $h$ y su norma.

*Demostración.* Comencemos con $h = 0$ y $f \in L^2(M)$ de media cero. El Corolario 9.6.4 hace coerciva la forma $\int_M \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}$ en el subespacio de $H^1(M)$ de media cero. El Teorema B.3.14, aplicado al funcional $\varphi \mapsto$

$-\int_M f\varphi\, d\lambda_{\mathbf{g}}$, da una solución débil $v \in H^1(M)$ y

$$\|v\|_{H^1(M)} \le C\|f\|_{L^2(M)}. \tag{28.22}$$

Como $f$ tiene media cero, la identidad débil vale para toda $\varphi \in H^1(M)$, sin restricción sobre su media ni sobre su traza.

Establezcamos la regularidad hasta la frontera. En una carta interior o una carta que endereza la frontera, escribimos $\omega = \sqrt{\det(\mathbf{g})}$ y $A^{ij} = \omega g^{ij}$. En una región coordenada $Q$, que es una bola o una media bola, la identidad débil es

$$\sum_{i,j=1}^{m} \int_Q A^{ij}\partial_j v\, \partial_i\varphi\, dx = -\int_Q \omega f\varphi\, dx. \tag{28.23}$$

Se permiten pruebas que no se anulan en la cara plana de la media bola; sus soportes permanecen alejados de las otras caras. En una carta menor, la matriz $A$ es uniformemente positiva: $A^{ij}\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2$ para algún $\lambda > 0$.

Sea $\chi$ un corte con soporte alejado de esas otras caras y con $\chi = 1$ en una región menor. Para una dirección coordenada $\alpha$, tangencial si hay frontera, ponemos

$$D_h^\alpha z(x) = \frac{z(x + he_\alpha) - z(x)}{h}, \qquad \varphi = -D_{-h}^\alpha(\chi^2 D_h^\alpha v).$$

Para $|h|$ pequeño esta prueba pertenece a $H^1(Q)$ y es admisible. El cambio de variable en las diferencias da $\int z D_{-h}^\alpha w = -\int (D_h^\alpha z) w$, mientras que

$$D_h^\alpha(A\nabla v) = A(\cdot + he_\alpha)\nabla D_h^\alpha v + (D_h^\alpha A)\nabla v.$$

El término principal de (28.23) es, por tanto, $\int_Q \chi^2 A^{ij}(x + he_\alpha)\partial_j D_h^\alpha v\, \partial_i D_h^\alpha v\, dx$. Los términos restantes contienen $\nabla\chi$, $D_h^\alpha A$ o $f$. Usamos

$$\|D_h^\alpha v\|_{L^2(\operatorname{supp}\chi)} \le \|\partial_\alpha v\|_{L^2(Q)}, \qquad \|D_h^\alpha A\|_{L^\infty(\operatorname{supp}\chi)} \le \|\partial_\alpha A\|_{L^\infty(Q)}.$$

Para el término con $f$ se conserva la diferencia sobre la prueba:

$$\left|\int_Q \omega f D_{-h}^\alpha(\chi^2 D_h^\alpha v)\, dx\right| \le C\|f\|_{L^2(Q)}\big(\|\chi\nabla D_h^\alpha v\|_{L^2(Q,\mathbb{R}^m)} + \|v\|_{H^1(Q)}\big).$$

Estas desigualdades se deducen de la fórmula integral de las traslaciones y de Cauchy–Schwarz; para funciones de $H^1(Q)$ se obtienen mediante la aproximación suave del Lema 27.2.19(c), con un corte en una carta mayor. Aplicando Young a cada producto y absorbiendo la mitad del término principal, resulta

$$\|\chi\nabla D_h^\alpha v\|^2_{L^2(Q,\mathbb{R}^m)} \le C\big(\|f\|^2_{L^2(Q)} + \|v\|^2_{H^1(Q)}\big), \tag{28.24}$$

con $C$ independiente de $h$. Una subsucesión débilmente convergente de estas diferencias tiene, al probar contra funciones suaves de soporte compacto, límite $\partial_\alpha\nabla v$. Así se obtienen en $L^2$ todas las derivadas de segundo orden salvo, en una carta de frontera, la derivada normal doble.

La ecuación interior determina la derivada restante:

$$A^{mm}\partial_m^2 v = \omega f - \sum_{\substack{1\le i,j\le m\\ (i,j)\neq(m,m)}} A^{ij}\partial_i\partial_j v - \sum_{i,j=1}^{m}(\partial_i A^{ij})\partial_j v. \tag{28.25}$$

Todos los términos de la derecha están en $L^2$ y $A^{mm}\ge\lambda$. Esta igualdad distribucional prueba que $\partial_m^2 v\in L^2$ en la región menor. En una carta interior se admiten todas las direcciones de diferencias desde el principio. Una cubierta finita y los cortes elegidos dan $v\in H^2(M)$ y $\|v\|_{H^2(M)}\le C(\|f\|_{L^2(M)}+\|v\|_{H^1(M)})$.

Para los órdenes superiores procedemos por inducción. Supongamos que $f\in H^j(M)$ y que ya se ha obtenido $v\in H^{j+1}(M)$, con $j\ge 1$. Si $\beta$ es un multiíndice tangencial de longitud $j$, diferenciamos (28.23) tangencialmente, en distribuciones. El campo $w=\partial^\beta v\in H^1(Q)$ satisface

$$\int_Q A\nabla w\cdot\nabla\varphi\,dx = -\int_Q \partial^\beta(\omega f)\varphi\,dx + \int_Q \mathbf{G}_\beta\cdot\nabla\varphi\,dx,$$

donde

$$\mathbf{G}_\beta = -\sum_{0<\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}(\partial^\gamma A)\nabla\partial^{\beta-\gamma}v.$$

Aquí $\partial^\beta(\omega f)\in L^2(Q)$ y $\mathbf{G}_\beta\in H^1(Q,\mathbb{R}^m)$: cada derivada de $v$ en $\mathbf{G}_\beta$ tiene orden a lo más $j$. La misma prueba por diferencias se aplica a $w$. El término adicional se convierte en $\int_Q D_h^\alpha\mathbf{G}_\beta\cdot\nabla(\chi^2 D_h^\alpha w)\,dx$, y se estima por

$$C\|\mathbf{G}_\beta\|_{H^1(Q,\mathbb{R}^m)}\big(\|\chi\nabla D_h^\alpha w\|_{L^2(Q,\mathbb{R}^m)}+\|w\|_{H^1(Q)}\big).$$

Se obtienen todas las derivadas de orden $j+2$ con a lo más un índice normal. Para las demás se deriva (28.25) $j$ veces. Una derivada con $b\ge 2$ índices normales queda expresada mediante derivadas de ese mismo orden con a lo más $b-1$ índices normales, derivadas de $v$ de orden a lo más $j+1$ y derivadas de $f$ de orden a lo más $j$. La inducción sobre $b$ las determina todas. Al reagrupar las finitas cartas, la inducción sobre $j$ da

$$\|v\|_{H^{j+2}(M)}\le C_j\big(\|f\|_{H^j(M)}+\|v\|_{H^1(M)}\big),\qquad j\in\mathbb{N}_0.$$

Las diferenciaciones tangenciales anteriores se justifican también por diferencias sucesivas; sus límites distribucionales son las derivadas escritas y las cotas sólo usan órdenes ya obtenidos en la inducción.

Para un $f\in L^2(M)$ arbitrario, sea $Tf$ la solución débil de media cero con dato $f-\overline{f}$, donde $\overline{f}=\lambda_{\mathbf{g}}(M)^{-1}\int_M f\,d\lambda_{\mathbf{g}}$. Hemos probado que un mismo operador $T$ es continuo de $H^j(M)$ en $H^{j+2}(M)$ para cada entero $j\ge 0$. La interpolación del Lema 27.2.19, aplicada entre enteros consecutivos, da $T: H^a(M)\to H^{a+2}(M)$ para todo $a\ge 0$. Su identidad débil sigue siendo la que lo define en $L^2(M)$.

Tratemos ahora $h\neq 0$. El Teorema 14.4.18, con $p=2$ y un jet de orden uno, proporciona $b\in H^{a+2}(M)$ con

$$b|_{\partial M}=0,\qquad \partial_{\boldsymbol{\nu}} b = h,\qquad \|b\|_{H^{a+2}(M)}\le C_a\|h\|_{H^{a+1/2}(\partial M)}.$$

El teorema está formulado con la coordenada de collar interior: para obtener la normal exterior se prescribe el jet $(0,-h)$. La identidad de divergencia para $b\in H^2(M)$ se obtiene aproximando en $H^2(M)$ por funciones suaves; el laplaciano converge en $L^2(M)$ y la derivada normal en $H^{1/2}(\partial M)$. Por ello, $\int_M(f-\Delta_{\mathbf{g}}b)\,d\lambda_{\mathbf{g}}=0$. La

función

$$q = b + T(f - \Delta_{\mathbf{g}} b) - \overline{b}$$

tiene la media, la ecuación y la condición normal requeridas. Las cotas de $T$, de $b$ y de $\Delta_{\mathbf{g}} : H^{a+2}(M) \to H^a(M)$ prueban (28.21). Si dos soluciones tienen los mismos datos, su diferencia $z$ satisface $\int_M |\nabla z|_{\mathbf{g}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0$ al usar $z$ como prueba débil. La conexidad y la media cero implican $z = 0$. □

**Proposición 28.3.2.** (Problema de Neumann y proyección de Hodge–Leray) Sea $(M^m, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave compacta, conexa y orientada, con o sin frontera. Para $r \geq 0$ existe un operador lineal continuo

$$Q : H^r(M, TM) \longrightarrow \left\{ q \in H^{r+1}(M) \;\middle|\; \int_M q \, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0 \right\}$$

caracterizado por

$$\int_M \langle \nabla Q\mathbf{X}, \nabla \varphi \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle \mathbf{X}, \nabla \varphi \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \varphi \in H^1(M). \tag{28.26}$$

Pongamos

$$\mathfrak{X}^0_\mu(M) := \left\{ \mathbf{Y} \in L^2(M, TM) \;\middle|\; \int_M \langle \mathbf{Y}, \nabla \varphi \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(M) \right\}.$$

El operador $\mathbb{P}\mathbf{X} := \mathbf{X} - \nabla Q\mathbf{X}$ es la proyección ortogonal de $L^2(M, TM)$ sobre $\mathfrak{X}^0_\mu(M)$ y

$$\|Q\mathbf{X}\|_{H^{r+1}(M)} + \|\mathbb{P}\mathbf{X}\|_{H^r(M,TM)} \leq C_r \|\mathbf{X}\|_{H^r(M,TM)}. \tag{28.27}$$

Si $r > 1/2$, su rango en $H^r(M, TM)$ es $\mathfrak{X}^r_\mu(M)$, con la definición de divergencia y traza anterior. En particular, para $s > m/2 + 1$ y $\mathbf{X} \in H^{s-1}(M, TM)$, $q = Q\mathbf{X} \in H^s(M)$ resuelve

$$\Delta_{\mathbf{g}} q = \operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X}, \qquad \partial_{\boldsymbol{\nu}} q = \langle \operatorname{Tr} \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} \rangle_{\mathbf{g}}. \tag{28.28}$$

La primera igualdad es distribucional y la segunda es una igualdad de trazas. Se tiene la suma directa, ortogonal en $L^2(M, TM)$,

$$H^{s-1}(M, TM) = \mathfrak{X}^{s-1}_\mu(M) \oplus \nabla\big(H^s(M)/\mathbb{R}\big).$$

Además, $Q$ y $\mathbb{P}$ llevan datos suaves en datos suaves hasta la frontera.

*Demostración.* Para $\mathbf{X} \in L^2(M, TM)$, Poincaré y Lax–Milgram, usados como en el lema anterior, se aplican al funcional $\varphi \mapsto \int_M \langle \mathbf{X}, \nabla \varphi \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}$. Su norma no excede $\|\mathbf{X}\|_{L^2(M,TM)}$. Se obtiene un único $Q\mathbf{X}$ de media cero con $\|Q\mathbf{X}\|_{H^1(M)} \leq C\|\mathbf{X}\|_{L^2(M,TM)}$. La identidad débil prueba directamente que $\mathbb{P}\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^0_\mu(M)$ y que $\mathbf{X} - \mathbb{P}\mathbf{X}$ es ortogonal a este subespacio. Si $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^0_\mu(M)$, la unicidad da $Q\mathbf{X} = 0$; por tanto, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ y $\mathbb{P}$ es la proyección ortogonal afirmada.

Si $\mathbf{X} \in H^k(M, TM)$, con $k \geq 1$ entero, los datos $f = \operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{X}$ y $h = \langle \operatorname{Tr} \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} \rangle_{\mathbf{g}}$ pertenecen respectivamente a $H^{k-1}(M)$ y $H^{k-1/2}(\partial M)$. Para justificar su compatibilidad tomamos $\mathbf{X}_j \in \Gamma(TM)$ con $\mathbf{X}_j \to \mathbf{X}$ en $H^1(M, TM)$, por el Lema 27.2.19. El Teorema 2.14.21 vale para cada $\mathbf{X}_j$. La derivación y la traza son continuas de $H^1(M, TM)$ en $L^2(M)$ y $H^{1/2}(\partial M, TM|_{\partial M})$, respectivamente. Además,

$$\left| \int_M \operatorname{div}_{\mathbf{g}}(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}) \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right| \leq \lambda_{\mathbf{g}}(M)^{1/2} \| \operatorname{div}_{\mathbf{g}}(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}) \|_{L^2(M)},$$

y la integral de frontera satisface la cota correspondiente por Cauchy–Schwarz sobre $\partial M$. Ambos errores tienden a cero. Esto prueba la fórmula de divergencia para todo campo de $H^1(M,TM)$ y, en particular, la compatibilidad de los datos indicados. El lema anterior con $a = k-1$ proporciona $q \in H^{k+1}(M)$ con $\|q\|_{H^{k+1}(M)} \le C_k \|\mathbf{X}\|_{H^k(M,TM)}$. Integrando por partes se obtiene (28.26), de modo que $q = Q\mathbf{X}$ por unicidad. Interpolamos este mismo operador entre $k = 0, 1, 2, \ldots$; el Lema 27.2.19 da las cotas de $Q$ para todo $r \ge 0$. La continuidad del gradiente prueba las de $\mathbb{P}$.

Precisemos la condición normal. Si $r > 1/2$ y $\mathbf{Y} \in H^r(M,TM)$ tiene divergencia distribucional cero, entonces

$$\int_M \langle \mathbf{Y}, \nabla\varphi\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M} \varphi \langle \operatorname{Tr}\mathbf{Y}, \boldsymbol{\nu}\rangle_{\mathbf{g}}\, d\sigma_{\mathbf{g}}, \qquad \varphi \in C^\infty(M). \tag{28.29}$$

Para $r \ge 1$ es la fórmula de Green obtenida por aproximación suave. Para $1/2 < r < 1$, la construcción de la traza en el semiespacio implica que las restricciones a las superficies de collar a distancia $t$ convergen en $L^2(\partial M, TM|_{\partial M})$ a la traza cuando $t \downarrow 0$, identificando las fibras mediante el collar. Esta convergencia se obtiene en la prueba euclidiana por Fourier en las variables tangenciales y Cauchy–Schwarz en la normal; la integral $\int_{\mathbb{R}} (1+\xi_m^2)^{-r}\, d\xi_m$ es finita. Tomemos un corte $\zeta_\varepsilon$ que vale cero cerca de la frontera, uno fuera del collar de ancho $\varepsilon$ y que en el collar vale $\zeta(t/\varepsilon)$, con $\zeta(0) = 0$, $\zeta(1) = 1$. La divergencia cero aplicada a $\varphi\zeta_\varepsilon$ da

$$0 = \int_M \zeta_\varepsilon \langle \mathbf{Y}, \nabla\varphi\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} + \int_M \varphi \langle \mathbf{Y}, \nabla\zeta_\varepsilon\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

El primer término converge a la integral interior de (28.29). La convergencia de las restricciones del collar y $\int_0^1 \zeta'(t)\, dt = 1$ hacen converger el segundo al negativo de la integral de frontera, pues la coordenada del collar crece hacia el interior. Esto prueba la identidad restante.

Si $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}^0_\mu(M) \cap H^r(M,TM)$, las pruebas de soporte interior dan $\operatorname{div}_{\mathbf{g}}\mathbf{Y} = 0$. La identidad anterior y la extensión de toda función suave de la frontera dan $\langle \operatorname{Tr}\mathbf{Y}, \boldsymbol{\nu}\rangle_{\mathbf{g}} = 0$. Recíprocamente, ambas condiciones anulan el miembro derecho de (28.29); la densidad de $C^\infty(M)$ en $H^1(M)$ extiende la identidad a todas las pruebas de ese espacio. Así se identifica el rango. Aplicado a $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \nabla Q\mathbf{X}$, este argumento da también (28.28). Finalmente, si $\mathbf{X}$ es suave, las cotas en cada orden entero dan $Q\mathbf{X} \in H^{k+1}(M)$ para todo $k$. Los encajes de Sobolev en cada orden prueban que $Q\mathbf{X}$ y $\mathbb{P}\mathbf{X}$ son suaves hasta la frontera. □

**Corolario 28.3.3.** (Aproximación que conserva la incompresibilidad) Para $r \ge 0$, los campos suaves de divergencia cero y tangentes a $\partial M$ son densos en $\mathfrak{X}^0_\mu(M) \cap H^r(M,TM)$. En particular, son densos en $\mathfrak{X}^{s-1}_\mu(M)$ para $s > m/2 + 1$ y en $\mathfrak{X}^0_\mu(M)$ con la norma de $L^2(M,TM)$.

*Demostración.* Sea $\mathbf{Z}$ un elemento del espacio indicado. El Lema 27.2.19 proporciona $\mathbf{V}_j \in \Gamma(TM)$ con $\|\mathbf{V}_j - \mathbf{Z}\|_{H^r(M,TM)} \to 0$. Definimos, con el operador de media cero de la proposición anterior,

$$q_j = Q\mathbf{V}_j, \qquad \mathbf{Z}_j = \mathbf{V}_j - \nabla q_j = \mathbb{P}\mathbf{V}_j.$$

Cada $q_j$ y cada $\mathbf{Z}_j$ son suaves hasta la frontera. Las ecuaciones de Neumann dan $\operatorname{div}_{\mathbf{g}}\mathbf{Z}_j = 0$ y $\langle \mathbf{Z}_j, \boldsymbol{\nu}\rangle_{\mathbf{g}} = 0$. Como $\mathbb{P}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$, la estimación explícita es

$$\|\mathbf{Z}_j - \mathbf{Z}\|_{H^r(M,TM)} = \|\mathbb{P}(\mathbf{V}_j - \mathbf{Z})\|_{H^r(M,TM)} \le C_r \|\mathbf{V}_j - \mathbf{Z}\|_{H^r(M,TM)} \longrightarrow 0.$$

□

**Teorema 28.3.4.** (Ebin–Marsden: grupo que preserva el volumen) Sea $(M^m, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta, conexa y orientada, con o sin frontera. Si

$$s > \frac{m}{2} + 1,$$

entonces $\mathrm{Diff}^s_\mu(M)$ es una subvariedad de Hilbert *split* y cerrada de $\mathrm{Diff}^s(M)$. Para cada $\eta \in \mathrm{Diff}^s_\mu(M)$, el mapeo

$$\mathcal{I}_\eta : \mathfrak{X}^s_\mu(M) \longrightarrow T_\eta \,\mathrm{Diff}^s_\mu(M), \qquad \mathcal{I}_\eta(\mathbf{u}) := \mathbf{u} \circ \eta,$$

es un isomorfismo lineal topológico, con inversa

$$\mathbf{U} \longmapsto \mathbf{U} \circ \eta^{-1}.$$

En particular,

$$T_{\mathrm{id}} \,\mathrm{Diff}^s_\mu(M) = \mathfrak{X}^s_\mu(M).$$

La estructura de subvariedad se demuestra en los Teoremas 4.2 y 8.1 de [46, pp. 114 y 123]. La identificación del espacio tangente se sigue de la traslación a derecha y del teorema de composición de Sobolev para un difeomorfismo fijo.

La métrica cinética débil, invariante a derecha, es

$$\mathbf{G}_\eta(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_M \left\langle \mathbf{U} \circ \eta^{-1}, \mathbf{V} \circ \eta^{-1} \right\rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{28.30}$$

Como $\eta$ preserva el volumen, un cambio de variables transforma esta fórmula en

$$\mathbf{G}_\eta(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_M \mathbf{g}_{\eta(x)}(\mathbf{U}(x), \mathbf{V}(x)) \, d\lambda_{\mathbf{g}}(x).$$

La dependencia suave de esta métrica se comprueba en esta última expresión mediante superposición y productos, sin atribuir suavidad a la inversión en $\mathrm{Diff}^s(M)$. Para una curva $\eta(t)$, definimos su velocidad euleriana por

$$\mathbf{u}(t) := \dot\eta(t) \circ \eta(t)^{-1}.$$

La acción cinética es

$$\mathcal{A}(\eta) := \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_M |\mathbf{u}(t,x)|^2_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} \, dt. \tag{28.31}$$

**Proposición 28.3.5.** (Euler como ecuación geodésica) Sea $(M^m, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana suave compacta, conexa y orientada, con o sin frontera, y sea $s > m/2 + 1$. Una curva $\eta \in C^2([t_0, t_1], \mathrm{Diff}^s_\mu(M))$, con extremos fijos, es crítica para (28.31) si y sólo si su velocidad euleriana satisface

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = -\nabla p, \qquad \mathrm{div}_{\mathbf{g}} \, \mathbf{u} = 0, \qquad \langle \mathrm{Tr}\, \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} \rangle_{\mathbf{g}} = 0 \quad \text{sobre } \partial M. \tag{28.32}$$

Aquí

$$\mathbf{u} \in C([t_0, t_1], H^s(M, TM)) \cap C^1([t_0, t_1], H^{s-1}(M, TM)), \qquad p \in C([t_0, t_1], H^s(M)),$$

y la primera ecuación se interpreta en $H^{s-1}(M, TM)$. La presión queda determinada en cada tiempo salvo

una constante espacial; la normalización $\int_M p(t,x)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(x) = 0$ la hace única. La condición de frontera se omite cuando $\partial M = \varnothing$.

*Demostración.* Escribamos $I = [t_0, t_1]$. Utilizaremos las variaciones de clase $C^2$ en $(\varepsilon, t)$ con valores en $\mathrm{Diff}^s_\mu(M)$ y con extremos fijos. La composición continua del Lema 27.5.2 y la inversión continua del Teorema 27.5.1 dan $\mathbf{u} = \dot\eta \circ \eta^{-1} \in C(I, H^s(M,TM))$. El encaje $H^s(M,TM) \hookrightarrow C^1(M,TM)$ permite diferenciar puntualmente la identidad $\dot\eta = \mathbf{u}\circ\eta$. Se obtiene

$$\partial_t \mathbf{u} = (\nabla_t \dot\eta)\circ\eta^{-1} - \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}. \tag{28.33}$$

La aceleración covariante $\nabla_t\dot\eta$ es continua en el espacio de secciones $H^s(M,\eta(t)^*TM)$ a lo largo de $\eta$: en coordenadas tiene componentes $\ddot\eta^a + \sum_{b,c=1}^{m} \Gamma^a_{bc}(\eta)\dot\eta^b\dot\eta^c$. La superposición y el producto del Lema 27.2.19 controlan cada término. Por (27.9), el miembro derecho de (28.33) es continuo en $H^{s-1}(M,TM)$. El último inciso del Lema 27.5.2, o su prueba mediante la integral de Bochner de este miembro derecho, da $\mathbf{u} \in C^1(I, H^{s-1}(M,TM))$. Así, esta regularidad se deduce de la curva dada, antes de imponer la ecuación de Euler.

Sea $\eta_\varepsilon$ una variación admisible y pongamos

$$\mathbf{W}(t) = \partial_\varepsilon \eta_\varepsilon(t)\big|_0, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{W}\circ\eta^{-1}.$$

La identificación tangente del Teorema 28.3.4 implica $\mathbf{w}(t) \in \mathfrak{X}^s_\mu(M)$ y $\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}(t_1) = 0$. El mismo argumento aplicado a $\mathbf{W}$ muestra que

$$\mathbf{w} \in C(I, H^s(M,TM)) \cap C^1(I, H^{s-1}(M,TM)), \quad \partial_t \mathbf{w} = (\nabla_t \mathbf{W})\circ\eta^{-1} - \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}.$$

Recíprocamente, sea $\mathbf{w}$ suave en $I\times M$, de divergencia cero, tangente a la frontera y nulo en los extremos temporales. Para cada $t$ tomemos el flujo $\varphi^t_\varepsilon$ del campo espacial $\mathbf{w}(t,\cdot)$. El Teorema 1.8.15 y la dependencia de las EDO respecto de parámetros dan un intervalo común en $\varepsilon$ y dependencia suave en $(\varepsilon,t,x)$; la elección común es posible porque $I\times M$ es compacto. La tangencia hace invariante la frontera por unicidad del flujo, y la fórmula de Lie para la forma de volumen da

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\varphi^t_\varepsilon)^* d\lambda_{\mathbf{g}} = (\varphi^t_\varepsilon)^*\big((\mathrm{div}_{\mathbf{g}}\,\mathbf{w}(t))\,d\lambda_{\mathbf{g}}\big) = 0.$$

Además, $\mathbf{w}(t_i) = 0$ implica $\varphi^{t_i}_\varepsilon = \mathrm{id}$ para $i = 0,1$. Por la superposición suave,

$$\eta_\varepsilon(t) = \varphi^t_\varepsilon \circ \eta(t)$$

es una variación admisible de clase $C^2$ con campo euleriano $\mathbf{w}$. El camino en $\varepsilon$ que parte de $\eta(t)$ asegura que permanece en la componente de la identidad.

Derivemos ahora la velocidad de una variación general. La versión con parámetro $\varepsilon$ del cálculo anterior prueba la existencia de $\delta\mathbf{u} = \partial_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon|_0$ en $C(I, H^{s-1}(M,TM))$. Diferenciamos $\dot\eta_\varepsilon = \mathbf{u}_\varepsilon\circ\eta_\varepsilon$ y $\mathbf{W} = \mathbf{w}\circ\eta$ covariantemente. Resulta

$$\nabla_\varepsilon \dot\eta_\varepsilon\big|_0 = (\delta\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u})\circ\eta, \qquad \nabla_t \mathbf{W} = (\partial_t \mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})\circ\eta.$$

La conexión de Levi–Civita no tiene torsión y las derivadas mixtas de $\eta_\varepsilon$ conmutan. Ambos miembros izquierdos son iguales, y obtenemos la identidad de Lin

$$\delta\mathbf{u} = \partial_t \mathbf{w} + [\mathbf{u},\mathbf{w}] = \partial_t \mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u} \quad \text{en } C(I, H^{s-1}(M,TM)). \tag{28.34}$$

Todas las contracciones pertenecen a este espacio por (27.9).
El funcional $\mathbf{v} \mapsto \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(M,TM)}$ es diferenciable, y $H^{s-1}(M,TM) \hookrightarrow L^2(M,TM)$. La diferenciación anterior, uniforme en el intervalo compacto $I$, permite derivar bajo la integral temporal:

$$\delta\mathcal{A} = \int_I \int_M \langle \mathbf{u}, \delta\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\, dt.$$

Como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son curvas de clase $C^1$ en $L^2(M,TM)$, la regla del producto en ese espacio da

$$\int_I \int_M \langle \mathbf{u}, \partial_t \mathbf{w}\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\, dt = -\int_I \int_M \langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\, dt.$$

El término de extremos es cero porque $\mathbf{w}(t_i) = 0$. Para las integraciones espaciales usamos directamente $\mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t) \in C^1(M,TM)$, la compatibilidad métrica y la fórmula de divergencia en $H^1(M,TM)$ justificada en la Proposición 28.3.2. Los campos a los que se aplica pertenecen incluso a $H^s(M,TM)$ por la estimación de producto. En efecto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\mathbf{g}}(\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{g}}\mathbf{u}) &= \langle \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle_{\mathbf{g}} + \langle \mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{g}}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{g}}(\tfrac{1}{2}|\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g}}\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g}}. \end{aligned}$$

Hemos usado $\operatorname{div}_{\mathbf{g}}\mathbf{u} = \operatorname{div}_{\mathbf{g}}\mathbf{w} = 0$. Los flujos normales de ambos campos escritos son cero. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_M \langle \mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} &= -\int_M \langle \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \\ -\int_M \langle \mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} &= -\tfrac{1}{2}\int_M \mathbf{w}(|\mathbf{u}|^2_{\mathbf{g}})\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\delta\mathcal{A} = -\int_I \int_M \langle \mathbf{F}(t), \mathbf{w}(t)\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\, dt, \qquad \mathbf{F} = \partial_t\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \in C(I, H^{s-1}(M,TM)). \tag{28.35}$$

Supongamos que $\eta$ es crítica. Para un campo suave $\mathbf{Z} \in \mathfrak{X}^s_\mu(M)$ y $\chi \in C^\infty_c((t_0,t_1))$, el campo $\mathbf{w}(t,x) = \chi(t)\mathbf{Z}(x)$ procede de la variación construida arriba. Por (28.35),

$$\int_{t_0}^{t_1} \chi(t)\langle \mathbf{F}(t), \mathbf{Z}\rangle_{L^2(M,TM)}\, dt = 0.$$

La función escalar emparejada es continua. El lema fundamental del cálculo de variaciones la anula en $(t_0,t_1)$ y la continuidad la anula también en los extremos. Fijemos $t \in I$. Por el Corolario 28.3.3, existen campos suaves $\mathbf{Z}_j \in \mathfrak{X}^s_\mu(M)$ con

$$\mathbf{Z}_j \longrightarrow \mathbb{P}\mathbf{F}(t) \quad \text{en } H^{s-1}(M,TM).$$

Por Cauchy–Schwarz y la ortogonalidad de $\mathbb{P}$,

$$0 = \lim_{j\to\infty} \langle \mathbf{F}(t), \mathbf{Z}_j\rangle_{L^2(M,TM)} = \langle \mathbf{F}(t), \mathbb{P}\mathbf{F}(t)\rangle_{L^2(M,TM)} = \|\mathbb{P}\mathbf{F}(t)\|^2_{L^2(M,TM)}.$$

Así, $\mathbf{F}(t) = \nabla Q\mathbf{F}(t)$. Definimos $p(t) = -Q\mathbf{F}(t)$. La Proposición 28.3.2 da la ecuación, la media cero y, para $t,\tau \in I$,

$$\|p(t) - p(\tau)\|_{H^s(M)} \le C_{s-1}\|\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(\tau)\|_{H^{s-1}(M,TM)}.$$

Esto prueba la continuidad temporal de la presión. Si dos presiones producen la misma ecuación, su diferencia tiene gradiente cero; por conexidad es constante, y la media cero la anula.
Recíprocamente, supongamos (28.32). Para toda variación admisible, $\mathbf{w}(t) \in \mathfrak{X}^0_\mu(M)$ y $p(t) \in H^s(M) \subseteq H^1(M)$. La definición de $\mathfrak{X}^0_\mu(M)$ implica $\int_M \langle \nabla p(t), \mathbf{w}(t)\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 0$. Sustituir $\mathbf{F} = -\nabla p$ en (28.35) da $\delta\mathcal{A} = 0$. □

El subespacio $\mathfrak{X}^0_\mu(M)$ es cerrado en $L^2(M,TM)$, pues es la intersección de los núcleos de los funcionales continuos $\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, \nabla\varphi\rangle_{L^2(M,TM)}$, con $\varphi \in H^1(M)$. Como $\mathbf{u}(t)$ pertenece a ese subespacio, también pertenecen a él sus cocientes incrementales. Su convergencia a $\partial_t\mathbf{u}(t)$ en $H^{s-1}(M,TM)$, y por tanto en $L^2(M,TM)$, da $\partial_t\mathbf{u}(t) \in \mathfrak{X}^{s-1}_\mu(M)$. Así, $\mathbb{P}\partial_t\mathbf{u} = \partial_t\mathbf{u}$ y $Q\partial_t\mathbf{u} = 0$. Aplicar $\mathbb{P}$ a (28.32) elimina el gradiente de presión y da la ecuación reducida

$$\partial_t\mathbf{u} = -\mathbb{P}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}). \tag{28.36}$$

Para $\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$, sea $q$ la función de la Proposición 28.3.2. La identidad

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \mathbb{P}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) + \nabla q,$$

sustituida en (28.36), muestra que $p = -q$ y que

$$\Delta_{\mathbf{g}} p = -\operatorname{div}_{\mathbf{g}}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}), \qquad \partial_\nu p = -\langle \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \nu\rangle_{\mathbf{g}}.$$

En coordenadas eulerianas, para la métrica fija $\mathbf{g}$ y las condiciones de borde incorporadas en $\mathbb{P}_{\mathbf{g}}$, el lado derecho define el mapeo cuadrático suave

$$\mathscr{E}_{\mathbf{g}} \colon \mathfrak{X}^s_\mu(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^{s-1}_\mu(M), \qquad \mathscr{E}_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}) := -\mathbb{P}_{\mathbf{g}}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}).$$

Como

$$s - 1 > \frac{m}{2},$$

la estimación de producto de Sobolev da

$$\|\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}\|_{H^{s-1}(M,TM)} \le C_{M,\mathbf{g},s}\|\mathbf{u}\|^2_{H^s(M,TM)}.$$

La Proposición 28.3.2 prueba la continuidad de $\mathbb{P}_{\mathbf{g}}$ en $H^{s-1}(M,TM)$. Por ello, la formulación euleriana pierde una derivada. Su linealización a lo largo de una solución es

$$\partial_t\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = -\nabla q, \qquad \operatorname{div}_{\mathbf{g}}\mathbf{v} = 0, \qquad (\mathbf{v}\cdot\nu)\restriction_{\partial M} = 0. \tag{28.37}$$

**Proposición 28.3.6.** (Regularidad de la presión) En las hipótesis de la Proposición 28.3.5, para cada $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^s_\mu(M)$ la función de media cero

$$p(\mathbf{u}) = -Q(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u})$$

pertenece a $H^{s+1}(M)$. Si $\mathrm{II}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{V},\mathbf{W}) = \langle \nabla_{\mathbf{V}}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{g}}$ para vectores tangentes a la frontera, entonces

$$\Delta_{\mathbf{g}} p(\mathbf{u}) = -\sum_{i,j=1}^{m} (\nabla_i u^j)(\nabla_j u^i) - \mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}(\mathbf{u},\mathbf{u}), \tag{28.38}$$

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} p(\mathbf{u}) = \mathrm{II}_{\mathrm{ext}}(\mathrm{Tr}\,\mathbf{u}, \mathrm{Tr}\,\mathbf{u}). \tag{28.39}$$

El dato interior pertenece a $H^{s-1}(M)$ y el de frontera a $H^{s-1/2}(\partial M)$. Existen constantes $C_s, C_s'$ tales que

$$\|p(\mathbf{u})\|_{H^{s+1}(M)} + \|\nabla p(\mathbf{u})\|_{H^s(M,TM)} \le C_s \|\mathbf{u}\|^2_{H^s(M,TM)}, \tag{28.40}$$

$$\|p(\mathbf{u}) - p(\mathbf{v})\|_{H^{s+1}(M)} \le C_s'\big(\|\mathbf{u}\|_{H^s(M,TM)} + \|\mathbf{v}\|_{H^s(M,TM)}\big)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{H^s(M,TM)}. \tag{28.41}$$

En particular, la presión normalizada de una solución de Euler pertenece a $C(I, H^{s+1}(M))$.

*Demostración.* Comencemos con un campo suave de divergencia cero y tangente a la frontera. En un marco ortonormal normal en el punto de cálculo, escribimos $\nabla_i u^j = \langle \nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{u}, \mathbf{e}_j\rangle_{\mathbf{g}}$. Leibniz da

$$\mathrm{div}_{\mathbf{g}}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^{m} (\nabla_i u^j)(\nabla_j u^i) + \sum_{i,j=1}^{m} u^j \nabla_i \nabla_j u^i.$$

La definición de la curvatura como conmutador implica

$$\sum_{i=1}^{m} \nabla_i \nabla_j u^i = \nabla_j \left( \sum_{i=1}^{m} \nabla_i u^i \right) + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Ric}_{kj}\, u^k.$$

Al multiplicar por $u^j$ y sumar, la primera parte se anula porque $\mathrm{div}_{\mathbf{g}}\,\mathbf{u} = 0$. Se obtiene

$$\mathrm{div}_{\mathbf{g}}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^{m} (\nabla_i u^j)(\nabla_j u^i) + \mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}(\mathbf{u},\mathbf{u}).$$

En la frontera, derivamos tangencialmente $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}\rangle_{\mathbf{g}} = 0$ en la dirección $\mathbf{u}$ y usamos la compatibilidad métrica:

$$0 = \langle \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}\rangle_{\mathbf{g}} + \langle \mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\nu}\rangle_{\mathbf{g}}.$$

Así se obtienen ambos datos de presión en el caso suave.
Para un campo $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^s_\mu(M)$, el Corolario 28.3.3 da campos suaves $\mathbf{u}_j \in \mathfrak{X}^s_\mu(M)$ que convergen en $H^s(M,TM)$. Sean $f(\mathbf{u})$ y $h(\mathbf{u})$ los miembros derechos de (28.38) y (28.39). La contracción que define $f$ es independiente del marco, como muestra la identidad suave. El Lema 27.2.19, con $s-1 > m/2$, da

$$\|f(\mathbf{u})\|_{H^{s-1}(M)} \le C_s \|\mathbf{u}\|^2_{H^s(M,TM)},$$

$$\|f(\mathbf{u}_j) - f(\mathbf{u})\|_{H^{s-1}(M)} \le C_s\big(\|\mathbf{u}_j\|_{H^s(M,TM)} + \|\mathbf{u}\|_{H^s(M,TM)}\big)\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{H^s(M,TM)}.$$

Para verificar la segunda cota basta descomponer cada diferencia de productos como $(A_j - A)B_j + A(B_j - B)$ y usar la primera estimación de producto. Por otra parte, $\nabla_{\mathbf{u}_j}\mathbf{u}_j \to \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ en $H^{s-1}(M, TM)$, de modo que sus divergencias convergen en $H^{s-2}(M)$. La identidad suave y la convergencia más fuerte de los $f(\mathbf{u}_j)$ identifican distribucionalmente $-\operatorname{div}_{\mathbf{g}}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$.
La traza continua del Teorema 14.5.9 da

$$\operatorname{Tr}\mathbf{u}_j \to \operatorname{Tr}\mathbf{u} \quad \text{en } H^{s-1/2}(\partial M, TM|_{\partial M}).$$

Como $s - 1/2 > (m-1)/2$, el mismo lema de producto, ahora sobre $\partial M$, proporciona

$$\|h(\mathbf{u})\|_{H^{s-1/2}(\partial M)} \le C_s \|\mathbf{u}\|^2_{H^s(M,TM)},$$
$$\|h(\mathbf{u}_j) - h(\mathbf{u})\|_{H^{s-1/2}(\partial M)} \le C_s \big(\|\mathbf{u}_j\|_{H^s(M,TM)} + \|\mathbf{u}\|_{H^s(M,TM)}\big)\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{H^s(M,TM)}.$$

La traza de $\nabla_{\mathbf{u}_j}\mathbf{u}_j$ converge en $H^{s-3/2}(\partial M, TM|_{\partial M})$, ya que $s - 1 > 1/2$. Al tomar límites en la identidad suave de frontera se obtiene $-\langle \operatorname{Tr}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}), \boldsymbol{\nu}\rangle_{\mathbf{g}} = h(\mathbf{u})$, con la regularidad superior recién probada. Si $m = 1$, la frontera es finita y sus espacios de secciones son de dimensión finita; la misma conclusión es inmediata.
Para cada $j$, la fórmula de divergencia da $\int_M f(\mathbf{u}_j)\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_{\partial M} h(\mathbf{u}_j)\, d\sigma_{\mathbf{g}}$. Las convergencias anteriores permiten tomar límites en ambas integrales. Los datos $f(\mathbf{u}), h(\mathbf{u})$ satisfacen, por tanto, la compatibilidad de Neumann. El Lema 28.3.1, con $a = s - 1$, da una solución de media cero en $H^{s+1}(M)$ y la cota (28.40). Por unicidad débil coincide con $-Q(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u})$. Aplicar la misma estimación de Neumann a las diferencias de los datos, con las cotas de producto ya escritas, prueba (28.41). Esta última desigualdad, aplicada a $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{u}(\tau)$, prueba la continuidad temporal en $H^{s+1}(M)$. Finalmente, $\nabla_t \dot\eta = -(\nabla p)\circ\eta$ por (28.33), y la aceleración lagrangiana toma valores en el nivel de secciones $H^s(M, \eta^* TM)$. □

En coordenadas lagrangianas desaparece esta pérdida en el campo geodésico. El spray es un mapeo suave

$$\mathbf{S}\colon T\operatorname{Diff}^s_\mu(M) \longrightarrow T\big(T\operatorname{Diff}^s_\mu(M)\big), \qquad T\pi \circ \mathbf{S} = \mathrm{id}_{T\operatorname{Diff}^s_\mu(M)}.$$

Además de la ganancia anterior, se necesita la dependencia diferenciable respecto de $\eta$. La estimación en un solo punto no basta para ella. Precisamente, el resultado de Ebin–Marsden construye la proyección en los haces tangentes mediante el problema de Neumann conjugado por las cartas lagrangianas, y demuestra que esta proyección depende suavemente de la carta. La diferenciación se realiza sobre operadores entre espacios fijos; para sus inversos se usa $D(B^{-1})[H] = -B^{-1}HB^{-1}$. Los términos de mayor orden que aparecen al derivar la composición se combinan con los de la proyección. La cancelación expresada por las identidades de divergencia y frontera anteriores permite estimar la aceleración en $H^s(M, \eta^* TM)$. El resultado preciso, incluida la frontera, es el de [46, Teoremas 10.2 y 11.1, pp. 134–135]; proporciona la conexión suave y el spray mostrado, no sólo un operador formal con una pérdida de derivadas.

En una carta del tangente, el spray tiene la forma $\mathbf{S}(x, v) = (v, \mathcal{Q}(x, v))$, con $\mathcal{Q}$ suave y cuadrática en $v$. En una vecindad de cada dato inicial su diferencial está acotado, por continuidad en ese dato; la fórmula del valor medio lo hace localmente Lipschitz. El teorema de EDO del capítulo de flujos de Banach proporciona, por tanto, un intervalo $(-T, T)$ y una única solución lagrangiana con el dato inicial prescrito. Su velocidad euleriana pertenece a $C((-T,T), \mathfrak{X}^s_\mu(M)) \cap C^1((-T,T), \mathfrak{X}^{s-1}_\mu(M))$. No se aplica ese teorema directamente al miembro derecho de (28.36), cuyo codominio tiene un orden menos. El Teorema 12.1 de [46, p. 137] estudia por separado la propagación de regularidad adicional.

La presión se recupera tomando la divergencia en (28.32). La ecuación resultante es un problema de Neumann, cuya condición de borde procede de la componente normal de Euler. Este problema elíptico es local en el tiempo, pero la existencia local no implica completitud de la métrica cinética ni control global de las soluciones. En dimensión tres, la continuación global de una solución suave es una cuestión distinta de la interpretación geodésica.

En la variedad completa sin frontera, sea $\Delta_1 = d\delta + \delta d$ el laplaciano de Hodge no negativo sobre $L^2(M, T^*M)$, con su realización autoadjunta. Aquí $\delta$ es el adjunto formal de $d$, y el complemento de $\ker \Delta_1$ se toma en $L^2(M, T^*M)$.

**Teorema 28.3.7.** (Eichhorn–Schmid: Euler en una base no compacta) Sea $(M^m, \mathbf{g})$ suave, orientada, completa, conexa, no compacta y sin frontera, de geometría acotada de orden $k$. Supongamos

$$\inf \sigma_{\mathrm{e}} \left( \Delta_1 \restriction_{(\ker \Delta_1)^\perp} \right) > 0, \qquad k > r > \frac{m}{2} + 1, \qquad k, r \in \mathbb{N}.$$

La componente de la identidad $\mathcal{D}^{2,r}_{\mu,0}(M)$ del grupo de difeomorfismos Sobolev que preservan el volumen es una subvariedad escindida de clase $C^{k+1-r}$ de $\mathcal{D}^{2,r}_0(M)$. Cada dato $\mathbf{u}_0 \in H^r(M, TM)$ con $\operatorname{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{u}_0 = 0$ determina una solución local única de Euler, con

$$\mathbf{u} \in C((-T, T), H^r(M, TM)) \cap C^1((-T, T), H^{r-1}(M, TM)), \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,$$

para algún $T > 0$. Se elige la presión en $H^{r+1}(M)$; su diferencial pertenece así al rango cerrado de $d : H^1(M) \to L^2(M, T^*M)$. Esta condición forma parte de la clase de soluciones en la que se afirma unicidad. No se impone una normalización de media sobre la base de volumen infinito. Si la geometría es acotada de todos los órdenes, la métrica cinética posee una conexión y un spray suaves en esta subvariedad. En ese caso, su flujo lagrangiano es el flujo de una EDO suave sobre el tangente Hilbert.

*Demostración.* La hipótesis $k > r$ permite usar la variedad de difeomorfismos del Teorema 27.5.3; en particular, $k + 1 - r \geq 2$. El resultado de subvariedad para la forma de volumen es [56, Teorema 3.3], aplicado a la componente de la identidad. La condición espectral proporciona el rango cerrado de los operadores de Hodge y el complemento de las direcciones que cambian el volumen. Las normas y la topología son las de las cartas Sobolev de la identidad; no se necesita extender a todos los mapeos una uniformidad con radios independientes de sus cotas.

Sea $\gamma > 0$ una constante de brecha de $\Delta_1$ en $(\ker \Delta_1)^\perp$, y sea $\Delta_0 = \delta d = -\Delta_{\mathbf{g}}$ en $L^2(M)$. Si $v \in C^\infty_c(M)$, la forma $dv$ es ortogonal al núcleo de $\Delta_1$, y la conmutación de $d$ con los laplacianos de Hodge da

$$\|\Delta_0 v\|^2_{L^2(M)} = \langle \Delta_1 dv, dv \rangle_{L^2(M, T^*M)} \geq \gamma \|dv\|^2_{L^2(M, T^*M)} = \gamma \langle \Delta_0 v, v \rangle_{L^2(M)}.$$

El Teorema 12.1.10 afirma que $C^\infty_c(M)$ es un núcleo esencial para $\Delta_0$. Así, para $v \in \mathcal{D}(\Delta_0)$ se eligen $v_j \in C^\infty_c(M)$ con $v_j \to v$ y $\Delta_0 v_j \to \Delta_0 v$ en $L^2(M)$. Las normas cuadradas y el producto interno de la desigualdad anterior convergen, por lo que vale para $v \in \mathcal{D}(\Delta_0)$. Si $E_0$ es la resolución espectral de $\Delta_0$, esta desigualdad es

$$\int_{[0,\infty)} \lambda(\lambda - \gamma)\, d\langle E_0(\lambda) v, v \rangle_{L^2(M)} \geq 0.$$

Una proyección espectral no nula sobre un intervalo compacto $[a, b] \subset (0, \gamma)$ daría un vector no nulo en $\mathcal{D}(\Delta_0)$ para el cual la integral es estrictamente negativa. Todas esas proyecciones son, por tanto, nulas, y

$\sigma(\Delta_0) \subseteq \{0\} \cup [\gamma, \infty)$. El volumen de una variedad conexa no compacta de geometría acotada es infinito: se pueden elegir infinitas bolas disjuntas de un radio común con volúmenes acotados inferiormente. Una función de $L^2(M)$ en el núcleo de $\Delta_0$ tiene gradiente cero y es constante, luego es nula. Como un punto aislado del espectro de un operador autoadjunto es un valor propio, cero tampoco pertenece a su espectro. Por tanto, $\Delta_0^{-1}$ es acotado en $L^2(M)$.

La descomposición de Hodge y las estimaciones elípticas uniformes dan

$$\mathbb{P}\mathbf{X} = \mathbf{X} - \left(d\Delta_0^{-1}\delta(\mathbf{X}^\flat)\right)^\sharp.$$

Esta proyección es continua en $H^{r-1}(M, TM)$ y $H^r(M, TM)$. Para $\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ se toma

$$p = -\Delta_0^{-1}\delta\left((\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u})^\flat\right).$$

La cancelación de la divergencia calculada antes coloca el argumento de $\Delta_0^{-1}$ en $H^{r-1}(M)$; la estimación elíptica da $p \in H^{r+1}(M)$. Las cotas locales se suman en una cubierta uniforme con multiplicidad finita, y la brecha controla la norma de la inversa en $L^2(M)$. Esta elección conserva la ortogonalidad entre presión y campos de divergencia cero. Permitir el gradiente de un potencial armónico arbitrario, sin exigir que proceda de una función de $L^2(M)$, cambiaría la clase de soluciones y no es la condición de presión utilizada en este teorema.

La existencia y unicidad para geometría de orden finito es el resultado analítico de [56, Corolario 4.6], en el rango estricto adoptado aquí. La continuidad en $H^r(M, TM)$ forma parte de esa solución; la ecuación proyectada y la continuidad del producto $H^r(M, TM) \times H^r(M, TM) \to H^{r-1}(M, TM)$ dan la derivada temporal continua en $H^{r-1}(M, TM)$. Esta afirmación no presupone que un atlas de regularidad finita sea un atlas suave.

Con cotas geométricas en todos los órdenes, las cartas, el operador de conexión puntual y la proyección de Hodge conjugada tienen derivadas continuas de todos los órdenes en las cartas Sobolev. La construcción de [56, §4] da entonces una conexión y un spray suaves en $T\mathcal{D}^{2,r}_{\mu,0}(M)$. El argumento de EDO ya explicado se aplica en el tangente modelado por $H^r(M, TM)$: el spray es, en particular, $C^1$ y localmente Lipschitz. Su proyección es una curva lagrangiana $\eta$ de clase $C^2$, con $\eta(0) = \mathrm{id}$ y $\dot\eta(0) = \mathbf{u}_0$. La igualdad $\mathbf{u} = \dot\eta \circ \eta^{-1}$ devuelve la solución anterior, y la unicidad de la EDO implica la unicidad lagrangiana. El resultado con cotas geométricas finitas y la interpretación mediante un spray suave quedan así formulados con sus respectivas hipótesis. □

## Pérdida de regularidad y elección de las variables

Los tres ejemplos muestran que una formulación variacional no determina por sí sola el espacio funcional adecuado. En el problema de mapeos armónicos, la tensión contiene dos derivadas del mapeo. En Yang–Mills, la curvatura pierde una derivada y el gradiente $d^*_{\mathbf{A}}\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ pierde dos. En Euler, la expresión euleriana pierde una derivada, mientras que las variables lagrangianas producen un spray suave en el caso compacto y en la versión no compacta con las cotas geométricas de todos los órdenes indicadas arriba.

Las simetrías determinan también la forma del análisis. La invariancia calibre obliga a separar las direcciones $d_{\mathbf{A}}\xi$; la invariancia por reparametrizaciones conduce a trabajar sobre un grupo de difeomorfismos; y la elipticidad controla la regularidad local, pero no proporciona por sí sola compacidad global. En una variedad no compacta

intervienen condiciones uniformes y, con frecuencia, hipótesis espectrales.

Una métrica fuerte puede cambiar el representante de un diferencial dentro del espacio tangente elegido, pero no elimina la pérdida de regularidad del operador geométrico original. Esta distinción entre el nivel energético, el nivel geométrico y el nivel en que vive la ecuación será esencial en las aplicaciones variacionales de los capítulos siguientes.

Parte VII

# Métodos variacionales en variedades riemannianas

# Preámbulo de la Parte VII

Muchas ecuaciones no lineales pueden escribirse como la condición de que una energía no cambie, en primer orden, bajo perturbaciones de la incógnita. En ese caso, resolver la ecuación equivale a buscar puntos críticos de un funcional definido sobre un espacio de funciones o de secciones. El cálculo de la primera variación identifica la ecuación; la dificultad consiste en demostrar que esos puntos críticos existen y en comprender qué mecanismos impiden que las sucesiones utilizadas para encontrarlos escapen.

El método directo estudia mínimos. Una sucesión minimizante se controla mediante coercividad, se extrae una subsucesión por reflexividad y se recupera el mínimo mediante semicontinuidad inferior. Los problemas superlineales requieren otra geometría: el punto crítico buscado puede ser un punto de silla y no un mínimo. Las condiciones de Palais–Smale, los pseudogradientes y los lemas de deformación permiten entonces construir argumentos minimax, entre ellos el teorema del paso de la montaña.

La variedad de Nehari introduce una tercera perspectiva. Cuando el funcional posee una geometría radial adecuada, cada semirrecta positiva puede intersectar una restricción natural en un único punto. El problema se reduce así a una geometría más controlada sin imponer artificialmente una condición externa. En estos capítulos convergen las herramientas desarrolladas en el resto del libro: los espacios de Sobolev fijan el dominio del funcional, los encajes controlan las no linealidades, la integración por partes identifica la ecuación débil y la geometría de Banach permite formular restricciones, tangentes y flujos de deformación. La teoría variacional aparece, de este modo, como una continuación natural del análisis desarrollado en las partes anteriores.

### De Euler y Lagrange a Palais y Smale

El cálculo de variaciones comenzó con problemas sobre curvas y superficies, en los que una cantidad geométrica o física debía minimizarse. Euler y Lagrange desarrollaron el lenguaje diferencial que permite pasar de una energía a una ecuación. Con el análisis funcional, la incógnita pudo entenderse como un punto de un espacio infinito–dimensional. El método directo organizó los argumentos de existencia de mínimos mediante compacidad y semicontinuidad; la teoría de Morse y los métodos minimax ampliaron la búsqueda a puntos críticos que no son mínimos; Palais y Smale introdujeron una condición de compacidad adaptada a estos problemas. La restricción de Nehari, por su parte, convirtió una identidad radial en una herramienta especialmente eficaz para ecuaciones no lineales.

# 29

# Formulación variacional de problemas elípticos

El cálculo variacional permite estudiar ecuaciones diferenciales parciales mediante funcionales definidos sobre espacios de funciones o de secciones. Esta perspectiva se aplica tanto en dominios euclidianos como en variedades riemannianas y, de manera más general, en haces vectoriales suaves. La idea común consiste en formular primero una noción de solución débil, obtenida al multiplicar la ecuación por funciones o secciones de prueba e integrar por partes, y después construir un funcional de energía cuya derivada de Fréchet reproduzca exactamente esa identidad débil. De este modo, las soluciones débiles aparecen como puntos críticos del funcional.

Las fórmulas de Green y de integración por partes desarrolladas en los capítulos anteriores proporcionan el vínculo entre el operador diferencial y su formulación débil. En esta parte las utilizaremos para identificar los espacios de prueba y para reconocer la derivada de Fréchet del funcional de energía asociado.

Para Poisson, el funcional cuadrático

$$u \longmapsto \frac{1}{2}\int_M |du|_{\mathbf{g}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M f\,u \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

produce la ecuación débil $-\Delta_{\mathbf{g}} u = f$. Al sustituir el término cuadrático por $\frac{1}{p}\int_M |du|_{\mathbf{g}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}}$ se obtiene el $p$-laplaciano y el espacio natural pasa de $W^{1,2}$ a $W^{1,p}$. Las no linealidades de orden cero se tratarán mediante operadores de Nemytski: las condiciones de Carathéodory y las cotas de crecimiento permitirán decidir cuándo el mapeo $u \mapsto f(\cdot, u)$ actúa continuamente entre los espacios de Lebesgue requeridos.

### De una ecuación a una energía

El cálculo de variaciones nació del estudio de curvas que extreman longitudes, tiempos o acciones. En las ecuaciones elípticas modernas, el mismo principio se formula sobre espacios de funciones: la primera variación de una energía produce una identidad débil y los puntos críticos representan soluciones. Esta traducción es poderosa porque sustituye una ecuación puntual por propiedades globales del funcional, pero sólo funciona cuando la integrabilidad, la diferenciabilidad y los términos de frontera se justifican en el espacio

elegido.

## 29.1 Funciones de Carathéodory y operadores de superposición

En los problemas variacionales, la variable espacial y la variable dependiente desempeñan papeles distintos. Con frecuencia, los coeficientes de la ecuación dependen sólo de manera medible del punto de la base, mientras que la dependencia respecto de la incógnita debe conservar suficiente continuidad para que las composiciones sean medibles y los funcionales integrales estén bien definidos. Las condiciones de Carathéodory formalizan precisamente esta situación.

**Definición 29.1.1.** (Función de Carathéodory) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sean $V$ y $W$ espacios vectoriales reales de dimensión finita. Una función $f : M \times V \longrightarrow W$ es una **función de Carathéodory** si, para cada $\xi \in V$, la función $x \longmapsto f(x,\xi)$ es $\lambda_{\mathbf{g}}$-medible y, para casi todo $x \in M$, la función $\xi \longmapsto f(x,\xi)$ es continua.

**Proposición 29.1.2.** (Medibilidad de las composiciones) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sea $f : M \times V \longrightarrow W$ una función de Carathéodory y sea $u : M \longrightarrow V$ una función medible. Entonces la función $x \longmapsto f(x,u(x))$ es $\lambda_{\mathbf{g}}$-medible.

*Demostración.* Como $V$ tiene dimensión finita, existe una sucesión $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones simples medibles tal que $u_j(x) \to u(x)$ para casi todo $x \in M$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$u_j = \sum_{i=1}^{N_j} \xi_{i,j} \mathbf{1}_{E_{i,j}},$$

donde los conjuntos $E_{1,j},\dots,E_{N_j,j}$ son medibles y ajenos dos a dos. Añadiendo, si es necesario, el conjunto $M \setminus \bigcup_{i=1}^{N_j} E_{i,j}$ con el valor $0 \in V$, podemos suponer que $M = \bigcup_{i=1}^{N_j} E_{i,j}$. Por lo tanto,

$$f(x,u_j(x)) = \sum_{i=1}^{N_j} f(x,\xi_{i,j}) \mathbf{1}_{E_{i,j}}(x).$$

Como $x \longmapsto f(x,\xi_{i,j})$ es medible para cada $i$, la función $x \longmapsto f(x,u_j(x))$ es medible.
Existe un conjunto medible $N \subseteq M$, con $\lambda_{\mathbf{g}}(N) = 0$, tal que $f(x,\cdot)$ es continuo y $u_j(x) \to u(x)$ para todo $x \in M \setminus N$. En consecuencia, $f(x,u_j(x)) \to f(x,u(x))$ para todo $x \in M \setminus N$. Como $\lambda_{\mathbf{g}}$ es completa, el límite puntual casi en todas partes de funciones medibles con valores en un espacio de dimensión finita es medible. Por lo tanto, $x \longmapsto f(x,u(x))$ es medible. □

La formulación anterior se extiende naturalmente a no linealidades que actúan sobre secciones de haces vectoriales. En este caso, tanto la incógnita como su imagen pertenecen a fibras que dependen del punto de la base. La siguiente definición expresa la condición de Carathéodory sin elegir trivializaciones.

**Definición 29.1.3.** (Mapeo de Carathéodory fibra a fibra) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sean $\mathbf{F} \to M$ y $\mathbf{G} \to M$ haces vectoriales suaves reales de rangos finitos. Un mapeo $\mathscr{G}\colon \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ que preserva las fibras se denomina un **mapeo de Carathéodory fibra a fibra** si se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) existe un conjunto medible $M_0 \subseteq M$, con $\lambda_{\mathbf{g}}(M \setminus M_0) = 0$, tal que $\mathscr{G}_x\colon \mathbf{F}_x \longrightarrow \mathbf{G}_x$ es continuo para todo $x \in M_0$;

(b) para cada abierto $U \subseteq M$ y cada sección medible $\mathbf{u}\colon U \longrightarrow \mathbf{F}\restriction_U$, la sección $x \longmapsto \mathscr{G}_x(\mathbf{u}(x))$ es medible en $\mathbf{G}\restriction_U$.

La segunda condición de la definición anterior puede comprobarse mediante trivializaciones. El siguiente resultado muestra que la definición intrínseca coincide con la condición usual de Carathéodory para las representaciones locales.

**Proposición 29.1.4.** (Caracterización local de los mapeos de Carathéodory) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sean $\mathbf{F} \to M$ y $\mathbf{G} \to M$ haces vectoriales suaves reales de rango finito y sea $\mathscr{G}\colon \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ un mapeo que preserva las fibras. Entonces $\mathscr{G}$ es un mapeo de Carathéodory fibra a fibra si y sólo si, para cada abierto $U \subseteq M$ sobre el cual $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ admiten trivializaciones suaves

$$\Phi_{\mathbf{F}}\colon \mathbf{F}\restriction_U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^r, \qquad \Phi_{\mathbf{G}}\colon \mathbf{G}\restriction_U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^s,$$

la representación local $\mathscr{G}_U\colon U \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^s$, determinada por

$$\Phi_{\mathbf{G}} \circ \mathscr{G} \circ \Phi_{\mathbf{F}}^{-1}(x, \xi) = \big(x, \mathscr{G}_U(x, \xi)\big),$$

es una función de Carathéodory.

*Demostración.* Supongamos primero que $\mathscr{G}$ es un mapeo de Carathéodory fibra a fibra. Fijemos $\xi \in \mathbb{R}^r$ y consideremos la sección suave $\mathbf{u}_\xi\colon U \longrightarrow \mathbf{F}\restriction_U$ definida por $\mathbf{u}_\xi(x) := \Phi_{\mathbf{F}}^{-1}(x, \xi)$. Por la segunda condición de la Definición 29.1.3, la sección $x \longmapsto \mathscr{G}_x(\mathbf{u}_\xi(x))$ es medible en $\mathbf{G}\restriction_U$. Su representación local respecto de $\Phi_{\mathbf{G}}$ es la función $x \longmapsto \mathscr{G}_U(x, \xi)$, por lo que ésta es medible.
Por otra parte, existe un conjunto medible $M_0 \subseteq M$, con $\lambda_{\mathbf{g}}(M \setminus M_0) = 0$, tal que $\mathscr{G}_x\colon \mathbf{F}_x \longrightarrow \mathbf{G}_x$ es continuo para todo $x \in M_0$. Como las restricciones de $\Phi_{\mathbf{F}}$ y $\Phi_{\mathbf{G}}$ a las fibras son isomorfismos lineales, la función $\xi \longmapsto \mathscr{G}_U(x, \xi)$ es continua para todo $x \in U \cap M_0$. Por lo tanto, $\mathscr{G}_U$ es una función de Carathéodory.
Recíprocamente, supongamos que las representaciones locales de $\mathscr{G}$ son funciones de Carathéodory. Como $M$ es segundo numerable, podemos elegir una cubierta numerable $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ por dominios de trivialización comunes para $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto medible $N_k \subseteq U_k$, con $\lambda_{\mathbf{g}}(N_k) = 0$, tal que la representación local $\mathscr{G}_{U_k}(x, \cdot)$ es continua para todo $x \in U_k \setminus N_k$. Si $N := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$, entonces $\lambda_{\mathbf{g}}(N) = 0$ y $\mathscr{G}_x\colon \mathbf{F}_x \longrightarrow \mathbf{G}_x$ es continuo para todo $x \in M \setminus N$.
Sea ahora $U \subseteq M$ un abierto y sea $\mathbf{u}\colon U \longrightarrow \mathbf{F}\restriction_U$ una sección medible. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $u_k\colon U \cap U_k \longrightarrow \mathbb{R}^r$ la representación local de $\mathbf{u}$. Como $\mathscr{G}_{U_k}$ es una función de Carathéodory, la Proposición 29.1.2 muestra que la función

$$x \longmapsto \mathscr{G}_{U_k}(x, u_k(x))$$

es medible en $U\cap U_k$. Esta función es la representación local de la sección $x\longmapsto \mathscr{G}_x(\mathbf{u}(x))$. Como los conjuntos $U\cap U_k$ forman una cubierta numerable de $U$, se concluye que $x\longmapsto \mathscr{G}_x(\mathbf{u}(x))$ es una sección medible de $\mathbf{G}\restriction_U$. Por lo tanto, $\mathscr{G}$ es un mapeo de Carathéodory fibra a fibra. □

**Observación 29.1.5.** Para verificar que un mapeo que preserva las fibras es de Carathéodory fibra a fibra, basta comprobar que sus representaciones locales son funciones de Carathéodory respecto de una cubierta trivializante numerable. La Proposición 29.1.4 muestra, además, que esta propiedad no depende de las trivializaciones elegidas.
En particular, todo mapeo continuo $\mathscr{G}\colon \mathbf{F}\longrightarrow \mathbf{G}$ que preserva las fibras es un mapeo de Carathéodory fibra a fibra. Si $\mathbf{F}=M\times V$ y $\mathbf{G}=M\times W$ son haces triviales, la definición se reduce a la condición usual de Carathéodory para una función $f\colon M\times V\longrightarrow W$.

**Definición 29.1.6.** (Operador de Nemytski entre haces) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sean $\mathbf{F}\to M$ y $\mathbf{G}\to M$ haces vectoriales suaves reales de rango finito y sea $\mathscr{G}\colon \mathbf{F}\longrightarrow \mathbf{G}$ un mapeo de Carathéodory fibra a fibra. El operador definido puntualmente por $\mathcal{N}_{\mathscr{G}}(\mathbf{u})(x):=\mathscr{G}_x(\mathbf{u}(x))$, siempre que la sección resultante pertenezca al espacio de llegada considerado, se denomina **operador de Nemytski**, **operador de superposición** u **operador de sustitución** asociado a $\mathscr{G}$.

El siguiente resultado proporciona una condición de crecimiento que garantiza que el operador de superposición actúe continuamente entre espacios de Lebesgue de secciones. El término independiente perteneciente a $L^q(M)$ permite incluir variedades de volumen infinito.

**Teorema 29.1.7.** (Continuidad de operadores de superposición entre haces) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sean $\mathbf{F}\to M$ y $\mathbf{G}\to M$ haces vectoriales suaves reales de rango finito equipados con métricas fibradas $\mathbf{h}_{\mathbf{F}}$ y $\mathbf{h}_{\mathbf{G}}$, y sea $\mathscr{G}\colon \mathbf{F}\longrightarrow \mathbf{G}$ un mapeo de Carathéodory fibra a fibra. Sean $1\le p,q<\infty$ y supongamos que existen una función medible $a\colon M\longrightarrow[0,\infty)$, con $a\in L^q(M)$, y una constante $C\ge 0$ tales que

$$|\mathscr{G}_x(\xi)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{G}}}\le a(x)+C|\xi|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}^{\frac{p}{q}}$$

para casi todo $x\in M$ y toda $\xi\in\mathbf{F}_x$. Entonces el operador

$$\mathcal{N}_{\mathscr{G}}\colon L^p(M,\mathbf{F})\longrightarrow L^q(M,\mathbf{G}),\qquad \mathcal{N}_{\mathscr{G}}(\mathbf{u})(x):=\mathscr{G}_x(\mathbf{u}(x)),$$

está bien definido, es continuo y transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

*Demostración.* Sea $\mathbf{u}\in L^p(M,\mathbf{F})$. La Definición 29.1.3 garantiza que $\mathcal{N}_{\mathscr{G}}(\mathbf{u})$ es una sección medible de $\mathbf{G}$. Además, por la hipótesis de crecimiento y la desigualdad $(\alpha+\beta)^q\le 2^{q-1}(\alpha^q+\beta^q)$, se tiene

$$|\mathscr{G}_x(\mathbf{u}(x))|_{\mathbf{h}_{\mathbf{G}}}^q\le 2^{q-1}a(x)^q+2^{q-1}C^q|\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{F}}}^p$$

para casi todo $x\in M$. Por lo tanto,

$$\|\mathcal{N}_{\mathscr{G}}(\mathbf{u})\|_{L^q(M,\mathbf{G})}^q\le 2^{q-1}\|a\|_{L^q(M)}^q+2^{q-1}C^q\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{F})}^p.$$

En particular, $\mathcal{N}_{\mathscr{G}}(\mathbf{u})\in L^q(M,\mathbf{G})$. Además, si dos secciones coinciden casi en todas partes, sus imágenes por

$\mathcal{N}_\mathscr{g}$ también coinciden casi en todas partes, por lo que el operador está bien definido sobre las clases de equivalencia de $L^p(M,\mathbf{F})$.

La estimación anterior también muestra que $\mathcal{N}_\mathscr{g}$ transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Si $B \subseteq L^p(M,\mathbf{F})$ es acotado, existe $R>0$ tal que $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{F})} \leq R$ para todo $\mathbf{u} \in B$, y entonces

$$\|\mathcal{N}_\mathscr{g}(\mathbf{u})\|^q_{L^q(M,\mathbf{G})} \leq 2^{q-1}\|a\|^q_{L^q(M)} + 2^{q-1}C^q R^p$$

para todo $\mathbf{u} \in B$.

Probemos la continuidad. Sea $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(M,\mathbf{F})$ tal que $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{F})$. Consideremos una subsucesión arbitraria $(\mathbf{u}_{j_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$. Extrayendo una nueva subsucesión, que denotaremos por $(\mathbf{v}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, podemos suponer que $\|\mathbf{v}_\ell - \mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{F})} \leq 2^{-\ell}$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

Definamos

$$H(x) := \sum_{\ell=1}^{\infty} |\mathbf{v}_\ell(x) - \mathbf{u}(x)|_{\mathbf{h}_\mathbf{F}}.$$

La desigualdad de Minkowski (Teorema B.7.3) implica

$$\|H\|_{L^p(M)} \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \|\mathbf{v}_\ell - \mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{F})} \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\ell} < \infty.$$

En consecuencia, $H(x) < \infty$ para casi todo $x \in M$. En cada punto de ese conjunto de medida total se tiene $\mathbf{v}_\ell(x) \to \mathbf{u}(x)$ en $\mathbf{F}_x$ y

$$|\mathbf{v}_\ell(x)|_{\mathbf{h}_\mathbf{F}} \leq |\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{h}_\mathbf{F}} + H(x).$$

La continuidad de $\mathscr{G}_x$ para casi todo $x \in M$ proporciona

$$\mathscr{G}_x(\mathbf{v}_\ell(x)) \longrightarrow \mathscr{G}_x(\mathbf{u}(x))$$

para casi todo $x \in M$.

Por otra parte, la desigualdad triangular y la hipótesis de crecimiento implican la existencia de una constante $C_0 > 0$, independiente de $\ell$, tal que

$$|\mathscr{G}_x(\mathbf{v}_\ell(x)) - \mathscr{G}_x(\mathbf{u}(x))|^q_{\mathbf{h}_\mathbf{G}} \leq C_0\left(a(x)^q + |\mathbf{v}_\ell(x)|^p_{\mathbf{h}_\mathbf{F}} + |\mathbf{u}(x)|^p_{\mathbf{h}_\mathbf{F}}\right)$$

para casi todo $x \in M$. Como

$$|\mathbf{v}_\ell(x)|^p_{\mathbf{h}_\mathbf{F}} \leq 2^{p-1}\left(|\mathbf{u}(x)|^p_{\mathbf{h}_\mathbf{F}} + H(x)^p\right),$$

existe una constante $C_1 > 0$, independiente de $\ell$, tal que

$$|\mathscr{G}_x(\mathbf{v}_\ell(x)) - \mathscr{G}_x(\mathbf{u}(x))|^q_{\mathbf{h}_\mathbf{G}} \leq C_1\left(a(x)^q + |\mathbf{u}(x)|^p_{\mathbf{h}_\mathbf{F}} + H(x)^p\right)$$

para casi todo $x \in M$. El lado derecho pertenece a $L^1(M)$. El Teorema B.6.14 proporciona

$$\|\mathcal{N}_\mathscr{g}(\mathbf{v}_\ell) - \mathcal{N}_\mathscr{g}(\mathbf{u})\|^q_{L^q(M,\mathbf{G})} \longrightarrow 0.$$

Hemos demostrado que toda subsucesión de $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión cuya imagen converge a $\mathcal{N}_\mathscr{g}(\mathbf{u})$ en $L^q(M,\mathbf{G})$. Por el criterio de subsucesiones, $\mathcal{N}_\mathscr{g}(\mathbf{u}_j) \to \mathcal{N}_\mathscr{g}(\mathbf{u})$ en $L^q(M,\mathbf{G})$. Por lo tanto, $\mathcal{N}_\mathscr{g}$ es continuo.

□

El caso de haces triviales proporciona el resultado usual para funciones de Carathéodory con valores vectoriales.

**Corolario 29.1.8.** (Operador de Nemytski entre espacios de Lebesgue) Sean $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera, sean $1 \le p,q < \infty$ y sea $f\colon M\times\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^L$ una función de Carathéodory. Supongamos que existen una función medible $a\colon M \longrightarrow [0,\infty)$, con $a \in L^q(M)$, y una constante $C \ge 0$ tales que

$$\|f(x,\xi)\| \le a(x) + C\|\xi\|^{\frac{p}{q}}$$

para casi todo $x \in M$ y toda $\xi \in \mathbb{R}^N$. Entonces el operador

$$\mathcal{N}_f\colon L^p(M,\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^q(M,\mathbb{R}^L), \qquad \mathcal{N}_f(u)(x) := f(x,u(x)),$$

está bien definido, es continuo y transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema 29.1.7 a los haces triviales $\mathbf{F} = M\times\mathbb{R}^N$ y $\mathbf{G} = M\times\mathbb{R}^L$, equipados con sus métricas fibradas euclidianas. □

**Corolario 29.1.9.** (El caso de exponentes conjugados) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con o sin frontera, sean $\mathbf{F}\to M$ y $\mathbf{G}\to M$ haces vectoriales suaves reales de rango finito equipados con métricas fibradas $\mathbf{h_F}$ y $\mathbf{h_G}$, y sea $\mathscr{G}\colon \mathbf{F}\longrightarrow\mathbf{G}$ un mapeo continuo que preserva las fibras. Supongamos que $m>1$ y que existe una constante $C>0$ tal que

$$|\mathscr{G}_x(\xi)|_{\mathbf{h_G}} \le C\big(1+|\xi|^{m-1}_{\mathbf{h_F}}\big)$$

para todo $x\in M$ y toda $\xi\in\mathbf{F}_x$. Si $m' := \dfrac{m}{m-1}$, entonces el operador $\mathcal{N}_{\mathscr{G}}\colon L^m(M,\mathbf{F})\longrightarrow L^{m'}(M,\mathbf{G})$ está bien definido, es continuo y transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

*Demostración.* Como $\mathscr{G}$ es continuo y preserva las fibras, es un mapeo de Carathéodory fibra a fibra. Además, $\dfrac{m}{m'} = m-1$. Como $M$ es compacta, la función constante $a(x) := C$ pertenece a $L^{m'}(M)$. El resultado se sigue del Teorema 29.1.7 tomando $p=m$ y $q=m'$. □

**Observación 29.1.10.** (El caso compacto) Si $M$ es compacta, entonces $\lambda_{\mathbf{g}}(M)<\infty$ y toda función constante pertenece a $L^q(M)$. En consecuencia, en el Teorema 29.1.7 puede sustituirse la hipótesis de crecimiento por

$$|\mathscr{G}_x(\xi)|_{\mathbf{h_G}} \le C\big(1+|\xi|^{\frac{p}{q}}_{\mathbf{h_F}}\big).$$

De manera análoga, en el Corolario 29.1.8 basta suponer que $\|f(x,\xi)\| \le C(1+\|\xi\|^{\frac{p}{q}})$ para casi todo $x\in M$ y toda $\xi\in\mathbb{R}^N$.

**Corolario 29.1.11.** (Diferenciabilidad de las potencias de la norma) Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera y sea $\mathbf{E}\to M$ un haz vectorial suave real de rango finito, provisto de una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$. Para $1<\ell<\infty$, el funcional

$$Q_\ell(\mathbf{u}) := \frac{1}{\ell}\|\mathbf{u}\|^{\ell}_{L^\ell(M,\mathbf{E})}$$

es de clase $C^1$ en $L^\ell(M,\mathbf{E})$ y

$$DQ_\ell(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = \int_M |\mathbf{u}|_{\mathbf{h_E}}^{\ell-2}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

El integrando se interpreta como cero donde $\mathbf{u}=0$.

*Demostración.* En cada fibra, el mapeo $\xi \mapsto |\xi|^\ell/\ell$ es de clase $C^1$ y su diferencial está representado por $b_\ell(\xi) := |\xi|^{\ell-2}\xi$, con $b_\ell(0)=0$. En cero, la diferenciabilidad se deduce de $|\xi|^\ell/|\xi| \to 0$, pues $\ell>1$; fuera de cero se aplica la regla de la cadena. El Teorema 29.1.7, con exponentes $\ell$ y $\ell' := \ell/(\ell-1)$ y término independiente nulo, muestra que $b_\ell$ es continuo de $L^\ell(M,\mathbf{E})$ en $L^{\ell'}(M,\mathbf{E})$.
Por Hölder, la fórmula propuesta define un funcional lineal continuo de norma a lo más $\|\mathbf{u}\|_{L^\ell(M,\mathbf{E})}^{\ell-1}$. El teorema fundamental del cálculo en cada fibra y Fubini dan

$$Q_\ell(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - Q_\ell(\mathbf{u}) = \int_0^1 \int_M \langle b_\ell(\mathbf{u}+t\mathbf{h}),\mathbf{h}\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\, dt.$$

En efecto, la integral del valor absoluto es a lo más $(\|\mathbf{u}\|_{L^\ell(M,\mathbf{E})}+\|\mathbf{h}\|_{L^\ell(M,\mathbf{E})})^{\ell-1}\|\mathbf{h}\|_{L^\ell(M,\mathbf{E})}$, por Hölder. Restando el funcional propuesto, obtenemos

$$\begin{aligned}&\left|Q_\ell(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - Q_\ell(\mathbf{u}) - \int_M \langle b_\ell(\mathbf{u}),\mathbf{h}\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\right| \\ &\qquad \le \|\mathbf{h}\|_{L^\ell(M,\mathbf{E})} \sup_{t\in[0,1]} \|b_\ell(\mathbf{u}+t\mathbf{h}) - b_\ell(\mathbf{u})\|_{L^{\ell'}(M,\mathbf{E})}.\end{aligned}$$

La continuidad de $b_\ell$ en $\mathbf{u}$ hace que el supremo tienda a cero cuando $\mathbf{h}\to 0$: todos los puntos $\mathbf{u}+t\mathbf{h}$ están a distancia a lo más $\|\mathbf{h}\|_{L^\ell(M,\mathbf{E})}$ de $\mathbf{u}$. Esto prueba la diferenciabilidad de Fréchet. Finalmente, Hölder da

$$\|DQ_\ell(\mathbf{u}) - DQ_\ell(\mathbf{w})\|_{(L^\ell)'} \le \|b_\ell(\mathbf{u}) - b_\ell(\mathbf{w})\|_{L^{\ell'}(M,\mathbf{E})},$$

por lo que el diferencial es continuo. □

## 29.2 Soluciones clásicas, fuertes y débiles

Consideremos primero el problema escalar

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{g}} u = f(x,u) & \text{en } M, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M, \end{cases} \tag{29.1}$$

donde $(M,\mathbf{g})$ es una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera suave no vacía y $f: M\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función de Carathéodory. Esta ecuación servirá como modelo para introducir las nociones básicas. Adoptamos la convención

$$2^* := \begin{cases} \dfrac{2n}{n-2}, & n\ge 3, \\ +\infty, & n\in\{1,2\}. \end{cases}$$

Cuando $|f(x,t)|$ crece como $|t|^{r-1}$, se dice que el crecimiento es sublineal si $1<r<2$ y superlineal subcrítico si $2<r<2^*$. Si $n\ge 3$, se denomina crítico al caso $r=2^*$ y supercrítico al caso $r>2^*$. Para $n\in\{1,2\}$ no aparece un

exponente crítico finito en los encajes de primer orden. Estas denominaciones dependen del espacio funcional considerado: $2^*$ es el exponente límite del encaje de $W_0^{1,2}(M)$.

**Definición 29.2.1.** (Solución clásica) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera no vacía y sea $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Una solución clásica de (29.1) es una función $u \in C^2(M)$ que satisface la ecuación en cada punto de $M$ y cuya restricción a $\partial M$ es nula.

**Definición 29.2.2.** (Solución fuerte) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera no vacía y sea $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Una solución fuerte de (29.1) es una función $u \in W^{2,2}(M) \cap W_0^{1,2}(M)$ tal que $-\Delta_{\mathbf{g}} u = f(x,u)$ casi en todo punto de $M$.

La fórmula de Green, obtenida previamente a partir del Teorema 2.14.21, muestra que toda solución suficientemente regular satisface

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M f(x,u) v \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Esto conduce a la noción que resulta natural en los espacios de Sobolev.

**Definición 29.2.3.** (Solución débil) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera no vacía y sea $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Una solución débil de (29.1) es una función $u \in W_0^{1,2}(M)$ tal que

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M f(x,u) v \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

para toda $v \in W_0^{1,2}(M)$, siempre que el término del lado derecho esté bien definido.

Toda solución clásica es fuerte y débil. El paso de una solución débil a una solución fuerte o clásica requiere resultados de regularidad elíptica y depende de la geometría de $M$, de la regularidad de la frontera y de las hipótesis sobre la no linealidad.

El mismo procedimiento se aplica a secciones. Sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ compatible con $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Una ecuación en $\mathbf{E}$ se prueba contra secciones $\varphi \in W_0^{1,q}(M, \mathbf{E})$, y la integración por partes se realiza mediante la conexión inducida y su adjunto formal. La condición de frontera queda incorporada por la caracterización de $W_0^{1,q}(M, \mathbf{E})$ como núcleo del operador de traza.

## 29.3 Funcionales de energía y puntos críticos

Sea $X$ un espacio de Banach real y sea $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Utilizaremos la notación $DI(u) \in X'$ para la derivada de Fréchet. Un punto $u \in X$ es crítico si $DI(u) = 0$.

**Proposición 29.3.1.** (Funcional escalar de energía) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera no vacía. Supongamos que $f : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory y que existen $C > 0$ y $r \in (1, 2^*)$ tales que $|f(x,t)| \leq C(1 + |t|^{r-1})$. Definamos $F(x,t) := \displaystyle\int_0^t f(x,s)\, ds$ y

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M F(x,u) \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

sobre $X = W_0^{1,2}(M)$. Entonces $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ y

$$DI(u)(v) = \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M f(x,u) v \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

para todos $u, v \in X$. En particular, los puntos críticos de $I$ son exactamente las soluciones débiles de (29.1).

*Demostración.* Escribamos $I = Q - P$, donde

$$Q(u) := \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad P(u) := \int_M F(x,u) \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

El funcional $Q$ es de clase $C^1$ y

$$DQ(u)(v) = \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La hipótesis de crecimiento implica

$$|F(x,t)| \le C|t| + \frac{C}{r}|t|^r.$$

Como $X \hookrightarrow L^1(M) \cap L^r(M)$ continuamente, $P$ está bien definido. Asimismo, el Corolario 29.1.8, aplicado con $p = r$ y $q = r' := \dfrac{r}{r-1}$, muestra que

$$u \longmapsto f(\cdot, u)$$

es continuo de $L^r(M)$ en $L^{r'}(M)$.
Para $u \in X$, definamos $K_u \in X'$ por

$$K_u(v) := \int_M f(x,u) v \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Si $C_S > 0$ es una constante del encaje $X \hookrightarrow L^r(M)$, entonces

$$|K_u(v)| \le \|f(\cdot,u)\|_{L^{r'}(M)} \|v\|_{L^r(M)} \le C_S \|f(\cdot,u)\|_{L^{r'}(M)} \|v\|_X,$$

por lo que $K_u$ es lineal y continuo.
Sea $h \in X$. Para casi todo $x \in M$, el Teorema B.6.5, aplicado a $s \longmapsto F(x, u(x) + sh(x))$, da

$$F(x,u+h) - F(x,u) = \int_0^1 f(x, u+sh) h \, ds.$$

La desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9) y la cota de crecimiento justifican la aplicación del Teorema de Fubini para integrales de Bochner B.6.26, en su caso escalar, a $(M, \lambda_{\mathbf{g}}) \times ([0,1], ds)$. En consecuencia,

$$P(u+h) - P(u) - K_u(h) = \int_0^1 \int_M \big( f(x, u+sh) - f(x,u) \big) h \, d\lambda_{\mathbf{g}} \, ds$$

y

$$|P(u+h) - P(u) - K_u(h)| \le C_S \|h\|_X \int_0^1 \|f(\cdot, u+sh) - f(\cdot,u)\|_{L^{r'}(M)} \, ds.$$

Sea $(h_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $h_j \to 0$ en $X$. Para cada $s \in [0,1]$, se tiene $u + sh_j \to u$ en $L^r(M)$, y la continuidad del operador de Nemytski implica

$$\|f(\cdot, u+sh_j) - f(\cdot,u)\|_{L^{r'}(M)} \longrightarrow 0.$$

Además, existe $R > 0$ tal que $\|u + sh_j\|_{L^r(M)} \leq R$ para todo $j$ y todo $s \in [0,1]$. La estimación obtenida en la primera parte de la prueba del Corolario 29.1.8 proporciona una constante $C_R > 0$ tal que

$$\|f(\cdot, u + sh_j) - f(\cdot, u)\|_{L^{r'}(M)} \leq C_R$$

para todo $j$ y todo $s \in [0,1]$. El Teorema B.6.14, aplicado en la variable $s$, da

$$\int_0^1 \|f(\cdot, u + sh_j) - f(\cdot, u)\|_{L^{r'}(M)}\, ds \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|P(u+h) - P(u) - K_u(h)|}{\|h\|_X} = 0,$$

de modo que $P$ es Fréchet diferenciable y $DP(u) = K_u$.
Finalmente, si $u_j \to u$ en $X$, entonces $u_j \to u$ en $L^r(M)$ y

$$\|DP(u_j) - DP(u)\|_{X'} \leq C_S \|f(\cdot, u_j) - f(\cdot, u)\|_{L^{r'}(M)} \longrightarrow 0.$$

Así, $P \in C^1(X, \mathbb{R})$, $I = Q - P \in C^1(X, \mathbb{R})$ y la fórmula anunciada para $DI$ es válida. Comparándola con la Definición 29.2.3, se concluye que $DI(u) = 0$ si y sólo si $u$ es una solución débil de (29.1). □

**Proposición 29.3.2.** (Segunda derivada del funcional potencial) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta de dimensión $n$ con frontera no vacía y sea $f$ la no linealidad de la Proposición 29.3.1. Supongamos, además, que $f(x, \cdot)$ es de clase $C^1$ para casi todo $x$, que $f_t$ es una función de Carathéodory y que existen $C > 0$ y $r \in (2, 2^*)$ tales que

$$|f_t(x,t)| \leq C\left(1 + |t|^{r-2}\right)$$

para casi todo $x \in M$ y todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces $I \in C^2(X, \mathbb{R})$ y

$$D^2 I(u)(v,w) = \int_M \langle \nabla v, \nabla w \rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M f_t(x,u) v w\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

*Demostración.* Sea $P(u) := \displaystyle\int_M F(x,u)\, d\lambda_{\mathbf{g}}$. Por la proposición anterior,

$$DP(u)(v) = \int_M f(x,u) v\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Definamos $s := \dfrac{r}{r-2}$. Entonces $\frac{1}{s} + \frac{2}{r} = 1$. El Corolario 29.1.8, aplicado con exponente de partida $r$ y exponente de llegada $s$, muestra que

$$u \longmapsto f_t(\cdot, u)$$

es continuo de $L^r(M)$ en $L^s(M)$, pues $\frac{r}{s} = r - 2$.
Para $u \in X$, definamos la forma bilineal

$$B_u(h,v) := \int_M f_t(x,u) h v\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9) y el encaje $X \hookrightarrow L^r(M)$,

$$|B_u(h,v)| \le \|f_t(\cdot,u)\|_{L^s(M)}\|h\|_{L^r(M)}\|v\|_{L^r(M)} \le C_S^2\|f_t(\cdot,u)\|_{L^s(M)}\|h\|_X\|v\|_X.$$

Por lo tanto, $B_u \in \mathcal{L}^2(X;\mathbb{R})$.
Para $h, v \in X$, el Teorema B.6.5, aplicado en la segunda variable, da

$$f(x,u+h) - f(x,u) = \int_0^1 f_t(x,u+\tau h)h\,d\tau$$

para casi todo $x \in M$. Así,

$$\big(DP(u+h) - DP(u) - B_u(h,\cdot)\big)(v) = \int_0^1 \int_M \big(f_t(x,u+\tau h) - f_t(x,u)\big)hv\,d\lambda_{\mathbf{g}}\,d\tau.$$

Al tomar el supremo sobre $\|v\|_X \le 1$ y aplicar Hölder, obtenemos

$$\|DP(u+h) - DP(u) - B_u(h,\cdot)\|_{X'} \le C_S^2\|h\|_X \int_0^1 \|f_t(\cdot,u+\tau h) - f_t(\cdot,u)\|_{L^s(M)}\,d\tau.$$

Si $h_j \to 0$ en $X$, entonces $u+\tau h_j \to u$ en $L^r(M)$ para cada $\tau \in [0,1]$. La continuidad del operador de Nemytski asociado a $f_t$ implica que el integrando converge a cero. Además, la familia $(u+\tau h_j)_{j,\tau}$ está acotada en $L^r(M)$, y la estimación de acotación del Corolario 29.1.8 proporciona una constante independiente de $j$ y $\tau$ que domina el integrando. Por el Teorema B.6.14, aplicado en $[0,1]$,

$$\int_0^1 \|f_t(\cdot,u+\tau h_j) - f_t(\cdot,u)\|_{L^s(M)}\,d\tau \longrightarrow 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|DP(u+h) - DP(u) - B_u(h,\cdot)\|_{X'}}{\|h\|_X} = 0.$$

Esto demuestra que $DP$ es Fréchet diferenciable y que $D^2P(u) = B_u$.
Si $u_j \to u$ en $X$, entonces $u_j \to u$ en $L^r(M)$ y

$$\|D^2P(u_j) - D^2P(u)\|_{\mathcal{L}^2(X;\mathbb{R})} \le C_S^2\|f_t(\cdot,u_j) - f_t(\cdot,u)\|_{L^s(M)} \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $P \in C^2(X,\mathbb{R})$. Como la segunda derivada del término cuadrático es la forma $(v,w) \mapsto \int_M \langle \nabla v, \nabla w\rangle_{\mathbf{g}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}$, la fórmula para $D^2I$ se sigue de $I = Q - P$. □

En el régimen subcrítico, el encaje compacto de $W_0^{1,2}(M)$ en $L^r(M)$ hace que el término potencial sea estable respecto de las convergencias débiles que aparecen en el método directo y en el método de Nehari.

# 30

# El método directo del cálculo de variaciones

El método directo transforma un problema de minimización en una combinación de tres propiedades: coercividad, compacidad y semicontinuidad inferior. La coercividad mantiene las sucesiones minimizantes en conjuntos acotados; la compacidad débil permite extraer una subsucesión convergente; y la semicontinuidad inferior garantiza que el límite no aumente la energía. En espacios reflexivos, este esquema da un criterio general de existencia de minimizadores.

La distinción entre compacidad débil y convergencia débil de sucesiones permite formular dos versiones del método. Después de establecerlas, las aplicaremos a un problema elíptico sublineal. En ese ejemplo, la condición de Dirichlet controla la parte cuadrática de la energía, mientras que la compacidad de un encaje de Sobolev permite pasar al límite en el término no lineal.

**El método directo y la fuerza de la convergencia débil**

El método directo no intenta resolver explícitamente la ecuación de Euler–Lagrange. Parte de una sucesión cuya energía se aproxima al ínfimo y busca suficiente compacidad para obtener un límite. La convergencia débil es decisiva porque toda sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo admite una subsucesión débilmente convergente; la semicontinuidad inferior impide que la energía salte hacia arriba en el límite. Esta combinación, desarrollada en el cálculo de variaciones moderno, convierte propiedades estructurales del espacio y del funcional en un teorema de existencia.

## 30.1 Semicontinuidad inferior

Una sucesión minimizante suele converger sólo débilmente. Para que su límite siga minimizando, la energía no debe aumentar al pasar al límite; esta es precisamente la función de la semicontinuidad inferior.

**Definición 30.1.1.** Sea $X$ un espacio topológico. Una función $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice semicontinua inferiormente si, para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X \mid \varphi(x) > a\}$ es abierto en $X$.

**Ejemplo 30.1.2.** Toda función continua $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente, ya que la preimagen de cualquier conjunto abierto es un conjunto abierto en $X$.

**Ejemplo 30.1.3.** Consideremos la función $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Entonces, la función $\varphi$ es semicontinua inferiormente. En efecto, si $a < 0$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) > a\}$ es $\mathbb{R}$; si $0 \leq a < 1$, es $(0, +\infty)$; y si $a \geq 1$, es vacío. Los tres conjuntos son abiertos. La discontinuidad en 0 es compatible con la semicontinuidad inferior porque el valor en ese punto coincide con el menor de los dos valores laterales.

**Lema 30.1.4.** Sea $X$ un espacio topológico que satisface el primer axioma de numerabilidad y sea $\psi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Entonces $\psi$ es semicontinua inferiormente si y sólo si

$$\psi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \psi(x_n),$$

para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$ en $X$.

*Demostración.* Supongamos primero que $\psi$ es semicontinua inferiormente. Queremos probar que $\psi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \psi(x_n)$, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$. Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos el conjunto

$$V_\varepsilon := \{y \in X \mid \psi(y) > \psi(x) - \varepsilon\} = \psi^{-1}\big((\psi(x) - \varepsilon, +\infty)\big).$$

Como $\psi$ es semicontinua inferiormente, el conjunto $V_\varepsilon$ es abierto. Dado que $x_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_\varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto,

$$\psi(x_n) > \psi(x) - \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

lo que implica $\liminf_{n\to\infty} \psi(x_n) \geq \psi(x) - \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $\psi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \psi(x_n)$.
Recíprocamente, supongamos que $\psi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \psi(x_n)$, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$. Probemos que $\psi$ es semicontinua inferiormente. Sea $a \in \mathbb{R}$ y consideremos el conjunto $F := \{x \in X \mid \psi(x) \leq a\}$. Afirmamos que $F$ es cerrado. Supongamos, por contradicción, que no lo es. Entonces existe $x_0 \in \overline{F} \setminus F$, es decir, $x_0$ es punto de adherencia de $F$ pero $\psi(x_0) > a$. Como $X$ satisface el primer axioma de numerabilidad, $x_0$ tiene una base numerable de vecindades abiertas $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $V_n := \bigcap_{j=1}^{n} U_j$. Dado que $x_0 \in \overline{F}$, podemos elegir $x_n \in F \cap V_n$. Si $U$ es una vecindad de $x_0$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $U_j \subseteq U$; para todo $n \geq j$, tenemos $x_n \in V_n \subseteq U_j \subseteq U$. Por lo tanto, $x_n \to x_0$. Por hipótesis, $\psi(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \psi(x_n)$.
Dado que $x_n \in F$, se tiene $\psi(x_n) \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $\liminf_{n\to\infty} \psi(x_n) \leq a$. En consecuencia, $\psi(x_0) \leq a$, lo cual contradice que $\psi(x_0) > a$. Por lo tanto, $F$ es cerrado para todo $a \in \mathbb{R}$, lo que implica que $\psi$ es semicontinua inferiormente. □

**Teorema 30.1.5.** Sea $X$ un espacio topológico compacto no vacío y sea $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional semicontinuo inferiormente. Entonces, $\varphi$ está acotado inferiormente y alcanza su ínfimo, es decir, existe $u_0 \in X$ tal que

$$\varphi(u_0) = \inf_{x\in X} \varphi(x).$$

*Demostración.* Observemos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}((-n,+\infty))$.
Como $\varphi$ es semicontinua inferiormente, cada conjunto $\varphi^{-1}((-n,+\infty))$ es abierto en $X$.
Dado que $X$ es compacto, la cubierta anterior admite una subcubierta finita. Si $n_0 \in \mathbb{N}$ es el mayor de sus índices, entonces $X = \bigcup_{n=1}^{n_0} \varphi^{-1}((-n,+\infty))$.
Por lo tanto, para todo $x \in X$ se tiene $\varphi(x) > -n_0$, lo que implica que $\varphi$ está acotada inferiormente.
Como $X \neq \varnothing$, el conjunto $\varphi(X)$ es no vacío y está acotado inferiormente. La completitud de $\mathbb{R}$ proporciona entonces un número real $c = \inf_{x\in X} \varphi(x)$.
Supongamos, por contradicción, que $\varphi(x) > c$ para todo $x \in X$. Entonces, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\left(c + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)$.
Nuevamente, la compacidad proporciona una subcubierta finita. Tomando $k \in \mathbb{N}$ como el mayor índice de esa subcubierta, obtenemos $X = \bigcup_{n=1}^{k} \varphi^{-1}\left(\left(c + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)$.
De aquí se deduce que $\varphi(x) > c + \frac{1}{k}$, para todo $x \in X$, lo cual implica que $c + \frac{1}{k}$ es una cota inferior de $\varphi(X)$. Esto contradice la definición de ínfimo, ya que implicaría $c \geq c + \frac{1}{k}$. Por lo tanto, existe $u_0 \in X$ tal que $\varphi(u_0) = \inf_{x\in X} \varphi(x)$.

□

**Definición 30.1.6.** Sea $X$ un espacio normado. Una función $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice débilmente semicontinua inferiormente si es semicontinua inferiormente respecto de la topología débil $\sigma(X, X')$. En particular, si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ satisface $x_n \rightharpoonup x$ en $X$, entonces

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n).$$

La implicación de la semicontinuidad inferior a la desigualdad para sucesiones no requiere el primer axioma de numerabilidad: basta la primera parte de la prueba del Lema 30.1.4. La implicación recíproca sí necesita una justificación adicional cuando se trabaja con la topología débil.

**Definición 30.1.7.** Sea $X$ un espacio normado. Un funcional $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente si, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y todo $x \in X$ tales que $x_n \rightharpoonup x$, se cumple

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n).$$

La topología débil de un espacio de Banach de dimensión infinita no tiene por qué satisfacer el primer axioma de numerabilidad. Por ello mantendremos distintas las dos nociones. En las aplicaciones bastará comprobar la condición secuencial y utilizar una versión del método directo formulada para ella.

**Teorema 30.1.8.** (Método directo del cálculo de variaciones) Sea $E$ un espacio de Banach reflexivo y sea $\varphi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional que cumple:

(i) $\varphi$ es débilmente semicontinua inferiormente;

(ii) $\varphi$ es coercivo, es decir, $\varphi(u) \to +\infty$ cuando $\|u\| \to +\infty$: para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $R_a > 0$ tal que $\varphi(u) > a$ para todo $u \in E$ con $\|u\| \geq R_a$.

Entonces, $\varphi$ está acotado inferiormente y alcanza su ínfimo; es decir, existe $u_0 \in E$ tal que

$$\varphi(u_0) = \inf_{u \in E} \varphi(u).$$

*Demostración.* Sea $R > 0$ tal que

$$\varphi(u) \geq \varphi(0), \quad \text{para todo } u \in E \text{ con } \|u\| \geq R.$$

Como $E$ es un espacio de Banach reflexivo, el Teorema B.11.38 implica que la bola cerrada $\overline{B}_{d_E}(0,R) = \{u \in E \mid \|u\| \leq R\}$, donde $d_E$ es la métrica inducida por la norma, es débilmente compacta.
Además, la restricción de $\varphi$ a $\overline{B}_{d_E}(0,R)$ es débilmente semicontinua inferiormente. Por lo tanto, aplicando el Teorema 30.1.5, se deduce que $\varphi$ está acotado inferiormente en $\overline{B}_{d_E}(0,R)$ y existe $u_0 \in \overline{B}_{d_E}(0,R)$ tal que $\varphi(u_0) = \inf_{u \in \overline{B}_{d_E}(0,R)} \varphi(u)$.
Por la elección de $R$, se tiene que para todo $u \in E$ con $\|u\| \geq R$, $\varphi(u) \geq \varphi(0) \geq \varphi(u_0)$, lo cual implica que $\varphi(u_0) = \inf_{u \in E} \varphi(u)$.

□

La coercividad equivale a que cada conjunto de subnivel $\{u \in E \mid \varphi(u) \leq a\}$, con $a \in \mathbb{R}$, sea acotado. En efecto, el radio $R_a$ de la definición encierra ese subnivel en una bola. Recíprocamente, si el subnivel está contenido en una bola de radio $r_a$, cualquier $R_a > r_a$ verifica la condición de coercividad. Esta observación permite trabajar directamente con sucesiones minimizantes.

**Teorema 30.1.9.** (Forma secuencial del método directo) Sea $E$ un espacio de Banach reflexivo y sea $\varphi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional coercivo y secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente. Entonces $\varphi$ está acotado inferiormente y existe $u_0 \in E$ tal que

$$\varphi(u_0) = \inf_{u \in E} \varphi(u).$$

*Demostración.* Primero descartamos que el ínfimo sea $-\infty$. Si lo fuera, para cada $n \in \mathbb{N}$ podríamos elegir $u_n \in E$ con $\varphi(u_n) \leq -n$. Toda la sucesión estaría contenida en el subnivel $\{u \in E \mid \varphi(u) \leq -1\}$, que es acotado por coercividad. El Corolario B.11.39 proporciona una subsucesión $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ y un punto $u \in E$ tales que $u_{n_j} \rightharpoonup u$. La semicontinuidad secuencial daría

$$\varphi(u) \leq \liminf_{j \to \infty} \varphi(u_{n_j}) = -\infty,$$

lo cual es imposible porque $\varphi$ toma valores reales. Por consiguiente, $c := \inf_{u \in E} \varphi(u)$ es finito; además, $c \leq \varphi(0) < +\infty$.

Por la definición de ínfimo podemos elegir ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, un punto $v_n \in E$ tal que

$$c \le \varphi(v_n) < c + \frac{1}{n}.$$

Esta sucesión está contenida en el subnivel de altura $c+1$ y, por tanto, es acotada. Aplicando de nuevo el corolario citado, obtenemos $u_0 \in E$ y una subsucesión $(v_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $v_{n_j} \rightharpoonup u_0$. Entonces

$$c \le \varphi(u_0) \le \liminf_{j\to\infty} \varphi(v_{n_j}) = c.$$

Las dos desigualdades obligan a que $\varphi(u_0) = c$. □

La extracción de subsucesiones débilmente convergentes se apoya en Eberlein–Šmulian y en la reflexividad, mediante el corolario citado del apéndice B. Esta es también la formulación del método directo empleada en [138, cap. I, §1, teorema 1.2].

Bajo las hipótesis del último teorema se puede recuperar, además, la semicontinuidad inferior topológica. Fijemos $a \in \mathbb{R}$ y pongamos $K_a := \{u \in E \mid \varphi(u) \le a\}$. Si $K_a$ no es vacío, toda sucesión en $K_a$ es acotada y admite una subsucesión débilmente convergente en $E$. La semicontinuidad secuencial asegura que su límite sigue en $K_a$. Así, $K_a$ es secuencialmente débilmente compacto y, por el Teorema B.11.36, débilmente compacto. Como la topología débil es de Hausdorff, $K_a$ es débilmente cerrado. El subnivel vacío también es cerrado, de modo que todos los subniveles lo son. La Proposición B.11.15 implica entonces que $\varphi$ es débilmente semicontinuo inferiormente. En este argumento intervienen tanto la coercividad como la reflexividad; no se ha supuesto que ambas nociones de semicontinuidad coincidan en una topología débil arbitraria.

Pasemos a una aplicación en la que la energía no es convexa. Su parte cuadrática será débilmente semicontinua inferiormente, y un encaje compacto permitirá tratar la parte restante.

## 30.2 Resolución de un problema sublineal

Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía de dimensión $n \ge 1$, con frontera suave, y supongamos que cada componente conexa de $M$ tiene frontera no vacía. Trabajaremos con funciones reales. La condición sobre las componentes permite controlar la norma de una función con traza nula a partir de su gradiente.

Usaremos la desigualdad de Poincaré del Teorema 9.6.8, aplicada al haz trivial real con $p = 2$. Su hipótesis sobre cada componente es precisamente la que acabamos de imponer, y su rango $1 \le p < \infty$ comprende este exponente para toda dimensión $n \ge 1$. La constante depende de $M$ y $\mathbf{g}$.

Consideremos el problema sublineal

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{g}} u = |u|^{q-2}u & \text{en } M, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M, \end{cases} \tag{30.1}$$

donde $1 < q < 2$. Usamos el signo $\Delta_{\mathbf{g}} = \operatorname{div}_{\mathbf{g}} \nabla$, de modo que $-\Delta_{\mathbf{g}}$ es no negativo con condición de Dirichlet. La expresión $|t|^{q-2}t$ se define como cero cuando $t = 0$; con esta convención es continua en toda $\mathbb{R}$. La condición $u = 0$ sobre $\partial M$ se entenderá en el sentido de trazas.

El objetivo es encontrar $u \in W^{1,2}_0(M)$ tal que

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M |u|^{q-2} u\, v \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

para toda $v \in W_0^{1,2}(M)$. El funcional de energía asociado es

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \frac{1}{q}\int_M |u|^q \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

**Proposición 30.2.1.** (Aplicación al problema sublineal) Supongamos que cada componente conexa de la variedad compacta $M$ tiene frontera suave no vacía. Si $1 < q < 2$, el funcional $I$ alcanza su mínimo global en $W_0^{1,2}(M)$, y cualquier minimizador es una solución débil no trivial del problema (30.1).

*Demostración.* La no linealidad $f(x,t) = |t|^{q-2}t$ satisface las hipótesis de la Proposición 29.3.1 con exponente $r = q$: es continua y su crecimiento es $|t|^{q-1}$, con $1 < q < 2 \le 2^*$. Por tanto, $I \in C^1(W_0^{1,2}(M), \mathbb{R})$ y sus puntos críticos son precisamente las soluciones débiles. Más explícitamente,

$$DI(u)(v) = \int_M \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M |u|^{q-2}u\, v \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

para todos $u, v \in W_0^{1,2}(M)$. El segundo término es finito por Hölder, pues $|u|^{q-2}u \in L^{q/(q-1)}(M)$ y $v \in L^q(M)$. Sea $C_P$ la constante de Poincaré del Teorema 9.6.8. Como $M$ tiene volumen finito, Hölder y Poincaré dan

$$\|u\|_{L^q(M)} \le \lambda_{\mathbf{g}}(M)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(M)}, \qquad \|u\|_{W^{1,2}(M)}^2 \le (1 + C_P^2)\|\nabla u\|_{L^2(M,TM)}^2.$$

En consecuencia, podemos tomar $C_1 := \dfrac{1}{2(1+C_P^2)}$ y $C_2 := \dfrac{1}{q}\lambda_{\mathbf{g}}(M)^{1-q/2}$ para obtener

$$I(u) \ge C_1\|u\|_{W^{1,2}(M)}^2 - C_2\|u\|_{W^{1,2}(M)}^q.$$

Si $t := \|u\|_{W^{1,2}(M)} > 0$, el lado derecho de esta estimación es $t^2(C_1 - C_2 t^{q-2})$. Como $q - 2 < 0$, existe $R > 0$ tal que $C_2 t^{q-2} \le C_1/2$ para todo $t \ge R$. Así, $I(u) \ge C_1\|u\|_{W^{1,2}(M)}^2/2$ cuando $\|u\|_{W^{1,2}(M)} \ge R$, lo que prueba la coercividad.

Para estudiar el paso al límite, sea $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq W_0^{1,2}(M)$ una sucesión tal que $u_j \rightharpoonup u$ en ese espacio. Por la Proposición B.11.20, existe $R_0 > 0$ tal que $\|u_j\|_{W^{1,2}(M)} \le R_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. La estimación anterior implica $I(u_j) \ge -C_2 R_0^q$, mientras que la definición de $I$ da $I(u_j) \le R_0^2/2$. Por tanto, $\ell := \liminf_{j\to\infty} I(u_j)$ es un número real. Elegimos una subsucesión $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $I(u_{j_k}) \to \ell$. El Corolario 9.4.29, aplicado al haz trivial real con $m = 1$ y $p = 2$, da la compacidad de $W^{1,2}(M) \hookrightarrow L^2(M)$. Puesto que $\lambda_{\mathbf{g}}(M) < \infty$, Hölder proporciona el encaje continuo

$$\|w\|_{L^q(M)} \le \lambda_{\mathbf{g}}(M)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2(M)} \qquad (1 < q < 2).$$

Por composición, $W^{1,2}(M) \hookrightarrow L^q(M)$ es compacto. Extrayendo de $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión, que seguiremos denotando igual, obtenemos convergencia fuerte en $L^q(M)$. Su límite es $u$: el encaje continuo en $L^q(M)$ transporta la convergencia débil de $u_{j_k}$ a la convergencia débil en $L^q(M)$, y todo límite fuerte es también límite débil. La unicidad del límite débil identifica ambos límites. En particular, $\|u_{j_k}\|_{L^q(M)} \to \|u\|_{L^q(M)}$, y por tanto

$$\int_M |u_{j_k}|^q \, d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow \int_M |u|^q \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

El operador $u \mapsto \nabla u$ es lineal y continuo de $W_0^{1,2}(M)$ en $L^2(M, TM)$, de modo que $\nabla u_{j_k} \rightharpoonup \nabla u$. La semicon-

tinuidad débil inferior de la norma, Proposición B.11.20, y la convergencia del término no lineal dan

$$I(u) \le \liminf_{k\to\infty} \left( \frac{1}{2}\|\nabla u_{j_k}\|^2_{L^2(M,TM)} - \frac{1}{q}\|u_{j_k}\|^q_{L^q(M)} \right) = \ell.$$

Así, $I$ es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente. El espacio $W^{1,2}_0(M)$ es de Hilbert, por ser un subespacio cerrado de $W^{1,2}(M)$, y en particular es reflexivo. El Teorema 30.1.9 proporciona entonces $u_0 \in W^{1,2}_0(M)$ tal que $I(u_0) = \inf_{u\in W^{1,2}_0(M)} I(u)$.

Resta demostrar que $u_0 \neq 0$. Tomemos $v \in C^\infty_c(\mathrm{Int}(M)) \setminus \{0\}$. Para $t > 0$,

$$I(tv) = \frac{t^2}{2}\int_M |\nabla v|^2_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} - \frac{t^q}{q}\int_M |v|^q\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Escribamos $A := \displaystyle\int_M |\nabla v|^2_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}$ y $B := \displaystyle\int_M |v|^q\, d\lambda_{\mathbf{g}}$. Tenemos $B > 0$, pues $v \neq 0$, y $A > 0$ por Poincaré. La igualdad anterior se transforma en $I(tv) = t^q(At^{2-q}/2 - B/q)$. Como $2 - q > 0$, cualquier

$$0 < t_0 < \left(\frac{2B}{qA}\right)^{\frac{1}{2-q}}$$

satisface $I(t_0 v) < 0 = I(0)$. En consecuencia, $I(u_0) \le I(t_0 v) < 0$ y $u_0 \neq 0$. Para cada $v \in W^{1,2}_0(M)$, el mapeo real $t \mapsto I(u_0 + tv)$ tiene un mínimo en $t = 0$, por lo que su derivada allí es cero. Así, $DI(u_0)(v) = 0$ para todo $v \in W^{1,2}_0(M)$, que es la identidad de solución débil anunciada. □

Si sólo se supusiera $\partial M \neq \varnothing$, podría haber una componente cerrada $M_0$. Para la función $u_t$ que vale $t$ en $M_0$ y cero en las demás componentes tendríamos

$$I(u_t) = -\frac{\lambda_{\mathbf{g}}(M_0)}{q}|t|^q \longrightarrow -\infty \qquad \text{cuando } |t| \to \infty.$$

En ese caso la energía no posee mínimo global sobre $W^{1,2}_0(M)$. Sin embargo, la existencia de una solución débil no trivial aún puede obtenerse si hay alguna componente con frontera: se aplica la proposición en esa componente y se prolonga la solución por cero a las restantes. La identidad débil en $M$ se reduce a la identidad en la componente elegida, porque tanto la función como su gradiente se anulan en las otras. Esta prolongación no afirma que la solución minimice la energía sobre todo $M$.

## 30.3 Ejercicios

**Ejercicio 30.3.1.** Sea $E$ un espacio de Banach reflexivo y sea $C \subset E$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Probar que si $\psi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional débilmente semicontinuo inferiormente y coercivo, entonces $\psi$ alcanza su ínfimo en $C$, es decir, existe $x_0 \in C$ tal que

$$\psi(x_0) = \inf_{x\in C} \psi(x).$$

*Sugerencia.* El Teorema B.11.16 implica que $C$ es débilmente cerrado. Repita la prueba secuencial del método directo con sucesiones contenidas en $C$; sus límites débiles también pertenecerán a $C$. Para acotar

superiormente el ínfimo, use el valor de $\psi$ en un punto fijo de $C$, que existe porque $C \neq \varnothing$.

**Ejercicio 30.3.2.** Sea $E$ un espacio de Hilbert real y sea $a\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua que satisface la condición de coercividad

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \text{para todo } u \in E,$$

para algún $\alpha > 0$. Sea además $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo.
Dado un conjunto convexo, cerrado y no vacío $C \subset E$, demostrar que existe un único $u_0 \in C$ tal que

$$\psi(u_0) = \inf_{u \in C} \psi(u),$$

donde el funcional $\psi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$\psi(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - f(u).$$

*Sugerencia.* No es necesario suponer que $a$ es simétrica. Defina $a_s(u,v) := (a(u,v) + a(v,u))/2$ y observe que $a(u,u) = a_s(u,u)$. La parte cuadrática es continua y estrictamente convexa; por el Corolario B.11.17, es débilmente semicontinua inferiormente. Para precisar la unicidad, compruebe que

$$\psi((1-t)u + tv) = (1-t)\psi(u) + t\psi(v) - \frac{t(1-t)}{2} a(v-u, v-u)$$

para todos $u, v \in E$ y todo $t \in (0,1)$. Caracterice además el mínimo por $a_s(u_0, v - u_0) \geq f(v - u_0)$ para todo $v \in C$.

**Ejercicio 30.3.3.** Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{30.2}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio acotado. Se trabaja en $W_0^{1,2}(\Omega)$, y la condición de Dirichlet se entiende mediante la definición de este espacio como la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,2}(\Omega)$. Esta formulación no requiere atribuir una traza puntual a una frontera arbitraria.

(a) Definir un funcional de energía asociado al problema (30.2) tal que, si dicho funcional es de clase $C^1$, entonces sus puntos críticos son soluciones débiles de (30.2).

(b) Demostrar que dicho funcional es de clase $C^1$.

*Sugerencia.* Use $F(t) = t^3/3$, cuya derivada es $t^2$. El potencial $|t|^3/3$ tendría una derivada distinta. El encaje $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$ permite controlar la integral del potencial y su derivada. Compruebe también que esta energía tiende a $-\infty$ a lo largo de $tv$, cuando $t \to +\infty$ y $v \in C_c^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ es no negativa. Así se distingue la formulación variacional de las hipótesis necesarias para obtener un mínimo global.

**Ejercicio 30.3.4.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía de dimensión $n \geq 1$, con frontera suave, y suponga que cada componente conexa tiene frontera no vacía. Sea $1 < q < 2$. Suponga que en $H_0^2(M)$

se cumple la estimación elíptica

$$\|u\|_{H^2(M)} \le C\|\Delta_{\mathbf{g}} u\|_{L^2(M)}.$$

Aquí $H_0^2(M) = W_0^{2,2}(M)$, y $\nu$ es la normal exterior unitaria. Las condiciones $u = 0$ y $\partial_\nu u = 0$ se interpretan en el sentido de trazas: el Teorema 9.4.23 exige anular las trazas hasta orden uno, y las derivadas tangenciales de la traza nula de $u$ también se anulan. Considere el problema con condiciones de frontera empotradas

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{g}}^2 u = |u|^{q-2}u & \text{en } M, \\ u = 0, \quad \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases} \tag{30.3}$$

(a) Formule rigurosamente la noción de solución débil en $H_0^2(M)$.

(b) Demuestre que el funcional

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_M |\Delta_{\mathbf{g}} u|^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \frac{1}{q}\int_M |u|^q \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$

está bien definido y pertenece a $C^1(H_0^2(M), \mathbb{R})$, y calcule $DI(u)$.

(c) Pruebe que $I$ es coercivo y secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente, y deduzca que alcanza su mínimo global.

(d) Demuestre que el minimizador es no nulo y constituye una solución débil de (30.3).

*Sugerencia.* Use la estimación elíptica para trabajar con la norma $\|\Delta_{\mathbf{g}} u\|_{L^2(M)}$, el encaje compacto de $H_0^2(M)$ en $L^q(M)$ y el hecho de que $q < 2$. Para probar que el minimizador no es nulo, evalúe $I(tv)$ con $v \in C_c^\infty(\mathrm{Int}(M)) \setminus \{0\}$ y $t > 0$ pequeño.

**Ejercicio 30.3.5.** Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía de dimensión $n \ge 1$, con frontera suave, tal que cada componente conexa tiene frontera no vacía. Sea $-\Delta_{\mathbf{g},D}$ la realización autoadjunta no negativa de Dirichlet del laplaciano. Sean $0 < s < 1$ y $1 < q < 2$, y defina $H_{0,D}^s(M) := \mathcal{D}((-\Delta_{\mathbf{g},D})^{s/2})$. Suponga que es un espacio de Hilbert para la norma

$$\|u\|_{H_{0,D}^s(M)} := \|(-\Delta_{\mathbf{g},D})^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2(M)}$$

y que la inclusión $H_{0,D}^s(M) \hookrightarrow L^q(M)$ es compacta. Considere

$$(-\Delta_{\mathbf{g},D})^s u = |u|^{q-2}u \quad \text{en } M. \tag{30.4}$$

Formule la identidad débil correspondiente y demuestre, mediante el método directo, que existe una solución débil no trivial.
*Sugerencia.* Estudie el funcional

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_M |(-\Delta_{\mathbf{g},D})^{\frac{s}{2}} u|^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \frac{1}{q}\int_M |u|^q \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Pruebe por separado que está bien definido, que es de clase $C^1$, que es coercivo y que es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente. La compacidad supuesta proporciona convergencia fuerte en

$L^q(M)$ a lo largo de una subsucesión de cualquier sucesión débilmente convergente en $H^s_{0,D}(M)$. Aplique el Teorema 30.1.9. El espacio $H^s_{0,D}(M)$ está definido mediante la realización espectral de Dirichlet: no se añade una condición de traza puntual para todo $s \in (0,1)$ ni se lo identifica, sin otro resultado, con la cerradura de $C_c^\infty(\mathrm{Int}(M))$ en una norma fraccionaria distinta. En la formulación débil, las potencias de orden $s/2$ actúan sobre $u$ y sobre la función de prueba; no se exige inicialmente que $u$ pertenezca a $\mathcal{D}((-\Delta_{\mathbf{g},D})^s)$.

**Ejercicio 30.3.6.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía de dimensión $n \geq 1$, con frontera suave, tal que cada componente conexa tiene frontera no vacía. Sea $1 < q < 2$ y sea $\mathscr{M}\colon [0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ continua y no decreciente. Suponga que existe $m_0 > 0$ tal que $\mathscr{M}(t) \geq m_0$ para todo $t \geq 0$, y defina

$$\widehat{\mathscr{M}}(t) := \int_0^t \mathscr{M}(s)\,ds.$$

Considere el problema

$$\begin{cases} -\mathscr{M}\left(\displaystyle\int_M |\nabla u|^2_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\right)\Delta_{\mathbf{g}} u = |u|^{q-2}u & \text{en } M, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases} \tag{30.5}$$

Demuestre que el funcional

$$I(u) := \frac{1}{2}\widehat{\mathscr{M}}\left(\int_M |\nabla u|^2_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\right) - \frac{1}{q}\int_M |u|^q\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad u \in W^{1,2}_0(M),$$

es de clase $C^1$, calcule su derivada y pruebe que posee un minimizador global no nulo, el cual es una solución débil de (30.5).

*Sugerencia.* La monotonía de $\mathscr{M}$ implica que $\widehat{\mathscr{M}}$ es convexa, mientras que $\mathscr{M} \geq m_0$ da $\widehat{\mathscr{M}}(t) \geq m_0 t$. Además, $\widehat{\mathscr{M}}$ es creciente porque $\mathscr{M} > 0$. Combine esa propiedad con la semicontinuidad inferior de $\|\nabla u\|^2_{L^2(M,TM)}$, y use el encaje compacto $W^{1,2}_0(M) \hookrightarrow L^q(M)$ para el término no lineal. Aplique la regla de la cadena para calcular $DI$. Para obtener un valor negativo de la energía, fije $v \neq 0$ y observe que, por continuidad de $\mathscr{M}$ en 0, existe $C_0 > 0$ tal que $\widehat{\mathscr{M}}(t^2\|\nabla v\|^2_{L^2(M,TM)}) \leq C_0 t^2 \|\nabla v\|^2_{L^2(M,TM)}$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeño. Compare entonces $t^2$ con $t^q$.

**Ejercicio 30.3.7.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía, de dimensión positiva, con o sin frontera suave, y sea $K\colon M \times M \longrightarrow (0,+\infty)$ un núcleo medible y simétrico. Suponga que

$$\|u\|^2_{X_K} := \int_M \int_M |u(x) - u(y)|^2 K(x,y)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$$

define una norma en un espacio de Hilbert real no nulo $X_K(M)$ de funciones medibles, identificadas cuando coinciden casi en todas partes, y que, para cierto $1 < q < 2$, la inclusión $X_K(M) \hookrightarrow L^q(M)$ es continua, inyectiva y compacta. La condición de que sea una norma excluye de $X_K(M)$ las constantes no nulas, porque su diferencia $u(x) - u(y)$ sería cero. No se trabaja con clases de funciones módulo constantes: el término $\displaystyle\int_M |u|^q\, d\lambda_{\mathbf{g}}$ no estaría bien definido sobre ese cociente. Considere la forma bilineal

$$\mathcal{B}_K(u,v) := \int_M \int_M (u(x) - u(y))(v(x) - v(y))K(x,y)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(x)\, d\lambda_{\mathbf{g}}(y).$$

(a) Defina $\mathcal{L}_K\colon X_K(M) \longrightarrow X_K(M)'$ por $\langle \mathcal{L}_K u, v\rangle := \mathcal{B}_K(u,v)$ para todos $u, v \in X_K(M)$ y formule la ecuación débil $\mathcal{L}_K u = |u|^{q-2}u$ como igualdad en $X_K(M)'$. En el lado derecho, una función de $L^{q/(q-1)}(M)$ actúa sobre $v \in X_K(M)$ mediante integración.

(b) Demuestre que
$$I(u) := \frac{1}{2}\mathcal{B}_K(u,u) - \frac{1}{q}\int_M |u|^q \, d\lambda_{\mathbf{g}}$$
pertenece a $C^1(X_K(M),\mathbb{R})$ y que sus puntos críticos son precisamente las soluciones débiles.

(c) Aplique el método directo para probar la existencia de una solución débil no trivial.

*Sugerencia.* Cauchy–Schwarz en el espacio de medida $K(x,y)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(x)\,d\lambda_{\mathbf{g}}(y)$ da $|\mathcal{B}_K(u,v)| \le \|u\|_{X_K}\|v\|_{X_K}$. La parte cuadrática es convexa y débilmente semicontinua inferiormente. Para la parte no lineal, use el encaje compacto supuesto y la diferenciabilidad del funcional $u \mapsto \|u\|_{L^q(M)}^q/q$. La no trivialidad se obtiene comparando $I(tv)$ con $I(0)$ para un elemento fijo $v \in X_K(M)\setminus\{0\}$ y $t>0$ suficientemente pequeño. La ecuación sólo se afirma contra funciones de prueba de $X_K(M)$; si este espacio incorpora una restricción, no se deduce sin más una identidad contra todas las funciones de prueba suaves.

**Ejercicio 30.3.8.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía de dimensión $n \ge 1$ con frontera suave, y suponga que cada componente conexa tiene frontera no vacía. Sean $1 < p < \infty$ y $1 < q < p$, y considere
$$\begin{cases} -\Delta_{p,\mathbf{g}} u = |u|^{q-2}u & \text{en } M,\\ u = 0 & \text{sobre } \partial M, \end{cases} \qquad \Delta_{p,\mathbf{g}} u := \operatorname{div}_{\mathbf{g}}\big(|\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2}\nabla u\big).$$
Formule el problema débil en $W_0^{1,p}(M)$ y demuestre que posee una solución débil no trivial mediante la minimización de
$$I(u) := \frac{1}{p}\int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \frac{1}{q}\int_M |u|^q \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$
*Sugerencia.* El Corolario 29.1.11 y la regla de la cadena dan la diferenciabilidad de los dos términos. Use el Teorema 9.6.8 para el haz trivial real. El Corolario 9.4.29, con $m=1$, da la compacidad $W^{1,p}(M) \hookrightarrow L^p(M)$ para todo $1 \le p < \infty$. Como $q < p$ y el volumen es finito, su composición con $L^p(M) \hookrightarrow L^q(M)$ da el encaje compacto requerido. La convexidad del término principal proporciona su semicontinuidad débil inferior; $1 < p < \infty$ garantiza la reflexividad de $W_0^{1,p}(M)$. Aplique el Teorema 30.1.9, y compare $t^p$ con $t^q$ para probar la no trivialidad. En la expresión del $p$-laplaciano se define $|\xi|^{p-2}\xi = 0$ cuando $\xi = 0$, y todas las derivadas del problema débil se entienden en el sentido de distribuciones.

# 31

# Palais–Smale, pseudogradientes y deformaciones

El método directo produce puntos críticos mediante minimización. Los métodos minimax requieren un mecanismo distinto: hay que deformar los subniveles de un funcional en las bandas que no contienen puntos críticos. En un espacio de Hilbert esta deformación puede construirse, bajo regularidad suficiente, con el flujo del gradiente negativo. En un espacio de Banach general no existe una identificación canónica con el dual y, por ello, se sustituye el gradiente por un campo de descenso que sólo conserva las estimaciones indispensables.

Construiremos esos campos y demostraremos el lema de deformación primero en espacios de Banach y después en variedades Banach–Finsler completas. La condición de Palais–Smale aparecerá exactamente en el punto donde se necesita impedir que una sucesión casi crítica escape sin converger. La exposición sigue a Struwe [138, cap. II, §3, pp. 81–87]: el caso lineal corresponde al Lema II.3.2 y al Teorema II.3.4, pp. 81–84; la versión intrínseca, a §§II.3.7–II.3.10 y al Teorema II.3.11, pp. 85–87.

**Palais y Smale: compacidad para buscar puntos de silla**

La teoría de Morse finito–dimensional utiliza el flujo del gradiente para deformar subniveles sin atravesar puntos críticos. Palais y Smale identificaron una condición de compacidad que permite conservar esta estrategia en espacios infinitodimensionales. Una sucesión con energía controlada y derivada pequeña debe poseer una subsucesión convergente. Cuando esto ocurre, los cambios topológicos de los subniveles quedan ligados a puntos críticos reales y los argumentos minimax adquieren contenido analítico [113, 112].

## 31.1 Subniveles, puntos críticos y condición de Palais–Smale

Sea $X$ un espacio de Banach real y sea $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. Denotamos por $X'$ el dual topológico de $X$ y por $\|DI(u)\|_{X'}$ la norma dual de la derivada de $I$ en $u$.

**Definición 31.1.1.** (Conjuntos críticos y subniveles) El conjunto crítico de $I$, el conjunto crítico a nivel $\beta \in \mathbb{R}$

y el subnivel abierto de altura $a \in \mathbb{R}$ son, respectivamente,

$$\mathrm{Crit}(I) := \{u \in X \mid DI(u) = 0\}, \qquad K_\beta := \{u \in X \mid I(u) = \beta,\ DI(u) = 0\},$$

y

$$I^{<a} := \{u \in X \mid I(u) < a\}.$$

El subnivel cerrado se denota por $I^{\le a} := \{u \in X \mid I(u) \le a\}$.

**Definición 31.1.2.** (Condición de Palais–Smale) Una sucesión $(u_j) \subset X$ es una *sucesión de Palais–Smale* para $I$ si $(I(u_j))$ está acotada y

$$\|DI(u_j)\|_{X'} \longrightarrow 0.$$

El funcional $I$ satisface la condición de Palais–Smale, abreviada *(PS)*, si toda sucesión de Palais–Smale posee una subsucesión convergente en norma.
Para $\beta \in \mathbb{R}$, se dice que $I$ satisface $(PS)_\beta$ si toda sucesión $(u_j)$ tal que

$$I(u_j) \longrightarrow \beta, \qquad \|DI(u_j)\|_{X'} \longrightarrow 0$$

posee una subsucesión convergente en $X$.

La condición global (PS) implica $(PS)_\beta$ para todo $\beta$. La versión por niveles es exactamente la compacidad que interviene en una deformación alrededor de una altura fija. Estas formulaciones y su relación con la condición original de Palais y Smale se discuten en [138, cap. II, §2, pp. 77–80].

Para $\delta, \rho > 0$ ponemos

$$N_{\beta,\delta} := \{u \in X \,\big|\, |I(u) - \beta| < \delta,\ \|DI(u)\|_{X'} < \delta\},$$
$$U_{\beta,\rho} := \left\{u \in X \,\middle|\, \mathrm{dist}(u, K_\beta) < \rho\right\}.$$

Si $K_\beta = \varnothing$, adoptamos el convenio $U_{\beta,\rho} = \varnothing$.

**Lema 31.1.3.** (Consecuencia local de Palais–Smale) Supongamos que $I$ satisface $(PS)_\beta$. Entonces:

(a) $K_\beta$ es compacto;

(b) $(U_{\beta,\rho})_{\rho>0}$ es un sistema fundamental de vecindades de $K_\beta$;

(c) $(N_{\beta,\delta})_{\delta>0}$ es un sistema fundamental de vecindades de $K_\beta$.

En particular, si $N$ es una vecindad abierta de $K_\beta$, existen $\delta, \rho \in (0,1]$ tales que

$$N \supseteq U_{\beta,2\rho} \supseteq U_{\beta,\rho} \supseteq N_{\beta,\delta}. \tag{31.1}$$

*Demostración.* Toda sucesión en $K_\beta$ es una sucesión $(PS)_\beta$. Por hipótesis posee una subsucesión convergente, y la continuidad de $I$ y $DI$ muestra que su límite pertenece a $K_\beta$. Como $X$ es metrizable, $K_\beta$ es compacto.
Sea $N$ una vecindad abierta de $K_\beta$. Si ningún $U_{\beta,\rho}$ estuviera contenido en $N$, existirían $\rho_j \to 0^+$ y $u_j \in U_{\beta,\rho_j} \setminus N$. Para cada $j$ podríamos escoger $v_j \in K_\beta$ con $\|u_j - v_j\| < 2\rho_j$. La compacidad de $K_\beta$ permitiría suponer

que $v_j \to v \in K_\beta$; entonces también $u_j \to v$, lo cual contradice que $N$ es abierto.
Si ningún $N_{\beta,\delta}$ estuviera contenido en $N$, podríamos elegir $u_j \in N_{\beta,\frac{1}{j}} \setminus N$. Esta sería una sucesión $(PS)_\beta$. Una subsucesión convergería a un punto de $K_\beta \subset N$, contradicción. Esto prueba las tres afirmaciones. Finalmente elegimos primero $\rho \in (0,1]$ de modo que $U_{\beta,2\rho} \subseteq N$ y después $\delta \in (0,1]$ de modo que $N_{\beta,\delta} \subseteq U_{\beta,\rho}$. □

**Corolario 31.1.4.** (Separación uniforme de la derivada) Si se cumplen las hipótesis del lema anterior y $N$ es una vecindad abierta de $K_\beta$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|I(u) - \beta| < \delta, \quad u \notin N \quad \Longrightarrow \quad \|DI(u)\|_{X'} \geq \delta.$$

*Demostración.* Tomemos $\delta$ de modo que $N_{\beta,\delta} \subseteq N$. Si las dos primeras condiciones se cumplen y $\|DI(u)\|_{X'} < \delta$, entonces $u \in N_{\beta,\delta} \subseteq N$, que es una contradicción. □

## 31.2 Construcción de pseudogradientes en espacios de Banach

Escribamos

$$\widetilde{X} := X \setminus \mathrm{Crit}(I).$$

Este conjunto es abierto porque $DI$ es continuo.

**Definición 31.2.1.** (Campo pseudogradiente) Un campo $v\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ es un *pseudogradiente* para $I$ si es localmente Lipschitz y, para todo $u \in \widetilde{X}$, satisface

$$\|v(u)\| < 2\min\{\|DI(u)\|_{X'}, 1\}, \tag{31.2}$$

$$DI(u)[v(u)] > \min\{\|DI(u)\|_{X'}, 1\}\|DI(u)\|_{X'}. \tag{31.3}$$

La segunda desigualdad expresa que $-v$ es una dirección de descenso. La primera proporciona simultáneamente control cerca de los puntos críticos y una cota global de velocidad. Este reemplazo del gradiente por una dirección de descenso controlada es el mecanismo funcional utilizado en [112].

**Teorema 31.2.2.** (Existencia de pseudogradientes) Todo funcional $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ admite un campo pseudogradiente en $\widetilde{X}$.

*Demostración.* Fijemos $u \in \widetilde{X}$ y escribamos

$$q_u := \|DI(u)\|_{X'} > 0, \qquad m_u := \min\{q_u, 1\}.$$

Por la definición de la norma dual existe $z_u \in X$, con $\|z_u\| = 1$, tal que, después de cambiar su signo si es necesario,

$$DI(u)[z_u] > \frac{3}{4} q_u.$$

Definamos $w_u := \frac{3}{2} m_u z_u$. Entonces

$$\|w_u\| = \frac{3}{2} m_u < 2m_u, \qquad DI(u)[w_u] > \frac{9}{8} m_u q_u > m_u q_u.$$

Como $DI$ es continuo y las desigualdades son estrictas, existe una vecindad abierta $W_u \subseteq \widetilde{X}$ de $u$ tal que, para todo $y \in W_u$,

$$\|w_u\| < 2\min\{\|DI(y)\|_{X'}, 1\}, \tag{31.4}$$

$$DI(y)[w_u] > \min\{\|DI(y)\|_{X'}, 1\}\,\|DI(y)\|_{X'}. \tag{31.5}$$

El espacio métrico $\widetilde{X}$ es paracompacto por el Teorema 24.8.8. Elegimos un refinamiento abierto localmente finito $(A_i)_{i\in J}$ de la cubierta $(W_u)_{u\in\widetilde{X}}$ y, para cada $i$, un punto $u_i$ tal que $A_i \subseteq W_{u_i}$. Aplicando el encogimiento localmente finito del Lema 24.8.7, obtenemos una cubierta abierta $(B_i)_{i\in J}$ de $\widetilde{X}$ tal que

$$\overline{B_i}^{\widetilde{X}} \subseteq A_i \qquad (i \in J).$$

Este encogimiento es esencial: las funciones de distancia que se usarán a continuación tienen soporte contenido en la cerradura de $B_i$, no necesariamente en $B_i$.
Para $y \in \widetilde{X}$ pongamos

$$r_i(y) := \operatorname{dist}\bigl(y, \widetilde{X} \setminus B_i\bigr).$$

Si $B_i = \widetilde{X}$, interpretamos $r_i \equiv 1$. Cada $r_i$ es Lipschitz, es positiva precisamente en $B_i$, y

$$\operatorname{supp}(r_i) \subseteq \overline{B_i}^{\widetilde{X}} \subseteq A_i.$$

La suma $r := \displaystyle\sum_{i\in J} r_i$ es localmente finita y estrictamente positiva. Por lo tanto,

$$\varphi_i := \frac{r_i}{r}$$

define una partición de la unidad localmente Lipschitz en $\widetilde{X}$, con $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq A_i$.
Definimos

$$v(y) := \sum_{i\in J} \varphi_i(y) w_{u_i}.$$

La suma es localmente finita, luego $v$ es localmente Lipschitz. Si $\varphi_i(y) > 0$, entonces $y \in A_i \subseteq W_{u_i}$ y las desigualdades (31.4) y (31.5) valen para $w_{u_i}$ en $y$. Al tomar la combinación convexa se obtienen (31.2) y (31.3). Esto prueba el teorema. □

## 31.3 El lema de deformación en un espacio de Banach

En la literatura aparecen dos formulaciones que conviene no confundir. La primera parte de una cota uniforme para la derivada en toda una banda de energía y no necesita ninguna hipótesis de compacidad. La segunda, debida a Struwe, usa Palais–Smale para obtener esa cota fuera de una vecindad del conjunto crítico. Enunciaremos y demostraremos ambas; después precisaremos su relación lógica. La primera forma es habitual en los tratamientos cuantitativos de minimax; véase, por ejemplo, [152].

### 31.3.1 Un lema cuantitativo sin Palais–Smale

**Teorema 31.3.1.** (Lema cuantitativo de deformación) Sea $X$ un espacio de Banach real, sea $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ y fijemos $\beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $\sigma > 0$. Supongamos que

$$|I(u) - \beta| \le 2a \quad \Longrightarrow \quad \|DI(u)\|_{X'} \ge \sigma. \tag{31.6}$$

Entonces, para cada $\varepsilon \in (0, a)$, existe un mapeo continuo

$$H\colon [0,1] \times X \longrightarrow X, \qquad H_t(u) := H(t,u),$$

que satisface:

(i) $H_0 = \mathrm{id}_X$ y cada $H_t$ es un homeomorfismo de $X$;

(ii) si $|I(u) - \beta| \ge 2a$, entonces $H_t(u) = u$ para todo $t \in [0,1]$;

(iii) $t \mapsto I(H_t(u))$ es no creciente para todo $u \in X$;

(iv)
$$H_1\left(I^{\le \beta+\varepsilon}\right) \subseteq I^{\le \beta-\varepsilon};$$

(v) si $\mu := \min\{\sigma, 1\}\sigma$, entonces
$$\|H_t(u) - u\| \le \frac{4\varepsilon}{\mu} \qquad (t \in [0,1],\ u \in X).$$

En particular, la conclusión es cuantitativa tanto en la disminución de la energía como en el desplazamiento de los puntos.

*Demostración.* Sea $v$ el pseudogradiente del Teorema 31.2.2. Elegimos una función Lipschitz $\chi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que

$$\chi(s) = 1 \quad \text{si } |s-\beta| \le a, \qquad \chi(s) = 0 \quad \text{si } |s-\beta| \ge 2a.$$

Por ejemplo, en cada uno de los dos intervalos intermedios puede interpolarse linealmente. Definimos

$$e(u) := \begin{cases} -\chi(I(u))v(u), & u \notin \mathrm{Crit}(I), \\ 0, & u \in \mathrm{Crit}(I). \end{cases} \tag{31.7}$$

Veamos con cuidado que $e$ es localmente Lipschitz en todo $X$. Esta propiedad es inmediata fuera de $\mathrm{Crit}(I)$, pues $I$ es localmente Lipschitz, $\chi$ es Lipschitz y $v$ es localmente Lipschitz. Por (31.6) no hay puntos críticos en la banda cerrada $|I - \beta| \le 2a$. Por lo tanto, si $u$ es crítico, entonces $|I(u) - \beta| > 2a$; la continuidad de $I$ muestra que $\chi \circ I$ se anula en una vecindad de $u$, y allí $e \equiv 0$. Además, por (31.2),

$$\|e(u)\| \le 2 \qquad (u \in X). \tag{31.8}$$

El Teorema 25.4.5 proporciona un flujo global $\Phi\colon X \times \mathbb{R} \to X$ para $e$. La unicidad de las soluciones implica que cada $\Phi_s$ es un homeomorfismo, con inversa $\Phi_{-s}$, y también que un punto donde $e$ se anula permanece

fijo. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{ds} I(\Phi_s(u)) = -\chi(I(\Phi_s(u)))DI(\Phi_s(u))[v(\Phi_s(u))] \le 0. \tag{31.9}$$

En los puntos críticos, el miembro derecho de (31.9) se interpreta como cero. En particular, la energía no aumenta.

Pongamos

$$\mu := \min\{\sigma, 1\}\sigma > 0, \qquad T := \frac{2\varepsilon}{\mu}, \qquad H_t(u) := \Phi_{tT}(u).$$

Las propiedades (i)–(iii) se siguen de lo anterior. La cota de velocidad (31.8) da

$$\|H_t(u) - u\| \le \int_0^{tT} \|e(\Phi_s(u))\|\, ds \le 2tT \le \frac{4\varepsilon}{\mu},$$

que es (v).

Sólo resta probar (iv). Sea $u \in I^{\le \beta+\varepsilon}$. Si $I(u) \le \beta - \varepsilon$, la monotonía basta. Supongamos, por el contrario, que $I(u) > \beta - \varepsilon$ y que $I(\Phi_T(u)) > \beta - \varepsilon$. Entonces, para todo $s \in [0, T]$,

$$\beta - \varepsilon < I(\Phi_s(u)) \le I(u) \le \beta + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon < a$, a lo largo de toda la trayectoria se tiene $\chi(I(\Phi_s(u))) = 1$ y, por (31.6), $\|DI(\Phi_s(u))\|_{X'} \ge \sigma$. La propiedad de descenso del pseudogradiente implica entonces

$$\frac{d}{ds} I(\Phi_s(u)) \le -\mu.$$

Al integrar entre 0 y $T$ obtenemos

$$I(\Phi_T(u)) \le I(u) - \mu T \le \beta + \varepsilon - 2\varepsilon = \beta - \varepsilon,$$

una contradicción. Por consiguiente, $H_1(u) = \Phi_T(u) \in I^{\le \beta-\varepsilon}$. □

La hipótesis (31.6) dice que toda la banda es regular con una separación uniforme de cero para la derivada. No afirma que las sucesiones acotadas en energía sean compactas. Ésa es la razón por la que el lema anterior puede aplicarse aun cuando (PS) falle, siempre que la cota de pendiente se verifique por otro argumento.

### 31.3.2 El lema general de Struwe

La siguiente es la forma cuantitativa del Teorema II.3.4 de [138, pp. 83–84]. La demostración utiliza la prolongación bilateral del flujo y estima el tiempo durante el cual una trayectoria permanece en la región de descenso uniforme, con las constantes del enunciado.

**Teorema 31.3.2.** (Lema de deformación de Struwe) Sea $X$ un espacio de Banach real y sea $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ un funcional que satisface (PS). Fijemos $\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$ y una vecindad abierta $N$ de $K_\beta$. Entonces existen $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ y un flujo continuo

$$\Phi\colon X \times \mathbb{R} \longrightarrow X, \qquad \Phi_t(u) := \Phi(u, t),$$

con las propiedades siguientes:

(i) $\Phi_0 = \mathrm{id}_X$ y cada $\Phi_t$ es un homeomorfismo, con $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$;

(ii) $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$;

(iii) si $u \in \mathrm{Crit}(I)$ o $|I(u) - \beta| \geq \varepsilon_0$, entonces $\Phi_t(u) = u$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(iv) $t \mapsto I(\Phi_t(u))$ es no creciente para todo $u \in X$;

(v)
$$\Phi_1\left(I^{<\beta+\varepsilon} \setminus N\right) \subseteq I^{<\beta-\varepsilon}, \qquad \Phi_1\left(I^{<\beta+\varepsilon}\right) \subseteq I^{<\beta-\varepsilon} \cup N.$$

En particular, la restricción de $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ a $t \geq 0$ es el semiflujo de deformación de los subniveles.

*Demostración.* Por el Lema 31.1.3 podemos elegir $\delta, \rho \in (0, 1]$ tales que

$$N \supseteq U_{\beta,2\rho} \supseteq U_{\beta,\rho} \supseteq N_{\beta,\delta}. \tag{31.10}$$

Sea $\eta\colon X \longrightarrow [0,1]$ una función localmente Lipschitz tal que

$$\eta = 0 \quad \text{en } N_{\beta,\frac{\delta}{2}}, \qquad \eta = 1 \quad \text{en } X \setminus N_{\beta,\delta}. \tag{31.11}$$

Puede construirse sin ninguna regularidad adicional del funcional. En efecto,

$$C_{\beta,\frac{\delta}{2}} := \left\{ u \in X \,\middle|\, |I(u) - \beta| \leq \frac{\delta}{2}, \quad \|DI(u)\|_{X'} \leq \frac{\delta}{2} \right\}, \qquad A := C_{\beta,\frac{\delta}{2}}, \qquad B := X \setminus N_{\beta,\delta}$$

son cerrados, por la continuidad de $I$ y de $u \mapsto \|DI(u)\|_{X'}$. Además,

$$A \cap B = \varnothing, \qquad N_{\beta,\frac{\delta}{2}} \subseteq A \subseteq N_{\beta,\delta}.$$

Cuando $A$ y $B$ son no vacíos, definimos

$$\eta(u) := \frac{d_A(u)}{q(u)}, \qquad d_A(u) := \mathrm{dist}(u, A), \quad d_B(u) := \mathrm{dist}(u, B), \quad q(u) := d_A(u) + d_B(u).$$

Las funciones $d_A$ y $d_B$ son 1-Lipschitz. Como $A$ y $B$ son cerrados y disjuntos, $q(u) > 0$ para todo $u$: la igualdad $q(u) = 0$ implicaría $u \in A \cap B$. Fijado $u_0 \in X$ y escrito $q_0 := q(u_0) > 0$, si $\|u - u_0\| < \frac{q_0}{4}$, entonces

$$q(u) \geq q_0 - |d_A(u) - d_A(u_0)| - |d_B(u) - d_B(u_0)| > \frac{q_0}{2}.$$

Por lo tanto, el denominador está localmente separado de cero. Para $u$ y $\widetilde{u}$ en esa bola, escribamos $a = d_A(u)$, $\widetilde{a} = d_A(\widetilde{u})$, $q = q(u)$ y $\widetilde{q} = q(\widetilde{u})$. Entonces

$$\left| \frac{a}{q} - \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{q}} \right| \leq \frac{|a - \widetilde{a}|}{q} + \frac{\widetilde{a}\,|q - \widetilde{q}|}{q\widetilde{q}}.$$

Aquí $\widetilde{a}$ está acotada localmente, mientras que $d_A$, $d_B$ y $q$ son Lipschitz. Así, $\eta$ es localmente Lipschitz. En $A$ se tiene $d_A = 0$ y en $B$ se tiene $d_B = 0$; la disjunción y la cerradura muestran, respectivamente, que el otro sumando es positivo. En consecuencia, $\eta = 0$ en $A$ y $\eta = 1$ en $B$, lo que prueba (31.11).

Si $A = \varnothing \neq B$, tomamos $\eta \equiv 1$. Si $B = \varnothing$, tomamos $\eta \equiv 0$, incluido el caso en que ambos son vacíos. Puesto que $N_{\beta,\frac{\delta}{2}} \subseteq A$, estos convenios conservan los dos valores exigidos en (31.11).
Pongamos

$$a := \min\{\varepsilon_0, \frac{\delta}{4}\}$$

y definamos el corte Lipschitz $\chi\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ por

$$\chi(s) := \begin{cases} 1, & |s-\beta| \leq \frac{a}{2}, \\ 2 - \dfrac{2|s-\beta|}{a}, & \frac{a}{2} < |s-\beta| < a, \\ 0, & |s-\beta| \geq a. \end{cases}$$

Sea $v$ un pseudogradiente proporcionado por el Teorema 31.2.2. Definimos el campo truncado

$$e(u) := \begin{cases} -\eta(u)\chi(I(u))v(u), & u \notin \operatorname{Crit}(I), \\ 0, & u \in \operatorname{Crit}(I). \end{cases} \tag{31.12}$$

El campo $e$ es localmente Lipschitz. En $\widetilde{X}$, el pseudogradiente $v$ lo es por construcción, $\eta$ es localmente Lipschitz y $\chi \circ I$ también lo es, pues $\chi$ es Lipschitz e $I$ es de clase $C^1$ y, por lo tanto, localmente Lipschitz. En una bola en la que los tres factores están acotados y tienen constantes de Lipschitz finitas, la estimación

$$\|abc - a'b'c'\| \leq |a-a'||b|\|c\| + |a'||b-b'|\|c\| + |a'||b'|\|c-c'\|$$

para $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ y $c, c' \in X$, aplicada a $a = \eta(u)$, $b = \chi(I(u))$ y $c = v(u)$, prueba que su producto es localmente Lipschitz. Si $u$ es crítico y $|I(u)-\beta| < \frac{\delta}{2}$, el corte $\eta$ se anula en una vecindad de $u$. Si $|I(u)-\beta| \geq \frac{\delta}{2}$, entonces $|I(u)-\beta| > a$ y $\chi \circ I$ se anula en una vecindad de $u$. Por consiguiente, $e$ es idénticamente cero cerca de cada punto crítico; no se está deduciendo su regularidad a través de una extensión puntual de $v$. Además,

$$\|e(u)\| \leq 2 \qquad (u \in X). \tag{31.13}$$

Aplicando el Teorema 25.4.5 al problema autónomo

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(u) = e(\Phi_t(u)), \qquad \Phi_0(u) = u, \tag{31.14}$$

obtenemos una solución definida para todo $t \in \mathbb{R}$, continua respecto de $(u,t)$. La unicidad da

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s, \qquad \Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_0 = \mathrm{id}_X\,.$$

Así, $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$ y cada $\Phi_t$ es un homeomorfismo. La existencia sólo para $t \geq 0$ habría producido un semiflujo, pero no bastaría para concluir la sobreyectividad de $\Phi_t$.
Si $u$ es crítico o $|I(u)-\beta| \geq \varepsilon_0$, entonces $e(u) = 0$; la unicidad implica que la solución que parte de $u$ es constante. Por la regla de la cadena y las propiedades del pseudogradiente,

$$\frac{d}{dt} I(\Phi_t(u)) = DI(\Phi_t(u))\left[\frac{d}{dt}\Phi_t(u)\right]$$

$$= -\eta(\Phi_t(u))\chi(I(\Phi_t(u)))DI(\Phi_t(u))[v(\Phi_t(u))] \le 0. \tag{31.15}$$

En un punto crítico el miembro derecho se interpreta como cero. Esto prueba las primeras cuatro propiedades.

Elegimos ahora

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{\rho\delta^2}{4}\right\}. \tag{31.16}$$

Sea $u \in I^{<\beta+\varepsilon}$ y supongamos que $I(\Phi_1(u)) \ge \beta - \varepsilon$. La monotonía implica, para $0 \le t \le 1$,

$$\beta - \varepsilon \le I(\Phi_t(u)) < \beta + \varepsilon.$$

Por lo tanto $\chi(I(\Phi_t(u))) = 1$. Definamos

$$A_u := \{t \in [0,1] \mid \Phi_t(u) \notin N_{\beta,\delta}\}.$$

Si $t \in A_u$, entonces $|I(\Phi_t(u)) - \beta| < \varepsilon < \delta$, de modo que la exclusión de $N_{\beta,\delta}$ fuerza $\|DI(\Phi_t(u))\|_{X'} \ge \delta$. Como $\delta \le 1$ y $\eta = 1$ fuera de $N_{\beta,\delta}$, de (31.15) se deduce

$$\frac{d}{dt} I(\Phi_t(u)) \le -\delta^2 \qquad (t \in A_u).$$

Al integrar,

$$I(\Phi_1(u)) < \beta + \varepsilon - \delta^2 |A_u|, \tag{31.17}$$

donde $|A_u|$ denota la medida de Lebesgue.

Supongamos que $u \notin N$ o que $\Phi_1(u) \notin N$. Entonces

$$|A_u| \ge \frac{\rho}{2}. \tag{31.18}$$

En efecto, si $K_\beta = \varnothing$, la elección de $\delta$ puede hacerse con $N_{\beta,\delta} = \varnothing$, y la afirmación es inmediata porque $\rho \le 1$. Supongamos $K_\beta \neq \varnothing$. Por (31.10), un extremo que está fuera de $N$ está fuera de $U_{\beta,2\rho}$, mientras que $N_{\beta,\delta} \subseteq U_{\beta,\rho}$. La función $x \mapsto \operatorname{dist}(x, K_\beta)$ es 1-Lipschitz y (31.13) da

$$\|\Phi_t(u) - \Phi_s(u)\| \le \int_s^t \|e(\Phi_\tau(u))\|\, d\tau \le 2|t-s|.$$

Por ello, pasar desde el exterior de $U_{\beta,2\rho}$ hasta $N_{\beta,\delta} \subseteq U_{\beta,\rho}$, o efectuar el recorrido inverso, requiere al menos $\frac{\rho}{2}$ unidades de tiempo. Antes de la primera entrada, o después de la última salida, respectivamente, la trayectoria permanece fuera de $N_{\beta,\delta}$. Si nunca entra, $A_u = [0,1]$. Esto prueba (31.18).

Las estimaciones (31.17), (31.18) y (31.16) producen

$$I(\Phi_1(u)) < \beta + \varepsilon - \frac{\rho\delta^2}{2} < \beta - \varepsilon,$$

contradiciendo la suposición anterior. Si $u \in I^{<\beta+\varepsilon} \setminus N$, aplicamos el argumento al extremo inicial y obtenemos la primera inclusión de (v). Para un $u \in I^{<\beta+\varepsilon}$ arbitrario, o bien $\Phi_1(u) \in N$, o bien el mismo argumento aplicado al extremo final da $\Phi_1(u) \in I^{<\beta-\varepsilon}$. Esto prueba la segunda inclusión. □

**Observación 31.3.3.** (Hipótesis por niveles) La condición (PS) sólo se utilizó en el Lema 31.1.3. Por lo tanto, en el teorema anterior basta suponer $(PS)_\beta$. Si $K_\beta = \varnothing$, existe $\delta > 0$ tal que $N_{\beta,\delta} = \varnothing$; en este caso puede tomarse $N = \varnothing$ y se obtiene una disminución uniforme de energía en una banda alrededor de $\beta$.

### 31.3.3 Relación entre los dos lemas de deformación

La diferencia entre los dos enunciados está en el origen de la cota inferior para $\|DI\|$. El lema cuantitativo la toma como hipótesis; el lema de Struwe la deduce de $(PS)_\beta$ fuera de una vecindad de $K_\beta$. El resultado siguiente formaliza esta relación y señala exactamente qué parte de Palais–Smale se usa.

**Proposición 31.3.4.** (De la compacidad a la separación de la pendiente) Sea $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ y sea $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Si $I$ satisface $(PS)_\beta$ y $K_\beta = \varnothing$, existen $a, \sigma > 0$ tales que

$$|I(u) - \beta| \le 2a \quad \Longrightarrow \quad \|DI(u)\|_{X'} \ge \sigma.$$

Por lo tanto, el Lema 31.3.1 deforma uniformemente el subnivel situado justo por encima de $\beta$ hacia uno situado justo por debajo.

(b) Si $I$ satisface $(PS)_\beta$ y $N$ es una vecindad abierta de $K_\beta$, existen $a, \sigma > 0$ tales que

$$|I(u) - \beta| \le 2a, \qquad u \notin N \quad \Longrightarrow \quad \|DI(u)\|_{X'} \ge \sigma.$$

El lema de Struwe es la versión relativa del mismo mecanismo: un corte adicional detiene el flujo cerca de $K_\beta$ y conserva la disminución uniforme fuera de $N$.

*Demostración.* Para (a), supongamos que no existen tales $a$ y $\sigma$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ podríamos escoger $u_j \in X$ con

$$|I(u_j) - \beta| \le \frac{2}{j}, \qquad \|DI(u_j)\|_{X'} < \frac{1}{j}.$$

La sucesión $(u_j)$ sería una sucesión $(PS)_\beta$. Una subsucesión convergería a cierto $u \in X$ y la continuidad de $I$ y $DI$ daría $I(u) = \beta$ y $DI(u) = 0$, en contradicción con $K_\beta = \varnothing$.
Para (b), el Corolario 31.1.4 proporciona $\delta > 0$ tal que

$$|I(u) - \beta| < \delta, \qquad u \notin N \quad \Longrightarrow \quad \|DI(u)\|_{X'} \ge \delta.$$

Basta tomar, por ejemplo, $a = \delta/4$ y $\sigma = \delta$. La demostración del Teorema 31.3.2 muestra después por qué no basta con apagar el campo dentro de $N$: se usan las vecindades anidadas $U_{\beta,\rho} \subset U_{\beta,2\rho}$ para controlar también las trayectorias que entran o salen de $N$. □

Así, los enunciados no son equivalentes sin hipótesis adicionales. Si $K_\beta \neq \varnothing$, la hipótesis global del lema cuantitativo es imposible, porque $DI$ se anula en $K_\beta$. Si $K_\beta = \varnothing$, en cambio, $(PS)_\beta$ convierte el lema cuantitativo en el caso de Struwe que se necesita para los argumentos de contradicción minimax.

## 31.4 La formulación intrínseca Banach–Finsler

Consideremos ahora una variedad Banach–Finsler reversible sin frontera $M$ con la regularidad y la compatibilidad local de normas de la Sección 26.3, en el Capítulo 26. Denotamos por $\|\xi\|_p$ la norma de $\xi \in T_pM$, por $d$ la distancia de longitudes y por $\|\alpha\|_{p,*}$ la norma dual de $\alpha \in T_p'M$ definida en la Definición 26.3.3. En particular,

$$\|\alpha\|_{p,*} = \sup\left\{|\alpha(\xi)| \,\middle|\, \xi \in T_pM,\ \|\xi\|_p \le 1\right\}.$$

La reversibilidad es la propiedad de la estructura $F$ precisada en la Definición 26.3.1. Cuando se exija clase $C^{1,1}$, se utilizará el atlas de la Definición 24.1.5, conforme a la Definición 26.3.7. Los campos localmente Lipschitz y sus flujos se entienden como en la Observación 25.4.3. Como todos los argumentos se aplican componente a componente, suponemos en lo que sigue que $M$ es conexa.

**Definición 31.4.1.** (Palais–Smale intrínseca) Sea $M$ una variedad Banach–Finsler reversible sin frontera y sea $I \in C^1(M,\mathbb{R})$. Una sucesión $(p_j) \subset M$ es una sucesión de Palais–Smale si $(I(p_j))$ está acotada y

$$\|dI_{p_j}\|_{p_j,*} \longrightarrow 0.$$

El funcional satisface (PS) si toda sucesión de Palais–Smale posee una subsucesión convergente en $M$. Satisface $(PS)_\beta$ si la misma conclusión vale para toda sucesión tal que

$$I(p_j) \longrightarrow \beta, \qquad \|dI_{p_j}\|_{p_j,*} \longrightarrow 0.$$

Definimos intrínsecamente

$$\begin{aligned} K_\beta &:= \{p \in M \mid I(p) = \beta,\ dI_p = 0\},\\ N_{\beta,\delta} &:= \{p \in M \mid |I(p) - \beta| < \delta,\ \|dI_p\|_{p,*} < \delta\},\\ U_{\beta,\rho} &:= \{p \in M \mid d(p, K_\beta) < \rho\}. \end{aligned}$$

Conservamos además la notación $I^{<a} := \{p \in M \mid I(p) < a\}$ para los subniveles abiertos y $I^{\le a} := \{p \in M \mid I(p) \le a\}$ para los cerrados. La compatibilidad local de la estructura Finsler implica que $d$ induce la topología de $M$ y que $p \mapsto \|dI_p\|_{p,*}$ es continua. Por ello, el argumento del Lema 31.1.3, que sólo usa metrizabilidad, continuidad y la definición de $(PS)_\beta$, da el resultado siguiente.

**Lema 31.4.2.** (Vecindades del conjunto crítico en una variedad Finsler) Sea $M$ una variedad Banach–Finsler reversible sin frontera y sea $I \in C^1(M,\mathbb{R})$. Si $I$ satisface $(PS)_\beta$, entonces $K_\beta$ es compacto y las familias $(U_{\beta,\rho})_{\rho>0}$ y $(N_{\beta,\delta})_{\delta>0}$ son sistemas fundamentales de vecindades de $K_\beta$. En particular, para cada vecindad abierta $N$ de $K_\beta$ existen $\delta, \rho \in (0,1]$ tales que

$$N \supseteq U_{\beta,2\rho} \supseteq U_{\beta,\rho} \supseteq N_{\beta,\delta}.$$

*Demostración.* Una sucesión en $K_\beta$ es una sucesión $(PS)_\beta$ y, por continuidad, todo límite de una subsucesión permanece en $K_\beta$; por lo tanto, $K_\beta$ es compacto. Si una vecindad $N$ no contuviera ningún $N_{\beta,\delta}$, una elección $p_j \in N_{\beta,\frac{1}{j}} \setminus N$ daría una sucesión $(PS)_\beta$ cuya subsucesión convergente tendría límite en $K_\beta \subset N$, contradic-

ción. La afirmación para $U_{\beta,\rho}$ se sigue de la compacidad de $K_\beta$ y del mismo argumento métrico: de puntos a distancia decreciente de $K_\beta$ se eligen puntos próximos en $K_\beta$ y se extrae una subsucesión convergente. La cadena final se obtiene escogiendo primero $\rho$ y después $\delta$. □

**Definición 31.4.3.** (Pseudogradiente Finsler) Sea $M$ una variedad Banach–Finsler reversible sin frontera y sea $I \in C^1(M,\mathbb{R})$. Sea

$$\widetilde{M} := \{p \in M \mid dI_p \neq 0\}.$$

Un campo vectorial localmente Lipschitz $\mathbf{v}\colon \widetilde{M} \longrightarrow TM$ es un *pseudogradiente Finsler* de $I$ si $\mathbf{v}(p) \in T_pM$ y

$$\|\mathbf{v}(p)\|_p < 2\min\{\|dI_p\|_{p,*}, 1\},$$
$$dI_p[\mathbf{v}(p)] > \min\{\|dI_p\|_{p,*}, 1\}\,\|dI_p\|_{p,*}$$

para todo $p \in \widetilde{M}$.

**Teorema 31.4.4.** (Existencia del pseudogradiente Finsler) Sea $M$ una variedad Banach–Finsler paracompacta y de clase $C^{1,1}$. Entonces todo $I \in C^1(M,\mathbb{R})$ admite un pseudogradiente Finsler en $\widetilde{M}$.

*Demostración.* Fijemos $p \in \widetilde{M}$ y escribamos $q_p := \|dI_p\|_{p,*}$ y $m_p := \min\{q_p, 1\}$. Por la definición de la norma dual existe $\xi_p \in T_pM$, $\|\xi_p\|_p = 1$, tal que

$$dI_p[\xi_p] > \frac{3}{4}q_p.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\frac{3}{2}m_p\xi_p\right\|_p = \frac{3}{2}m_p < 2m_p, \qquad dI_p\left[\frac{3}{2}m_p\xi_p\right] > \frac{9}{8}m_pq_p > m_pq_p.$$

Elijamos una carta $(U,\varphi)$ del atlas $C^{1,1}$ alrededor de $p$, con $U \subseteq \widetilde{M}$, y la trivialización tangente $\tau_q := d\varphi_q\colon T_qM \longrightarrow X$. Definamos

$$\mathbf{w}_p(q) := \tau_q^{-1}\tau_p\left(\frac{3}{2}m_p\xi_p\right), \qquad q \in U.$$

Sus componentes en la carta $\varphi$ son constantes y $\mathbf{w}_p(p) = \frac{3}{2}m_p\xi_p$. Por la admisibilidad de la estructura Finsler, Definición 26.3.1, y la comparación (26.14), después de reducir $U$ existen constantes $c_p, C_p > 0$ tales que

$$c_p\|\tau_q(z)\|_X \le \|z\|_q \le C_p\|\tau_q(z)\|_X$$

para todo punto $q$ del dominio y todo $z \in T_qM$. Las funciones $q \mapsto \|\mathbf{w}_p(q)\|_q$ y $q \mapsto dI_q[\mathbf{w}_p(q)]$ son continuas por la continuidad de $F$, de $dI$ y del campo local en esta trivialización. Además, $q \mapsto \|dI_q\|_{q,*}$ es continua por la Proposición 26.3.4; también lo es su mínimo con 1. Por el carácter estricto de las dos desigualdades en $p$, podemos reducir nuevamente el dominio a una vecindad $W_p$ en la cual $\mathbf{w}_p$ satisface

$$\|\mathbf{w}_p(q)\|_q < 2\min\{\|dI_q\|_{q,*}, 1\},$$
$$dI_q[\mathbf{w}_p(q)] > \min\{\|dI_q\|_{q,*}, 1\}\,\|dI_q\|_{q,*}.$$

En la carta $\varphi$, el campo tiene componentes constantes y es localmente Lipschitz. La Observación 25.4.3 muestra que esta propiedad se conserva en todas las cartas del atlas $C^{1,1}$.

El abierto $\widetilde{M}$, con la distancia Finsler restringida, es metrizable por el Teorema 26.3.5 y paracompacto por el Teorema 24.8.8. Elegimos un refinamiento abierto localmente finito $(A_i)_{i\in J}$ de $(W_p)_{p\in\widetilde{M}}$ y, por el Lema 24.8.7, un encogimiento $(B_i)_{i\in J}$ con $\overline{B_i}^{\widetilde{M}} \subseteq A_i$. Definimos

$$r_i(q) := d\big(q, \widetilde{M} \setminus B_i\big), \qquad r(q) := \sum_{i\in J} r_i(q), \qquad \varphi_i(q) := \frac{r_i(q)}{r(q)}.$$

Si $B_i = \widetilde{M}$, tomamos $r_i \equiv 1$. Cada $r_i$ es Lipschitz respecto de $d$ y positiva precisamente en $B_i$. La suma es localmente finita y positiva porque $(B_i)_{i\in J}$ cubre $\widetilde{M}$. Cerca de cada punto, $r$ está separado de cero; por ello, los cocientes $\varphi_i$ son localmente $d$-Lipschitz. El Teorema 26.3.5 transporta esta regularidad a las cartas. Además,

$$\sum_{i\in J} \varphi_i = 1, \qquad \operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq \overline{B_i}^{\widetilde{M}} \subseteq A_i.$$

Para cada $i$ escogemos $p_i$ con $A_i \subseteq W_{p_i}$ y ponemos

$$\mathbf{v}(q) := \sum_{i\in J} \varphi_i(q)\mathbf{w}_{p_i}(q).$$

En esta fórmula, cada producto $\varphi_i \mathbf{w}_{p_i}$ se extiende por cero fuera de $W_{p_i}$. Esta extensión es localmente Lipschitz en $\widetilde{M}$: dentro de $W_{p_i}$ es un producto de funciones y campos localmente Lipschitz, que son localmente acotados en coordenadas; fuera de $W_{p_i}$ es idénticamente cero en una vecindad, porque $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq A_i \subseteq W_{p_i}$ y el soporte es cerrado en $\widetilde{M}$. Cada suma es finita en una vecindad del punto considerado. Por lo tanto, $\mathbf{v}$ es localmente Lipschitz; como es una combinación convexa de direcciones que satisfacen las dos desigualdades en el soporte correspondiente, es un pseudogradiente Finsler. □

La completitud interviene en un único punto: convierte el control uniforme de la velocidad en prolongación de las curvas integrales.

**Proposición 31.4.5.** (Campos acotados en variedades Finsler completas) Sea $(M, d)$ una variedad Banach–Finsler sin frontera, reversible, completa y de clase $C^{1,1}$, y sea $\mathbf{e}$ un campo vectorial localmente Lipschitz en cartas. Si existe $C > 0$ tal que

$$\|\mathbf{e}(p)\|_p \le C \qquad (p \in M),$$

entonces todas sus curvas integrales maximales están definidas en $\mathbb{R}$. El flujo $\Phi\colon M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ es continuo, satisface

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s, \qquad \Phi_t^{-1} = \Phi_{-t},$$

y cada $\Phi_t$ es un homeomorfismo.

*Demostración.* La Observación 25.4.3 proporciona existencia, unicidad y dependencia continua locales en el atlas elegido. Sea $\gamma\colon (a,b) \longrightarrow M$ una curva integral maximal. Para $a < s < t < b$, la definición de la distancia por longitudes da

$$d(\gamma(s),\gamma(t)) \le L(\gamma\restriction_{[s,t]}) = \int_s^t \|\mathbf{e}(\gamma(\tau))\|_{\gamma(\tau)}\, d\tau \le C|t-s|. \tag{31.19}$$

Si $b < +\infty$, la estimación muestra que $\gamma(t)$ es una familia de Cauchy cuando $t \to b^-$. La completitud pro-

porciona $p_b \in M$ tal que $\gamma(t) \to p_b$. Como la distancia Finsler induce la topología de la variedad, podemos trabajar en una carta alrededor de $p_b$. La existencia local para ecuaciones diferenciales en Banach produce una curva integral que parte de $p_b$ en el tiempo $b$. La continuidad de $\mathbf{e}$ y la ecuación integral permiten concatenarla con $\gamma$, y la unicidad local muestra que la concatenación prolonga la curva original. Esto contradice la maximalidad. Así, $b = +\infty$. Aplicando el mismo argumento cuando $t \to a^+$ obtenemos $a = -\infty$.
La dependencia continua respecto del dato inicial produce un flujo continuo. La unicidad de las curvas integrales da la ley de grupo y, al tomar $s = -t$, la identidad $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$. Por ello cada $\Phi_t$ es un homeomorfismo. Obsérvese que el argumento usa la completitud métrica en (31.19), no la compacidad de una bola cerrada. □

**Teorema 31.4.6.** (Lema de deformación Banach–Finsler) Sea $M$ una variedad Banach–Finsler sin frontera, reversible, completa y paracompacta, de clase $C^{1,1}$, que satisface las hipótesis del Teorema 31.4.4. Sea $I \in C^1(M,\mathbb{R})$ un funcional que satisface (PS). Dados $\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$ y una vecindad abierta $N$ de $K_\beta$, existen $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ y un flujo continuo $\Phi\colon M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ tales que:

(i) cada $\Phi_t$ es un homeomorfismo, $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$, y $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$;

(ii) $\Phi_t(p) = p$ si $dI_p = 0$ o $|I(p) - \beta| \geq \varepsilon_0$;

(iii) $I(\Phi_t(p))$ es no creciente respecto de $t$;

(iv)
$$\Phi_1\left(I^{<\beta+\varepsilon} \setminus N\right) \subseteq I^{<\beta-\varepsilon}, \qquad \Phi_1\left(I^{<\beta+\varepsilon}\right) \subseteq I^{<\beta-\varepsilon} \cup N.$$

También aquí basta suponer $(PS)_\beta$.

*Demostración.* El Lema 31.4.2 proporciona $\delta, \rho \in (0,1]$ tales que

$$N \supseteq U_{\beta,2\rho} \supseteq U_{\beta,\rho} \supseteq N_{\beta,\delta}.$$

Tomamos
$$a := \min\{\varepsilon_0, \frac{\delta}{4}\}$$
y construimos el corte espacial íntegramente con la distancia Finsler. Sean

$$C^M_{\beta,\frac{\delta}{2}} := \left\{ p \in M \,\middle|\, |I(p) - \beta| \leq \frac{\delta}{2}, \quad \|dI_p\|_{p,*} \leq \frac{\delta}{2} \right\}, \qquad A_M := C^M_{\beta,\frac{\delta}{2}}, \qquad B_M := M \setminus N_{\beta,\delta}.$$

La continuidad de $I$ y de $p \mapsto \|dI_p\|_{p,*}$ muestra que $A_M$ y $B_M$ son cerrados. Además,

$$A_M \cap B_M = \varnothing, \qquad N_{\beta,\frac{\delta}{2}} \subseteq A_M \subseteq N_{\beta,\delta}.$$

Si ambos conjuntos son no vacíos, ponemos

$$\eta(p) := \frac{d^M_A(p)}{q_M(p)}, \quad d^M_A(p) := d(p, A_M), \quad d^M_B(p) := d(p, B_M), \quad q_M(p) := d^M_A(p) + d^M_B(p). \tag{31.20}$$

Las funciones $d^M_A$ y $d^M_B$ son 1-Lipschitz respecto de $d$. La cerradura y la disjunción implican $q_M(p) > 0$ para

todo $p$. Fijado $p_0 \in M$ y escrito $q_0 := q_M(p_0) > 0$, si $d(p,p_0) < \frac{q_0}{4}$, entonces

$$q_M(p) \geq q_0 - |d_A^M(p) - d_A^M(p_0)| - |d_B^M(p) - d_B^M(p_0)| > \frac{q_0}{2}.$$

Así, el denominador está localmente separado de cero. Para $p$ y $\widetilde{p}$ en esa bola, con $a = d_A^M(p)$, $\widetilde{a} = d_A^M(\widetilde{p})$, $q = q_M(p)$ y $\widetilde{q} = q_M(\widetilde{p})$, se tiene

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{q}}\right| \leq \frac{|a-\widetilde{a}|}{q} + \frac{\widetilde{a}|q-\widetilde{q}|}{q\widetilde{q}}.$$

El factor $\widetilde{a}$ está localmente acotado, de modo que $\eta$ es localmente $d$-Lipschitz. La equivalencia local entre $d$ y la norma de una carta Finsler da la regularidad local exigida en las cartas. Como $d_A^M = 0$ sobre $A_M$ y $d_B^M = 0$ sobre $B_M$, mientras el otro sumando es positivo, se obtiene $\eta = 0$ en $A_M$ y $\eta = 1$ en $B_M$.

Si $A_M = \varnothing \neq B_M$, tomamos $\eta \equiv 1$. Si $B_M = \varnothing$, tomamos $\eta \equiv 0$, incluido el caso en que ambos son vacíos. En todos los casos, $\eta$ vale cero en $N_{\beta,\frac{\delta}{2}}$ y uno fuera de $N_{\beta,\delta}$.

Sea $\chi\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ la función Lipschitz ya definida en la prueba Banach: vale uno en $[\beta - \frac{a}{2}, \beta + \frac{a}{2}]$ y cero fuera de $(\beta - a, \beta + a)$.

Sea $\mathbf{v}$ el pseudogradiente del Teorema 31.4.4 y definamos

$$\mathbf{e}(p) := \begin{cases} -\eta(p)\chi(I(p))\mathbf{v}(p), & dI_p \neq 0, \\ 0, & dI_p = 0. \end{cases}$$

En el abierto $\widetilde{M}$, los tres factores $\eta$, $\chi \circ I$ y $\mathbf{v}$ son localmente Lipschitz en cartas y localmente acotados; la desigualdad de productos utilizada en la prueba Banach muestra que $\mathbf{e}$ es localmente Lipschitz allí. Falta verificar los puntos críticos. Si $dI_p = 0$ y $|I(p) - \beta| < \frac{\delta}{2}$, entonces $p$ pertenece al abierto $N_{\beta,\frac{\delta}{2}}$, donde $\eta = 0$. Si $dI_p = 0$ y $|I(p) - \beta| \geq \frac{\delta}{2}$, entonces $|I(p) - \beta| \geq \frac{\delta}{2} > a$; por continuidad, $\chi \circ I$ se anula en una vecindad de $p$. En ambos casos $\mathbf{e}$ es idénticamente cero en una vecindad del punto crítico. Por lo tanto, la definición por casos no es una mera extensión puntual del pseudogradiente y $\mathbf{e}$ es localmente Lipschitz en todo $M$. Además,

$$\|\mathbf{e}(p)\|_p \leq 2. \tag{31.21}$$

La Proposición 31.4.5 da un flujo bilateral global de homeomorfismos. En particular, la completitud se usa de manera explícita en la estimación

$$d(\Phi_s(p), \Phi_t(p)) \leq \int_s^t \|\mathbf{e}(\Phi_\tau(p))\|_{\Phi_\tau(p)}\, d\tau \leq 2|t-s|. \tag{31.22}$$

La regla de la cadena intrínseca da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(\Phi_t(p)) &= dI_{\Phi_t(p)}\big[\partial_t \Phi_t(p)\big] \\ &= -\eta(\Phi_t(p))\chi(I(\Phi_t(p)))dI_{\Phi_t(p)}[\mathbf{v}(\Phi_t(p))] \leq 0. \end{aligned}$$

Elegimos

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{\rho\delta^2}{4}\right\}.$$

Si $p \in I^{<\beta+\varepsilon}$ y $I(\Phi_1(p)) \geq \beta - \varepsilon$, toda la trayectoria entre los tiempos cero y uno permanece en la banda

$|I-\beta|\le\varepsilon<a/2$, donde $\chi=1$. Para

$$A_p:=\{t\in[0,1]\mid \Phi_t(p)\notin N_{\beta,\delta}\}$$

se tiene, usando $\delta\le 1$,

$$\frac{d}{dt}I(\Phi_t(p))\le-\delta^2\quad(t\in A_p),\qquad I(\Phi_1(p))<\beta+\varepsilon-\delta^2|A_p|.$$

Si $p\notin N$ o $\Phi_1(p)\notin N$, entonces $|A_p|\ge\frac{\rho}{2}$. En efecto, un extremo situado fuera de $N$ está fuera de $U_{\beta,2\rho}$, mientras que $N_{\beta,\delta}\subseteq U_{\beta,\rho}$. La distancia a $K_\beta$ es 1-Lipschitz y (31.22) muestra que atravesar la franja entre ambas vecindades requiere al menos $\frac{\rho}{2}$ unidades de tiempo. Durante ese intervalo la trayectoria está fuera de $N_{\beta,\delta}$. Si $K_\beta=\varnothing$, elegimos $\delta$ con $N_{\beta,\delta}=\varnothing$ y la conclusión es inmediata. Por lo tanto,

$$I(\Phi_1(p))<\beta+\varepsilon-\frac{\rho\delta^2}{2}<\beta-\varepsilon.$$

Aplicando esta contradicción primero cuando $p\notin N$ y después cuando $\Phi_1(p)\notin N$ se obtienen las dos inclusiones. Las propiedades de fijación se siguen de la unicidad del flujo en los ceros de $\mathbf{e}$. □

Este teorema es la versión del Teorema II.3.11 de [138, p. 87]. La demostración anterior exhibe por separado sus tres ingredientes globales: la compacidad secuencial de Palais–Smale, la partición localmente finita que produce el pseudogradiente y la completitud Finsler que impide el escape de las trayectorias en tiempo finito.

## 31.5 Motivación y teorema del paso de la montaña

El método directo busca el fondo de la energía. En numerosos problemas superlineales, sin embargo, el funcional no está acotado inferiormente: a lo largo de ciertas semirrectas la parte potencial termina dominando y la energía tiende a $-\infty$. Puede ocurrir al mismo tiempo que el origen sea un mínimo local estricto. Para llegar desde ese valle local a una región de energía negativa, todo camino debe remontar una barrera. El paso de la montaña selecciona, entre todos esos caminos, la menor altura máxima posible. No minimiza $I$ sobre $X$; minimiza el máximo de $I$ sobre cada camino.

**Ambrosetti y Rabinowitz: un punto crítico por minimax**

El teorema del paso de la montaña, introducido por Ambrosetti y Rabinowitz, convirtió esta imagen geométrica en un principio de existencia en dimensión infinita [8]. La topología obliga a los caminos a cruzar una barrera; el lema de deformación muestra que la menor altura de cruce no puede ser regular; y Palais–Smale impide que las sucesiones casi críticas escapen. Los tres ingredientes son distintos y cada uno cumple una función precisa.

### 31.5.1 Caminos, barreras y nivel minimax

**Definición 31.5.1.** (Nivel minimax de caminos) Sean $u_0,u_1\in X$. La clase de caminos con extremos fijos es

$$\Gamma(u_0,u_1):=\{\gamma\in C([0,1],X)\mid \gamma(0)=u_0,\ \gamma(1)=u_1\}.$$

Para $I \in C^1(X,\mathbb{R})$, su nivel minimax es

$$c(u_0,u_1) := \inf_{\gamma\in\Gamma(u_0,u_1)} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)). \tag{31.23}$$

La clase no es vacía, pues contiene el segmento $t \mapsto (1-t)u_0 + tu_1$. Para cada camino, el máximo de $I\circ\gamma$ existe: es el máximo de una función continua sobre el compacto $[0,1]$. Además, todos esos máximos son al menos $\max\{I(u_0), I(u_1)\}$ y el segmento entre los extremos proporciona una cota superior finita para su ínfimo. Así, el número de (31.23) es real.

**Lema 31.5.2.** (Cruce forzoso de la barrera) Sean $u_0, u_1 \in X$ y $r > 0$, con $\|u_1 - u_0\| > r$. Todo $\gamma \in \Gamma(u_0,u_1)$ intersecta la esfera

$$S_r(u_0) := \{u \in X \mid \|u - u_0\| = r\}.$$

Por consiguiente, si

$$b := \inf_{u\in S_r(u_0)} I(u),$$

entonces $c(u_0,u_1) \geq b$.

*Demostración.* La función $h(t) := \|\gamma(t) - u_0\|$ es continua, $h(0) = 0$ y $h(1) = \|u_1 - u_0\| > r$. El teorema del valor intermedio proporciona $t_r \in (0,1)$ con $h(t_r) = r$. De aquí,

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq I(\gamma(t_r)) \geq b.$$

Tomar el ínfimo respecto de $\gamma$ prueba la última afirmación. □

## 31.5.2 El teorema abstracto y su demostración

**Teorema 31.5.3.** (Teorema del paso de la montaña) Sea $X$ un espacio de Banach real y sea $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. Supongamos que existen $u_0, u_1 \in X$ y $r > 0$ tales que

$$\|u_1 - u_0\| > r$$

y

$$\max\{I(u_0), I(u_1)\} < b := \inf_{\|u-u_0\|=r} I(u). \tag{31.24}$$

Sea

$$c := c(u_0,u_1) = \inf_{\gamma\in\Gamma(u_0,u_1)} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)).$$

Entonces $c \geq b$ y, si $I$ satisface $(PS)_c$, existe $u_c \in X$ tal que

$$I(u_c) = c, \qquad DI(u_c) = 0.$$

*Demostración.* El Lema 31.5.2 da $c \geq b$. Por otra parte, la clase de caminos contiene el segmento entre los

extremos, sobre el cual la energía tiene un máximo finito. Por lo tanto, $c \in \mathbb{R}$. Además,

$$d := c - \max\{I(u_0), I(u_1)\} > 0. \tag{31.25}$$

Supongamos, por contradicción, que $K_c = \varnothing$. Como $I$ satisface $(PS)_c$, la Proposición 31.3.4 proporciona $a_0, \sigma > 0$ tales que

$$|I(u) - c| \le 2a_0 \quad \Longrightarrow \quad \|DI(u)\|_{X'} \ge \sigma.$$

Al disminuir $a_0$ no se pierde esta propiedad. Tomamos

$$0 < a < \min\left\{a_0, \frac{d}{2}\right\} \qquad \text{y} \qquad 0 < \varepsilon < a.$$

El Lema 31.3.1, aplicado con $\beta = c$, produce una deformación $H$. Por (31.25),

$$|I(u_i) - c| = c - I(u_i) \ge d > 2a \qquad (i = 0, 1),$$

así que $H_1$ fija ambos extremos.
La definición de ínfimo asegura que existe $\gamma_\varepsilon \in \Gamma(u_0, u_1)$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma_\varepsilon(t)) < c + \varepsilon. \tag{31.26}$$

Definamos

$$\widetilde{\gamma}_\varepsilon(t) := H_1(\gamma_\varepsilon(t)).$$

La continuidad de $H_1$ y la fijación de los extremos muestran que $\widetilde{\gamma}_\varepsilon \in \Gamma(u_0, u_1)$. Además, (31.26) y la conclusión del lema cuantitativo dan

$$I(\widetilde{\gamma}_\varepsilon(t)) \le c - \varepsilon \qquad (0 \le t \le 1).$$

En consecuencia,

$$c \le \max_{t\in[0,1]} I(\widetilde{\gamma}_\varepsilon(t)) \le c - \varepsilon,$$

lo cual es imposible. Por lo tanto, $K_c \neq \varnothing$ y cualquiera de sus elementos es el punto $u_c$ buscado. □

La demostración exhibe el papel de cada hipótesis. La barrera topológica da $c$ por encima de las energías de los extremos; $(PS)_c$ transforma la ausencia de puntos críticos en una cota uniforme para la pendiente; y el lema de deformación rebaja un camino casi óptimo sin mover sus extremos, lo que contradice la definición de $c$. También se puede aplicar directamente el Lema de Struwe 31.3.2 con $N = \varnothing$; la Proposición 31.3.4 explica por qué ambos argumentos son el mismo mecanismo en este caso.

**Corolario 31.5.4.** (Forma usual con origen y energía negativa) Sea $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ y supongamos que:

(i) $I(0) = 0$;

(ii) existen $\rho, \alpha > 0$ tales que $I(u) \ge \alpha$ cuando $\|u\| = \rho$;

(iii) existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$.

Si

$$c_e := \inf_{\gamma\in\Gamma(0,e)} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

y $I$ satisface $(PS)_{c_e}$, entonces $c_e \geq \alpha$ y existe $u \in X \setminus \{0\}$ con

$$DI(u) = 0, \qquad I(u) = c_e.$$

*Demostración.* Se aplica el teorema con $u_0 = 0$, $u_1 = e$, $r = \rho$ y $b \geq \alpha$. Como $c_e \geq \alpha > 0 = I(0)$, el punto crítico obtenido no puede ser el origen. □

### 31.5.3 Modelo: el $p$-laplaciano de Beltrami con potencia pura

Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía de dimensión $n$, con frontera suave, tal que cada componente conexa tiene frontera no vacía. Supongamos

$$1 < p < n, \qquad p < r < p^* := \frac{np}{n-p},$$

y equipemos

$$X := W_0^{1,p}(M)$$

con la norma equivalente

$$\|u\| := \left( \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^p \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{1/p}.$$

La equivalencia con la norma de Sobolev se sigue de la desigualdad de Poincaré, Teorema 9.6.8. La condición $p < n$ se mantiene aquí para definir el exponente crítico finito $p^*$; la coercividad no exige esa restricción. Consideremos

$$I(u) := \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{r}\|u\|_{L^r(M)}^r. \tag{31.27}$$

El Corolario 29.1.11, aplicado a $TM$ con exponente $p$ y al haz trivial real con exponente $r$, junto con los operadores lineales continuos $u \mapsto \nabla u$ y $X \hookrightarrow L^r(M)$, permite aplicar la regla de la cadena. Así, el funcional pertenece a $C^1(X, \mathbb{R})$ y

$$DI(u)[v] = \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M |u|^{r-2} u v \, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{31.28}$$

Así, los puntos críticos son exactamente las soluciones débiles de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{g}}\left(|\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2}\nabla u\right) = |u|^{r-2}u & \text{en } M, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases} \tag{31.29}$$

**Proposición 31.5.5.** (Geometría del paso de la montaña) El funcional de (31.27) satisface las hipótesis geométricas del Corolario 31.5.4.

*Demostración.* El encaje continuo $X \hookrightarrow L^r(M)$ proporciona $C_S > 0$ tal que $\|u\|_{L^r(M)} \leq C_S\|u\|$. Por lo tanto,

$$I(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{C_S^r}{r}\|u\|^r. \tag{31.30}$$

Como $r > p$, podemos elegir $\rho > 0$ de modo que

$$\frac{C_S^r}{r}\rho^{r-p} \le \frac{1}{2p}.$$

Si $\|u\| = \rho$, la estimación anterior da

$$I(u) \ge \frac{\rho^p}{2p} =: \alpha > 0.$$

Por otra parte, fijemos $w \in X \setminus \{0\}$. Para $t > 0$,

$$I(tw) = \frac{t^p}{p}\|w\|^p - \frac{t^r}{r}\|w\|_{L^r(M)}^r.$$

El segundo coeficiente es positivo y $r > p$; al dividir por $t^r$ se ve que $I(tw)/t^r \to -\|w\|_{L^r(M)}^r/r$. En consecuencia, $I(tw) \to -\infty$. Para $t$ suficientemente grande, $e := tw$ satisface $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$. □

La convergencia fuerte requerida por la condición de Palais–Smale se obtendrá de la siguiente propiedad de monotonía.

**Lema 31.5.6.** (Propiedad de tipo $(S_+)$) Definamos $\mathcal{A}_p : X \to X'$ mediante

$$\mathcal{A}_p(u)[v] := \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2}\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Si $u_j \rightharpoonup u$ en $X$ y

$$\limsup_{j\to\infty} \mathcal{A}_p(u_j)[u_j - u] \le 0,$$

entonces $u_j \to u$ en $X$.

*Demostración.* Sea $F(v) := \|v\|^p/p$. Este funcional es convexo, es de clase $C^1$ y $DF(v) = \mathcal{A}_p(v)$. La desigualdad de soporte para un funcional convexo diferenciable, aplicada en $u_j$, da

$$F(u) \ge F(u_j) + DF(u_j)[u - u_j].$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{j\to\infty} F(u_j) \le F(u).$$

La semicontinuidad débil inferior de la norma da la desigualdad opuesta para el límite inferior. Se concluye que $\|u_j\| \to \|u\|$.

Con la norma elegida, $X$ se identifica isométricamente mediante $u \mapsto \nabla u$ con un subespacio cerrado de $L^p(M, TM)$. Este último es uniformemente convexo para $1 < p < \infty$ y la convexidad uniforme se hereda a subespacios. Recordemos por qué, en un espacio uniformemente convexo, la convergencia débil junto con la convergencia de normas implica convergencia fuerte. Si $u = 0$, la afirmación es inmediata. Si $u \neq 0$, normalizamos $y_j := u_j/\|u_j\|$ y $y := u/\|u\|$. Si una subsucesión satisficiera $\|y_j - y\| \ge \eta > 0$, la convexidad uniforme daría $\|(y_j + y)/2\| \le 1 - \delta$ para algún $\delta > 0$. Por Hahn–Banach existe $\ell \in X'$ con $\|\ell\| = 1$ y $\ell(y) = 1$;

como $y_j \rightharpoonup y$,

$$\left\| \frac{y_j + y}{2} \right\| \geq \ell\left( \frac{y_j + y}{2} \right) \longrightarrow 1,$$

una contradicción. Así, $y_j \to y$ y, usando $\|u_j\| \to \|u\|$, obtenemos $u_j \to u$. □

**Proposición 31.5.7.** (Palais–Smale para la potencia subcrítica) El funcional de (31.27) satisface la condición (PS).

*Demostración.* Sea $(u_j) \subset X$ una sucesión de Palais–Smale. Existen $C > 0$ y una sucesión $d_j \to 0^+$ tales que

$$|I(u_j)| \leq C, \qquad \|DI(u_j)\|_{X'} \leq d_j.$$

La identidad exacta

$$I(u_j) - \frac{1}{r} DI(u_j)[u_j] = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \|u_j\|^p \tag{31.31}$$

implica

$$\left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \|u_j\|^p \leq C + \frac{d_j}{r} \|u_j\|.$$

La sucesión es acotada. En efecto, si una subsucesión tuviera norma tendente a infinito, al dividir la última desigualdad por $\|u_j\|^p$ el miembro izquierdo permanecería positivo y el derecho tendería a cero, pues $p > 1$. Como $X$ es reflexivo, después de extraer una subsucesión existe $u \in X$ tal que $u_j \rightharpoonup u$. El Corolario 9.4.31 da el encaje compacto porque $r < p^*$; por lo tanto,

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{en } L^r(M).$$

De (31.28) obtenemos

$$\mathcal{A}_p(u_j)[u_j - u] = DI(u_j)[u_j - u] + \int_M |u_j|^{r-2} u_j (u_j - u)\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

El primer término tiende a cero porque $(u_j - u)$ está acotada en $X$ y $\|DI(u_j)\|_{X'} \to 0$. Para el segundo, Hölder da

$$\left| \int_M |u_j|^{r-2} u_j (u_j - u)\, d\lambda_{\mathbf{g}} \right| \leq \|u_j\|_{L^r(M)}^{r-1} \|u_j - u\|_{L^r(M)} \longrightarrow 0.$$

El Lema 31.5.6 implica $u_j \to u$ en $X$. Toda sucesión de Palais–Smale posee, pues, una subsucesión convergente. □

**Corolario 31.5.8.** (Solución no trivial del problema de potencia) El problema (31.29) posee una solución débil no trivial $u \in W_0^{1,p}(M)$.

*Demostración.* Las Proposiciones 31.5.5 y 31.5.7 permiten aplicar el Corolario 31.5.4. El punto crítico obtenido tiene energía al menos $\alpha > 0$, de modo que no es el origen, y (31.28) es precisamente la formulación débil de (31.29). □

Este ejemplo aclara cuándo el paso de la montaña aporta algo que la reducción de Nehari no ofrece auto-

máticamente. El argumento minimax sólo usa una barrera, una dirección de energía baja y compacidad al nivel seleccionado; no exige que cada función radial $t \mapsto I(tu)$ tenga un único máximo ni que $\{u \neq 0 \mid DI(u)[u] = 0\}$ sea una subvariedad. En el capítulo siguiente compararemos ambos métodos y demostraremos que, para la potencia pura, sus niveles coinciden exactamente.

El mismo argumento abstracto funciona en una variedad Banach–Finsler completa siempre que la clase minimax se preserve al componer sus elementos con la deformación del Teorema 31.4.6. Éste es el punto de partida para principios minimax geométricos más generales.

# 32

# Restricciones variacionales y método de Nehari

Muchos funcionales de energía no pueden minimizarse directamente en todo el espacio ambiente: el origen puede ser un mínimo trivial, el funcional puede carecer de coercividad o la geometría relevante puede concentrarse en un conjunto de restricciones. En tales situaciones conviene estudiar los puntos críticos del funcional sobre una subvariedad adecuada.

La estructura de los conjuntos de nivel regulares y la descripción de sus espacios tangentes se establecieron en el Capítulo 24. El Corolario 23.4.2, obtenido a partir del Teorema 23.3.8, proporciona el principio de multiplicadores de Lagrange en espacios de Banach. Aquí aplicaremos ese marco a restricciones variacionales y, de manera particular, a la variedad de Nehari.

En el método de Nehari, la restricción se obtiene anulando la derivada del funcional en la dirección radial $u$. Esa condición elimina la dirección en la que la energía puede perder coercividad o conducir al punto crítico trivial, y conserva las variaciones tangenciales relevantes para localizar soluciones no nulas.

**Zeev Nehari y las restricciones naturales**

El método asociado a Nehari utiliza la derivada radial de la energía para seleccionar un conjunto donde desaparece una dirección improductiva [108]. Bajo hipótesis adecuadas, esa restricción es natural: un punto crítico del funcional restringido también es crítico en todo el espacio. La ventaja no es sólo técnica. La identidad radial refleja el equilibrio entre términos de distinta homogeneidad y convierte la búsqueda de soluciones no triviales en un problema geométrico sobre una subvariedad del espacio funcional.

## 32.1 Método de Nehari

La variedad de Nehari convierte una condición variacional necesaria en una restricción geométrica útil. Sea $I\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de energía sobre un espacio de Banach apropiado para buscar soluciones débiles. Todo punto crítico $u$ satisface $DI(u) = 0$ en $X'$ y, en particular, $DI(u)(u) = 0$.

Esto motiva considerar el conjunto

$$\mathcal{N} := \{u \in X \setminus \{0\} \mid DI(u)(u) = 0\},$$

llamado *variedad de Nehari asociada a* $I$. La idea del método consiste en estudiar primero el funcional $I$ restringido a $\mathcal{N}$ y después mostrar que, bajo hipótesis adecuadas, los puntos críticos de $I \restriction_{\mathcal{N}}$ son en realidad puntos críticos de $I$ en todo $X$.

Los resultados de la Sección 24.7 permiten describir geométricamente esta restricción. Si $V = \{u \in \Omega \mid J(u) = c\}$ es un conjunto de nivel regular en un abierto $\Omega \subseteq X$, entonces $T_u V = \ker(DJ(u))$ y

$$d(\varphi \restriction_V)_u = D\varphi(u) \restriction_{T_u V}.$$

Por esta razón definimos

$$\|D\varphi(u)\|_{*,V} := \|D\varphi(u) \restriction_{T_u V}\|_{\mathcal{L}(T_u V, \mathbb{R})}.$$

Si $T_u V \neq \{0\}$, esta norma también puede escribirse como

$$\|D\varphi(u)\|_{*,V} = \sup_{\substack{v \in T_u V \\ \|v\|=1}} |D\varphi(u)(v)|.$$

La norma sobre $T_u V$ es la inducida por su identificación con el subespacio $\ker(DJ(u)) \subseteq X$ y mide la pendiente de $\varphi$ únicamente en las direcciones admisibles.

**Lema 32.1.1.** Sean $X$ un espacio vectorial real y $f, g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ funcionales lineales, con $g \neq 0$. Si $\ker(g) \subset \ker(f)$, entonces existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f = \lambda g$.

*Demostración.* Como $g \neq 0$, existe $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) \neq 0$. Definimos $\lambda := \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Veamos que $f(x) = \lambda g(x)$ para todo $x \in X$. Sea $x \in X$ y consideremos $y := x - \dfrac{g(x)}{g(x_0)} x_0$. Entonces $g(y) = g(x) - \dfrac{g(x)}{g(x_0)} g(x_0) = 0$, por lo que $y \in \ker(g)$. Por hipótesis, $y \in \ker(f)$, y entonces $0 = f(y) = f(x) - \dfrac{g(x)}{g(x_0)} f(x_0)$. Por lo tanto, $f(x) = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} g(x) = \lambda g(x)$. Como esto vale para todo $x \in X$, se sigue que $f = \lambda g$. La unicidad es inmediata, pues si $\lambda_1 g = \lambda_2 g$, entonces $(\lambda_1 - \lambda_2) g = 0$, y como $g \neq 0$, se concluye que $\lambda_1 = \lambda_2$. □

**Lema 32.1.2.** (Lema de dualidad) Sea $X$ un espacio de Banach real y sean $f, g \in X'$, con $g \neq 0$. Entonces

$$\|f \restriction_{\ker(g)}\|_{(\ker(g))'} = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|f - \lambda g\|_{X'}.$$

Si $\ker(g) \neq \{0\}$, el miembro izquierdo coincide con $\sup\limits_{\substack{y \in \ker(g) \\ \|y\|=1}} |f(y)|$.

*Demostración.* Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $(f - \lambda g) \restriction_{\ker(g)} = f \restriction_{\ker(g)}$, se tiene

$$\|f \restriction_{\ker(g)}\|_{(\ker(g))'} \leq \|f - \lambda g\|_{X'}.$$

Al tomar el ínfimo respecto de $\lambda$, obtenemos

$$\|f\restriction_{\ker(g)}\|_{(\ker(g))'} \leq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f-\lambda g\|_{X'}.$$

Por el Corolario B.2.29, existe $\widetilde{f}\in X'$ que extiende a $f\restriction_{\ker(g)}$ y satisface

$$\|\widetilde{f}\|_{X'} = \|f\restriction_{\ker(g)}\|_{(\ker(g))'}.$$

Como $f-\widetilde{f}$ se anula en $\ker(g)$, el Lema 32.1.1 proporciona $\lambda_0\in\mathbb{R}$ tal que $f-\widetilde{f}=\lambda_0 g$. Por lo tanto,

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f-\lambda g\|_{X'} \leq \|f-\lambda_0 g\|_{X'} = \|\widetilde{f}\|_{X'} = \|f\restriction_{\ker(g)}\|_{(\ker(g))'}.$$

Las dos desigualdades prueban la igualdad y muestran, además, que el ínfimo se alcanza en $\lambda_0$. La última afirmación es la caracterización usual de la norma de un funcional lineal continuo sobre un espacio normado no trivial. □

**Proposición 32.1.3.** (Caracterización de los puntos críticos de restricciones) Sean $X$ un espacio de Banach real, $\Omega\subset X$ un abierto, $J\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ y $c\in\mathbb{R}$. Supongamos que $V:=\{u\in\Omega \mid J(u)=c\}$ es un conjunto de nivel regular, es decir, $DJ(u)\neq 0$ para toda $u\in V$. Si $\varphi\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ y $u\in V$, entonces

$$\|D\varphi(u)\|_{*,V} = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|D\varphi(u)-\lambda DJ(u)\|_{X'}.$$

Además, $u$ es un punto crítico de la restricción $\varphi\restriction_V$ si y sólo si existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$D\varphi(u)=\lambda DJ(u).$$

*Demostración.* Como $V$ es un conjunto de nivel regular de $J$ en el abierto $\Omega$, el Teorema 24.7.2 implica que $T_uV=\ker(DJ(u))$. Además, por el Lema 24.7.3,

$$d(\varphi\restriction_V)_u = D\varphi(u)\restriction_{T_uV}.$$

Por lo tanto,

$$\|D\varphi(u)\|_{*,V} = \|D\varphi(u)\restriction_{\ker(DJ(u))}\|_{(\ker(DJ(u)))'}.$$

Al aplicar el Lema 32.1.2 con $f=D\varphi(u)$ y $g=DJ(u)$, obtenemos

$$\|D\varphi(u)\|_{*,V} = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|D\varphi(u)-\lambda DJ(u)\|_{X'}.$$

Ahora probemos la caracterización de los puntos críticos. Por definición, $u$ es punto crítico de $\varphi\restriction_V$ si y sólo si $d(\varphi\restriction_V)_u=0$. Por el Lema 24.7.3, esto equivale a que $D\varphi(u)(v)=0$ para todo $v\in T_uV$. Como $T_uV=\ker(DJ(u))$, esto equivale a $\ker(DJ(u))\subset\ker(D\varphi(u))$. Como $DJ(u)\neq 0$, por el Lema 32.1.1, existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $D\varphi(u)=\lambda DJ(u)$.
Recíprocamente, si existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $D\varphi(u)=\lambda DJ(u)$, entonces para todo $v\in T_uV=\ker(DJ(u))$ se tiene $D\varphi(u)(v)=\lambda DJ(u)(v)=0$. Por lo tanto, $d(\varphi\restriction_V)_u=0$ y $u$ es un punto crítico de $\varphi\restriction_V$. Esto prueba la equivalencia. □

En particular, para la variedad de Nehari tomamos $\Omega := X \setminus \{0\}$, que es abierto en $X$, y definimos $J\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por $J(u) := DI(u)(u)$. Entonces

$$\mathcal{N} = \{u \in \Omega \mid J(u) = 0\} = \{u \in X \setminus \{0\} \mid DI(u)(u) = 0\}.$$

Por lo tanto, si $J \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ y $DJ(u) \neq 0$ para toda $u \in \mathcal{N}$, el Teorema 24.7.2 implica que $\mathcal{N}$ es una subvariedad encajada de Banach de clase $C^1$ y codimensión 1. Más aún, para cada $u \in \mathcal{N}$ se tiene

$$T_u\mathcal{N} = \ker(DJ(u)).$$

Si además $I$ es de clase $C^2$ en $\Omega$, entonces $J$ es de clase $C^1$ y, para todo $v \in X$,

$$DJ(u)(v) = D^2I(u)(v, u) + DI(u)(v).$$

En la sección siguiente aplicaremos este marco al problema superlineal subcrítico planteado sobre una variedad riemanniana compacta.

## 32.2 La variedad de Nehari en un caso modelo

Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía con frontera suave. Consideremos $X = W_0^{1,2}(M)$ y

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \frac{1}{r}\int_M |u|^r \, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad 2 < r < 2^*.$$

Entonces

$$J(u) := DI(u)(u) = \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 \, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M |u|^r \, d\lambda_{\mathbf{g}},$$

y la variedad de Nehari es $\mathcal{N} = J^{-1}(0) \setminus \{0\}$.

**Proposición 32.2.1.** (La variedad de Nehari como hipersuperficie) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta con frontera no vacía, y sean $X$, $I$, $J$ y $\mathcal{N}$ los objetos definidos al comienzo de esta sección. El conjunto $\mathcal{N}$ es una subvariedad encajada de Banach de clase $C^1$ y codimensión 1 de $X \setminus \{0\}$. Además, para cada $u \in \mathcal{N}$,

$$T_u\mathcal{N} = \ker DJ(u).$$

*Demostración.* Por la Proposición 29.3.2, $I \in C^2(X, \mathbb{R})$ y $J \in C^1(X \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. Para $u, v \in X$,

$$DJ(u)(v) = 2\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbf{g}} \, d\lambda_{\mathbf{g}} - r\int_M |u|^{r-2} uv \, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Si $u \in \mathcal{N}$, entonces

$$DJ(u)(u) = (2 - r)\int_M |u|^r \, d\lambda_{\mathbf{g}} < 0.$$

Por lo tanto, $DJ(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{N}$. El Teorema 24.7.2 implica que $\mathcal{N}$ es una subvariedad encajada de codimensión 1 y que $T_u\mathcal{N} = \ker DJ(u)$. □

Este ejemplo explica por qué se emplea el término variedad de Nehari cuando el funcional es de clase $C^2$. En

problemas quasilineales, sin embargo, el funcional puede ser solamente de clase $C^1$; en tal situación no es legítimo suponer que $u \mapsto DI(u)(u)$ sea diferenciable. El método radial de Szulkin y Weth permite trabajar directamente con la estructura topológica de la restricción.

## 32.3 Reducción radial de Szulkin y Weth

El método de Nehari puede desarrollarse sin suponer que el conjunto de restricción sea una subvariedad diferenciable. La idea consiste en seleccionar, sobre cada semirrecta positiva, el único punto en el cual el funcional alcanza su máximo y transportar el problema variacional a la esfera unitaria. Presentaremos el marco abstracto de Szulkin y Weth [139, §3.1, proposiciones 8–9 y corolario 10] en la notación adoptada en este libro.

Sea $X$ un espacio de Banach real uniformemente convexo, sea $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ y supongamos que $I(0) = 0$. Denotemos por

$$S_X := \{u \in X \mid \|u\|_X = 1\}$$

la esfera unitaria. Una función $\varphi\colon [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ se denomina **función de normalización** si es continua, $\varphi(0) = 0$, es estrictamente creciente y $\varphi(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Consideraremos las siguientes hipótesis:

(A1) Existe una función de normalización $\varphi$ tal que el funcional

$$\psi(u) := \int_0^{\|u\|_X} \varphi(t)\,dt, \qquad u \in X,$$

pertenece a $C^1(X \setminus \{0\},\mathbb{R})$, el mapeo de dualidad $\mathcal{J} := D\psi\colon X \setminus \{0\} \longrightarrow X'$ transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados y

$$\mathcal{J}(w)(w) = 1$$

para todo $w \in S_X$.

(A2) Para cada $w \in X \setminus \{0\}$ existe $s_w > 0$ tal que, si $\alpha_w\colon (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $\alpha_w(s) := I(sw)$, entonces

$$\alpha_w'(s) > 0 \quad \text{si } 0 < s < s_w, \qquad \alpha_w'(s) < 0 \quad \text{si } s > s_w.$$

(A3) Existe $\delta > 0$ tal que $s_w \geq \delta$ para todo $w \in S_X$ y, para cada compacto $K \subseteq S_X$, existe $C_K > 0$ tal que $s_w \leq C_K$ para todo $w \in K$.

La hipótesis (A2) implica que $s_w$ es el único máximo global de $\alpha_w$ y que $s_w w$ es el único punto de la semirrecta positiva generada por $w$ que pertenece al conjunto de Nehari

$$\mathcal{N} := \{u \in X \setminus \{0\} \mid DI(u)(u) = 0\}.$$

**Teorema 32.3.1.** (Principio de reducción radial) Supongamos que se cumplen las hipótesis (A1)–(A3). Definamos

$$\widehat{m}\colon X \setminus \{0\} \longrightarrow \mathcal{N}, \qquad \widehat{m}(w) := s_w w,$$

y sea $m := \widehat{m} \restriction_{S_X}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) el mapeo $\widehat{m}$ es continuo;

(b) $m\colon S_X \longrightarrow \mathcal{N}$ es un homeomorfismo y

$$m^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|_X}$$

para todo $u \in \mathcal{N}$;

(c) el funcional $\widehat{\Psi} := I \circ \widehat{m}$ pertenece a $C^1(X \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ y

$$D\widehat{\Psi}(w)(z) = \frac{\|\widehat{m}(w)\|_X}{\|w\|_X} DI(\widehat{m}(w))(z) \tag{32.1}$$

para todos $w \in X \setminus \{0\}$ y $z \in X$;

(d) la esfera $S_X$ es una subvariedad encajada de Banach de clase $C^1$, el funcional $\Psi := I \circ m$ pertenece a $C^1(S_X, \mathbb{R})$ y

$$D\Psi(w)(z) = \|m(w)\|_X DI(m(w))(z) \tag{32.2}$$

para todos $w \in S_X$ y $z \in T_w S_X$;

(e) un punto $w \in S_X$ es crítico para $\Psi$ si y sólo si $m(w)$ es un punto crítico no trivial de $I$;

(f) se tiene la caracterización minimax

$$\inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = \inf_{w \in S_X} \Psi(w) = \inf_{w \in X \setminus \{0\}} \max_{s>0} I(sw).$$

*Demostración.* Comencemos con una propiedad de escala. Si $w \in X \setminus \{0\}$ y $t > 0$, entonces $\alpha_{tw}(s) = I(stw) = \alpha_w(st)$. La unicidad del máximo dada por (A2) implica

$$s_{tw} = \frac{s_w}{t} \tag{32.3}$$

y, por lo tanto, $\widehat{m}(tw) = \widehat{m}(w)$.

La primera parte de (A3) muestra que $\mathcal{N}$ está separada del origen. Si $u \in \mathcal{N}$ y $w := \frac{u}{\|u\|_X} \in S_X$, entonces $u = s_w w$ y $\|u\|_X = s_w \geq \delta$. Además, $\mathcal{N}$ es cerrada en $X$. Si $u_j \in \mathcal{N}$ y $u_j \to u$ en $X$, la separación del origen implica $u \neq 0$, mientras que la continuidad de $DI\colon X \longrightarrow X'$ da

$$DI(u)(u) = \lim_{j \to \infty} DI(u_j)(u_j) = 0.$$

Por consiguiente, $u \in \mathcal{N}$.

Probemos la continuidad de $\widehat{m}$. Sea $w_j \to w \neq 0$. Por (32.3), podemos reemplazar cada $w_j$ y $w$ por sus normalizaciones y suponer que $w_j, w \in S_X$. El conjunto $K := \{w\} \cup \{w_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ es compacto. Por (A3), la sucesión $(s_{w_j})$ está acotada y separada de cero. Toda subsucesión posee entonces una subsucesión, que denotaremos del mismo modo, tal que $s_{w_j} \to s > 0$. De aquí,

$$\widehat{m}(w_j) = s_{w_j} w_j \longrightarrow sw.$$

Como $\mathcal{N}$ es cerrada, $sw \in \mathcal{N}$. La unicidad de la intersección de la semirrecta positiva generada por $w$ con $\mathcal{N}$ implica $s = s_w$, y por lo tanto $\widehat{m}(w_j) \to \widehat{m}(w)$. El criterio de subsucesiones demuestra la continuidad de $\widehat{m}$.

La continuidad de $m$ es inmediata. Si $u \in \mathcal{N}$ y $w := \frac{u}{\|u\|_X}$, entonces $w \in S_X$ y, por la unicidad radial, $s_w = \|u\|_X$;

así, $m(w) = u$. Esto prueba que $m$ es biyectivo y que su inversa está dada por $m^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|_X}$. Como la normalización es continua en $X \setminus \{0\}$, $m^{-1}$ es continua y $m$ es un homeomorfismo.
Estudiemos ahora la regularidad de $\widehat{\Psi}$. Fijemos $w \in X \setminus \{0\}$ y $z \in X$. Para $t \neq 0$ suficientemente pequeño, escribamos $s_t := s_{w+tz}$. Como $s_w w$ maximiza a $s \mapsto I(sw)$ y $s_t(w+tz)$ maximiza a $s \mapsto I(s(w+tz))$, se tiene

$$I(s_w(w+tz)) - I(s_w w) \leq \widehat{\Psi}(w+tz) - \widehat{\Psi}(w) \leq I(s_t(w+tz)) - I(s_t w).$$

Aplicando el teorema del valor medio a las funciones reales obtenidas al restringir $I$ a los segmentos correspondientes, existen $\eta_t, \tau_t \in (0,1)$ tales que

$$I(s_w(w+tz)) - I(s_w w) = t s_w DI\big(s_w(w+\eta_t tz)\big)(z)$$

y

$$I(s_t(w+tz)) - I(s_t w) = t s_t DI\big(s_t(w+\tau_t tz)\big)(z).$$

La continuidad de $w \mapsto s_w$ y de $DI$ implica que ambos cocientes, después de dividir por $t$, convergen a $s_w DI(s_w w)(z)$ cuando $t \to 0$. Para $t > 0$ el resultado se sigue directamente por encajonamiento y, para $t < 0$, las desigualdades cambian de sentido al dividir por $t$ y producen el mismo límite. Por lo tanto, existe la derivada direccional y

$$D_z \widehat{\Psi}(w) = s_w DI(s_w w)(z).$$

Como $s_w = \frac{\|\widehat{m}(w)\|_X}{\|w\|_X}$, se obtiene (32.1). El miembro derecho es lineal y continuo respecto de $z$, y depende continuamente de $w$ en la norma de $X'$. Por el Corolario 23.1.17, $\widehat{\Psi} \in C^1(X \setminus \{0\}, \mathbb{R})$.
Sea $c_\varphi := \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$. Como $\varphi$ es estrictamente creciente, $S_X = \psi^{-1}(c_\varphi)$. Además, (A1) proporciona $D\psi(w)(w) = \mathcal{J}(w)(w) = 1$ para todo $w \in S_X$. El valor $c_\varphi$ es regular y el Teorema 24.7.2 implica que $S_X$ es una subvariedad encajada de clase $C^1$ y

$$T_w S_X = \ker \mathcal{J}(w).$$

La identidad (32.2) se obtiene restringiendo (32.1) a $S_X$, pues $\|w\|_X = 1$.
Si $DI(m(w)) = 0$, entonces (32.2) muestra que $D\Psi(w) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $D\Psi(w) = 0$. Dado $v \in X$, definamos

$$\alpha := \mathcal{J}(w)(v), \qquad z := v - \alpha w.$$

Como $\mathcal{J}(w)(w) = 1$, se tiene $\mathcal{J}(w)(z) = 0$, de modo que $z \in T_w S_X$. La identidad de Nehari da $DI(m(w))(m(w)) = 0$ y, como $m(w) = \|m(w)\|_X w$, también $DI(m(w))(w) = 0$. Por otra parte, (32.2) y $D\Psi(w) = 0$ implican $DI(m(w))(z) = 0$. Por consiguiente,

$$DI(m(w))(v) = DI(m(w))(z) + \alpha DI(m(w))(w) = 0.$$

Como $v$ era arbitrario, $DI(m(w)) = 0$.
Finalmente, la biyectividad de $m$ proporciona

$$\inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = \inf_{w \in S_X} \Psi(w).$$

Por (A2), $I(s_w w) = \max_{s>0} I(sw)$, y esta cantidad sólo depende de la semirrecta positiva generada por $w$. La

normalización de cada vector no nulo conduce entonces a

$$\inf_{w\in S_X}\Psi(w)=\inf_{w\in X\setminus\{0\}}\max_{s>0}I(sw).$$

□

La reducción radial permite sustituir la minimización sobre $\mathcal{N}$, que no tiene por qué ser una subvariedad diferenciable, por un problema de clase $C^1$ sobre la esfera unitaria.

## 32.4 Paso de la montaña y Nehari en el modelo de potencia

Retomemos el problema de potencia del Capítulo 31. Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía de dimensión $n$, con frontera suave, tal que cada componente conexa tiene frontera no vacía, y supongamos

$$1<p<n,\qquad p<r<p^*:=\frac{np}{n-p}.$$

En

$$X:=W_0^{1,p}(M),\qquad \|u\|:=\|\nabla u\|_{L^p(M)},$$

consideramos

$$I(u):=\frac{1}{p}\|u\|^p-\frac{1}{r}\|u\|_{L^r(M)}^r. \tag{32.4}$$

Su derivada se calculó en (31.28). Introduzcamos

$$G(u):=DI(u)[u]=\|u\|^p-\|u\|_{L^r(M)}^r$$

y

$$\mathcal{N}:=\{u\in X\setminus\{0\}\mid G(u)=0\}.$$

El argumento de escala permite proyectar cada semirrecta positiva sobre $\mathcal{N}$ y relacionar esta proyección con la minimización de la energía.

**Teorema 32.4.1.** (Proyección radial, minimizador y estado fundamental) Para el funcional de (32.4) se cumplen las siguientes afirmaciones.

(a) Para cada $u\in X\setminus\{0\}$ existe un único $t_u>0$ tal que $t_u u\in\mathcal{N}$, dado por

$$t_u=\left(\frac{\|u\|^p}{\|u\|_{L^r(M)}^r}\right)^{1/(r-p)}. \tag{32.5}$$

Además,

$$I(t_u u)=\max_{t>0}I(tu).$$

(b) El nivel de Nehari

$$m:=\inf_{u\in\mathcal{N}}I(u)$$

es positivo y se alcanza en algún $u_0\in\mathcal{N}$.

(c) El minimizador $u_0$ es un punto crítico no trivial de $I$ y es un estado fundamental:

$$I(u_0) = m = \inf\{I(v) \mid v \neq 0,\ DI(v) = 0\}.$$

(d) Se tiene la caracterización radial

$$m = \inf_{u \in X\setminus\{0\}} \max_{t>0} I(tu). \tag{32.6}$$

*Demostración.* Fijemos $u \neq 0$ y definamos $\varphi_u(t) := I(tu)$ para $t > 0$. Entonces

$$\varphi_u(t) = \frac{t^p}{p}\|u\|^p - \frac{t^r}{r}\|u\|_{L^r(M)}^r,$$
$$\varphi_u'(t) = t^{p-1}\left(\|u\|^p - t^{r-p}\|u\|_{L^r(M)}^r\right).$$

Los dos coeficientes son positivos. Como $t \mapsto t^{r-p}$ es estrictamente creciente, $\varphi_u'$ se anula una sola vez, precisamente en el valor de (32.5); es positiva antes y negativa después. Ese punto es, por lo tanto, el único máximo global de $\varphi_u$. Además,

$$G(tu) = t\varphi_u'(t),$$

lo que prueba (a).
Si $u \in \mathcal{N}$, la identidad de Nehari da

$$\|u\|^p = \|u\|_{L^r(M)}^r, \qquad I(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)\|u\|^p. \tag{32.7}$$

Sea $C_S > 0$ una constante del encaje $X \hookrightarrow L^r(M)$. Entonces

$$\|u\|^p = \|u\|_{L^r(M)}^r \le C_S^r\|u\|^r.$$

Como $u \neq 0$, resulta

$$\|u\| \ge C_S^{-r/(r-p)} =: \delta > 0.$$

Junto con (32.7), esto muestra que

$$m \ge \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)\delta^p > 0. \tag{32.8}$$

Sea ahora $(u_j) \subset \mathcal{N}$ una sucesión minimizante. Por (32.7), $(u_j)$ está acotada en $X$. Después de extraer una subsucesión,

$$u_j \rightharpoonup u \quad \text{en } X, \qquad u_j \to u \quad \text{en } L^r(M),$$

donde la segunda convergencia se debe al encaje compacto subcrítico. Si $\kappa := 1/p - 1/r > 0$, entonces

$$m = \lim_{j\to\infty} I(u_j) = \kappa \lim_{j\to\infty} \|u_j\|^p = \kappa \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{L^r(M)}^r = \kappa\|u\|_{L^r(M)}^r. \tag{32.9}$$

La positividad de $m$ implica $u \neq 0$. La semicontinuidad débil inferior da

$$\|u\|^p \le \liminf_{j\to\infty} \|u_j\|^p = \|u\|_{L^r(M)}^r. \tag{32.10}$$

Si la desigualdad fuera estricta, la fórmula (32.5) daría $0 < t_u < 1$ y $t_u u \in \mathcal{N}$. Usando de nuevo (32.7) y (32.9), obtendríamos

$$m \le I(t_u u) = \kappa t_u^p \|u\|^p < \kappa \|u\|_{L^r(M)}^r = m,$$

una contradicción. Así, hay igualdad en (32.10); por consiguiente, $u \in \mathcal{N}$ e $I(u) = m$. Hemos probado (b), con $u_0 := u$.

Probemos que la restricción es natural. El funcional $G$ pertenece a $C^1(X, \mathbb{R})$ y, para $v \in \mathcal{N}$,

$$DG(v)[v] = p\|v\|^p - r\|v\|_{L^r(M)}^r = (p - r)\|v\|^p < 0.$$

En particular, $DG(v) \neq 0$ sobre $\mathcal{N}$, de modo que $\mathcal{N}$ es una hipersuperficie de clase $C^1$. Como $u_0$ minimiza $I$ sobre ella, el principio de multiplicadores de Lagrange proporciona $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$DI(u_0) = \lambda DG(u_0).$$

Al evaluar en $u_0$ se obtiene

$$0 = DI(u_0)[u_0] = \lambda(p - r)\|u_0\|^p,$$

y, por lo tanto, $\lambda = 0$ y $DI(u_0) = 0$. Todo punto crítico no trivial $v$ de $I$ satisface $G(v) = DI(v)[v] = 0$, luego pertenece a $\mathcal{N}$ y $I(v) \ge m = I(u_0)$. Esto prueba (c).

Finalmente, por (a), cada semirrecta positiva encuentra $\mathcal{N}$ una sola vez y allí alcanza su máximo. Al recorrer todas las direcciones no nulas se obtiene

$$\inf_{u \neq 0} \max_{t > 0} I(tu) = \inf_{v \in \mathcal{N}} I(v) = m,$$

que es (d). □

### 32.4.1 Comparación conceptual

Los dos métodos organizan la misma energía de maneras diferentes. La tabla siguiente compara sus hipótesis, construcciones y conclusiones.

Cuadro 32.1: Paso de la montaña y método de Nehari.

| | **Paso de la montaña** | **Método de Nehari** |
|---|---|---|
| Idea principal | Minimax sobre caminos | Minimización sobre una restricción natural |
| Objeto principal | La clase $\Gamma(0, e)$ | La variedad $\mathcal{N}$ |
| Nivel variacional | $c_e = \inf_{\gamma \in \Gamma(0,e)} \max_t I(\gamma(t))$ | $m = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u)$ |
| Geometría | Barrera de paso de montaña | Geometría radial |
| Construcción | Caminos del origen a un punto de energía negativa | Puntos que satisfacen $DI(u)[u] = 0$ |
| Compacidad | Usualmente $(PS)_{c_e}$ | Compacidad de sucesiones minimizantes |
| Resultado típico | Un punto crítico no trivial | Frecuentemente un estado fundamental |
| Fortaleza principal | Principio minimax flexible; no requiere unicidad radial | Descripción precisa de soluciones de energía mínima |
| Dificultad principal | Verificar Palais–Smale al nivel minimax | Probar naturalidad, proyección radial y existencia del mínimo |

La diferencia decisiva aparece cuando la función radial $t \mapsto I(tu)$ puede tener varios puntos críticos o ninguno. El paso de la montaña todavía puede funcionar si subsisten la barrera global y Palais–Smale. La reducción de Nehari, en cambio, necesita hipótesis que controlen la intersección de cada semirrecta con $\mathcal{N}$. Cuando esa intersección es única, Nehari puede verse como un minimax radial; el paso de la montaña permite competir con todos los caminos, no sólo con semirrectas.

### 32.4.2 Coincidencia exacta de los niveles

Para cada dirección $u$ puede construirse un camino radial que termine en un múltiplo grande de $u$. Si la clase $\Gamma(0,e)$ tiene un extremo $e$ fijo, hay que conectar ese múltiplo con $e$. La región de energía negativa permite realizar esa conexión sin aumentar la altura máxima del camino.

**Teorema 32.4.2.** (Igualdad entre los niveles de paso de montaña y Nehari) Sea $e \in X$ tal que $I(e) < 0$ y definamos

$$c_e := \inf_{\gamma \in \Gamma(0,e)} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)).$$

Entonces

$$c_e = m = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = \inf_{u \neq 0} \max_{t>0} I(tu).$$

En particular, el nivel no depende de la elección del extremo de energía negativa.

*Demostración.* Dividimos la prueba en las dos desigualdades.
*Primera desigualdad: $m \le c_e$.* Sea $C_S$ una constante del encaje $X \hookrightarrow L^r(M)$. Para $v \in X$,

$$G(v) = \|v\|^p - \|v\|_{L^r(M)}^r \ge \|v\|^p - C_S^r \|v\|^r.$$

Elegimos $\eta > 0$ tan pequeño que $C_S^r \eta^{r-p} < 1$. Entonces

$$0 < \|v\| \le \eta \quad \Longrightarrow \quad G(v) > 0. \tag{32.11}$$

Por otro lado, $I(e) < 0$ implica

$$\frac{1}{p}\|e\|^p < \frac{1}{r}\|e\|_{L^r(M)}^r,$$

y, como $r/p > 1$,

$$G(e) = \|e\|^p - \|e\|_{L^r(M)}^r < 0. \tag{32.12}$$

Disminuimos $\eta$, si es necesario, para que $\eta < \|e\|$.
Sea $\gamma \in \Gamma(0,e)$. El conjunto

$$A_\gamma := \{t \in [0,1] \mid \|\gamma(t)\| = \eta\}$$

es no vacío y compacto. Sea $t_0 := \max A_\gamma$. Para $t > t_0$ se tiene $\|\gamma(t)\| > \eta$: si la norma volviera a ser menor o igual que $\eta$, el teorema del valor intermedio produciría otro punto de $A_\gamma$ posterior a $t_0$. Por (32.11), $G(\gamma(t_0)) > 0$, mientras que (32.12) da $G(\gamma(1)) < 0$. Existe, pues, $t_* \in (t_0, 1)$ tal que $G(\gamma(t_*)) = 0$. Como $\|\gamma(t_*)\| > \eta$, el punto $\gamma(t_*)$ es no nulo y pertenece a $\mathcal{N}$. En consecuencia,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \ge I(\gamma(t_*)) \ge m.$$

Tomando el ínfimo respecto de $\gamma$ obtenemos $c_e \geq m$.
*Segunda desigualdad:* $c_e \leq m$. Fijemos $u \in \mathcal{N}$ y pongamos

$$a := \frac{u}{\|u\|}, \qquad b := \frac{e}{\|e\|}.$$

La esfera unitaria de $X$ es conexa por caminos. En efecto, si $b \neq -a$, el camino

$$s \longmapsto \frac{(1-s)a + sb}{\|(1-s)a + sb\|}$$

une $a$ con $b$; si $b = -a$, elegimos un vector unitario $z \notin \operatorname{span}\{a\}$ y concatenamos los caminos normalizados de $a$ a $z$ y de $z$ a $b$. Denotemos por $h\colon [0,1] \to X$ uno de estos caminos unitarios.
Tal vector $z$ existe porque $X = W_0^{1,p}(M)$ es infinito-dimensional: una sucesión de funciones suaves no nulas con soportes contenidos en bolas disjuntas del interior de $M$ es linealmente independiente. En particular, $\dim X \geq 2$.
La función $s \mapsto \|h(s)\|_{L^r(M)}^r$ es continua y estrictamente positiva. Por compacidad de $[0,1]$ existe

$$q := \min_{s\in[0,1]} \|h(s)\|_{L^r(M)}^r > 0.$$

Elegimos $R > \max\{\|u\|, \|e\|\}$ tan grande que

$$\frac{R^p}{p} - \frac{qR^r}{r} < 0.$$

Entonces

$$I(Rh(s)) \leq \frac{R^p}{p} - \frac{qR^r}{r} < 0 \qquad (0 \leq s \leq 1). \tag{32.13}$$

Construimos $\gamma_u \in \Gamma(0,e)$ en tres tramos:

$$\gamma_u(t) := \begin{cases} 3tRa, & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ Rh(3t-1), & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ \big((3-3t)R + (3t-2)\|e\|\big)b, & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Los valores coinciden en los puntos de unión, porque $h(0) = a$ y $h(1) = b$. En el primer tramo, la función radial alcanza su único máximo en $\|u\|a = u$; por lo tanto, la energía es a lo sumo $I(u)$. El segundo tramo tiene energía negativa por (32.13). Finalmente, para $s \geq \|e\|$,

$$I(sb) = \frac{s^p}{p} - \frac{s^r}{r}\|b\|_{L^r(M)}^r < 0,$$

pues esta desigualdad vale en $s = \|e\|$ y su equivalente $s^{r-p} > r/(p\|b\|_{L^r(M)}^r)$ se conserva al aumentar $s$. Así, el tercer tramo también tiene energía negativa y

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma_u(t)) = I(u).$$

De aquí, $c_e \leq I(u)$ para todo $u \in \mathcal{N}$. Al tomar el ínfimo, $c_e \leq m$. La igualdad con el minimax radial ya se

probó en (32.6). □

Por el Teorema 32.4.1, el nivel común $c_e = m$ se alcanza en un estado fundamental. Por el Corolario 31.5.4 y la condición (PS) demostrada en la Proposición 31.5.7, también es un nivel crítico producido por paso de la montaña. Las dos construcciones no tienen por qué seleccionar la misma función cuando hay varios puntos críticos, pero sí seleccionan la misma energía mínima en este modelo homogéneo.

## 32.5 Una ecuación quasilineal en un haz vectorial

La teoría precedente se aplica ahora al problema quasilineal estudiado en [150]. La caracterización del espacio de Dirichlet mediante la traza permite interpretar la condición homogénea de frontera, mientras que los encajes de Sobolev y Rellich–Kondrashov proporcionan la integrabilidad y la compacidad requeridas por el funcional de energía. Desarrollaremos su diferenciabilidad de Fréchet, la geometría de sus funciones radiales y la existencia de un estado fundamental mediante el método de Nehari de Szulkin y Weth.

Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía de dimensión $n$, con frontera suave, tal que cada componente conexa tiene frontera no vacía. Sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito positivo, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ y una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ compatible con $\mathbf{h_E}$. La métrica $\mathbf{g}$ y la métrica fibrada $\mathbf{h_E}$ inducen la métrica fibrada $\mathbf{g} \otimes \mathbf{h_E}$ en $T^*M \otimes \mathbf{E}$. Fijemos

$$2 \le p \le q < n, \qquad q^* := \frac{nq}{n-q},$$

y consideremos el problema

$$\begin{cases} (\nabla^{\mathbf{E}})^*\Big(a(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}})|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^{p-2}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\Big) = f(\mathbf{u}) & \text{en } M, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases} \tag{32.14}$$

Definamos $A(t) := \displaystyle\int_0^t a(s)\,ds$. Supondremos que:

(a1) $a\colon [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ es continua y existen $k_1, k_2, k_3, k_4 \ge 0$, con $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ cuando $p < q$, tales que

$$k_1 t^p + k_2 t^q \le a(t^p)t^p \le k_3 t^p + k_4 t^q$$

para todo $t > 0$;

(a2) la función $t \longmapsto \dfrac{a(t^p)}{t^{q-p}}$ es no creciente en $(0,+\infty)$;

(a3) la función $t \longmapsto A(t^p)$ es convexa en $[0,+\infty)$.

Sea $\mathcal{F}\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua cuya restricción $\mathcal{F}_x\colon \mathbf{E}_x \longrightarrow \mathbb{R}$ a cada fibra es de clase $C^1$. Denotaremos por $f_x\colon \mathbf{E}_x \longrightarrow \mathbf{E}_x$ su gradiente respecto de $\mathbf{h_E}$, es decir,

$$D\mathcal{F}_x(\xi)(\zeta) = \langle f_x(\xi), \zeta\rangle_{\mathbf{h_E}}.$$

Supondremos, además, que el mapeo fibrado $f\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$, definido por $f(\xi) := f_{\pi_{\mathbf{E}}(\xi)}(\xi)$, es continuo y que:

(f1) $\lim_{|\xi|_{\mathbf{h_E}}\to 0} \dfrac{|f_x(\xi)|_{\mathbf{h_E}}}{|\xi|_{\mathbf{h_E}}^{p-1}} = 0$ uniformemente respecto de $x \in M$; es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, independiente de $x$, tal que

$$|f_x(\xi)|_{\mathbf{h_E}} \leq \varepsilon |\xi|_{\mathbf{h_E}}^{p-1}$$

si $x \in M$ y $0 < |\xi|_{\mathbf{h_E}} < \delta$;

(f2) existen $C_f > 0$ y $r \in (q, q^*)$ tales que

$$|f_x(\xi)|_{\mathbf{h_E}} \leq C_f \left(1 + |\xi|_{\mathbf{h_E}}^{r-1}\right)$$

para todo $x \in M$ y toda $\xi \in \mathbf{E}_x$;

(f3) existe $\theta \in (q, r]$ tal que

$$0 < \theta \mathcal{F}_x(\xi) \leq \langle f_x(\xi), \xi \rangle_{\mathbf{h_E}}$$

para todo $x \in M$ y toda $\xi \in \mathbf{E}_x \setminus \{0_x\}$;

(f4) para cada $x \in M$ y cada $\xi \in \mathbf{E}_x \setminus \{0_x\}$, la función

$$t \longmapsto \frac{\langle f_x(t\xi), t\xi \rangle_{\mathbf{h_E}}}{t^q}$$

es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.

Las hipótesis anteriores determinan también el valor del potencial en la sección nula. Fijemos $x \in M$ y $\xi \in \mathbf{E}_x \setminus \{0_x\}$. Por (f3), para todo $t > 0$,

$$0 < \theta \mathcal{F}_x(t\xi) \leq \langle f_x(t\xi), t\xi \rangle_{\mathbf{h_E}}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por (f1), existe $\delta > 0$ tal que, si $0 < t|\xi|_{\mathbf{h_E}} < \delta$, entonces

$$|f_x(t\xi)|_{\mathbf{h_E}} \leq \varepsilon t^{p-1} |\xi|_{\mathbf{h_E}}^{p-1}.$$

En consecuencia,

$$0 < \mathcal{F}_x(t\xi) \leq \frac{\varepsilon}{\theta} t^p |\xi|_{\mathbf{h_E}}^p$$

para todo $t > 0$ suficientemente pequeño. Por lo tanto, $\mathcal{F}_x(t\xi) \to 0$ cuando $t \to 0^+$. Como $\mathcal{F}_x$ es continua en la fibra, se concluye que $\mathcal{F}_x(0_x) = 0$. El Teorema B.6.5, aplicado a $t \longmapsto \mathcal{F}_x(t\xi)$, proporciona entonces

$$\mathcal{F}_x(\xi) = \int_0^1 \langle f_x(t\xi), \xi \rangle_{\mathbf{h_E}} \, dt. \tag{32.15}$$

La continuidad global de $\mathcal{F} \colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ forma parte de las hipótesis. Esta condición no se sigue de la mera continuidad de cada restricción $\mathcal{F}_x$ y será utilizada, en particular, al tomar mínimos y máximos sobre los fibrados compactos de esferas y bolas unitarias.

Tomemos $X := W_0^{1,q}(M, \mathbf{E})$. Este espacio contiene una sección no nula: basta multiplicar un elemento de un marco local del haz por una función suave no nula con soporte compacto en el interior de una carta trivializante. Por la desigualdad de Poincaré del Teorema 9.6.8, existe una constante $C_P > 0$, dependiente únicamente de $M$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{h_E}$, $\nabla^{\mathbf{E}}$ y $q$, tal que, si

$$\|\mathbf{u}\|_X := \left( \int_M |\nabla_w^{\mathbf{E}} \mathbf{u}|_{\mathbf{g} \otimes \mathbf{h_E}}^q \, d\lambda_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

entonces

$$\|\mathbf{u}\|_X \le \|\mathbf{u}\|_{W^{1,q}(M,\mathbf{E})} \le (1 + C_P^q)^{\frac{1}{q}} \|\mathbf{u}\|_X$$

para toda $\mathbf{u} \in X$. Utilizaremos $\|\cdot\|_X$ como norma de $X$. En lo sucesivo escribiremos $\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ para la derivada covariante débil de $\mathbf{u} \in X$. Como $p \le q$ y el volumen es finito, la desigualdad de Hölder da $W_0^{1,q}(M,\mathbf{E}) \hookrightarrow W_0^{1,p}(M,\mathbf{E})$: una sucesión de secciones suaves de soporte compacto que converge en $W^{1,q}$ converge también en $W^{1,p}$. Por ello, Poincaré puede aplicarse a los dos exponentes $p$ y $q$.

**Definición 32.5.1.** (Solución débil del problema quasilineal) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. Una sección $\mathbf{u} \in X$ es una solución débil de (32.14) si

$$\int_M a(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}})|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^{p-2}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\langle\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}\boldsymbol{\varphi}\rangle_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle f_x(\mathbf{u}),\boldsymbol{\varphi}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}$$

para toda $\boldsymbol{\varphi} \in X$.

## 32.5.1 Estimaciones preliminares

La monotonía de (a2) relaciona la primitiva $A$ con el término que aparece en la identidad de Nehari.

**Lema 32.5.2.** Para todo $\rho \ge 0$ se tiene

$$A(\rho^p) \ge \frac{p}{q}a(\rho^p)\rho^p.$$

*Demostración.* La afirmación es inmediata para $\rho = 0$. Sea $\rho > 0$. Si $0 < \tau \le \rho$, la hipótesis (a2) implica $\dfrac{a(\tau^p)}{\tau^{q-p}} \ge \dfrac{a(\rho^p)}{\rho^{q-p}}$, y, por lo tanto, $a(\tau^p) \ge a(\rho^p)\left(\dfrac{\tau}{\rho}\right)^{q-p}$.
Usando el cambio de variable $s = \tau^p$, obtenemos

$$A(\rho^p) = p\int_0^\rho a(\tau^p)\tau^{p-1}\,d\tau \ge p\,a(\rho^p)\rho^{p-q}\int_0^\rho \tau^{q-1}\,d\tau = \frac{p}{q}a(\rho^p)\rho^p.$$

□

**Lema 32.5.3.** (Estimaciones de crecimiento fibra a fibra) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f_x(\xi)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le \varepsilon|\xi|^{p-1}_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + C_\varepsilon|\xi|^{r-1}_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \tag{32.16}$$

para todo $x \in M$ y toda $\xi \in \mathbf{E}_x$. Además,

$$|\mathcal{F}_x(\xi)| \le \frac{\varepsilon}{p}|\xi|^p_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + \frac{C_\varepsilon}{r}|\xi|^r_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}. \tag{32.17}$$

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Por (f1), existe $\delta \in (0,1)$ tal que

$$|f_x(\xi)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \le \varepsilon|\xi|^{p-1}_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}$$

si $x \in M$ y $0 < |\xi|_{\mathbf{h_E}} \leq \delta$. Al hacer $\xi \to 0_x$ y usar la continuidad de $f_x$, se obtiene $f_x(0_x) = 0$, por lo que la misma desigualdad vale para $\xi = 0_x$.
Si $|\xi|_{\mathbf{h_E}} \geq \delta$, la hipótesis (f2) da

$$|f_x(\xi)|_{\mathbf{h_E}} \leq C_f\left(1 + |\xi|_{\mathbf{h_E}}^{r-1}\right) \leq C_f\left(1 + \delta^{1-r}\right)|\xi|_{\mathbf{h_E}}^{r-1}.$$

Tomando $C_\varepsilon \geq C_f(1 + \delta^{1-r})$, obtenemos (32.16) en las dos regiones.
Como $\mathcal{F}_x(0_x) = 0$ y $f_x$ es el gradiente fibrado de $\mathcal{F}_x$, el Teorema B.6.5, aplicado a $t \longmapsto \mathcal{F}_x(t\xi)$, proporciona

$$\mathcal{F}_x(\xi) = \int_0^1 \langle f_x(t\xi), \xi\rangle_{\mathbf{h_E}}\, dt.$$

Por (32.16),

$$|\mathcal{F}_x(\xi)| \leq \int_0^1 |f_x(t\xi)|_{\mathbf{h_E}}|\xi|_{\mathbf{h_E}}\, dt \leq \int_0^1 \left(\varepsilon t^{p-1}|\xi|_{\mathbf{h_E}}^{p-1} + C_\varepsilon t^{r-1}|\xi|_{\mathbf{h_E}}^{r-1}\right)|\xi|_{\mathbf{h_E}}\, dt = \frac{\varepsilon}{p}|\xi|_{\mathbf{h_E}}^{p} + \frac{C_\varepsilon}{r}|\xi|_{\mathbf{h_E}}^{r}.$$

□

**Lema 32.5.4.** (Cota inferior para el potencial) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. Existen constantes $D > 0$ y $D' \geq 0$ tales que

$$\mathcal{F}_x(\xi) \geq D|\xi|_{\mathbf{h_E}}^{\theta} - D'$$

para todo $x \in M$ y toda $\xi \in \mathbf{E}_x$.

*Demostración.* Fijemos $x \in M$ y $\eta \in \mathbf{E}_x \setminus \{0_x\}$. Para $t > 0$, definamos

$$H_{x,\eta}(t) := \frac{\mathcal{F}_x(t\eta)}{t^\theta}.$$

Por (f3), $\mathcal{F}_x(t\eta) > 0$. Además,

$$\frac{d}{dt}\log H_{x,\eta}(t) = \frac{\langle f_x(t\eta), t\eta\rangle_{\mathbf{h_E}} - \theta\mathcal{F}_x(t\eta)}{t\mathcal{F}_x(t\eta)} \geq 0.$$

Por lo tanto, $H_{x,\eta}$ es no decreciente.
El fibrado unitario

$$S(\mathbf{E}) := \{\eta \in \mathbf{E} \mid |\eta|_{\mathbf{h_E}} = 1\}$$

es compacto, porque $M$ es compacta y $\mathbf{E}$ tiene rango finito. La función $\eta \longmapsto \mathcal{F}_{\pi_{\mathbf{E}}(\eta)}(\eta)$ es continua y, por (f3), es positiva en $S(\mathbf{E})$. En consecuencia,

$$D := \min_{\eta \in S(\mathbf{E})} \mathcal{F}_{\pi_{\mathbf{E}}(\eta)}(\eta) > 0.$$

Si $|\xi|_{\mathbf{h_E}} \geq 1$, escribimos $\xi = \rho\eta$, con $\rho = |\xi|_{\mathbf{h_E}} \geq 1$ y $|\eta|_{\mathbf{h_E}} = 1$. La monotonía de $H_{x,\eta}$ implica

$$\mathcal{F}_x(\xi) = \mathcal{F}_x(\rho\eta) \geq \rho^\theta \mathcal{F}_x(\eta) \geq D|\xi|_{\mathbf{h_E}}^{\theta}.$$

El subfibrado cerrado de bolas unitarias $\{\xi \in \mathbf{E} \mid |\xi|_{\mathbf{h_E}} \le 1\}$ es compacto. Por lo tanto, la función continua

$$\xi \longmapsto D|\xi|^{\theta}_{\mathbf{h_E}} - \mathcal{F}_{\pi_{\mathbf{E}}(\xi)}(\xi)$$

alcanza un máximo $D' \ge 0$ en dicho conjunto. Así, $\mathcal{F}_x(\xi) \ge D|\xi|^{\theta}_{\mathbf{h_E}} - D'$ también cuando $|\xi|_{\mathbf{h_E}} \le 1$. □

### 32.5.2 El funcional de energía

Definimos

$$I(\mathbf{u}) := \frac{1}{p}\int_M A(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}})\, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M \mathcal{F}_x(\mathbf{u}(x))\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad \mathbf{u} \in X. \tag{32.18}$$

**Proposición 32.5.5.** (Diferenciabilidad y soluciones débiles) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. El funcional $I\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ está bien definido y pertenece a $C^1(X,\mathbb{R})$. Para todos $\mathbf{u},\mathbf{v} \in X$,

$$DI(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = \int_M a(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}})|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^{p-2}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}\langle\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u},\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M \langle f_x(\mathbf{u}(x)),\mathbf{v}(x)\rangle_{\mathbf{h_E}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{32.19}$$

En consecuencia, los puntos críticos de $I$ son exactamente las soluciones débiles de (32.14).

*Demostración.* Escribamos $I = J_1 - J_2$, donde

$$J_1(\mathbf{u}) := \frac{1}{p}\int_M A(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}})\, d\lambda_{\mathbf{g}}, \qquad J_2(\mathbf{u}) := \int_M \mathcal{F}_x(\mathbf{u}(x))\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Primero comprobaremos que ambos términos están bien definidos. Por (a1), para cada $\rho > 0$ se tiene $a(\rho^p) \le k_3 + k_4\rho^{q-p}$. Por lo tanto,

$$A(\rho^p) = p\int_0^{\rho} a(\tau^p)\tau^{p-1}\, d\tau \le k_3\rho^p + \frac{pk_4}{q}\rho^q.$$

Como $\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} \in L^q(M, T^*M\otimes\mathbf{E})$, $p \le q$ y $\lambda_{\mathbf{g}}(M) < \infty$, se obtiene $A(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}) \in L^1(M)$.
Por el Lema 32.5.3, existe $C > 0$ tal que $|\mathcal{F}_x(\xi)| \le C\left(|\xi|^p_{\mathbf{h_E}} + |\xi|^r_{\mathbf{h_E}}\right)$.
Los encajes continuos $X \hookrightarrow L^p(M,\mathbf{E})$ y $X \hookrightarrow L^r(M,\mathbf{E})$ muestran que $\mathcal{F}_x(\mathbf{u}(x)) \in L^1(M)$. Así, $I$ está bien definido.
Demostremos que $J_1 \in C^1(X,\mathbb{R})$. Sea $\mathbf{V} := T^*M\otimes\mathbf{E}$, provisto de la métrica fibrada $\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}$, y definamos los mapeos fibrados

$$\Psi_x\colon \mathbf{V}_x \longrightarrow \mathbf{V}_x, \qquad \Psi_x(\eta) := a(|\eta|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}})|\eta|^{p-2}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}\eta, \qquad \Psi_x(0_x) := 0_x,$$

y $\Phi_x\colon \mathbf{V}_x \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi_x(\eta) := \dfrac{1}{p}A(|\eta|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}})$.
El mapeo $\Psi\colon \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ es continuo y

$$D\Phi_x(\eta)(\zeta) = \langle\Psi_x(\eta),\zeta\rangle_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}.$$

Además, por (a1),

$$|\Psi_x(\eta)|_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}} \le k_3|\eta|^{p-1}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}} + k_4|\eta|^{q-1}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}} \le C\left(1 + |\eta|^{q-1}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}\right).$$

El Corolario 29.1.9, aplicado con $m = q$, implica que $\eta \longmapsto \Psi(\eta)$ define un operador continuo de $L^q(M,\mathbf{V})$ en $L^{q'}(M,\mathbf{V})$, donde $q' := \dfrac{q}{q-1}$.

Para $\mathbf{u} \in X$, definamos $L_{\mathbf{u}} \in X'$ por

$$L_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) := \int_M \langle \Psi_x(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}), \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9) da

$$|L_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})| \le \|\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u})\|_{L^{q'}(M,\mathbf{V})}\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}\|_{L^q(M,\mathbf{V})} = \|\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u})\|_{L^{q'}(M,\mathbf{V})}\|\mathbf{v}\|_X,$$

por lo que $L_{\mathbf{u}}$ es lineal y continuo.
Sea $\mathbf{h} \in X$. Para casi todo $x \in M$, el Teorema B.6.5, aplicado a

$$s \longmapsto \Phi_x(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}(x) + s\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}(x))$$

proporciona

$$\Phi_x(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} + \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}) - \Phi_x(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}) = \int_0^1 \langle \Psi_x(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} + s\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}), \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}\rangle_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, ds.$$

La desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9) y las cotas anteriores muestran que el integrando pertenece a $L^1(M\times[0,1])$. Podemos aplicar el Teorema de Fubini para integrales de Bochner B.6.26, en su caso escalar, a $(M,\lambda_{\mathbf{g}})\times([0,1],ds)$ y obtener

$$J_1(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - J_1(\mathbf{u}) - L_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}) = \int_0^1 \int_M \langle \Psi_x(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} + s\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}) - \Psi_x(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}), \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}\rangle_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}\, ds.$$

En consecuencia,

$$|J_1(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - J_1(\mathbf{u}) - L_{\mathbf{u}}(\mathbf{h})| \le \|\mathbf{h}\|_X \int_0^1 \|\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} + s\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}) - \Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u})\|_{L^{q'}(M,\mathbf{V})}\, ds.$$

Sea $(\mathbf{h}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $\mathbf{h}_j \to 0$ en $X$. Para cada $s \in [0,1]$,

$$\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} + s\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}_j \longrightarrow \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} \quad \text{en } L^q(M,\mathbf{V}),$$

y la continuidad del operador de superposición inducido por $\Psi$ implica

$$\|\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} + s\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}_j) - \Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u})\|_{L^{q'}(M,\mathbf{V})} \longrightarrow 0.$$

Como $(\mathbf{h}_j)$ es acotada en $X$, existe $R > 0$ tal que $\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} + s\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}_j\|_{L^q(M,\mathbf{V})} \le R$ para todo $j$ y todo $s \in [0,1]$. La cota de crecimiento de $\Psi$ proporciona una constante $C_R > 0$ tal que

$$\|\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} + s\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}_j)\|_{L^{q'}(M,\mathbf{V})} + \|\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u})\|_{L^{q'}(M,\mathbf{V})} \le C_R$$

para todo $j$ y todo $s \in [0,1]$. El Teorema B.6.14, aplicado en la variable $s$, implica

$$\int_0^1 \|\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u} + s\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{h}_j) - \Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u})\|_{L^{q'}(M,\mathbf{V})}\, ds \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{|J_1(\mathbf{u}+\mathbf{h})-J_1(\mathbf{u})-L_{\mathbf{u}}(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_X}=0.$$

Así, $J_1$ es Fréchet diferenciable y $DJ_1(\mathbf{u})=L_{\mathbf{u}}$.
Si $\mathbf{u}_j\to\mathbf{u}$ en $X$, entonces $\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}_j\to\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}$ en $L^q(M,\mathbf{V})$ y

$$\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}_j)\to\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u})\quad\text{en } L^{q'}(M,\mathbf{V}).$$

Por consiguiente,

$$\|DJ_1(\mathbf{u}_j)-DJ_1(\mathbf{u})\|_{X'}\le\|\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}_j)-\Psi(\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u})\|_{L^{q'}(M,\mathbf{V})}\longrightarrow 0.$$

Esto prueba que $J_1\in C^1(X,\mathbb{R})$.
Demostremos ahora que $J_2\in C^1(X,\mathbb{R})$. Por (32.16) y $p<r$, existe $C>0$ tal que

$$|f_x(\xi)|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\le C\big(1+|\xi|_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}^{r-1}\big).$$

El Corolario 29.1.9, aplicado con $m=r$, implica que el operador $\mathbf{u}\longmapsto f(\mathbf{u})$ es continuo de $L^r(M,\mathbf{E})$ en $L^{r'}(M,\mathbf{E})$, donde $r':=\dfrac{r}{r-1}$.
Para $\mathbf{u}\in X$, definamos $K_{\mathbf{u}}\in X'$ por

$$K_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}):=\int_M\langle f_x(\mathbf{u}(x)),\mathbf{v}(x)\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Por la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9) y el encaje $X\hookrightarrow L^r(M,\mathbf{E})$, existe una constante $C_S>0$ tal que

$$|K_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})|\le\|f(\mathbf{u})\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{v}\|_{L^r(M,\mathbf{E})}\le C_S\|f(\mathbf{u})\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{v}\|_X.$$

Para $\mathbf{h}\in X$, el Teorema B.6.5, aplicado en cada fibra, da

$$\mathcal{F}_x(\mathbf{u}+\mathbf{h})-\mathcal{F}_x(\mathbf{u})=\int_0^1\langle f_x(\mathbf{u}+s\mathbf{h}),\mathbf{h}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,ds.$$

Los encajes y la cota de crecimiento permiten aplicar el Teorema de Fubini para integrales de Bochner B.6.26, en su caso escalar, a $(M,\lambda_{\mathbf{g}})\times([0,1],ds)$. Por lo tanto,

$$J_2(\mathbf{u}+\mathbf{h})-J_2(\mathbf{u})-K_{\mathbf{u}}(\mathbf{h})=\int_0^1\int_M\langle f_x(\mathbf{u}+s\mathbf{h})-f_x(\mathbf{u}),\mathbf{h}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}\,ds,$$

y

$$|J_2(\mathbf{u}+\mathbf{h})-J_2(\mathbf{u})-K_{\mathbf{u}}(\mathbf{h})|\le C_S\|\mathbf{h}\|_X\int_0^1\|f(\mathbf{u}+s\mathbf{h})-f(\mathbf{u})\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})}\,ds.$$

Si $\mathbf{h}_j\to 0$ en $X$, entonces $\mathbf{u}+s\mathbf{h}_j\to\mathbf{u}$ en $L^r(M,\mathbf{E})$ para cada $s\in[0,1]$. La continuidad del operador de superposición inducido por $f$ implica

$$\|f(\mathbf{u}+s\mathbf{h}_j)-f(\mathbf{u})\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})}\longrightarrow 0.$$

Como $(\mathbf{h}_j)$ está acotada en $X$ y el encaje $X \hookrightarrow L^r(M,\mathbf{E})$ es continuo, existe $R>0$ tal que

$$\|\mathbf{u}+s\mathbf{h}_j\|_{L^r(M,\mathbf{E})} \le R$$

para todo $j$ y todo $s\in[0,1]$. La estimación de acotación de la Observación 29.1.10 proporciona $C_R>0$ tal que

$$\|f(\mathbf{u}+s\mathbf{h}_j)-f(\mathbf{u})\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})} \le \|f(\mathbf{u}+s\mathbf{h}_j)\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})} + \|f(\mathbf{u})\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})} \le C_R$$

para todo $j$ y todo $s\in[0,1]$. Por el Teorema B.6.14, aplicado en la variable $s$,

$$\int_0^1 \|f(\mathbf{u}+s\mathbf{h}_j)-f(\mathbf{u})\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})}\,ds \longrightarrow 0.$$

De aquí se sigue que $J_2$ es Fréchet diferenciable y $DJ_2(\mathbf{u})=K_{\mathbf{u}}$.
Finalmente, si $\mathbf{u}_j\to\mathbf{u}$ en $X$, entonces $\mathbf{u}_j\to\mathbf{u}$ en $L^r(M,\mathbf{E})$ y $f(\mathbf{u}_j)\to f(\mathbf{u})$ en $L^{r'}(M,\mathbf{E})$. Así,

$$\|DJ_2(\mathbf{u}_j)-DJ_2(\mathbf{u})\|_{X'} \le C_S\|f(\mathbf{u}_j)-f(\mathbf{u})\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})} \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $J_2\in C^1(X,\mathbb{R})$. La identidad (32.19) se obtiene de $I=J_1-J_2$. Comparándola con la Definición 32.5.1, concluimos que $DI(\mathbf{u})=0$ si y sólo si $\mathbf{u}$ es una solución débil. □

### 32.5.3 Geometría radial y variedad de Nehari

Definimos

$$\mathcal{N} := \{\mathbf{u}\in X\setminus\{0\} \mid DI(\mathbf{u})(\mathbf{u})=0\}.$$

Así, $\mathbf{u}\in\mathcal{N}$ si y sólo si $\mathbf{u}\neq 0$ y

$$\int_M a(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}})|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \langle f_x(\mathbf{u}),\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\,d\lambda_{\mathbf{g}}. \tag{32.20}$$

**Proposición 32.5.6.** (Proyección sobre la variedad de Nehari) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E}\to M$ el haz vectorial allí especificado. Para cada $\mathbf{u}\in X\setminus\{0\}$ existe un único $t_{\mathbf{u}}>0$ tal que $t_{\mathbf{u}}\mathbf{u}\in\mathcal{N}$. Además, $t\longmapsto I(t\mathbf{u})$ es estrictamente creciente en $(0,t_{\mathbf{u}})$ y estrictamente decreciente en $(t_{\mathbf{u}},+\infty)$.

*Demostración.* Fijemos $\mathbf{u}\in X\setminus\{0\}$ y definamos $\gamma_{\mathbf{u}}(t):=I(t\mathbf{u})$ para $t>0$. Por la regla de la cadena,

$$\gamma'_{\mathbf{u}}(t) = DI(t\mathbf{u})(\mathbf{u}) = \frac{1}{t}DI(t\mathbf{u})(t\mathbf{u}).$$

Primero mostraremos que $\gamma_{\mathbf{u}}(t)>0$ para $t>0$ suficientemente pequeño. Por el Lema 32.5.2 y (a1),

$$\frac{1}{p}A(t^p|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}) \ge \frac{1}{q}a(t^p|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}})t^p|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \ge \frac{k_1}{q}t^p|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + \frac{k_2}{q}t^q|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^q_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}},$$

donde las normas de las derivadas están tomadas respecto de $\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}$. Por (32.17),

$$\mathcal{F}_x(t\mathbf{u}) \le \frac{\varepsilon}{p}t^p|\mathbf{u}|^p_{\mathbf{h_E}} + \frac{C_\varepsilon}{r}t^r|\mathbf{u}|^r_{\mathbf{h_E}}.$$

Sea $C_P > 0$ tal que $\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \le C_P\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$. Tomemos $\varepsilon := \dfrac{pk_1}{2qC_P^p}$.

Al integrar las desigualdades anteriores, obtenemos

$$\gamma_{\mathbf{u}}(t) \ge \frac{k_1}{2q}t^p\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} + \frac{k_2}{q}t^q\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|^q_{L^q(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} - \frac{C_\varepsilon}{r}t^r\|\mathbf{u}\|^r_{L^r(M,\mathbf{E})}.$$

Como $\mathbf{u}\neq 0$, la desigualdad de Poincaré implica $\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} > 0$. Además, $r > q \ge p$. Por lo tanto, existe $t_0 > 0$ tal que $\gamma_{\mathbf{u}}(t) > 0$ para todo $t \in (0, t_0)$.

Por otra parte, la cota superior de (a1) implica $A(\rho^p) \le k_3\rho^p + \dfrac{pk_4}{q}\rho^q$.

El Lema 32.5.4 proporciona

$$\gamma_{\mathbf{u}}(t) \le \frac{k_3}{p}t^p\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} + \frac{k_4}{q}t^q\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|^q_{L^q(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} - Dt^\theta\|\mathbf{u}\|^\theta_{L^\theta(M,\mathbf{E})} + D'\lambda_{\mathbf{g}}(M).$$

Como $\theta > q \ge p$ y $\mathbf{u}\neq 0$, se tiene $\gamma_{\mathbf{u}}(t) \to -\infty$ cuando $t \to +\infty$. También hay que excluir que una sucesión maximizante escape hacia 0. Las cotas superiores de (a1) y (32.17) dan, para $0 < t \le 1$, una constante $C_{\mathbf{u}} > 0$ tal que

$$|\gamma_{\mathbf{u}}(t)| \le C_{\mathbf{u}}(t^p + t^q + t^r),$$

y, por lo tanto, $\gamma_{\mathbf{u}}(t) \to 0$ cuando $t \to 0^+$.

Elegimos $\tau > 0$ con $a := \gamma_{\mathbf{u}}(\tau) > 0$. Por los dos límites existen $0 < \delta < \tau < R$ tales que

$$\gamma_{\mathbf{u}}(t) < \frac{a}{2} \quad \text{si } 0 < t \le \delta \qquad \text{o si } t \ge R.$$

La función continua $\gamma_{\mathbf{u}}$ alcanza un máximo en el compacto $[\delta, R]$. Como su valor en $\tau$ es $a$, ese máximo supera todos los valores exteriores y es, por lo tanto, global. Además, no se alcanza en los extremos $\delta$ o $R$; existe así $t_{\mathbf{u}} \in (\delta, R)$ con $\gamma'_{\mathbf{u}}(t_{\mathbf{u}}) = 0$, es decir, $t_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \in \mathcal{N}$.

Probemos la unicidad. Supongamos que $0 < s < t$ y que $s\mathbf{u}, t\mathbf{u} \in \mathcal{N}$. Al dividir las dos identidades de Nehari por $s^q$ y $t^q$, respectivamente, obtenemos

$$\int_M a(t^p|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}})t^{p-q}|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}\,d\lambda_{\mathbf{g}} = \int_M \frac{\langle f_x(t\mathbf{u}), t\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{h_E}}}{t^q}\,d\lambda_{\mathbf{g}}$$

y la identidad análoga con $s$.

Si $|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}} > 0$, aplicamos (a2) a los números $s|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}$ y $t|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}$. Como $s < t$, se obtiene

$$a(t^p|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}})t^{p-q} \le a(s^p|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}})s^{p-q}.$$

La desigualdad también es válida cuando $|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}(x)|_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}} = 0$. Por lo tanto, el miembro principal correspondiente a $t$ es menor o igual que el correspondiente a $s$.

En cambio, por (f4), para cada $x$ tal que $\mathbf{u}(x) \neq 0_x$ se tiene

$$\frac{\langle f_x(t\mathbf{u}), t\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{h_E}}}{t^q} > \frac{\langle f_x(s\mathbf{u}), s\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{h_E}}}{s^q}.$$

El conjunto $\{x \in M \mid \mathbf{u}(x) \neq 0_x\}$ tiene medida positiva, pues $\mathbf{u} \neq 0$ en $L^q(M,\mathbf{E})$. Al integrar, el miembro potencial correspondiente a $t$ es estrictamente mayor que el correspondiente a $s$. Esto contradice las dos identidades de Nehari. Por lo tanto, $t_{\mathbf{u}}$ es único.

Finalmente, definamos $H_{\mathbf{u}}(t) := \dfrac{DI(t\mathbf{u})(t\mathbf{u})}{t^q}$. El argumento anterior, aplicado a cualesquiera $0 < s < t$, muestra que $H_{\mathbf{u}}(t) < H_{\mathbf{u}}(s)$. Como $H_{\mathbf{u}}(t_{\mathbf{u}}) = 0$, se tiene $H_{\mathbf{u}}(t) > 0$ si $0 < t < t_{\mathbf{u}}$ y $H_{\mathbf{u}}(t) < 0$ si $t > t_{\mathbf{u}}$. Puesto que $\gamma'_{\mathbf{u}}(t) = t^{q-1}H_{\mathbf{u}}(t)$, la función $\gamma_{\mathbf{u}}$ es estrictamente creciente en $(0, t_{\mathbf{u}})$ y estrictamente decreciente en $(t_{\mathbf{u}}, +\infty)$. □

**Lema 32.5.7.** (Positividad de la energía sobre $\mathcal{N}$) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. Para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$ se tiene $I(\mathbf{u}) > 0$.

*Demostración.* Como $DI(\mathbf{u})(\mathbf{u}) = 0$, el Lema 32.5.2 y (f3) proporcionan

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}) &= I(\mathbf{u}) - \frac{1}{q}DI(\mathbf{u})(\mathbf{u}) \\ &= \int_M \left[\frac{1}{p}A(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}) - \frac{1}{q}a(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}})|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}\right] d\lambda_{\mathbf{g}} \\ &\quad + \int_M \left[\frac{1}{q}\langle f_x(\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{h_E}} - \mathcal{F}_x(\mathbf{u})\right] d\lambda_{\mathbf{g}} \\ &\geq \left(\frac{\theta}{q} - 1\right)\int_M \mathcal{F}_x(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} > 0. \end{aligned}$$

La última integral es positiva porque $\mathbf{u} \neq 0$ y (f3) implica $\mathcal{F}_x(\mathbf{u}(x)) > 0$ cuando $\mathbf{u}(x) \neq 0_x$. □

**Lema 32.5.8.** (Separación del origen) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. Existe $\rho > 0$ tal que $\|\mathbf{u}\|_X \geq \rho$ para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$.

*Demostración.* Sea $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$. Por (32.20), (a1) y (32.16),

$$k_1\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} + k_2\|\mathbf{u}\|^q_X \leq \varepsilon\|\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,\mathbf{E})} + C_\varepsilon\|\mathbf{u}\|^r_{L^r(M,\mathbf{E})}.$$

Sean $C_p, C_r > 0$ constantes tales que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq C_p\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}, \qquad \|\mathbf{u}\|_{L^r(M,\mathbf{E})} \leq C_r\|\mathbf{u}\|_X.$$

Tomemos $\varepsilon := \dfrac{k_1}{2C_p^p}$. Entonces

$$\frac{k_1}{2}\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} + k_2\|\mathbf{u}\|^q_X \leq C_\varepsilon C_r^r\|\mathbf{u}\|^r_X. \tag{32.21}$$

Si $p < q$, la hipótesis (a1) asegura que $k_2 > 0$. Descartando el primer término del lado izquierdo de (32.21),

obtenemos $k_2\|\mathbf{u}\|_X^q \le C_\varepsilon C_r^r \|\mathbf{u}\|_X^r$. Como $\mathbf{u} \neq 0$ y $r > q$, $\|\mathbf{u}\|_X \ge \left(\frac{k_2}{C_\varepsilon C_r^r}\right)^{\frac{1}{r-q}}$.

Si $p = q$, se tiene $\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} = \|\mathbf{u}\|_X$. Descartando el término que contiene $k_2$, $\frac{k_1}{2}\|\mathbf{u}\|_X^q \le C_\varepsilon C_r^r \|\mathbf{u}\|_X^r$, y, por lo tanto, $\|\mathbf{u}\|_X \ge \left(\frac{k_1}{2C_\varepsilon C_r^r}\right)^{\frac{1}{r-q}}$.

Tomando $\rho$ igual al menor de las constantes que corresponden a los casos posibles, concluimos la prueba. □

**Lema 32.5.9.** (Acotación de sucesiones de Nehari) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. Si $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}$ y $(I(\mathbf{u}_j))_{j\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente, entonces $(\mathbf{u}_j)$ está acotada en $X$.

*Demostración.* Para cada $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$, usando (f3), el Lema 32.5.2 y (a1), se obtiene

$$I(\mathbf{u}) = I(\mathbf{u}) - \frac{1}{\theta}DI(\mathbf{u})(\mathbf{u}) \ge \int_M \left[\frac{1}{p}A(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_\mathbf{E}}) - \frac{1}{\theta}a(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_\mathbf{E}})|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_\mathbf{E}}\right] d\lambda_\mathbf{g}$$

$$\ge \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)\int_M a(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_\mathbf{E}})|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} \ge \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)\left(k_1\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|^p_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} + k_2\|\mathbf{u}\|_X^q\right).$$

Si $p < q$, entonces $k_2 > 0$, y $I(\mathbf{u}) \ge \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)k_2\|\mathbf{u}\|_X^q$.

Si $p = q$, entonces $\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} = \|\mathbf{u}\|_X$ y $I(\mathbf{u}) \ge \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)k_1\|\mathbf{u}\|_X^q$.

En ambos casos existe $c_0 > 0$, independiente de $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$, tal que $I(\mathbf{u}) \ge c_0\|\mathbf{u}\|_X^q$.

La acotación superior de $I(\mathbf{u}_j)$ implica entonces la acotación de $\|\mathbf{u}_j\|_X$. □

**Lema 32.5.10.** (Convergencia de los términos no lineales) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. Sea $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq L^r(M,\mathbf{E})$ tal que $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $L^r(M,\mathbf{E})$. Entonces $f(\mathbf{u}_j) \to f(\mathbf{u})$ en $L^{r'}(M,\mathbf{E})$, $\int_M \langle f_x(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_j\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} \longrightarrow \int_M \langle f_x(\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g}$, y $\int_M \mathcal{F}_x(\mathbf{u}_j)\, d\lambda_\mathbf{g} \longrightarrow \int_M \mathcal{F}_x(\mathbf{u})\, d\lambda_\mathbf{g}$.

*Demostración.* La primera convergencia se sigue del Corolario 29.1.9, aplicado al mapeo fibrado $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ con $m = r$.

Como $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $L^r(M,\mathbf{E})$, la sucesión $(\mathbf{u}_j)$ está acotada en $L^r(M,\mathbf{E})$. Por la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9),

$$\left|\int_M \langle f_x(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_j\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g} - \int_M \langle f_x(\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, d\lambda_\mathbf{g}\right|$$
$$\le \|f(\mathbf{u}_j) - f(\mathbf{u})\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{u}_j\|_{L^r(M,\mathbf{E})} + \|f(\mathbf{u})\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})}\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{L^r(M,\mathbf{E})}.$$

y el lado derecho converge a cero.

Para el potencial, el Teorema B.6.5, aplicado en cada fibra, proporciona

$$\mathcal{F}_x(\mathbf{u}_j) - \mathcal{F}_x(\mathbf{u}) = \int_0^1 \langle f_x(\mathbf{u} + s(\mathbf{u}_j - \mathbf{u})), \mathbf{u}_j - \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{h}_\mathbf{E}}\, ds.$$

Por el Teorema de Fubini para integrales de Bochner B.6.26, aplicado al caso escalar, y la desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9),

$$\left| \int_M \mathcal{F}_x(\mathbf{u}_j)\, d\lambda_{\mathbf{g}} - \int_M \mathcal{F}_x(\mathbf{u})\, d\lambda_{\mathbf{g}} \right| \leq \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{L^r(M,\mathbf{E})} \int_0^1 \|f(\mathbf{u} + s(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}))\|_{L^{r'}(M,\mathbf{E})}\, ds.$$

La familia $\mathbf{u} + s(\mathbf{u}_j - \mathbf{u})$ está acotada en $L^r(M,\mathbf{E})$ uniformemente respecto de $j$ y $s \in [0,1]$. La Observación 29.1.10 muestra que las normas de $f(\mathbf{u} + s(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}))$ en $L^{r'}(M,\mathbf{E})$ están uniformemente acotadas. Como $\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}\|_{L^r(M,\mathbf{E})} \to 0$, la diferencia de los potenciales converge a cero. □

### 32.5.4 Reducción radial y existencia del minimizador

La Proposición 32.5.6 permite definir $m\colon S_X \longrightarrow \mathcal{N}$ mediante $m(\mathbf{w}) = t_{\mathbf{w}}\mathbf{w}$. Para aplicar el Teorema 32.3.1 falta verificar las cotas uniformes requeridas allí.

**Proposición 32.5.11.** (Hipótesis de la reducción radial) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. El espacio $X$ y el funcional $I$ satisfacen las hipótesis (A1)–(A3) de la reducción radial de Szulkin y Weth.

*Demostración.* Consideremos el mapeo lineal

$$\mathcal{G}\colon X \longrightarrow L^q(M, T^*M \otimes \mathbf{E}), \qquad \mathcal{G}(\mathbf{u}) = \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}.$$

La desigualdad de Poincaré del Teorema 9.6.8 muestra que $\mathcal{G}$ es inyectivo. Además, por la definición de la norma fijada en esta sección,

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{u})\|_{L^q(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} = \|\mathbf{u}\|_X.$$

La norma $\|\cdot\|_X$ es equivalente a la norma de $W_0^{1,q}(M,\mathbf{E})$; como este último espacio es cerrado en $W^{1,q}(M,\mathbf{E})$ y completo, $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach. En consecuencia, la imagen $\mathcal{G}(X)$ es cerrada en $L^q(M, T^*M\otimes\mathbf{E})$. La prueba de la Proposición 9.1.18 es puntual en las fibras y sólo usa que éstas son espacios de Hilbert; por ello se aplica sin cambio en la variedad con frontera y muestra que $L^q(M, T^*M \otimes \mathbf{E})$ es uniformemente convexo. Esta propiedad se hereda a subespacios cerrados y se conserva bajo isometrías. Por lo tanto, $X$ es uniformemente convexo.

Para verificar (A1), tomemos la función de normalización $\varphi(t) := t^{q-1}$. El funcional asociado es

$$\psi_X(\mathbf{u}) := \int_0^{\|\mathbf{u}\|_X} t^{q-1}\, dt = \frac{1}{q}\|\mathbf{u}\|_X^q = \frac{1}{q}\int_M |\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^q_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

El funcional $\psi_X$ pertenece a $C^1(X,\mathbb{R})$. Este es el caso $p = q$, $a \equiv 1$ y $A(s) = s$ del cálculo realizado para $J_1$ en la prueba de la Proposición 32.5.5. En esta especialización,

$$D\psi_X(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = \int_M |\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^{q-2}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \langle \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}, \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

La desigualdad de Hölder (Proposición B.7.9) implica $|D\psi_X(\mathbf{u})(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|_X^{q-1}\|\mathbf{v}\|_X$, por lo que el mapeo $\mathcal{J}_X :=$

$D\psi_X : X \longrightarrow X'$ transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Si $\mathbf{w} \in S_X$, entonces

$$\mathcal{J}_X(\mathbf{w})(\mathbf{w}) = \int_M |\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{w}|^q_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \|\mathbf{w}\|^q_X = 1.$$

Así se cumple (A1).

La Proposición 32.5.6 demuestra que, para cada $\mathbf{u} \in X \setminus \{0\}$, existe un único $t_{\mathbf{u}} > 0$ tal que $t_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \in \mathcal{N}$, y que la función $t \mapsto I(t\mathbf{u})$ es estrictamente creciente en $(0, t_{\mathbf{u}})$ y estrictamente decreciente en $(t_{\mathbf{u}}, +\infty)$. Ésta es precisamente la hipótesis (A2).

Verifiquemos (A3). Si $\mathbf{w} \in S_X$, entonces $t_{\mathbf{w}}\mathbf{w} \in \mathcal{N}$. Por el Lema 32.5.8, existe $\rho > 0$, independiente de $\mathbf{w}$, tal que $t_{\mathbf{w}} = \|t_{\mathbf{w}}\mathbf{w}\|_X \geq \rho$. Esto proporciona la cota inferior uniforme.

Sea ahora $K \subseteq S_X$ compacto no vacío; para $K = \varnothing$ la cota superior es vacua. La función $\mathbf{w} \longmapsto \|\mathbf{w}\|^\theta_{L^\theta(M,\mathbf{E})}$ es continua en $X$ y positiva en $S_X$, pues $\|\mathbf{w}\|_{L^\theta(M,\mathbf{E})} = 0$ implicaría $\mathbf{w} = 0$. Por compacidad, $\mu_K := \min_{\mathbf{w}\in K} \|\mathbf{w}\|^\theta_{L^\theta(M,\mathbf{E})} > 0$.

Por la cota superior para $A$ y el Lema 32.5.4, existe $C_K > 0$ tal que, para todo $\mathbf{w} \in K$ y todo $t > 0$,

$$I(t\mathbf{w}) \leq C_K(t^p + t^q) - D\mu_K t^\theta + D'\lambda_{\mathbf{g}}(M).$$

Como $\theta > q \geq p$, el miembro derecho converge a $-\infty$ cuando $t \to +\infty$, uniformemente respecto de $\mathbf{w} \in K$. Existe $R_K > 0$ tal que $I(t\mathbf{w}) < 0$ para todo $\mathbf{w} \in K$ y todo $t \geq R_K$. Sin embargo, $I(t_{\mathbf{w}}\mathbf{w}) > 0$ por el Lema 32.5.7. Por lo tanto, $t_{\mathbf{w}} < R_K$ para todo $\mathbf{w} \in K$, y queda demostrada (A3). □

**Proposición 32.5.12.** (Existencia de un minimizador sobre $\mathcal{N}$) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. Existe $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$I(\mathbf{u}_0) = \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{N}} I(\mathbf{u}).$$

*Demostración.* Definamos $c := \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{N}} I(\mathbf{u})$. Por los Lemas 32.5.7, 32.5.8 y la estimación del Lema 32.5.9, se tiene $c > 0$.

Sea $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}$ una sucesión tal que $I(\mathbf{u}_j) \to c$. El Lema 32.5.9 implica que $(\mathbf{u}_j)$ está acotada en $X$. Como $1 < q < \infty$, el espacio $X$ es reflexivo; pasando a una subsucesión, existe $\mathbf{u} \in X$ tal que $\mathbf{u}_j \rightharpoonup \mathbf{u}$ en $X$.

Por el Corolario 9.4.31, y porque $p, r < q^*$, $\mathbf{u}_j \to \mathbf{u}$ en $L^p(M,\mathbf{E}) \cap L^r(M,\mathbf{E})$.

Probaremos que $\mathbf{u} \neq 0$. Supongamos lo contrario. Por el Lema 32.5.10, $\displaystyle\int_M \langle f_x(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_j\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow 0$.

Fijemos $C_p > 0$ tal que $\|\mathbf{v}\|^p_{L^p(M,\mathbf{E})} \leq C_p\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}\|^p_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})}$ para todo $\mathbf{v} \in X$, y elijamos $\varepsilon := \dfrac{k_1}{2C_p}$. Por la identidad de Nehari, (a1) y (32.16),

$$\begin{aligned} k_1\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}_j\|^p_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} + k_2\|\mathbf{u}_j\|^q_X &\leq \int_M \langle f_x(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_j\rangle_{\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} \\ &\leq \varepsilon\|\mathbf{u}_j\|^p_{L^p(M,\mathbf{E})} + C_\varepsilon\|\mathbf{u}_j\|^r_{L^r(M,\mathbf{E})} \\ &\leq \frac{k_1}{2}\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}_j\|^p_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} + C_\varepsilon\|\mathbf{u}_j\|^r_{L^r(M,\mathbf{E})}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{k_1}{2}\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}_j\|^p_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} + k_2\|\mathbf{u}_j\|^q_X \le C_\varepsilon\|\mathbf{u}_j\|^r_{L^r(M,\mathbf{E})}.$$

Si $p < q$, se tiene $k_2 > 0$ y el lado derecho converge a cero, por lo que $\|\mathbf{u}_j\|_X \to 0$. Si $p = q$, el primer término del lado izquierdo es $\frac{k_1}{2}\|\mathbf{u}_j\|^q_X$, y se obtiene la misma conclusión. Esto contradice $\|\mathbf{u}_j\|_X \ge \rho$. Así, $\mathbf{u} \neq 0$.
Por la Proposición 32.5.6, existe un único $t_{\mathbf{u}} > 0$ tal que $t_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \in \mathcal{N}$. Como $\mathbf{u}_j \in \mathcal{N}$ es el máximo de su propia semirrecta positiva, $I(t_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_j) \le I(\mathbf{u}_j)$ para todo $j$.
Pongamos $\varphi(s) := A(s^p)$ para $s \ge 0$. Por (a3), $\varphi$ es convexa; como $a \ge 0$, $A$ y $\varphi$ son además no decrecientes. La desigualdad triangular y estas dos propiedades dan, para $0 \le \lambda \le 1$,

$$\begin{aligned} A\big(|\lambda\eta + (1-\lambda)\zeta|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\big) &= \varphi\big(|\lambda\eta + (1-\lambda)\zeta|_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\big) \\ &\le \varphi\big(\lambda|\eta|_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} + (1-\lambda)|\zeta|_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}\big) \\ &\le \lambda A(|\eta|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}) + (1-\lambda)A(|\zeta|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}}). \end{aligned}$$

Así, $\eta \mapsto p^{-1}A(|\eta|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}})$ es convexa y continua. En consecuencia, para el número fijo $t_{\mathbf{u}} > 0$, el funcional

$$G(\mathbf{v}) := \frac{1}{p}\int_M A(t^p_{\mathbf{u}}|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{v}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}})\,d\lambda_{\mathbf{g}}$$

es convexo y continuo en $X$. Por el Corolario B.11.17, $G$ es débilmente semicontinuo inferiormente; por lo tanto,

$$\frac{1}{p}\int_M A(t^p_{\mathbf{u}}|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}})\,d\lambda_{\mathbf{g}} \le \liminf_{j\to\infty}\frac{1}{p}\int_M A(t^p_{\mathbf{u}}|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}_j|^p_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}})\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

Además, $t_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_j \to t_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ en $L^r(M,\mathbf{E})$, por lo que el Lema 32.5.10 implica

$$\int_M \mathcal{F}_x(t_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_j)\,d\lambda_{\mathbf{g}} \longrightarrow \int_M \mathcal{F}_x(t_{\mathbf{u}}\mathbf{u})\,d\lambda_{\mathbf{g}}.$$

En consecuencia, $I(t_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) \le \liminf_{j\to\infty} I(t_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_j) \le \lim_{j\to\infty} I(\mathbf{u}_j) = c$.
Como $t_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \in \mathcal{N}$, la definición de $c$ da $c \le I(t_{\mathbf{u}}\mathbf{u})$. Por lo tanto, $I(t_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) = c$. Tomando $\mathbf{u}_0 := t_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$, concluimos la prueba. □

**Teorema 32.5.13.** (Existencia de un estado fundamental) Sea $M$ la variedad riemanniana compacta con frontera no vacía fijada en esta sección y sea $\mathbf{E} \to M$ el haz vectorial allí especificado. Bajo las hipótesis (a1)–(a3) y (f1)–(f4), el problema (32.14) posee una solución de estado fundamental: existe $\mathbf{u}_0 \in X \setminus \{0\}$ tal que $DI(\mathbf{u}_0) = 0$ y

$$I(\mathbf{u}_0) = \inf\{I(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in X \setminus \{0\},\ DI(\mathbf{u}) = 0\}.$$

*Demostración.* Por la Proposición 32.5.12, existe $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{N}$ que minimiza $I$ sobre $\mathcal{N}$. Las Proposiciones 32.5.6 y 32.5.11 permiten aplicar el Teorema 32.3.1. Sea $\mathbf{w}_0 := m^{-1}(\mathbf{u}_0) \in S_X$. Como $m$ es un homeomorfismo y $\Psi = I \circ m$, el punto $\mathbf{w}_0$ minimiza $\Psi$ sobre la subvariedad $S_X$. El teorema de Fermat en variedades da $D\Psi(\mathbf{w}_0) = 0$; por el inciso 5 del Teorema 32.3.1, $\mathbf{u}_0 = m(\mathbf{w}_0)$ es un punto crítico no trivial de $I$. Por la Proposición 32.5.5, $\mathbf{u}_0$ es una solución débil de (32.14).
Todo punto crítico no trivial $\mathbf{u}$ de $I$ satisface $DI(\mathbf{u})(\mathbf{u}) = 0$ y, por lo tanto, pertenece a $\mathcal{N}$. De aquí se sigue

que

$$I(\mathbf{u}_0) = \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{N}} I(\mathbf{u}) = \inf\{I(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \neq 0,\ DI(\mathbf{u}) = 0\}.$$

□

### 32.5.5 Ejemplos de operadores comprendidos por el resultado

Los siguientes ejemplos muestran que las hipótesis sobre $a$ contienen varios operadores geométricos habituales. En todos ellos puede tomarse

$$\mathcal{F}_x(\xi) := \frac{1}{r}|\xi|^r_{\mathbf{h_E}}, \qquad f_x(\xi) = |\xi|^{r-2}_{\mathbf{h_E}}\xi, \qquad r \in (q, q^*).$$

Estas condiciones se verifican directamente, pues $\dfrac{|f_x(\xi)|_{\mathbf{h_E}}}{|\xi|^{p-1}_{\mathbf{h_E}}} = |\xi|^{r-p}_{\mathbf{h_E}} \longrightarrow 0$ uniformemente respecto de $x$, porque $r > q \geq p$; además, $|f_x(\xi)|_{\mathbf{h_E}} = |\xi|^{r-1}_{\mathbf{h_E}}$, $\langle f_x(\xi), \xi\rangle_{\mathbf{h_E}} = |\xi|^r_{\mathbf{h_E}} = r\mathcal{F}_x(\xi)$, y, para $\xi \neq 0_x$, $\dfrac{\langle f_x(t\xi), t\xi\rangle_{\mathbf{h_E}}}{t^q} = t^{r-q}|\xi|^r_{\mathbf{h_E}}$, que es estrictamente creciente. Por lo tanto, (f1)–(f4) se satisfacen para cualquier $\theta \in (q, r]$.

**Ejemplo 32.5.14.** (Laplaciano de Bochner de tipo $p$) Supongamos que $p = q$ y $a(s) := 1$. Entonces $a(t^p)t^p = t^p$, de modo que (a1) se cumple con $k_1 = k_3 = 1$ y $k_2 = k_4 = 0$. Como $\dfrac{a(t^p)}{t^{q-p}} = 1$, se cumple (a2). Finalmente, $A(s) = s$ y $A(t^p) = t^p$ es convexa, por lo que también se cumple (a3). El término principal de (32.14) se reduce a $(\nabla^{\mathbf{E}})^*\big(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^{p-2}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\big)$.

**Ejemplo 32.5.15.** (Operador de Bochner con crecimiento $(p, q)$) Sea $a(s) := 1 + s^{\frac{q-p}{p}}$. Entonces $a(t^p)t^p = t^p + t^q$, por lo que (a1) se cumple con $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ cuando $p < q$. Si $p = q$, entonces $a(s) = 2$ para todo $s \geq 0$ y (a1) se cumple, por ejemplo, con $k_1 = k_3 = 2$ y $k_2 = k_4 = 0$. Para $p < q$, $\dfrac{a(t^p)}{t^{q-p}} = 1 + t^{p-q}$, que es estrictamente decreciente; para $p = q$ es constante. Además,

$$A(s) = s + \frac{p}{q}s^{\frac{q}{p}}, \qquad A(t^p) = t^p + \frac{p}{q}t^q,$$

y esta última función es convexa. Por lo tanto, (a1)–(a3) se cumplen y el término principal es la suma $(\nabla^{\mathbf{E}})^*\big(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^{p-2}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\big) + (\nabla^{\mathbf{E}})^*\big(|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^{q-2}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h_E}}\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\big)$.

**Ejemplo 32.5.16.** (Perturbación de tipo curvatura media) Supongamos que $q = p$ y

$$a(s) := 1 + \frac{1}{(1+s)^{\frac{p-1}{p}}}.$$

Como $1 \leq a(s) \leq 2$, se tiene $t^p \leq a(t^p)t^p \leq 2t^p$, de modo que (a1) se cumple con $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 2$ y $k_4 = 0$. Puesto que $q - p = 0$ y $t \mapsto a(t^p)$ es no creciente, se cumple (a2). Una integración directa da $A(s) = s + p\big((1+s)^{\frac{1}{p}} - 1\big)$, y, por lo tanto, $A(t^p) = t^p + p\big((1+t^p)^{\frac{1}{p}} - 1\big)$.

La función $t \mapsto t^p$ es convexa y $t \mapsto (1+t^p)^{\frac{1}{p}}$ es la restricción a $[0, +\infty)$ de la norma $\ell^p$ del vector $(1, t)$; por

consiguiente, $A(t^p)$ es convexa y se cumple (a3). En este caso aparece el término adicional

$$(\nabla^{\mathbf{E}})^* \left( \frac{|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^{p-2}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}} \nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}}{(1+|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}|^{p}_{\mathbf{g}\otimes\mathbf{h}_{\mathbf{E}}})^{\frac{p-1}{p}}} \right).$$

**Observación 32.5.17.** La condición $k_2 > 0$ sólo se exige cuando $p < q$. Esta distinción es necesaria en las estimaciones coercivas sobre $\mathcal{N}$: si $p < q$, el término $k_2\|\mathbf{u}\|_X^q$ controla directamente la norma de $X$; si $p = q$, ese control lo proporciona el término con coeficiente $k_1$, porque $\|\nabla^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\|_{L^p(M,T^*M\otimes\mathbf{E})} = \|\mathbf{u}\|_X$.

## 32.6 Ejercicios

**Ejercicio 32.6.1.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía con frontera suave, tal que cada componente conexa tiene frontera no vacía. Para el funcional del caso modelo, pruebe que para cada $u \neq 0$ existe un único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$ y calcule explícitamente $t_u$. Muestre además que $u \mapsto t_u u$ es un homeomorfismo entre la esfera unitaria de $W_0^{1,2}(M)$ y $\mathcal{N}$.

**Ejercicio 32.6.2.** Sea $(M,\mathbf{g})$ una variedad riemanniana compacta no vacía con frontera suave, tal que cada componente conexa tiene frontera no vacía, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz vectorial suave real de rango finito positivo, equipado con una métrica fibrada $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$ y una conexión $\nabla^{\mathbf{E}}$ compatible con $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$. Suponga que $a$ satisface (a1)–(a3) y que $\mathcal{F}$ satisface (f1)–(f4). Demuestre directamente, sin utilizar la existencia del minimizador, que para cada $\mathbf{u} \in X \setminus \{0\}$ existen números $0 < \alpha_{\mathbf{u}} < \beta_{\mathbf{u}}$ tales que $I(t\mathbf{u}) > 0$ si $0 < t < \alpha_{\mathbf{u}}$ e $I(t\mathbf{u}) < 0$ si $t > \beta_{\mathbf{u}}$. Como sugerencia, obtenga primero constantes explícitas $C_1(\mathbf{u}), C_2(\mathbf{u}) > 0$ para las cuales

$$I(t\mathbf{u}) \geq C_1(\mathbf{u})t^p - C_2(\mathbf{u})t^r$$

cuando $t > 0$, y después utilice la cota inferior de orden $\theta$ para el potencial. Explique por qué este argumento no proporciona, por sí solo, la unicidad del punto crítico de la función radial y señale el papel preciso de (a2) y (f4) en la demostración de dicha unicidad.

# Apéndices

# A

# Topología

Este apéndice reúne las nociones topológicas que se utilizan en la construcción de variedades, haces y espacios cociente, junto con los resultados de topología algebraica necesarios para la teoría del índice. En estos últimos resultados se fijan las convenciones empleadas en los capítulos principales y se indican referencias precisas para las demostraciones propiamente topológicas.

Antes de comenzar, fijamos el principio de maximalidad que se empleará para construir redes separadas en espacios métricos.

**Teorema A.0.1.** (Lema de Zorn) Sea $(P, \preccurlyeq)$ un conjunto parcialmente ordenado no vacío. Si toda cadena $\mathcal{C} \subseteq P$ posee una cota superior en $P$, entonces $P$ contiene un elemento maximal.

**Observación A.0.2.** El Lema de Zorn es una forma equivalente del axioma de elección. En el texto se usa únicamente en la construcción de familias maximales de bolas separadas.

## A.1 Espacios topológicos

**Definición A.1.1.** (Espacio topológico) Un *espacio topológico* es un par $(X, \tau)$ donde $X$ es un conjunto y $\tau$ es una familia de subconjuntos de $X$ tal que:

(a) $\varnothing, X \in \tau$,

(b) la unión arbitraria de conjuntos de $\tau$ está en $\tau$,

(c) la intersección finita de conjuntos de $\tau$ está en $\tau$.

Los elementos de $\tau$ se llaman *abiertos* de $X$.

**Definición A.1.2.** (Topología de subespacio) Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. La *topología de subespacio* en $A$ es

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}.$$

Entonces $(A, \tau_A)$ es un espacio topológico llamado *subespacio* de $X$.

**Definición A.1.3.** (Mapeo cociente y topología cociente) Sea $(X, \tau_X)$ un espacio topológico, sea $Y$ un conjunto y sea $q\colon X \longrightarrow Y$ un mapeo suprayectivo. La *topología cociente* en $Y$ inducida por $q$ se define como

$$\tau_q = \{V \subseteq Y \mid q^{-1}(V) \in \tau_X\}.$$

Con esta topología, $q\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_q)$ es continuo y se dice que $q$ es un *mapeo cociente*. Equivalentemente, un mapeo continuo y suprayectivo entre espacios topológicos es cociente si $U \subseteq Y$ es abierto siempre que $q^{-1}(U)$ sea abierto en $X$.

**Definición A.1.4.** (Espacio cociente) Sea $X$ un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en $X$. Se define el *espacio cociente* $X/\sim$ como el conjunto de clases de equivalencia

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\},$$

provisto de la topología cociente inducida por la proyección natural

$$q\colon X \longrightarrow X/\sim, \qquad q(x) = [x].$$

De este modo, $U \subseteq X/\sim$ es abierto si y sólo si $q^{-1}(U)$ es abierto en $X$.

**Ejemplo A.1.5.** (Circunferencia) El círculo $\mathbb{S}^1$ puede describirse como el cociente

$$\mathbb{S}^1 \cong [0,1]/\sim,$$

donde $0 \sim 1$ y los demás puntos de $[0,1]$ permanecen distintos.

**Ejemplo A.1.6.** (Cilindro) El cilindro se obtiene como

$$C \cong \big([0,1] \times [0,1]\big)/\sim,$$

donde identificamos $(0, y) \sim (1, y)$ para todo $y \in [0,1]$. En este caso se pegan los lados verticales sin torcerlos.

**Ejemplo A.1.7.** (Banda de Möbius) La banda de Möbius se obtiene de manera similar como

$$M \cong \big([0,1] \times [0,1]\big)/\sim,$$

donde la relación de equivalencia es

$$(0, y) \sim (1, 1-y), \qquad y \in [0,1].$$

Esto corresponde a pegar los lados verticales del cuadrado tras darle media vuelta a uno de ellos.

**Lema A.1.8.** (Caracterización de mapeos cocientes) Sea $q\colon X \longrightarrow Y$ un mapeo continuo y suprayectivo entre espacios topológicos. Si $q$ es cerrado, entonces $q$ es un mapeo cociente, es decir, un conjunto $U \subseteq Y$ es abierto si y sólo si $q^{-1}(U)$ es abierto en $X$.

*Demostración.* La continuidad prueba una de las implicaciones. Recíprocamente, si $q^{-1}(U)$ es abierto, entonces $q^{-1}(Y \setminus U)$ es cerrado. Como $q$ es cerrado y suprayectivo,

$$Y \setminus U = q\big(q^{-1}(Y \setminus U)\big)$$

es cerrado. Por lo tanto, $U$ es abierto. □

## A.2 Espacios cubrientes

**Definición A.2.1.** (Mapeo cubriente) Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ un mapeo continuo y suprayectivo entre espacios topológicos. Se dice que $p$ es un *mapeo cubriente* si para todo $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$ con $x \in U$ tal que

$$p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in A} V_\alpha,$$

donde cada $V_\alpha$ es abierto en $Y$, y la restricción $p\restriction_{V_\alpha}\colon V_\alpha \longrightarrow U$ es un homeomorfismo.

**Definición A.2.2.** (Mapeo cubriente universal) Un mapeo cubriente $p\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ se llama *mapeo cubriente universal* si $\widetilde{X}$ es simplemente conexo.

**Proposición A.2.3.** (Mapeo cubriente universal del círculo) El mapeo $\varepsilon\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definido por $\varepsilon(x) = e^{2\pi i x}$ es un mapeo cubriente universal de $\mathbb{S}^1$.

*Demostración.* Sea $z_0 = e^{2\pi i a}$. Si

$$U = \left\{ e^{2\pi i t} \,\middle|\, a - \frac{1}{4} < t < a + \frac{1}{4} \right\},$$

entonces

$$\varepsilon^{-1}(U) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} \left( a - \frac{1}{4} + k, a + \frac{1}{4} + k \right),$$

y cada intervalo se proyecta homeomórficamente sobre $U$. Así, $\varepsilon$ es un mapeo cubriente. Además, $\mathbb{R}$ es contráctil por la homotopía $H(x,t) = (1-t)x$ y, por lo tanto, es simplemente conexo. □

**Definición A.2.4.** (Abiertos regularmente cubiertos) Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ un mapeo cubriente de espacios topológicos. Decimos que un abierto conexo $U \subseteq X$ está *regularmente cubierto* por $p$ si cada componente conexa $\widetilde{U}$ de $p^{-1}(U)$ se proyecta de manera homeomorfa sobre $U$ mediante la restricción $p\restriction_{\widetilde{U}}\colon \widetilde{U} \longrightarrow U$.

**Teorema A.2.5.** (Arcos cubiertos por el exponencial) Sea $U \subsetneq \mathbb{S}^1$ un arco abierto. Entonces $\varepsilon^{-1}(U)$ es una

unión disjunta de intervalos abiertos y la restricción

$$\varepsilon \restriction_{\widetilde{U}} \colon \widetilde{U} \longrightarrow U$$

es un homeomorfismo para cada componente $\widetilde{U}$ de $\varepsilon^{-1}(U)$. Por lo tanto, todo arco abierto propio está regularmente cubierto en el sentido de la Definición A.2.4.

*Demostración.* Existen $a \in \mathbb{R}$ y $0 < \ell \leq 1$ tales que

$$U = \{e^{2\pi i t} \mid a < t < a + \ell\}.$$

Por consiguiente,

$$\varepsilon^{-1}(U) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} (a + k, a + \ell + k).$$

En cada intervalo de esta unión, $\varepsilon$ es continua e inyectiva y posee como inversa una rama continua del argumento dividida por $2\pi$. Así, cada restricción es un homeomorfismo sobre $U$. □

## A.3 Haces complejos y equivalencia estable

En lo que sigue, los haces vectoriales topológicos tienen rango finito y fibra compleja. Las bases compactas se suponen Hausdorff. Cuando una base no es compacta, se supone localmente compacta, Hausdorff y paracompacta. La paracompacidad es la hipótesis que permite construir las particiones de la unidad que se usan al complementar y suavizar haces; la compacidad local y la separación garantizan que la compactificación por un punto sea Hausdorff. Todas las variedades del libro satisfacen estas condiciones.

**Teorema A.3.1.** (Complemento estable) Sea $\mathbf{E} \longrightarrow X$ un haz vectorial complejo sobre un espacio compacto Hausdorff. Existe un haz $\mathbf{E}' \longrightarrow X$ y un entero $N \geq 0$ tales que

$$\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}' \cong X \times \mathbb{C}^N.$$

En particular, toda clase estable de haces puede representarse como la diferencia entre un haz y uno trivial.

La demostración, incluida la construcción del encaje de $\mathbf{E}$ en un haz trivial mediante una partición finita de la unidad, se encuentra en [76, Proposición 1.4, pp. 13–14]. La formulación equivalente en términos del grupo de Grothendieck aparece en [21, Teorema 10.5 y Ejercicios 10.9–10.12, pp. 262–265].

**Teorema A.3.2.** (Invariancia homotópica del pullback) Sea $\mathbf{E} \longrightarrow Y$ un haz vectorial complejo y sean $f_0, f_1 \colon X \longrightarrow Y$ mapeos homotópicos. Si $X$ es paracompacto, entonces

$$f_0^{*}\mathbf{E} \cong f_1^{*}\mathbf{E}.$$

Por consiguiente, los homomorfismos inducidos $f_0^{*}, f_1^{*} \colon K^0(Y) \longrightarrow K^0(X)$ coinciden.

Una prueba que trivializa el haz inducido sobre piezas de $X \times [0,1]$ y pega las identificaciones consecutivas está en [76, Teorema 1.6, pp. 19–21].

**Proposición A.3.3.** (Pegado de haces) Sean $X = X_0 \cup X_1$, con $X_0$ y $X_1$ cerrados, y sean $\mathbf{E}_i \longrightarrow X_i$ haces complejos. Cada isomorfismo

$$\varphi\colon \mathbf{E}_0 \restriction_{X_0\cap X_1} \longrightarrow \mathbf{E}_1 \restriction_{X_0\cap X_1}$$

determina un haz $\mathbf{E}_0 \cup_\varphi \mathbf{E}_1 \longrightarrow X$, único salvo isomorfismo. Una homotopía de isomorfismos de pegado produce haces isomorfos. En particular, los haces sobre una suspensión se describen mediante funciones de transición sobre el ecuador.

La construcción cociente y la comprobación de la trivialidad local se desarrollan en [76, Sección 1.2, pp. 22–27]. La forma parametrizada utilizada en periodicidad de Bott se encuentra en [21, Ejercicio 10.19, pp. 269–270].

## A.4 K-teoría relativa y soporte compacto

Para un espacio compacto apuntado $(X, x_0)$ se define

$$\widetilde{K}^0(X) := \ker\bigl(i_{x_0}^*\colon K^0(X) \longrightarrow K^0(\{x_0\})\bigr).$$

Si $A \subseteq X$ es cerrado, se pone

$$K^0(X, A) := \widetilde{K}^0(X/A).$$

Para un espacio localmente compacto $Y$, su compactificación por un punto se denota por $Y^+ = Y \cup \{\infty\}$ y

$$K_c^0(Y) := \widetilde{K}^0(Y^+).$$

Si $SX$ es la suspensión reducida de un espacio apuntado $X$, se fija la convención

$$\widetilde{K}^1(X) := \widetilde{K}^0(SX), \qquad K_c^1(Y) := \widetilde{K}^1(Y^+).$$

**Proposición A.4.1.** (Suspensión y producto por la recta) Para todo espacio localmente compacto, Hausdorff y paracompacto $Y$ existe un isomorfismo natural

$$K_c^1(Y) \cong K_c^0(\mathbb{R} \times Y). \tag{A.1}$$

Este isomorfismo es compatible con pullbacks por mapeos propios, con el producto externo y con las extensiones asociadas a inclusiones abiertas.

*Demostración.* La compactificación por un punto del producto posee un homeomorfismo apuntado

$$(\mathbb{R} \times Y)^+ \cong S^1 \wedge Y^+.$$

Para verlo, compactificamos $\mathbb{R}$ por un punto y consideramos el mapeo cociente

$$S^1 \times Y^+ \longrightarrow \frac{S^1 \times Y^+}{S^1 \times \{\infty\} \cup \{\infty\} \times Y^+} = S^1 \wedge Y^+.$$

Su restricción a $\mathbb{R} \times Y$ es un homeomorfismo sobre el complemento del punto base. Los entornos del punto base corresponden exactamente a complementos de compactos de $\mathbb{R} \times Y$; por la propiedad universal de la

compactificación por un punto se obtiene el homeomorfismo indicado. Por consiguiente,

$$K_c^0(\mathbb{R}\times Y)=\widetilde{K}^0\big((\mathbb{R}\times Y)^+\big)\cong\widetilde{K}^0(S^1\wedge Y^+)=\widetilde{K}^1(Y^+)=K_c^1(Y).$$

Todas las identificaciones provienen de mapeos cociente naturales. De ahí se siguen la naturalidad respecto de mapeos propios y la compatibilidad con productos externos. Para una inclusión abierta, el homeomorfismo conserva el punto base y el complemento del abierto; por ello también conmuta con la extensión por cero. □

Conviene disponer también de una descripción que conserve visible el soporte. Si $K\subseteq Y$ es compacto, denotamos por $\mathcal{K}_K^0(Y)$ el grupo de clases de complejos

$$\mathbf{E}^0\xrightarrow{a}\mathbf{E}^1$$

de haces complejos sobre $Y$ para los cuales $a_y$ es invertible cuando $y\notin K$. Se identifican dos complejos si, después de sumar complejos invertibles en todo $Y$, pueden unirse por isomorfismos y por una homotopía de homomorfismos de haces que permanezca invertible fuera de $K$. Para los espacios anteriores existe una identificación natural

$$K_c^0(Y)\cong\varinjlim_{K\Subset Y}\mathcal{K}_K^0(Y).$$

El soporte pertenece a este modelo por complejos, en el que el homomorfismo de haces está definido sobre todo $Y$; no se atribuye un soporte a un triple relativo cuyo homomorfismo de haces sólo está definido sobre el subespacio del par.

**Teorema A.4.2.** (Exactitud, excisión y producto externo) Se cumplen las propiedades siguientes.

(i) Para todo par compacto $(X,A)$ con $A$ cerrado, la sucesión cíclica

$$K^0(X,A)\longrightarrow K^0(X)\longrightarrow K^0(A)\longrightarrow K^1(X,A)\longrightarrow K^1(X)\longrightarrow K^1(A)\longrightarrow K^0(X,A)$$

es exacta.

(ii) Si $U\subseteq X$ es abierto y $A\subseteq X$ es cerrado, con $\overline{U}\subseteq\operatorname{int}(A)$, el cociente de pares induce los isomorfismos de excisión correspondientes. En particular, si $j\colon V\hookrightarrow Y$ es una inclusión abierta de espacios localmente compactos, existe un homomorfismo de extensión

$$j_!\colon K_c^q(V)\longrightarrow K_c^q(Y),\qquad q\in\{0,1\},$$

que depende sólo de la inclusión y coincide con la extensión por cero de complejos exactos fuera de un compacto. Más precisamente, si $K\Subset V$, la restricción a $V$ y la extensión a $Y$ inducen isomorfismos inversos

$$\mathcal{K}_K^0(V)\xrightarrow{\cong}\mathcal{K}_K^0(Y).$$

Al tomar el límite sobre los compactos $K\Subset V$ se obtiene $j_!$.

(iii) Para espacios localmente compactos $X,Y$ existe un producto externo natural y asociativo

$$\boxtimes\colon K_c^p(X)\otimes K_c^q(Y)\longrightarrow K_c^{p+q}(X\times Y),$$

donde el grado se toma módulo dos. El producto conmuta con pullbacks propios y con las extensiones asociadas a inclusiones abiertas.

La exactitud en grado cero se prueba en [76, Proposición 2.9, pp. 51–52]; la suspensión y la periodicidad producen la sucesión cíclica completa en [76, Sección 2.2, pp. 51–59]. La construcción mediante compactificación por un punto y el producto externo se encuentran en [21, Sección 10.4 y Teorema 10.16, pp. 266–268]. La descripción por complejos con soporte y la excisión en la forma que acaba de enunciarse se prueban en [21, Definición 12.6 y discusión posterior, pp. 287–289].

**Teorema A.4.3.** (Representación relativa por triples) Sea $X$ un espacio compacto Hausdorff y sea $A \subseteq X$ cerrado. Las clases de $K^0(X,A)$, con la convención $K^0(X,\varnothing) = K^0(X)$, se representan por triples $(\mathbf{E},\mathbf{F},\alpha)$, donde $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow X$ son haces complejos y

$$\alpha : \mathbf{E}\restriction_A \longrightarrow \mathbf{F}\restriction_A$$

es un isomorfismo. Dos triples representan la misma clase si, después de sumar triples que se extienden como isomorfismos sobre $X$, se relacionan por un isomorfismo y una homotopía de los mapeos sobre $A$. La suma es la suma directa y

$$[(\mathbf{E},\mathbf{F},\alpha)] + [(\mathbf{F},\mathbf{G},\gamma)] = [(\mathbf{E},\mathbf{G},\gamma\circ\alpha)].$$

Si $Y = X \setminus A$ y $X/A \cong Y^{+}$, este modelo identifica el grupo con $K_c^0(Y)$. Bajo esta identificación, el modelo por complejos descrito antes permite escoger un homomorfismo de haces definido en $Y$ que es invertible fuera de un compacto.

La construcción mediante el doble de $X$, el pegado sobre $A$ y el elemento de diferencia se encuentra en [21, Definición 12.6, pp. 287–289]; el modelo relativo se desarrolla en [9, Capítulo I, Secciones 2–3]. Para el alcance compacto Hausdorff, la extensión de una trivialización desde un cerrado y la exactitud se establecen en [76, Proposición 2.9 y Sección 2.2, pp. 51–55]. La demostración del Teorema 17.2.4 construye el isomorfismo mediante el doble y verifica las relaciones, la sobreyectividad y la inyectividad usando esas propiedades. En particular, el enunciado se aplica a $(X\times\Lambda, A\times\Lambda)$ y a sus homotopías para cualquier compacto Hausdorff $\Lambda$, sin exigir que $\Lambda$ sea CW.

**Teorema A.4.4.** (Suavización de haces y homomorfismos) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera y compacta.

(i) Todo haz vectorial complejo continuo sobre $M$ es isomorfo, como haz continuo, a un haz vectorial complejo suave.

(ii) Si $\mathbf{E},\mathbf{F} \longrightarrow M$ son suaves, todo homomorfismo de haces continuo $a\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ se aproxima uniformemente por homomorfismos de haces suaves.

(iii) Si $a$ es un isomorfismo y la aproximación $a_1$ satisface

$$\sup_{x\in M} \|a_1(x) - a(x)\| < \left( \sup_{x\in M} \|a(x)^{-1}\| \right)^{-1},$$

entonces el segmento $a_t = (1-t)a + t a_1$ está formado por isomorfismos. En particular, $a$ y $a_1$ definen la misma clase relativa.

El primer inciso y la aproximación compatible con trivializaciones se prueban en [82, p. 101]; véase también [21, Ejercicio B.13(b), pp. 719–720]. El último inciso se sigue de

$$a_t = a\big(I + t\,a^{-1}(a_1 - a)\big)$$

y de la serie de Neumann, pues la norma del segundo sumando es menor que uno uniformemente en $x$ y $t$.

## A.5 Periodicidad de Bott y orientación compleja

Sea $\mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ el haz lineal tautológico. Identificamos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$ y adoptamos como clase de Bott

$$\beta := [\mathbf{H}^*] - [\mathbb{C}] \in \widetilde{K}^0(\mathbb{S}^2) = K_c^0(\mathbb{R}^2).$$

Con el pegado de la Definición 18.1.1, el haz tautológico es $\mathbf{H} = \mathbf{E}_1$ y su dual es $\mathbf{H}^* = \mathbf{E}_{-1}$; por lo tanto, $\beta$ coincide con la clase $b$ utilizada en el Capítulo 18. Esta identificación se comprueba directamente porque dualizar un haz invierte su función de pegado. La descripción del tautológico mediante el pegado $z$ está en [21, Ejercicio B.11, p. 719]. En los capítulos de teoría del índice se conserva esta elección en todos los isomorfismos de Thom. En particular, al identificar una línea compleja con $\mathbb{R}^2$ mediante $(u,v) \mapsto u + iv$ y usar $J(u,v) = (-v,u)$, la clase de Thom satisface $\lambda_{\mathbb{C}} = -\beta$. Esta convención fija simultáneamente el signo del generador de Bott, el del operador modelo euclidiano y el de la orientación normal en la prueba por encaje.

**Teorema A.5.1.** (Periodicidad compleja de Bott) Para todo espacio localmente compacto $X$ y todo $q \in \{0,1\}$, el producto externo con $\beta$ define un isomorfismo natural

$$\mathcal{B}_X \colon K_c^q(X) \longrightarrow K_c^q(X \times \mathbb{R}^2), \qquad \mathcal{B}_X(a) = a \boxtimes \beta.$$

En particular,

$$K_c^0(\mathbb{R}^{2r}) \cong \mathbb{Z}, \qquad K_c^0(\mathbb{R}^{2r+1}) = 0,$$

y $\beta^{\boxtimes r}$ genera el primer grupo.

La prueba basada en familias de operadores de Wiener–Hopf, con la normalización del generador y la verificación de que los dos homomorfismos son inversos, está en [21, Teoremas 10.20 y 10.22, pp. 270–272]. Otra prueba completa, formulada mediante el producto fundamental, aparece en [76, Teoremas 2.2 y 2.11, pp. 41–55]. La fuente original para la formulación por haces complejos es [10, pp. 229–247].

La construcción del morfismo directo para un haz normal no trivial requiere la versión equivariante de esta normalización. Si un grupo compacto $G$ actúa en un espacio $Y$, se denota por $K_{G,c}^0(Y)$ el grupo definido por complejos $G$–equivariantes que son exactos fuera de un compacto. Para un punto se obtiene el anillo de representaciones complejas

$$K_G^0(\{*\}) = R(G).$$

**Teorema A.5.2.** (Normalización equivariante de Bott) Sea $G = O(r)$ actuando en $\mathbb{R}^r$ por la representación estándar y sea $i \colon \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^r$. La clase equivariante de Thom

$$\beta_r := i_!(1) \in K_{G,c}^0(T^*\mathbb{R}^r)$$

posee un representante elíptico $G$–equivariante sobre la compactificación $S^r = \mathbb{R}^r \cup \{\infty\}$, elemental cerca de $\infty$, cuyo índice equivariante satisface

$$\operatorname{Ind}_G(\beta_r) = [\mathbb{C}] \quad \text{en } R(G),$$

donde $G$ actúa trivialmente en $\mathbb{C}$. El resultado es natural al formar haces asociados a un haz principal $O(r)$.

La construcción de la clase mediante el haz de marcos, el descenso equivariante y los cortes cónicos se desarrolla en [21, ecuaciones (12.8)–(12.16), pp. 293–301]. La identidad del índice equivariante se formula en [21, p. 295]. El papel preciso de [11, Proposición 4.4, p. 505] es el siguiente: allí se prueba que los axiomas (B1), (B2′) y (B3′′) implican el axioma de Bott (B2). Dentro de esa prueba se establece la normalización

$$\operatorname{Ind}_G(i_!1) = 1 \quad \text{en } R(G),$$

primero en los bloques de rango uno y dos, mediante $O(1)$ y $SO(2)$, y después en todo rango por la descomposición en bloques y la multiplicatividad. Por lo tanto, la proposición no presupone la identidad que se necesita aquí: la obtiene como el paso de normalización que recupera el axioma de Bott completo.

Esta normalización coincide con las convenciones del libro. En rango uno escribimos $z = u+iv$ y $J(u,v) = (-v,u)$; el símbolo de Koszul asociado tiene índice modelo $+1$. La función de pegado elegida para $b$ tiene la orientación opuesta, de modo que $\lambda_{\mathbb{C}} = -b$, como en (18.7). En consecuencia, $i_!(1) = \lambda_{\mathbb{C}}$ tiene índice equivariante igual a la representación trivial, sin ningún cambio aislado de signo. Ésta es la normalización equivariante usada para el haz normal del encaje.

Sea ahora $\pi\colon \mathbf{V} \longrightarrow X$ un haz hermitiano complejo de rango $r$. Sobre $\mathbf{V}$ se consideran los haces graduados

$$\pi^*\Lambda^{\mathrm{ev}}\mathbf{V} := \bigoplus_{j \text{ par}} \pi^*\Lambda^j\mathbf{V}, \qquad \pi^*\Lambda^{\mathrm{odd}}\mathbf{V} := \bigoplus_{j \text{ impar}} \pi^*\Lambda^j\mathbf{V}.$$

En el punto $v \in \mathbf{V}_x$, la multiplicación exterior por $v$ y su adjunto definen

$$c_{\mathbf{V}}(v) := \varepsilon(v) - \varepsilon(v)^*\colon \Lambda^{\mathrm{ev}}\mathbf{V}_x \longrightarrow \Lambda^{\mathrm{odd}}\mathbf{V}_x.$$

Las relaciones del álgebra exterior dan

$$c_{\mathbf{V}}(v)^* c_{\mathbf{V}}(v) = \|v\|^2 \operatorname{Id},$$

por lo cual $c_{\mathbf{V}}(v)$ es invertible para $v \neq 0$. El triple formado por los dos haces y $c_{\mathbf{V}}$ determina la clase de Thom

$$\lambda_{\mathbf{V}} \in K^0_X(\mathbf{V}),$$

donde el subíndice indica soporte en la sección cero. Si $X$ es compacta, este grupo se identifica con $K^0_c(\mathbf{V})$. Para la línea trivial identificada con $\mathbb{R}^2$ mediante $(u,v) \mapsto u+iv$ y con $J(u,v) = (-v,u)$, esta convención satisface

$$\lambda_{\mathbb{C}} = -\beta.$$

La comprobación por funciones de transición se da en (18.7).

**Teorema A.5.3.** (Isomorfismo de Thom en K-teoría) Para todo haz vectorial complejo $\pi\colon \mathbf{V} \longrightarrow X$ sobre una base compacta, el homomorfismo

$$\mathrm{Th}_{\mathbf{V}}\colon K^0(X) \longrightarrow K_c^0(\mathbf{V}), \qquad \mathrm{Th}_{\mathbf{V}}(a) = \pi^* a \cdot \lambda_{\mathbf{V}},$$

es un isomorfismo. Es natural respecto de pullbacks, multiplicativo respecto de sumas directas y compatible con el producto externo. Si la base es sólo localmente compacta, la clase con soporte vertical induce el isomorfismo

$$\mathrm{Th}_{\mathbf{V}}\colon K_c^0(X) \longrightarrow K_c^0(\mathbf{V}).$$

El enunciado, su normalización y la comparación con Bott aparecen en [21, Teorema 12.8 y Observación 12.9, pp. 289–290]. Una demostración mediante módulos de Clifford se desarrolla en [92, Apéndice C, Teorema C.8 y Observación C.13]. La independencia de la métrica hermitiana se sigue también directamente de que el espacio de tales métricas es contráctil.

## A.6 Morfismos directos en K-teoría

Sea $f\colon X \hookrightarrow Y$ un encaje propio de variedades suaves y sea $\nu_f \longrightarrow X$ su haz normal. Cuando $\nu_f$ posee una estructura compleja, una vecindad tubular identifica un entorno de la sección cero de $\nu_f$ con un abierto $U \subseteq Y$. Se define

$$f_!\colon K_c^0(X) \longrightarrow K_c^0(Y), \qquad f_! := j_! \circ \mathrm{Th}_{\nu_f},$$

donde $j\colon U \hookrightarrow Y$ es la inclusión abierta.

**Teorema A.6.1.** (Propiedades del morfismo directo) El homomorfismo anterior es independiente de la métrica, de la vecindad tubular y de las identificaciones auxiliares. Además:

(i) encajes isotópicos, con orientaciones complejas compatibles de sus haces normales, inducen el mismo mapeo;

(ii) si $f\colon X \hookrightarrow Y$ y $g\colon Y \hookrightarrow Z$ son encajes propios con orientaciones compatibles, entonces $(g \circ f)_! = g_! \circ f_!$;

(iii) para $a \in K_c^0(X)$ y $b \in K_c^0(Y)$ se cumple la fórmula de proyección

$$f_!\big(a \cdot f^* b\big) = f_!(a) \cdot b;$$

(iv) los mapeos directos conmutan con productos externos.

Las demostraciones por homotopía de vecindades tubulares, naturalidad de Thom y excisión están en [92, Capítulo III, §§12–13]. La construcción en la forma usada para el teorema del índice aparece en [21, (12.3)–(12.4), pp. 290–291].

Para un encaje $f\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, el encaje tangente $Tf\colon TM \hookrightarrow T\mathbb{R}^N$ tiene haz normal isomorfo a

$$\pi^*(\nu_f \oplus \nu_f) \longrightarrow TM.$$

La regla

$$J(u,v) = (-v,u)$$

lo convierte canónicamente en un haz complejo. Por ello existe, sin imponer una estructura compleja sobre $M$, un mapeo

$$(Tf)_!\colon K_c^0(TM) \longrightarrow K_c^0(T\mathbb{R}^N) \cong K_c^0(\mathbb{R}^{2N}).$$

Esta es la orientación compleja que interviene en la definición del índice topológico general.

**Teorema A.6.2.** (Encaje de Whitney) Toda variedad suave Hausdorff y segundo numerable, con o sin frontera y de dimensión $n$, admite un encaje suave propio en $\mathbb{R}^{2n+1}$. Si la variedad es compacta, su imagen es automáticamente cerrada.

La prueba por encajes locales, particiones de la unidad y proyecciones genéricas se encuentra en [94, Teorema 6.15]. La existencia y la construcción de las vecindades tubulares necesarias ya fueron demostradas en el Teorema 2.12.3.

## A.7 Clases características y comparación de Thom

Sea $\mathbf{E} \longrightarrow X$ un haz complejo de rango $r$. El principio de escisión permite trabajar, después de un pullback inyectivo en cohomología, como si

$$\mathbf{E} = \mathbf{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{L}_r.$$

Si $x_j = c_1(\mathbf{L}_j)$, los elementos $x_1,\dots,x_r$ se llaman raíces formales de Chern. Las expresiones simétricas siguientes descienden a clases bien definidas sobre $X$:

$$c(\mathbf{E}) = \prod_{j=1}^{r}(1+x_j),$$

$$\operatorname{ch}(\mathbf{E}) = \sum_{j=1}^{r} e^{x_j},$$

$$\operatorname{Td}(\mathbf{E}) = \prod_{j=1}^{r} \frac{x_j}{1-e^{-x_j}}.$$

En cada dimensión fija las series se truncan, de modo que las dos últimas expresiones pertenecen a $H^{\mathrm{ev}}(X;\mathbb{Q})$. Para una diferencia formal se pone

$$\operatorname{ch}([\mathbf{E}]-[\mathbf{F}]) = \operatorname{ch}(\mathbf{E}) - \operatorname{ch}(\mathbf{F}).$$

**Teorema A.7.1.** (Carácter de Chern) El carácter de Chern define una transformación natural de anillos

$$\operatorname{ch}\colon K^0(X) \longrightarrow H^{\mathrm{ev}}(X;\mathbb{Q}).$$

Si $X$ es un complejo CW finito, induce un isomorfismo

$$K^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H^{\mathrm{ev}}(X;\mathbb{Q}).$$

Existe además una versión con soporte compacto

$$\mathrm{ch}_c\colon K_c^0(Y)\longrightarrow H_c^{\mathrm{ev}}(Y;\mathbb{Q})$$

compatible con productos externos, pullbacks propios y extensiones asociadas a inclusiones abiertas.

Las clases de Chern, el principio de escisión y el carácter de Chern se construyen en [76, Secciones 2.3, 3.1 y 4.1, pp. 66–87 y 109–112]. La versión con soporte compacto y su compatibilidad con Thom se desarrollan en [21, Sección 13.1, pp. 311–315].

**Teorema A.7.2.** (Thom cohomológico y clase fundamental no compacta) Sea $\pi\colon \mathbf{V}\longrightarrow X$ un haz real orientado de rango $r$ sobre una base compacta de tipo CW finito. Existe una clase $U_{\mathbf{V}}\in H_c^r(\mathbf{V};\mathbb{Z})$ cuya restricción a cada fibra orientada genera $H_c^r(\mathbb{R}^r;\mathbb{Z})$, y el producto con ella define un isomorfismo

$$\mathrm{Th}_{\mathbf{V}}^H\colon H^q(X;R)\longrightarrow H_c^{q+r}(\mathbf{V};R),\qquad \mathrm{Th}_{\mathbf{V}}^H(\omega)=\pi^*\omega\smile U_{\mathbf{V}},$$

para $R=\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$. La clase de Thom es natural bajo pullbacks orientados y multiplicativa para sumas directas orientadas.
Si $Y$ es una variedad suave orientada sin frontera y de dimensión $d$, sin necesidad de ser compacta, posee una clase fundamental de Borel–Moore $[Y]_{\mathrm{BM}}\in H_d^{\mathrm{BM}}(Y;\mathbb{Z})$. El apareamiento

$$H_c^d(Y;\mathbb{R})\times H_d^{\mathrm{BM}}(Y;\mathbb{Z})\longrightarrow\mathbb{R}$$

coincide, bajo el teorema de de Rham con soporte compacto, con $[\omega]\mapsto\displaystyle\int_Y\omega$.

La construcción de la orientación cohomológica, el isomorfismo de Thom con soporte compacto, su naturalidad y la evaluación sobre la clase fundamental se desarrollan en [21, Sección 13.1, pp. 311–315].

Con la clase de Thom fijada arriba, la comparación entre los isomorfismos de Thom en K-teoría y en cohomología introduce el factor de Todd. En la convención de multiplicación exterior de $\lambda_{\mathbf{V}}$, para un haz complejo de rango $r$ se tiene

$$\mathrm{ch}_c(\lambda_{\mathbf{V}})=(-1)^r\,\mathrm{Th}_{\mathbf{V}}^H\big(\mathrm{Td}(\overline{\mathbf{V}})^{-1}\big),$$

donde $\mathrm{Th}_{\mathbf{V}}^H$ es el isomorfismo de Thom en cohomología con coeficientes racionales.

**Teorema A.7.3.** (Fórmula cohomológica del índice topológico) Sea $M$ una variedad suave cerrada de dimensión $n$ y sea $u\in K_c^0(T^*M)$. Identifiquemos $T^*M$ con $TM$ mediante una métrica y orientemos $TM$ por la estructura casi compleja que toma las direcciones horizontales como reales y las verticales como imaginarias. Si $a=(\sharp_g)_*u\in K_c^0(TM)$, entonces

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{t}}(u)=(-1)^n\int_{TM}\mathrm{ch}_c(a)\smile\pi^*\,\mathrm{Td}(TM\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}).$$

El integrando tiene soporte compacto en la dirección de las fibras; la integral significa la evaluación de su componente de grado $2n$ sobre la clase fundamental de $TM$.

La comparación completa de las dos clases de Thom, incluido el haz conjugado y el signo $(-1)^n$ para estas

convenciones, está en [21, Teorema 13.1, pp. 313–315]. Esta formulación es la que se utiliza en el capítulo dedicado al teorema de Atiyah–Singer.

## A.8 Cohomología de de Rham, estructuras spin y clase de Euler

Los resultados de esta sección se emplean únicamente para identificar topológicamente los índices de operadores geométricos. Sus demostraciones pertenecen a la topología algebraica y diferencial y no se reproducen aquí.

Recordamos primero la obstrucción que interviene en las estructuras spin. Para un haz vectorial real $\mathbf{V} \to X$ de rango $r$ sobre un espacio paracompacto, sus *clases de Stiefel–Whitney* son las clases

$$w_j(\mathbf{V}) \in H^j(X;\mathbb{Z}_2), \qquad 0 \le j \le r,$$

caracterizadas por naturalidad, $w_0(\mathbf{V}) = 1$, la fórmula de Whitney

$$w(\mathbf{V} \oplus \mathbf{W}) = w(\mathbf{V}) \smile w(\mathbf{W}), \qquad w(\mathbf{V}) := 1 + w_1(\mathbf{V}) + \cdots + w_r(\mathbf{V}),$$

y la normalización $w_1(\gamma^1) \neq 0$ para el haz tautológico real $\gamma^1 \to \mathbb{RP}^\infty$. En particular,

$$w_2(\mathbf{V}) \in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$$

es la componente de grado dos de la clase total. La anulación de $w_1(\mathbf{V})$ equivale a la orientabilidad de $\mathbf{V}$; una vez elegida orientación, $w_2(\mathbf{V})$ es la obstrucción al levantamiento del haz principal de marcos orientados por el mapeo cubriente $\mathrm{Spin}(r) \to \mathrm{SO}(r)$.

La construcción universal de estas clases, el criterio de orientación y la interpretación de $w_2$ como obstrucción spin se encuentran en [21, Definición 17.18 y Proposición 17.20, pp. 527–529]. Sólo emplearemos esos resultados topológicos; las álgebras de Clifford, el mapeo cubriente spin y los haces de espinores se construyen geométricamente en la Sección 2.17.

**Teorema A.8.1.** (Teorema de de Rham y característica de Euler) Sea $M$ una variedad suave con o sin frontera. La integración de formas sobre cadenas suaves induce, para cada $q$, un isomorfismo natural

$$H^q_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C}) \cong H^q_{\mathrm{sing}}(M;\mathbb{C}).$$

Si $M$ es una variedad cerrada de dimensión $n$, estos espacios son finito–dimensionales y

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim_{\mathbb{C}} H^q_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C}).$$

La identificación con la cohomología singular y su relación con la característica de Euler se recogen en [21, Sección 13.4, en particular (13.18), pp. 319–323]; la descomposición de Hodge–de Rham que complementa esa identificación aparece en [21, Teorema 17.62 y Corolario 17.63, pp. 602–604].

**Teorema A.8.2.** (Clase de Euler y característica de Euler) Sea $\mathbf{V} \longrightarrow X$ un haz vectorial real orientado de rango $r$ sobre una base compacta. Si $\mathbf{s}_0 \colon X \longrightarrow \mathbf{V}$ es la sección cero y $U_{\mathbf{V}}$ es la clase de Thom cohomológica,

la clase de Euler se define por

$$e(\mathbf{V}) := \mathbf{s}_0^* U_{\mathbf{V}} \in H^r(X;\mathbb{Z}).$$

Esta clase es natural bajo pullbacks orientados y multiplicativa respecto de sumas directas orientadas. Si $M$ es una variedad suave cerrada y orientada de dimensión $n$, entonces

$$\langle e(TM), [M] \rangle = \chi(M).$$

La construcción mediante la sección cero y la evaluación sobre la clase fundamental se encuentran en [21, Teorema 13.6(d), pp. 320–321] cuando la dimensión es par. En dimensión impar, la dualidad de Poincaré empareja los números de Betti de grados complementarios y da $\chi(M) = 0$. Por otra parte, $-\mathrm{Id}_{TM}$ invierte la orientación de cada fibra, de modo que la naturalidad de la clase de Thom implica $e(TM) = -e(TM)$. Como $H^n(M;\mathbb{Z})$ es libre para una variedad cerrada orientada, se sigue que $e(TM) = 0$. Así se obtiene el enunciado en toda dimensión. Esta igualdad es la forma topológica general del teorema de Gauss–Bonnet–Chern.

Sea

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

la sucesión exacta de coeficientes y sea

$$\beta \colon H^2(X;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^3(X;\mathbb{Z})$$

su homomorfismo de Bockstein. Para un haz real orientado $\mathbf{V} \to X$ definimos la tercera clase integral de Stiefel–Whitney por

$$W_3(\mathbf{V}) := \beta\big(w_2(\mathbf{V})\big).$$

Por exactitud, $W_3(\mathbf{V}) = 0$ si y sólo si $w_2(\mathbf{V})$ es la reducción módulo dos de una clase de $H^2(X;\mathbb{Z})$.

**Teorema A.8.3.** (Orientación Spin$^c$) Un haz real orientado $\mathbf{V} \longrightarrow X$, sobre una base paracompacta, admite una estructura Spin$^c$ si y sólo si $W_3(\mathbf{V}) = 0$, equivalentemente, si y sólo si $w_2(\mathbf{V})$ es la reducción módulo dos de una clase integral de grado dos. La línea determinante $\mathbf{L}$ de una estructura elegida satisface

$$c_1(\mathbf{L}) \bmod 2 = w_2(\mathbf{V}).$$

Si el rango de $\mathbf{V}$ es par, la multiplicación de Clifford entre los haces de semiespinores define una clase de Thom en $K_X^0(\mathbf{V})$, el grupo con soporte en la sección cero; cuando $X$ es compacta, éste se identifica con $K_c^0(\mathbf{V})$. Todo haz complejo $\mathbf{E}$, considerado como haz real orientado, posee una estructura Spin$^c$ canónica, inducida por $U(r) \to \mathrm{Spin}^c(2r)$; su línea determinante es $\det_{\mathbb{C}} \mathbf{E}$ y su clase de Thom coincide con la clase construida mediante el álgebra exterior.

El criterio de existencia se demuestra en [21, Teorema 18.35, pp. 655–656] y en [92, Apéndice D, Teorema D.2]. La orientación canónica de un haz complejo y la comparación de las dos clases de Thom se desarrollan en [92, Apéndice D, Ejemplo D.6; Apéndice C, Teoremas C.8 y C.12].

**Teorema A.8.4.** (Obstrucción spin y haces de semiespinores) Sea $\mathbf{V} \to X$ un haz real orientado de rango $n$ sobre una base paracompacta. Su haz de marcos orientados admite un levantamiento principal de grupo $\mathrm{Spin}(n)$ si y sólo si

$$w_2(\mathbf{V}) = 0 \in H^2(X;\mathbb{Z}_2).$$

Cuando existe, el conjunto de clases de equivalencia de estructuras spin es un espacio homogéneo libre sobre $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$. Si $n = 2m$, cada estructura spin determina haces hermitianos de semiespinores $\mathbf{S}^+$ y $\mathbf{S}^-$, y la multiplicación de Clifford por un vector no nulo define un isomorfismo

$$c(v)\colon \mathbf{S}^+_x \longrightarrow \mathbf{S}^-_x, \qquad v \in \mathbf{V}_x \setminus \{0\}.$$

La clase de este isomorfismo es la orientación de Thom spinorial de $\mathbf{V}$ en $K$–teoría compleja, con soporte en la sección cero. Si las raíces formales de $\mathbf{V}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ se ordenan como $x_1,-x_1,\dots,x_m,-x_m$, entonces

$$\operatorname{ch}(\mathbf{S}^+)-\operatorname{ch}(\mathbf{S}^-)=\prod_{j=1}^{m}\left(e^{-\frac{x_j}{2}}-e^{\frac{x_j}{2}}\right), \qquad \widehat{A}(\mathbf{V})=\prod_{j=1}^{m}\frac{\frac{x_j}{2}}{\sinh\left(\frac{x_j}{2}\right)}.$$

Aquí la orientación se elige de modo que $e(\mathbf{V}) = x_1\cdots x_m$; el orden de los dos exponentes es el determinado por la convención de quiralidad de la Sección 2.17.

La construcción de $w_2$ y el criterio de existencia se encuentran en [21, Definición 17.18 y Proposición 17.20, pp. 527–529]. Los haces $\mathbf{S}^{\pm}$, la multiplicación de Clifford y el operador de Dirac torcido se construyen en [21, Definiciones 17.22–17.23, pp. 531–532]; la comparación de su clase de símbolo con la clase de Thom se desarrolla en [92, Apéndice C, Teorema C.12]. El cálculo de los pesos de las representaciones de semiespinores que produce $\operatorname{ch}(\mathbf{S}^+)-\operatorname{ch}(\mathbf{S}^-)$ está en [21, pp. 519–522]; la clase $\widehat{A}$ y su relación con el índice de Dirac aparecen en [21, ecuaciones (17.43)–(17.45), pp. 545–546].

**Teorema A.8.5.** (Defecto de Chern de la clase de Thom spinorial) Sea $\mathbf{V}\to X$ un haz real spin de rango $2m$ sobre una base compacta y sea

$$s(\mathbf{V}) = [\pi^*\mathbf{S}^+, \pi^*\mathbf{S}^-; c(v)] \in K^0_c(\mathbf{V})$$

su clase de Thom spinorial con las orientaciones precedentes. Entonces

$$(\mathrm{Th}^H_{\mathbf{V}})^{-1}\operatorname{ch}_c\big(s(\mathbf{V})\big) = (-1)^m\widehat{A}(\mathbf{V})^{-1}. \tag{A.2}$$

La fórmula, incluido el signo determinado por la elección de quiralidad, es la Proposición 12.5 del Capítulo III, §12, de [92].

**Proposición A.8.6.** (Hechos topológicos para la extinción por cirugía) Sean $M_1,\dots,M_k$ variedades cerradas y conexas de dimensión al menos tres. Entonces

$$\pi_1(M_1\#\cdots\#M_k)\cong\pi_1(M_1)*\cdots*\pi_1(M_k).$$

Si $N = S^3/\Gamma$ es una forma espacial esférica tridimensional, donde $\Gamma$ es finito y actúa libremente, entonces $\pi_1(N)\cong\Gamma$; en particular, $N$ es simplemente conexa si y sólo si $N\cong S^3$. Si $Z\to S^1$ es un fibrado de fibra $S^2$, trivial o torcido, entonces $\pi_1(Z)\cong\mathbb{Z}$.
En consecuencia, si una variedad cerrada y conexa $M$ es una suma conexa de formas espaciales esféricas y fibrados de $S^2$ sobre $S^1$, y $\pi_1(M) = 0$, no aparece ningún factor fibrado y todos los grupos $\Gamma$ son triviales. Como $S^3$ es la unidad de la suma conexa, $M\cong S^3$.

*Demostración.* La primera identidad es Seifert–van Kampen aplicado al cuello de la suma conexa. La segunda se sigue de que $S^3$ es el espacio cubriente universal de $S^3/\Gamma$, y la tercera de la sucesión exacta de homotopía del fibrado, pues $\pi_1(S^2) = 0$. Un producto libre es trivial sólo si cada uno de sus factores lo es; esto da la conclusión. □

Toda variedad simplemente conexa es orientable. Además, una superficie cerrada bilateral en una 3–variedad orientable hereda una orientación de la orientación ambiente y de una normal global; por ello una tal variedad no contiene un $\mathbb{RP}^2$ embebido y bilateral. El efecto topológico de las cirugías y la reconstrucción por sumas conexas que emplearemos se formulan en [104, Capítulo 15]; la extinción utilizada al final se trata en los Capítulos 18–19 de la misma referencia.

**Teorema A.8.7.** (Gauss–Bonnet para superficies) Sea $(M, \mathbf{g})$ una superficie riemanniana cerrada y sea $K_{\mathbf{g}}$ su curvatura de Gauss. Entonces

$$\int_M K_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 2\pi\chi(M).$$

Como $R_{\mathbf{g}} = 2K_{\mathbf{g}}$, se sigue que

$$\int_M R_{\mathbf{g}}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = 4\pi\chi(M).$$

La formulación mediante la clase de Euler está en [21, Teorema 13.6(d), pp. 320–321]; una demostración por la forma de Gauss–Bonnet–Chern aparece en [21, Teorema 17.68, pp. 612–613]. Si $M$ no es orientable, se aplica la fórmula a su espacio cubriente orientable de dos hojas: la integral y la característica de Euler se multiplican ambas por dos, por lo que la misma identidad desciende a $M$.

# B

# Análisis matemático

En este apéndice reunimos los resultados de análisis real, espacios métricos, análisis funcional, teoría de la medida y espacios de Lebesgue que se utilizan a lo largo del libro. La finalidad no es sustituir una exposición sistemática de estas materias, sino fijar la notación, recordar las herramientas que se invocan con frecuencia y proporcionar referencias internas precisas para los capítulos principales. Para tratamientos más amplios pueden consultarse [4, 68, 16, 38, 45, 28, 87, 123, 120].

El orden sigue las dependencias naturales entre los temas. Comenzamos con algunos hechos de análisis real y espacios métricos; continuamos con los espacios normados, los operadores lineales y los espacios de Hilbert; después estudiamos la teoría de la medida, las integrales de Lebesgue y de Bochner, y los espacios $L^p$. Finalmente, introducimos los espacios vectoriales topológicos y las topologías débiles, que intervienen de manera esencial en los argumentos de compacidad y semicontinuidad utilizados en el cálculo variacional.

## B.1 Análisis real y espacios métricos

Comenzamos con algunos hechos básicos de análisis real y espacios métricos. Estos resultados serán usados principalmente para controlar argumentos locales, completaciones y convergencia.

**Proposición B.1.1.** Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función derivable en $(a,b)\setminus\{c\}$ con $c\in(a,b)$ y continua en $(a,b)$ tal que $\lim_{x\to c^+} f'(x)=L=\lim_{x\to c^-} f'(x)$, entonces $f$ es derivable en $c$ y $f'(c)=L$.

*Demostración.* Sea $x\in(a,b)\setminus\{c\}$. Si $x>c$, el teorema del valor medio, aplicado a $f$ en $[c,x]$, proporciona un punto $\xi_x\in(c,x)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(\xi_x).$$

Cuando $x\to c^+$ se tiene necesariamente $\xi_x\to c^+$, y por lo tanto

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=L.$$

Si $x < c$, el mismo argumento aplicado al intervalo $[x, c]$ produce $\xi_x \in (x, c)$ y da

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi_x).$$

Ahora $\xi_x \to c^-$ cuando $x \to c^-$, de modo que el límite lateral izquierdo del cociente incremental también es $L$. Los dos límites laterales coinciden; por consiguiente, $f$ es derivable en $c$ y $f'(c) = L$. □

**Proposición B.1.2.** Para toda $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple que:

(a) $\|x\|_r \le \|x\|_s$ si $1 \le s \le r \le \infty$,

(b) $\|x\|_s \le n^{\frac{r-s}{sr}} \|x\|_r$ si $1 \le s \le r < \infty$,

(c) $\|x\|_\infty \le \|x\|_s \le n^{\frac{1}{s}} \|x\|_\infty$ si $1 \le s < \infty$.

En particular, todas las normas $\|\cdot\|_p$ con $p \in [1, \infty]$ son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

*Demostración.* Si $x = 0$, todas las desigualdades son inmediatas. Supongamos $x \neq 0$. Sean primero $1 \le s \le r < \infty$ y pongamos

$$a_i := \frac{|x_i|}{\|x\|_s}, \qquad 1 \le i \le n.$$

Entonces $0 \le a_i \le 1$ y $\sum_{i=1}^n a_i^s = 1$. Como $r \ge s$, se tiene $a_i^r \le a_i^s$, y de aquí

$$\frac{\|x\|_r^r}{\|x\|_s^r} = \sum_{i=1}^n a_i^r \le \sum_{i=1}^n a_i^s = 1.$$

Esto prueba $\|x\|_r \le \|x\|_s$. Para $r = \infty$, la misma desigualdad se obtiene directamente de $|x_i|^s \le \sum_{j=1}^n |x_j|^s$ para cada $i$.

Para la desigualdad en sentido contrario, el caso $s = r$ es trivial. Si $1 \le s < r < \infty$, aplicamos la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados $r/s$ y $r/(r-s)$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^s \le \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{s/r} \left( \sum_{i=1}^n 1^{r/(r-s)} \right)^{(r-s)/r} = \|x\|_r^s n^{1-s/r}.$$

Al tomar raíces $s$-ésimas resulta

$$\|x\|_s \le n^{1/s - 1/r} \|x\|_r = n^{(r-s)/(sr)} \|x\|_r.$$

Finalmente, para $1 \le s < \infty$,

$$\|x\|_\infty^s \le \sum_{i=1}^n |x_i|^s \le n \|x\|_\infty^s,$$

y al tomar raíces se obtiene el inciso (c). Las desigualdades de los incisos (a)–(c) muestran que la identidad entre cualesquiera dos de estos espacios normados es continua en ambos sentidos; por ello todas las normas indicadas son equivalentes. □

**Proposición B.1.3.** Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase $C^1$, entonces para todo $K \subseteq \Omega$ compacto y convexo se tiene que $f\restriction_K$ es Lipschitz.

*Demostración.* Si $K = \varnothing$, no hay nada que probar. Como $Df$ es continua y $K$ es compacto, existe

$$L := \max_{z\in K} \|Df(z)\|_{\mathrm{op}} < \infty.$$

Dados $x, y \in K$, la convexidad de $K$ implica que el segmento $\gamma(t) := x + t(y-x)$, $0 \le t \le 1$, está contenido en $K$. La regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo, aplicados componente a componente a $f \circ \gamma$, dan

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\, dt = \int_0^1 Df(\gamma(t))(y-x)\, dt.$$

En consecuencia,

$$\|f(y) - f(x)\| \le \int_0^1 \|Df(\gamma(t))\|_{\mathrm{op}} \|y-x\|\, dt \le L\|y-x\|.$$

Así, $f\restriction_K$ es $L$-Lipschitz. □

**Observación B.1.4.** La hipótesis de convexidad puede reemplazarse por la existencia de un control uniforme de las longitudes de curvas en $K$ que unan dos puntos cualesquiera de $K$. En particular, el resultado se aplica localmente en bolas cerradas contenidas en $\Omega$, que es el caso que se usa de manera más frecuente.

**Definición B.1.5.** Sea $X$ un conjunto. Una **métrica** en $X$ es una función $d\colon X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ tal que:

(a) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(b) $d(x,y) = d(y,x)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

(c) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Un **espacio métrico** es un par $(X,d)$ donde $X$ es un conjunto y $d$ es una métrica en $X$.

**Teorema B.1.6.** (Extensión de McShane) Sean $(X,d)$ un espacio métrico, $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío y $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $L$-Lipschitz, con $L \ge 0$. Entonces existe una extensión $F\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ de $f$ que también es $L$-Lipschitz. Una elección explícita es

$$F(x) := \inf_{a\in A} \big(f(a) + L\, d(x,a)\big).$$

*Demostración.* Fijemos $a_0 \in A$. Para cualesquiera $x \in X$ y $a \in A$, la propiedad Lipschitz y la desigualdad triangular dan

$$f(a) + L\, d(x,a) \ge f(a_0) - L\, d(a,a_0) + L\, d(x,a) \ge f(a_0) - L\, d(x,a_0).$$

Por otra parte, al tomar $a = a_0$ obtenemos $F(x) \le f(a_0) + L\, d(x,a_0)$. Por lo tanto, el ínfimo que define a $F(x)$ es finito.

Si $x \in A$, la desigualdad $f(x) \le f(a) + L\, d(x,a)$ vale para todo $a \in A$, de modo que $f(x) \le F(x)$; al elegir $a = x$

se obtiene la desigualdad opuesta. Así, $F\restriction_A = f$. Finalmente, para cualesquiera $x, y \in X$ y $a \in A$,

$$f(a) + L\,d(x,a) \leq f(a) + L\,d(y,a) + L\,d(x,y).$$

Tomando el ínfimo respecto de $a$ se sigue que $F(x) \leq F(y) + L\,d(x,y)$. Intercambiar $x$ y $y$ proporciona $|F(x) - F(y)| \leq L\,d(x,y)$. □

**Definición B.1.7.** Una sucesión en un espacio métrico $X = (X,d)$ es una función $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$. El valor de dicha función en $k$ se llama el $k$-**ésimo término** de la sucesión y se denota por $x_k$. A una sucesión se le suele denotar por $(x_k)$ o por $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ o cualquier otra notación similar según el contexto.
Decimos que $(x_k)$ converge a un punto $x \in X$ si para toda $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $d(x_k, x) < \varepsilon$.
Decimos que una sucesión $(x_k)$ es de Cauchy si para toda $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k, l \geq N$, entonces $d(x_k, x_l) < \varepsilon$.

En todo espacio métrico, las sucesiones convergentes son de Cauchy, pero no necesariamente toda sucesión de Cauchy es convergente. Tenemos pues la siguiente definición:

**Definición B.1.8.** Un espacio métrico $(X,d)$ es un **espacio métrico completo** si toda sucesión de Cauchy en $X$ converge en $X$.

**Definición B.1.9.** Sean $(X, d_X)$ y $(Y, d_Y)$ dos espacios métricos. Una función $\varphi\colon X \longrightarrow Y$ es una **isometría** si $d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) = d_X(x,y)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

**Definición B.1.10.** Sea $X$ un espacio métrico. Decimos que un espacio métrico completo $\overline{X}$ es una ***completación*** de $X$ si existe una isometría $i\colon X \longrightarrow \overline{X}$ tal que $i(X)$ es denso en $\overline{X}$.

Demostraremos que todo espacio métrico admite una completación salvo isometrías, pero para ello necesitamos algunos lemas primero.

**Lema B.1.11.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico, $(b_n)$ una sucesión de Cauchy en $X$ y $(a_n)$ una sucesión en $X$ tal que $d(a_n, b_n) < \dfrac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

(a) $(a_n)$ es una sucesión de Cauchy en $X$.

(b) $a_n \to x \in X$ si y sólo si $b_n \to x \in X$.

*Demostración.* Para $(a)$, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, b_m) + d(b_m, a_m)$$

y por hipótesis, tenemos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_1$, entonces $d(a_n, b_n) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ y $d(b_m, a_m) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Finalmente, como $(b_n)$ es de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_2$, entonces $d(b_n, b_m) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Por lo tanto, si $n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$, entonces $d(a_n, a_m) < 3\dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.
Para $(b)$, si $a_n \to x$, entonces $d(a_n, x) \to 0$ si $n \to \infty$. Por la desigualdad del triángulo, $d(b_n, x) \leq d(b_n, a_n) +$

$d(a_n, x) < \dfrac{1}{n} + d(a_n, x)$. Tomando $n \to \infty$, concluimos que $d(b_n, x) \to 0$, por lo que $b_n \to x$. El recíproco se demuestra de manera análoga. □

**Teorema B.1.12.** Todo espacio métrico admite una completación y ésta es única salvo isometrías.

*Demostración.* Sea $CS(X)$ el conjunto de las sucesiones de Cauchy en $X$. En $CS(X)$ definimos la relación

$$(x_n) \sim (y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

La reflexividad y la simetría son inmediatas. Para la transitividad, si $(x_n) \sim (y_n)$ y $(y_n) \sim (z_n)$, la desigualdad del triángulo da $0 \le d(x_n, z_n) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$; al pasar al límite se obtiene $(x_n) \sim (z_n)$. Por consiguiente, $\sim$ es una relación de equivalencia.
Sea $\overline{X} := CS(X)/\sim$. Para $[(x_n)], [(y_n)] \in \overline{X}$ ponemos

$$\overline{d}\big([(x_n)], [(y_n)]\big) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

El límite existe, pues para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, la desigualdad del triángulo implica

$$\big|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)\big| \le d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m),$$

y el miembro derecho tiende a cero porque $(x_n)$ y $(y_n)$ son de Cauchy. La estimación anterior muestra que $(d(x_n, y_n))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.
La definición no depende de los representantes. Si $(x_n) \sim (x'_n)$ y $(y_n) \sim (y'_n)$, entonces

$$\big|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)\big| \le d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n),$$

de modo que ambos límites coinciden. Las propiedades de métrica se deducen directamente de las correspondientes propiedades de $d$; en particular, la desigualdad triangular se obtiene pasando al límite en $d(x_n, z_n) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$. Así, $(\overline{X}, \overline{d})$ es un espacio métrico.
Para cada $x \in X$, sea $x^* := [(x, x, \ldots)]$ y definamos $i\colon X \longrightarrow \overline{X}$ por $i(x) := x^*$. Si $x, y \in X$, entonces

$$\overline{d}(i(x), i(y)) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y),$$

por lo que $i$ es un encaje isométrico. Su imagen es densa. Dada una clase $[(x_n)] \in \overline{X}$, la sucesión $(x^*_m)$ satisface

$$\overline{d}(x^*_m, [(x_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) \longrightarrow 0$$

cuando $m \to \infty$, pues $(x_n)$ es de Cauchy.
Probemos ahora que $\overline{X}$ es completo. Sea $(a_n)$ una sucesión de Cauchy en $\overline{X}$. Por la densidad de $i(X)$, para cada $n$ podemos escoger $x_n \in X$ tal que $\overline{d}(i(x_n), a_n) < \frac{1}{n}$. El Lema B.1.11 muestra que $(i(x_n))$ es de Cauchy en $\overline{X}$. Como $i$ es una isometría, $(x_n)$ es de Cauchy en $X$, y por la construcción de $\overline{X}$ se tiene $i(x_n) \to [(x_n)]$. Una nueva aplicación del mismo lema da $a_n \to [(x_n)]$. Esto prueba que $\overline{X}$ es una completación de $X$.
Resta verificar la unicidad. Sea $(Y, d_Y)$ otra completación de $X$ y sea $j\colon X \longrightarrow Y$ un encaje isométrico con

imagen densa. Para cada $y \in Y$, elijamos una sucesión $(x_n)$ en $X$ tal que $j(x_n) \to y$ y definamos

$$G(y) := [(x_n)] \in \overline{X}.$$

El mapeo $G$ está bien definido: si también $j(x'_n) \to y$, entonces $d(x_n, x'_n) = d_Y(j(x_n), j(x'_n)) \to 0$, y ambas sucesiones determinan la misma clase. Además, para $y, y' \in Y$ y sucesiones $j(x_n) \to y$, $j(x'_n) \to y'$, se cumple

$$\overline{d}(G(y), G(y')) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} d_Y(j(x_n), j(x'_n)) = d_Y(y, y').$$

Por lo tanto, $G$ es una isometría. Es suprayectiva porque toda clase $[(x_n)] \in \overline{X}$ se obtiene del límite en $Y$ de la sucesión de Cauchy $(j(x_n))$. En consecuencia, $G$ es una isometría biyectiva y la completación es única salvo isometrías. □

La completitud permite obtener uno de los principios estructurales que sostienen gran parte del análisis funcional. Recordamos primero la noción topológica correspondiente.

**Definición B.1.13.** Un espacio topológico se llama un **espacio de Baire** si toda intersección numerable de subconjuntos abiertos y densos es densa. Equivalentemente, ningún abierto no vacío puede escribirse como unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío.

**Teorema B.1.14.** (de la categoría de Baire) Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.

*Demostración.* Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo y sean $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subconjuntos abiertos y densos de $X$. Debemos probar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ intersecta a todo abierto no vacío $U \subseteq X$. Elegimos $x_1 \in U \cap G_1$ y $r_1 \in (0,1)$ tales que $\overline{B}_d(x_1, r_1) \subseteq U \cap G_1$. Una vez elegidos $x_n$ y $r_n$, la densidad de $G_{n+1}$ permite escoger $x_{n+1} \in B_d(x_n, \frac{r_n}{2}) \cap G_{n+1}$ y $r_{n+1} \in (0, 2^{-n-1})$ de modo que $\overline{B}_d(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B_d(x_n, \frac{r_n}{2}) \cap G_{n+1}$.
De esta construcción se sigue que $\overline{B}_d(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{B}_d(x_n, r_n)$ y que $d(x_{n+1}, x_n) < 2^{-n}$. Por lo tanto, $(x_n)$ es de Cauchy y converge a algún $x \in X$. Para cada $n$, todos los términos $x_m$ con $m \geq n$ pertenecen a $\overline{B}_d(x_n, r_n)$; como esta bola es cerrada, $x \in \overline{B}_d(x_n, r_n) \subseteq G_n$. Además, $x \in \overline{B}_d(x_1, r_1) \subseteq U$. En consecuencia, $x \in U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. □

## B.2 Espacios normados

Los espacios normados constituyen el marco básico para medir el tamaño de vectores y operadores. En esta sección fijamos la notación para $\mathcal{L}(X, Y)$, recordamos los teoremas fundamentales sobre operadores lineales continuos e introducimos los operadores cerrados y compactos. La exposición sigue, entre otras, las referencias [45, Capítulos 1 y 2], [28, 87, 123].

**Definición B.2.1.** Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una **norma** en $X$ es una función $\|\cdot\|_X : X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que, para cualesquiera $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,

(a) $\|x\|_X = 0$ si y sólo si $x = 0$;

(b) $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X$;

(c) $\|x+y\|_X \le \|x\|_X + \|y\|_X$.

El par $(X, \|\cdot\|_X)$ se denomina **espacio normado**. La distancia inducida por la norma es $d_X(x,y) := \|x-y\|_X$.

**Definición B.2.2.** Un espacio normado se llama **espacio de Banach** si es completo respecto de la distancia inducida por su norma.

La completación métrica de un espacio normado conserva de manera natural las operaciones vectoriales.

**Teorema B.2.3.** (Completación de un espacio normado) Para todo espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ existen un espacio de Banach $(\widehat{X}, \|\cdot\|_{\widehat{X}})$ y una isometría lineal $\iota\colon X \longrightarrow \widehat{X}$ cuya imagen es densa. Esta completación es única salvo isometrías lineales que dejan fija la copia de $X$.

*Demostración.* Sea $(\widehat{X}, \widehat{d})$ una completación del espacio métrico $(X, d_X)$ y sea $\iota\colon X \longrightarrow \widehat{X}$ la isometría de imagen densa proporcionada por el Teorema B.1.12. Dados $u, v \in \widehat{X}$, elegimos sucesiones $(x_n)$ y $(y_n)$ en $X$ tales que $\iota(x_n) \to u$ y $\iota(y_n) \to v$, y definimos

$$u + v := \lim_{n\to\infty} \iota(x_n + y_n), \qquad \lambda u := \lim_{n\to\infty} \iota(\lambda x_n).$$

Las desigualdades $\|(x_n+y_n)-(x_m+y_m)\|_X \le \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_X$ y $\|\lambda x_n - \lambda x_m\|_X = |\lambda|\|x_n - x_m\|_X$ muestran que los límites existen. Las mismas estimaciones prueban que no dependen de las sucesiones elegidas. Estas operaciones convierten a $\widehat{X}$ en un espacio vectorial y hacen lineal a $\iota$.
Definimos $\|u\|_{\widehat{X}} := \widehat{d}(u, 0)$. Si $\iota(x_n) \to u$, entonces $\|u\|_{\widehat{X}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X$. Las propiedades de la norma se obtienen tomando límites en las correspondientes propiedades de $\|\cdot\|_X$. Como $\widehat{X}$ es completo respecto de $\widehat{d}$, es un espacio de Banach. La unicidad métrica de la completación y la densidad de $\iota(X)$ implican que la isometría entre dos completaciones es necesariamente lineal. □

## B.2.1 Operadores lineales continuos

**Definición B.2.4.** Sean $X$ y $Y$ espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$. Un mapeo $T\colon X \longrightarrow Y$ se llama **operador lineal** si $T(x+y) = T(x) + T(y)$ y $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para cualesquiera $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

**Definición B.2.5.** Sean $X$ y $Y$ espacios normados. Un operador lineal $T\colon X \longrightarrow Y$ se llama **acotado** si existe $C \ge 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \le C\|x\|_X$ para todo $x \in X$.
Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales continuos de $X$ en $Y$ y escribimos $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$. La **norma de operadores** está dada por

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|_X \le 1}} \|T(x)\|_Y = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos simplemente $\|T\|$. El operador identidad de $X$ se denota por $I_X$, o por $I$ si el espacio es claro por el contexto.

**Definición B.2.6.** El **dual continuo** de un espacio normado $X$ es $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. Sus elementos se denominan **funcionales lineales continuos**.

**Proposición B.2.7.** Sean $X$ y $Y$ espacios normados y sea $T\colon X \longrightarrow Y$ lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $T$ es continua en $X$;

(b) $T$ es continua en 0;

(c) $T$ es acotada.

En este caso, $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

*Demostración.* La implicación $(a) \Rightarrow (b)$ es inmediata. Supongamos $(b)$. Existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y < 1$ siempre que $\|x\|_X < \delta$. Si $x \neq 0$, entonces $\left\| \dfrac{\delta x}{2\|x\|_X} \right\|_X = \frac{\delta}{2}$ y, por linealidad, $\|T(x)\|_Y < \dfrac{2}{\delta}\|x\|_X$. La misma desigualdad es trivial para $x = 0$, de modo que $T$ es acotada. Finalmente, si $(c)$ se cumple con una constante $C$, entonces $\|T(x) - T(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X$ para cualesquiera $x, y \in X$, y por lo tanto $T$ es Lipschitz y continua. □

**Proposición B.2.8.** Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados. Si $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$, $R \in \mathcal{L}(Y,Z)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|, \qquad \|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|, \qquad \|R \circ T\| \leq \|R\|\|T\|.$$

En particular, $\mathcal{L}(X)$ es un álgebra normada respecto de la composición.

*Demostración.* Las dos primeras identidades se siguen directamente de la definición. Para la tercera, $\|R(Tx)\|_Z \leq \|R\|\|Tx\|_Y \leq \|R\|\|T\|\|x\|_X$ para todo $x \in X$. □

**Teorema B.2.9.** Sean $X$ un espacio normado y $Y$ un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio de Banach. En particular, $X'$ es un espacio de Banach para todo espacio normado $X$.

*Demostración.* Sea $(T_n)$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$. Para cada $x \in X$, la desigualdad $\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\|\|x\|_X$ muestra que $(T_n x)$ es de Cauchy en $Y$. Definimos $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n x$. El mapeo $T$ es lineal. Además, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < 1$ para $n, m \geq N$, por lo que $\|T_n\| \leq 1 + \|T_N\|$ para $n \geq N$. Al tomar límites, $\|T(x)\|_Y \leq (1 + \|T_N\|)\|x\|_X$, así que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.
Dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ para $n, m \geq N_\varepsilon$. Al hacer $m \to \infty$, obtenemos $\|(T_n - T)x\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X$ para todo $x \in X$ y $n \geq N_\varepsilon$. Por lo tanto, $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$. □

**Teorema B.2.10.** (Serie de Neumann) Sea $X$ un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\|T\| < 1$. Entonces $I - T$ es invertible y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

en la norma de $\mathcal{L}(X)$. Además, $\|(I - T)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|T\|}$.

*Demostración.* La serie converge en $\mathcal{L}(X)$ porque $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n < \infty$ y $\mathcal{L}(X)$ es completo. Si $S_N := \sum_{n=0}^{N} T^n$,

entonces $(I-T)S_N = S_N(I-T) = I-T^{N+1}$. Al hacer $N \to \infty$, se obtiene $(I-T)S = S(I-T) = I$, donde $S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. La estimación de la norma se sigue de la serie geométrica. □

**Corolario B.2.11.** Sean $X$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ invertible y $S \in \mathcal{L}(X)$ tales que $\|T^{-1}(S-T)\| < 1$. Entonces $S$ es invertible.

*Demostración.* Como $S = T[I + T^{-1}(S-T)]$, la conclusión se sigue del Teorema B.2.10 aplicado a $-T^{-1}(S-T)$. □

**Definición B.2.12.** Sea $X$ un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. El **conjunto resolvente** de $T$ es

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ es invertible en } \mathcal{L}(X)\},$$

y el **espectro** de $T$ es $\sigma(T) := \mathbb{C}\setminus\rho(T)$. Para $\lambda \in \rho(T)$, el operador $R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}$ se denomina **resolvente** de $T$.

**Proposición B.2.13.** Si $X$ es un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(X)$, entonces $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|T\|\} \subseteq \rho(T)$ y $\rho(T)$ es abierto. En particular, $\sigma(T)$ es compacto y está contenido en $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|T\|\}$.

*Demostración.* Si $|\lambda| > \|T\|$, entonces $\lambda I - T = \lambda\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)$ y la Serie de Neumann proporciona su inversa. Si $\lambda_0 \in \rho(T)$, escribimos

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T)\big[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}\big].$$

El segundo factor es invertible cuando $|\lambda - \lambda_0|\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\| < 1$, por lo que $\rho(T)$ es abierto. Las demás afirmaciones son inmediatas. □

**Teorema B.2.14.** Si $X \neq \{0\}$ es un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(X)$, entonces $\sigma(T)$ es no vacío.

La demostración utiliza el teorema de Liouville aplicado a las funciones escalares $\lambda \mapsto \varphi((\lambda I - T)^{-1}x)$, con $x \in X$ y $\varphi \in X'$, y puede consultarse en [45, Sección 2.1] o en [123].

## B.2.2 Principios fundamentales de la teoría de operadores

**Teorema B.2.15.** (Banach–Steinhaus) Sean $X$ un espacio de Banach, $Y$ un espacio normado y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$. Si $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T(x)\|_Y < \infty$ para todo $x \in X$, entonces $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$.

*Demostración.* Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $E_n := \{x \in X \mid \|T(x)\|_Y \le n \text{ para todo } T \in \mathcal{F}\}$. Cada $E_n$ es cerrado y, por la acotación puntual, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. El Teorema B.1.14 proporciona $N \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $B_{d_X}(x_0, r) \subseteq E_N$, donde $d_X$ es la métrica inducida por la norma de $X$.
Si $\|h\|_X < r$, entonces $x_0 + h, x_0 \in E_N$ y $\|T(h)\|_Y \le \|T(x_0+h)\|_Y + \|T(x_0)\|_Y \le 2N$ para todo $T \in \mathcal{F}$. Para $x \neq 0$, aplicamos esta estimación a $h := \dfrac{rx}{2\|x\|_X}$ y obtenemos $\|T(x)\|_Y \le \dfrac{4N}{r}\|x\|_X$. Por lo tanto, $\|T\| \le \frac{4N}{r}$ para todo $T \in \mathcal{F}$. □

**Teorema B.2.16.** (del mapeo abierto) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ suprayectivo. Entonces $T$ es un mapeo abierto.

*Demostración.* Sea $\mathbb{B}_X := B_{d_X}(0,1)$, donde $d_X$ es la métrica inducida por la norma. Como $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(n\mathbb{B}_X)$, el Teorema B.1.14 implica que la cerradura de $T(n_0\mathbb{B}_X)$ tiene interior no vacío para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Usando la linealidad y la simetría de las bolas, existe $r > 0$ tal que $B_{d_Y}(0,r) \subseteq \overline{T(\mathbb{B}_X)}$.

Afirmamos que $B_{d_Y}(0, \frac{r}{2}) \subseteq T(\mathbb{B}_X)$. Sea $y \in B_{d_Y}(0, \frac{r}{2})$. Como $B_{d_Y}(0, \frac{r}{2}) \subseteq \overline{T(B_{d_X}(0, \frac{1}{2}))}$, existe $x_1 \in B_{d_X}(0, \frac{1}{2})$ tal que $\|y - Tx_1\|_Y < \frac{r}{4}$. Inductivamente, elegimos $x_n \in B_{d_X}(0, 2^{-n})$ de modo que

$$\left\| y - T\left( \sum_{j=1}^{n} x_j \right) \right\|_Y < \frac{r}{2^{n+1}}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en $X$ a un elemento $x$ con $\|x\|_X < 1$, y la continuidad de $T$ implica que $T(x) = y$. Así, $T(\mathbb{B}_X)$ contiene una bola alrededor del origen. Por linealidad, la imagen de toda bola abierta es abierta, y por lo tanto también lo es la imagen de cualquier conjunto abierto. □

**Corolario B.2.17.** (Teorema del inverso acotado) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es biyectivo, entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

*Demostración.* El Teorema B.2.16 implica que el operador inverso $T^{-1}$ es continuo. □

**Proposición B.2.18.** Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ inyectivo. Entonces $\mathrm{Ran}(T)$ es cerrado si y sólo si existe $c > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

*Demostración.* Si la estimación se cumple y $Tx_n \to y$ en $Y$, entonces $(x_n)$ es de Cauchy y converge a algún $x \in X$; por continuidad, $Tx = y$, de modo que el rango es cerrado. Recíprocamente, si $\mathrm{Ran}(T)$ es cerrado, es un espacio de Banach y $T\colon X \longrightarrow \mathrm{Ran}(T)$ es biyectivo. El Teorema B.2.17 implica que $T^{-1}$ es continuo, y por lo tanto $\|x\|_X \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|_Y$. □

Los espacios cociente permiten eliminar un subespacio cerrado conservando una estructura normada y, cuando el espacio original es de Banach, la completitud. La cerradura es indispensable: sin ella, la expresión que sigue sólo define una seminorma.

**Definición B.2.19.** Sea $X$ un espacio vectorial y sea $Y \subseteq X$ un subespacio. El **espacio vectorial cociente** $X/Y$ es el conjunto de clases

$$X/Y := \{x + Y \mid x \in X\}, \qquad [x] := x + Y,$$

con las operaciones

$$[x] + [z] := [x+z], \qquad \alpha[x] := [\alpha x] \quad (\alpha \in \mathbb{K}).$$

Estas operaciones no dependen de los representantes: si $x - x' \in Y$ y $z - z' \in Y$, entonces $(x+z) - (x'+z') \in Y$ y $\alpha x - \alpha x' \in Y$.

**Proposición B.2.20.** (Norma cociente) Sea $X$ un espacio normado y sea $Y \subseteq X$ un subespacio cerrado. Para $[x] = x + Y \in X/Y$ pongamos

$$\|[x]\|_{X/Y} := \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X = \operatorname{dist}_X(x, Y). \tag{B.1}$$

Entonces (B.1) define una norma en $X/Y$. La proyección canónica

$$\pi \colon X \longrightarrow X/Y, \qquad \pi(x) = [x],$$

es lineal, continua, abierta y satisface $\|\pi\| \leq 1$. Si $X$ es un espacio de Banach, entonces $X/Y$ también es un espacio de Banach.

*Demostración.* Si $x' = x + y_0$ con $y_0 \in Y$, entonces

$$\inf_{y \in Y} \|x' - y\|_X = \inf_{y \in Y} \|x - (y - y_0)\|_X = \inf_{z \in Y} \|x - z\|_X,$$

de modo que la expresión no depende del representante de la clase. La homogeneidad es inmediata. Dados $x, z \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$, se tiene

$$\operatorname{dist}_X(x + z, Y) \leq \|(x + z) - (y_1 + y_2)\|_X \leq \|x - y_1\|_X + \|z - y_2\|_X.$$

Al tomar el ínfimo respecto de $y_1$ y $y_2$, obtenemos la desigualdad triangular. Además, $\|[x]\|_{X/Y} = 0$ si y sólo si $x \in \overline{Y} = Y$, es decir, si y sólo si $[x] = 0$. Por lo tanto, (B.1) es una norma.
La linealidad de $\pi$ se deduce de las operaciones del cociente y $\|\pi(x)\|_{X/Y} \leq \|x\|_X$, por lo que $\pi$ es continua y $\|\pi\| \leq 1$. Si $r > 0$, para toda clase $[z]$ con $\|[z]\|_{X/Y} < r$ existe $y \in Y$ tal que $\|z - y\|_X < r$ y $[z] = [z - y]$. En consecuencia, toda clase de norma menor que $r$ pertenece a $\pi(B_{d_X}(0, r))$. La inclusión recíproca se sigue de $\|\pi(x)\|_{X/Y} \leq \|x\|_X$. Por lo tanto, la imagen de la bola abierta de radio $r$ en $X$ es la bola abierta de radio $r$ en $X/Y$. Las traslaciones y la linealidad muestran que $\pi$ es abierta.
Supongamos finalmente que $X$ es completo y sea $([x_n])$ una sucesión de Cauchy en $X/Y$. Elegimos una subsucesión $([x_{n_j}])$ tal que

$$\|[x_{n_{j+1}}] - [x_{n_j}]\|_{X/Y} < 2^{-j-1} \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

Por la definición del ínfimo, para cada $j$ existe $y_j \in Y$ tal que

$$\|(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) - y_j\|_X < 2^{-j}.$$

Definimos $z_1 := x_{n_1}$ y, para $j \geq 2$,

$$z_j := x_{n_j} - \sum_{i=1}^{j-1} y_i.$$

Entonces $[z_j] = [x_{n_j}]$ y

$$\|z_{j+1} - z_j\|_X = \|(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) - y_j\|_X < 2^{-j}.$$

Por consiguiente, $(z_j)$ es de Cauchy en $X$ y converge a cierto $z \in X$. La continuidad de $\pi$ implica que $[x_{n_j}] = [z_j] \to [z]$. Como la sucesión original es de Cauchy, toda ella converge a $[z]$. Esto prueba la completitud de $X/Y$. □

Los operadores diferenciales suelen ser no acotados cuando se consideran sobre un único espacio de funciones. Para tratarlos es necesario separar el dominio del operador del espacio ambiente.

**Definición B.2.21.** Sean $X$ y $Y$ espacios normados. Un **operador lineal** de $X$ en $Y$ es un mapeo lineal $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$, donde $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio vectorial llamado **dominio** de $A$; también se escribe $\mathrm{Dom}(A)$. El operador es **densamente definido** si $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
La **gráfica** de $A$ es $\mathcal{G}(A) := \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\} \subseteq X \times Y$. Decimos que $A$ es **cerrado** si $\mathcal{G}(A)$ es cerrada. Equivalentemente, si $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $x_n \to x$ en $X$ y $Ax_n \to y$ en $Y$, entonces $x \in \mathcal{D}(A)$ y $Ax = y$.

**Teorema B.2.22.** (de la gráfica cerrada) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y sea $A\colon X \longrightarrow Y$ lineal. Entonces $A$ es continua si y sólo si su gráfica es cerrada.

*Demostración.* Si $A$ es continua, la cerradura de su gráfica es inmediata. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{G}(A)$ es cerrada. Entonces $\mathcal{G}(A)$ es un espacio de Banach con la norma heredada de $X \times Y$. La proyección $\pi_1\colon \mathcal{G}(A) \longrightarrow X$, dada por $\pi_1(x, Ax) = x$, es lineal, continua y biyectiva. Por el Teorema B.2.17, $\pi_1^{-1}$ es continua. Como $A = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, donde $\pi_2\colon X \times Y \longrightarrow Y$ es la segunda proyección, $A$ es continua. □

**Proposición B.2.23.** Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ lineal. La fórmula $\|x\|_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ define una norma en $\mathcal{D}(A)$. El operador $A$ es cerrado si y sólo si $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ es un espacio de Banach.

*Demostración.* El mapeo $J\colon \mathcal{D}(A) \longrightarrow X \times Y$, dado por $J(x) = (x, Ax)$, es una isometría de $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ sobre $\mathcal{G}(A)$, si $X \times Y$ se equipa con la norma $\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$. Por lo tanto, $\mathcal{D}(A)$ es completo si y sólo si $\mathcal{G}(A)$ es cerrada en el espacio de Banach $X \times Y$. □

**Definición B.2.24.** Un operador lineal $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ se llama **cerrable** si la cerradura de $\mathcal{G}(A)$ es la gráfica de algún operador. Dicho operador se denota por $\overline{A}$ y se llama la **cerradura** de $A$.

**Proposición B.2.25.** Un operador lineal $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ es cerrable si y sólo si, para toda sucesión $(x_n)$ en $\mathcal{D}(A)$, las convergencias $x_n \to 0$ en $X$ y $Ax_n \to y$ en $Y$ implican $y = 0$.

*Demostración.* La cerradura de $\mathcal{G}(A)$ es la gráfica de un operador si y sólo si no contiene ningún elemento $(0, y)$ con $y \neq 0$. Como $X \times Y$ es metrizable, pertenecer a la cerradura equivale a ser límite de una sucesión de elementos de $\mathcal{G}(A)$, lo cual da exactamente la condición enunciada. □

## B.2.3 El teorema de Hahn–Banach y la dualidad

El teorema de Hahn–Banach permite extender funcionales lineales sin perder las estimaciones que garantizan su continuidad. Sus consecuencias serán utilizadas tanto en la caracterización dual de la norma como en los argumentos de separación.

**Observación B.2.26.** Una función $p\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un espacio vectorial real se llama **sublineal** si $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para cualesquiera $x, y \in X$ y $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ para todo $x \in X$ y $\lambda \geq 0$.

**Teorema B.2.27.** (de Hahn–Banach, forma analítica) Sea $X$ un espacio vectorial real, sea $M \subseteq X$ un subespacio y sea $p\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ sublineal. Si $\ell\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal y $\ell(x) \le p(x)$ para todo $x \in M$, entonces existe un funcional lineal $\widetilde{\ell}\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\ell}\restriction_M = \ell$ y $\widetilde{\ell}(x) \le p(x)$ para todo $x \in X$.

*Demostración.* Comenzamos con la extensión por una dimensión. Sean $N \subsetneq X$ un subespacio, $f : N \to \mathbb{R}$ lineal y dominado por $p$, y sea $x_0 \in X \setminus N$. Definimos

$$\alpha := \sup_{y\in N}\big(f(y) - p(y - x_0)\big), \qquad \beta := \inf_{z\in N}\big(p(z + x_0) - f(z)\big).$$

Para cualesquiera $y, z \in N$, la linealidad de $f$, la dominación por $p$ y la subaditividad de $p$ implican

$$f(y) + f(z) = f(y + z) \le p(y + z) \le p(y - x_0) + p(z + x_0).$$

Por lo tanto,

$$f(y) - p(y - x_0) \le p(z + x_0) - f(z)$$

para todo par $y, z \in N$. En particular, $\alpha \le \beta$, y podemos escoger $a \in [\alpha, \beta]$.
Cada elemento de $N + \mathbb{R}x_0$ se escribe de manera única como $y + tx_0$, con $y \in N$ y $t \in \mathbb{R}$. Definimos

$$f_1(y + tx_0) := f(y) + ta.$$

El mapeo $f_1$ es lineal y extiende a $f$. Verifiquemos la dominación. Si $t > 0$, entonces $a \le \beta$ y, al tomar $z = y/t$, obtenemos

$$f_1(y + tx_0) = t\big(f(y/t) + a\big) \le t\,p(y/t + x_0) = p(y + tx_0).$$

Si $t < 0$, escribimos $t = -s$ con $s > 0$. Como $a \ge \alpha$, aplicado ahora a $y/s$, se tiene

$$f_1(y - sx_0) = s\big(f(y/s) - a\big) \le s\,p(y/s - x_0) = p(y - sx_0).$$

El caso $t = 0$ es precisamente la hipótesis $f \le p$ en $N$. Así, $f_1$ está dominado por $p$ en todo $N + \mathbb{R}x_0$.
Consideremos el conjunto $\mathcal{E}$ de todos los pares $(N, f)$ tales que $M \subseteq N \subseteq X$, $f : N \to \mathbb{R}$ es lineal, $f\restriction_M = \ell$ y $f \le p$ en $N$. Lo ordenamos por extensión:

$$(N_1, f_1) \le (N_2, f_2) \quad \Longleftrightarrow \quad N_1 \subseteq N_2 \text{ y } f_2\restriction_{N_1} = f_1.$$

El conjunto no es vacío porque contiene $(M, \ell)$. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ es una cadena, la unión de sus dominios

$$N_{\mathcal{C}} := \bigcup_{(N,f)\in\mathcal{C}} N$$

es un subespacio. Sobre ella definimos $f_{\mathcal{C}}(x) := f(x)$ usando cualquier elemento de la cadena cuyo dominio contenga a $x$. La definición es independiente de la elección, pues dos elementos de una cadena son comparables; además, $f_{\mathcal{C}}$ es lineal, extiende a $\ell$ y está dominado por $p$. Por ello toda cadena posee una cota superior en $\mathcal{E}$.
El Lema de Zorn, Teorema A.0.1, proporciona un elemento maximal $(N_{\max}, f_{\max})$. Si $N_{\max} \neq X$, podemos elegir $x_0 \in X \setminus N_{\max}$ y aplicar la construcción unidimensional anterior, obteniendo una extensión propia

de $f_{\max}$ todavía dominada por $p$. Esto contradice la maximalidad. Luego $N_{\max} = X$, y $\widetilde{\ell} := f_{\max}$ es la extensión buscada. □

**Observación B.2.28.** En un espacio vectorial complejo, la versión correspondiente se obtiene suponiendo que $p$ es subaditiva y que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in X$, y que $|\ell(x)| \le p(x)$ en el subespacio inicial. En efecto, consideremos $X$ y $M$ como espacios vectoriales reales y apliquemos el teorema a $u := \operatorname{Re}\ell$. Obtenemos una extensión real–lineal $U\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $U \le p$. Como $p(-x) = p(x)$, también

$$-U(x) = U(-x) \le p(-x) = p(x),$$

de modo que $|U(x)| \le p(x)$. Definimos

$$\widetilde{\ell}(x) := U(x) - iU(ix).$$

La linealidad real de $U$ muestra que

$$\widetilde{\ell}(ix) = U(ix) - iU(-x) = i\widetilde{\ell}(x),$$

y por lo tanto $\widetilde{\ell}$ es complejo–lineal. Si $x \in M$, entonces

$$U(x) = \operatorname{Re}\ell(x), \qquad U(ix) = \operatorname{Re}(i\ell(x)) = -\operatorname{Im}\ell(x),$$

así que $\widetilde{\ell}(x) = \ell(x)$.
Finalmente, dado $x \in X$, elegimos $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, de modo que $\lambda\widetilde{\ell}(x) = |\widetilde{\ell}(x)|$. Puesto que $\operatorname{Re}\widetilde{\ell} = U$,

$$|\widetilde{\ell}(x)| = \operatorname{Re}\widetilde{\ell}(\lambda x) = U(\lambda x) \le p(\lambda x) = p(x).$$

Esto demuestra la versión compleja y, en particular, la estimación utilizada en el corolario siguiente.

**Corolario B.2.29.** (Extensión que preserva la norma) Sea $X$ un espacio normado real o complejo, sea $M \subseteq X$ un subespacio, equipado con la norma inducida, y sea $\ell \in M'$. Entonces existe $\widetilde{\ell} \in X'$ tal que $\widetilde{\ell}\restriction_M = \ell$ y $\|\widetilde{\ell}\|_{X'} = \|\ell\|_{M'}$.

*Demostración.* Definimos $p(x) := \|\ell\|_{M'}\|x\|_X$. En el caso real, $\ell(x) \le |\ell(x)| \le p(x)$ para todo $x \in M$, de modo que el Teorema B.2.27 proporciona una extensión $\widetilde{\ell}$ dominada por $p$. En el caso complejo aplicamos la Observación B.2.28. En ambos casos, $|\widetilde{\ell}(x)| \le \|\ell\|_{M'}\|x\|_X$, por lo que $\|\widetilde{\ell}\|_{X'} \le \|\ell\|_{M'}$. La desigualdad opuesta se sigue de $\widetilde{\ell}\restriction_M = \ell$. □

**Corolario B.2.30.** (Caracterización dual de la norma) Sea $X$ un espacio normado real o complejo. Para cada $x \in X$,

$$\|x\|_X = \max\left\{|\varphi(x)| \,\middle|\, \varphi \in X',\ \|\varphi\|_{X'} \le 1\right\}.$$

Más precisamente, si $x \neq 0$, existe $\varphi \in X'$ tal que $\|\varphi\|_{X'} = 1$ y $\varphi(x) = \|x\|_X$.

*Demostración.* Si $x \neq 0$, definimos $\ell\colon \operatorname{span}\{x\} \longrightarrow \mathbb{K}$ por $\ell(\lambda x) := \lambda\|x\|_X$. Entonces $\|\ell\| = 1$. El Corolario B.2.29 proporciona $\varphi \in X'$ con $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(x) = \|x\|_X$. Por otra parte, $|\psi(x)| \le \|\psi\|\|x\|_X \le \|x\|_X$ para todo $\psi \in X'$ con $\|\psi\| \le 1$. El caso $x = 0$ es inmediato. □

### B.2.4 Operadores adjuntos y compactos en espacios de Banach

Para la compacidad del adjunto y la alternativa de Riesz–Schauder seguimos [45, Proposición 2.2.8 y Teorema 2.2.9].

**Definición B.2.31.** Sean $X$ y $Y$ espacios normados y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. El **adjunto de Banach** de $T$ es el operador $T' \colon Y' \longrightarrow X'$ definido por $T'(\varphi) := \varphi \circ T$.

**Proposición B.2.32.** Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Entonces $T' \in \mathcal{L}(Y',X')$, $\|T'\| = \|T\|$ y $(S \circ T)' = T' \circ S'$.

*Demostración.* Para $\varphi \in Y'$ y $x \in X$, $|T'\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|T\|\|x\|_X$, de modo que $\|T'\| \leq \|T\|$. Por la caracterización dual de la norma, para cada $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$ existe $\varphi \in Y'$ con $\|\varphi\| = 1$ y $|\varphi(Tx)| = \|Tx\|_Y$. Por lo tanto, $\|Tx\|_Y \leq \|T'\|$, y al tomar el supremo se obtiene $\|T\| \leq \|T'\|$. La identidad para composiciones se verifica evaluando ambos miembros en cada funcional. □

**Definición B.2.33.** Sean $X$ y $Y$ espacios normados. Un operador lineal $K \colon X \longrightarrow Y$ se llama **compacto** si para toda sucesión acotada $(x_n)$ en $X$, la sucesión $(Kx_n)$ posee una subsucesión convergente en $Y$. Denotamos por $\mathcal{K}(X,Y)$ el espacio de operadores compactos de $X$ en $Y$ y escribimos $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X,X)$.

**Proposición B.2.34.** Todo operador lineal compacto es acotado. Además, todo operador lineal *continuo* de rango finito es compacto.

*Demostración.* Si un operador compacto $K$ no fuera acotado, existiría una sucesión $(x_n)$ con $\|x_n\|_X \leq 1$ y $\|Kx_n\|_Y \geq n$, lo cual impediría que $(Kx_n)$ tuviera una subsucesión convergente. Si $K$ es continuo y tiene rango finito, la imagen de toda sucesión acotada es acotada en el espacio finito–dimensional $\operatorname{Ran}(K)$ y, por lo tanto, posee una subsucesión convergente. □

**Proposición B.2.35.** Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios normados.

(a) Si $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, entonces $S \circ K \in \mathcal{K}(X,Z)$.

(b) Si $T \in \mathcal{L}(Z,X)$ y $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, entonces $K \circ T \in \mathcal{K}(Z,Y)$.

(c) Si $Y$ es Banach, entonces $\mathcal{K}(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$.

*Demostración.* Los dos primeros incisos se siguen directamente de la definición. Para el tercero, sea $K_n \to K$ en la norma de operadores, con $K_n \in \mathcal{K}(X,Y)$, y sea $(x_j)$ una sucesión acotada en $X$. Mediante un argumento diagonal elegimos una subsucesión, que seguimos denotando por $(x_j)$, tal que $(K_n x_j)_j$ converge para cada $n$. Si $M := \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|_X$, entonces

$$\|Kx_j - Kx_k\|_Y \leq 2M\|K - K_n\| + \|K_n x_j - K_n x_k\|_Y.$$

Primero elegimos $n$ de modo que el primer término sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ y después $j,k$ de modo que el segundo sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Así, $(Kx_j)$ es de Cauchy y converge en $Y$. □

**Teorema B.2.36.** (Extensión continua y compacta desde un subespacio denso) Sean $X$ un espacio normado, $D \subseteq X$ un subespacio vectorial denso y $Y$ un espacio de Banach. Todo operador lineal continuo $T\colon D \longrightarrow Y$ admite una única extensión lineal continua $\widetilde{T}\colon X \longrightarrow Y$. Además,

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T\|_{\mathcal{L}(D,Y)}.$$

Si $T$ es compacto, entonces $\widetilde{T}$ también es compacto.

*Demostración.* Sea $x \in X$ y elijamos una sucesión $(x_n) \subseteq D$ tal que $x_n \to x$. La estimación $\|T(x_n) - T(x_m)\|_Y \leq \|T\|\|x_n - x_m\|_X$ muestra que $(T(x_n))$ es de Cauchy en $Y$. Como $Y$ es completo, podemos definir $\widetilde{T}(x) := \lim_{n\to\infty} T(x_n)$. Si $(y_n) \subseteq D$ también converge a $x$, entonces $\|T(x_n) - T(y_n)\|_Y \leq \|T\|\|x_n - y_n\|_X \to 0$, de modo que el límite no depende de la sucesión elegida.
La linealidad se obtiene aproximando dos puntos de $X$ por sucesiones en $D$ y pasando al límite. Asimismo,

$$\|\widetilde{T}(x)\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_Y \leq \|T\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \|T\|\|x\|_X,$$

por lo que $\widetilde{T}$ es continua y $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$. La desigualdad opuesta se sigue de $\widetilde{T}\restriction_D = T$. La unicidad es consecuencia de la densidad de $D$: dos extensiones continuas que coinciden en $D$ coinciden en todo $X$.
Supongamos ahora que $T$ es compacto y sea $(x_n)$ una sucesión acotada en $X$. Para cada $n$ elegimos $y_n \in D$ tal que $\|x_n - y_n\|_X < \frac{1}{n}$. La sucesión $(y_n)$ también es acotada, así que existe una subsucesión $(y_{n_k})$ para la cual $(T(y_{n_k}))$ converge en $Y$. Por otra parte,

$$\|\widetilde{T}(x_{n_k}) - T(y_{n_k})\|_Y \leq \|T\|\|x_{n_k} - y_{n_k}\|_X < \frac{\|T\|}{n_k},$$

y el miembro derecho tiende a cero. Por consiguiente, $(\widetilde{T}(x_{n_k}))$ converge en $Y$, lo que prueba la compacidad de $\widetilde{T}$. □

**Corolario B.2.37.** (Extensión a las completaciones) Sean $X$ y $Y$ espacios normados, y sean $\widehat{X}$ y $\widehat{Y}$ sus completaciones. Todo operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ admite una única extensión $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X},\widehat{Y})$ compatible con las inclusiones canónicas. Se tiene $\|\widehat{T}\| = \|T\|$ y, si $T$ es compacto, entonces $\widehat{T}$ es compacto.

*Demostración.* Identificamos $X$ y $Y$ con sus imágenes isométricas en $\widehat{X}$ y $\widehat{Y}$. El resultado se obtiene aplicando el Teorema B.2.36 al operador $X \longrightarrow \widehat{Y}$ inducido por $T$. □

**Teorema B.2.38.** (de Schauder) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$. Entonces $K$ es compacto si y sólo si $K'\colon Y' \longrightarrow X'$ es compacto.

*Demostración.* Supongamos primero que $K$ es compacto y pongamos

$$C := \overline{\{Kx \mid \|x\|_X \leq 1\}} \subseteq Y.$$

Toda sucesión en $C$ posee una subsucesión convergente. En efecto, aproximamos su término $j$ por un elemento $Kx_j$, con $\|x_j\|_X \leq 1$, a distancia menor que $1/j$. La compacidad de $K$ proporciona una subsucesión convergente de $(Kx_j)$ y, por tanto, de la sucesión original, cuyo límite pertenece a $C$ porque es cerrado. En

particular, $C$ admite una red finita de cualquier radio $\delta > 0$: si ninguna unión finita de bolas de ese radio cubriera $C$, podríamos elegir inductivamente una sucesión de puntos con distancias mutuas al menos $\delta$, contradiciendo la propiedad anterior.

Sea $(\varphi_j)$ una sucesión acotada en $Y'$ y elijamos $M \geq 1$ tal que $\|\varphi_j\|_{Y'} \leq M$ para todo $j$. Las restricciones $f_j := \varphi_j \restriction_C$ satisfacen

$$|f_j(y)| \leq M\|K\|, \qquad |f_j(y) - f_j(z)| \leq M\|y - z\|_Y, \qquad y, z \in C.$$

Escribamos el argumento de compacidad uniforme que se necesita. Para cada entero $q \geq 1$, elegimos una red finita de radio $1/q$ en $C$. La unión de esas redes es un conjunto numerable denso en $C$. Un argumento diagonal, aplicado a las sucesiones escalares acotadas en sus puntos, proporciona una subsucesión de $(f_j)$ que converge en cada punto de esa unión. Conservemos los mismos índices para la subsucesión.

Dado $\varepsilon > 0$, elegimos entre esos puntos una red finita $\{y_1, \ldots, y_l\}$ de radio menor que $\varepsilon/(4M)$. Para $j, k$ suficientemente grandes, $|f_j(y_i) - f_k(y_i)| < \varepsilon/2$ para todos los puntos de la red. Si $y \in C$ y $\|y - y_i\|_Y < \varepsilon/(4M)$, entonces

$$|f_j(y) - f_k(y)| \leq 2M\|y - y_i\|_Y + |f_j(y_i) - f_k(y_i)| < \varepsilon.$$

Así, la subsucesión es de Cauchy uniformemente en $C$. Por consiguiente,

$$\|K'\varphi_j - K'\varphi_k\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} |(\varphi_j - \varphi_k)(Kx)| \leq \sup_{y \in C} |f_j(y) - f_k(y)| \longrightarrow 0.$$

El Teorema B.2.9 muestra que $X'$ es completo; la subsucesión de $(K'\varphi_j)$ converge en $X'$. Esto prueba que $K'$ es compacto.

Recíprocamente, supongamos que $K'$ es compacto. Los duales $Y'$ y $X'$ son espacios de Banach, así que la implicación ya demostrada, aplicada a $K'$, muestra que $K'' \colon X'' \to Y''$ es compacto. Para un espacio normado $Z$ definimos

$$J_Z \colon Z \longrightarrow Z'', \qquad (J_Z z)(\ell) := \ell(z), \quad \ell \in Z'.$$

El Corolario B.2.30 da $\|J_Z z\|_{Z''} = \|z\|_Z$, de modo que $J_Z$ es una isometría lineal. Además, evaluando en $\varphi \in Y'$, obtenemos

$$(K''J_X x)(\varphi) = (J_X x)(K'\varphi) = \varphi(Kx) = (J_Y Kx)(\varphi).$$

Por tanto, $K''J_X = J_Y K$. Si $(x_j)$ es acotada en $X$, la compacidad de $K''$ proporciona una subsucesión para la que $(J_Y Kx_j)$ converge en $Y''$. Como $J_Y$ es una isometría, la subsucesión correspondiente de $(Kx_j)$ es de Cauchy en $Y$, y converge porque $Y$ es completo. Luego $K$ es compacto. □

**Teorema B.2.39.** (de Riesz–Schauder) Sea $X$ un espacio de Banach y sea $K \in \mathcal{K}(X)$. Entonces $\ker(I - K)$ es de dimensión finita, $\operatorname{Ran}(I - K)$ es cerrado y

$$\operatorname{Ran}(I - K) = X \quad \Longleftrightarrow \quad \ker(I - K) = \{0\}.$$

Además, $\dim \ker(I - K) = \dim \ker(I - K')$.

*Demostración.* Pongamos $T := I - K$ y $N := \ker T$. Usaremos primero un hecho elemental de separación. Si $F$ es un subespacio cerrado propio de un espacio normado $E$, elegimos $z \in E \setminus F$ y ponemos $d := \operatorname{dist}(z, F) > 0$.

Existe $y \in F$ tal que $\|z-y\| < 2d$. El vector

$$u := \frac{z-y}{\|z-y\|}$$

satisface $\|u\| = 1$ y $\operatorname{dist}(u,F) = d/\|z-y\| > 1/2$. Recordemos también que todo subespacio de dimensión finita es cerrado y que sus funcionales coordenados son continuos: para una base $e_1,\dots,e_l$, la función $\|\sum_{i=1}^{l} a_i e_i\|$ alcanza un mínimo positivo sobre la esfera euclidiana $\sum_{i=1}^{l} |a_i|^2 = 1$. La homogeneidad da la equivalencia con la norma coordenada, de la cual se siguen ambas afirmaciones.

El subespacio $N$ es cerrado porque $T$ es continuo. Si fuera de dimensión infinita, aplicaríamos sucesivamente el hecho de separación a los subespacios generados por los vectores ya elegidos. Obtendríamos una sucesión $(u_j) \subseteq N$, con $\|u_j\|_X = 1$, tal que $\|u_j - u_k\|_X > 1/2$ para $j \neq k$. Pero $Ku_j = u_j$, en contradicción con la compacidad de $K$. Así, $\dim N < \infty$.

Probemos ahora la estimación

$$\operatorname{dist}_X(x,N) \leq C\|Tx\|_X, \qquad x \in X,$$

para alguna constante $C > 0$. Si fuera falsa, después de normalizar y restar un elemento de $N$ podríamos elegir $x_j \in X$ tales que

$$\operatorname{dist}_X(x_j,N) = 1, \qquad \|x_j\|_X < 2, \qquad \|Tx_j\|_X < 1/j.$$

En detalle, se toma un vector cuya distancia a $N$ sea mayor que $j\|Tx\|_X$, se divide por esa distancia y se elige un representante de la misma clase módulo $N$ con norma menor que dos. La compacidad de $K$ permite pasar a una subsucesión para la que $Kx_j$ converge. Como $x_j = Tx_j + Kx_j$, también $x_j$ converge, digamos a $x$. Por continuidad, $Tx = 0$ y $\operatorname{dist}_X(x,N) = 1$, contradicción. La estimación es, por la Proposición B.2.20, una cota inferior para el operador inducido por $T$ en $X/N$.

Sea ahora $Tx_j \to y$ en $X$. Elegimos $n_j \in N$ de modo que

$$z_j := x_j - n_j, \qquad \|z_j\|_X \leq 2\operatorname{dist}_X(x_j,N) + 1/j \leq 2C\|Tx_j\|_X + 1/j.$$

La sucesión $(z_j)$ es acotada. Sobre una subsucesión, $Kz_j$ converge; como $Tz_j = Tx_j \to y$, también $z_j = Tz_j + Kz_j$ converge a algún $z$. La continuidad de $T$ da $Tz = y$. Por tanto, $\operatorname{Ran} T$ es cerrado.

Demostremos la equivalencia entre inyectividad y sobreyectividad. Para $j \geq 0$ escribimos

$$R_j := \operatorname{Ran} T^j, \qquad N_j := \ker T^j, \qquad R_0 = X, \quad N_0 = \{0\}.$$

Cada $N_j$ es cerrado. Para $j \geq 1$, el operador

$$L_j := I - T^j = \sum_{l=1}^{j} (-1)^{l+1} \binom{j}{l} K^l$$

es compacto por la Proposición B.2.35. El argumento de rango cerrado que acabamos de demostrar, aplicado a $T^j = I - L_j$, muestra que cada $R_j$ es cerrado. Además, $K$ conmuta con $T$ y, por tanto, preserva todos los espacios $R_j$ y $N_j$.

Supongamos que $T$ es inyectivo pero no sobreyectivo. Las inclusiones $R_{j+1} \subseteq R_j$ son entonces estrictas para todo $j \geq 0$. En efecto, si $R_j = R_{j+1}$, para cada $x \in X$ existiría $y \in X$ con $T^j x = T^{j+1} y$; la inyectividad de $T^j$

implicaría $x = Ty$, contradicción. El hecho de separación proporciona vectores

$$x_j \in R_{j-1}, \qquad \|x_j\|_X = 1, \qquad \operatorname{dist}_X(x_j, R_j) > 1/2, \qquad j \geq 1.$$

Si $k > j$, tenemos $Tx_j \in R_j$ y $Kx_k \in R_{k-1} \subseteq R_j$. En consecuencia,

$$\|Kx_j - Kx_k\|_X = \|x_j - (Tx_j + Kx_k)\|_X > 1/2,$$

contradiciendo la compacidad de $K$. Así, la inyectividad implica la sobreyectividad.
Supongamos, a la inversa, que $T$ es sobreyectivo y $N_1 \neq \{0\}$. Las inclusiones $N_j \subseteq N_{j+1}$ son estrictas para todo $j \geq 0$. Si $N_j = N_{j+1}$ y $0 \neq z \in N_1$, la sobreyectividad de $T^j$ daría un $y$ con $T^j y = z$. Entonces $y \in N_{j+1} = N_j$, lo que obligaría a $z = 0$, contradicción. Elegimos, por separación,

$$x_j \in N_j, \qquad \|x_j\|_X = 1, \qquad \operatorname{dist}_X(x_j, N_{j-1}) > 1/2, \qquad j \geq 1.$$

Si $j > k$, entonces $Tx_j \in N_{j-1}$ y $Kx_k \in N_k \subseteq N_{j-1}$. La misma identidad da $\|Kx_j - Kx_k\|_X > 1/2$, otra contradicción con la compacidad. Queda probada la equivalencia del enunciado para toda perturbación compacta de la identidad.
Resta comparar las dimensiones. Por el Teorema B.2.38, $K'$ es compacto en el espacio de Banach $X'$. El argumento del núcleo finito al comienzo de esta prueba, aplicado a $I - K' = T'$, da

$$m := \dim \ker T' < \infty.$$

Pongamos $R := \operatorname{Ran} T$ y $Z := X/R$, con la norma cociente. El mapeo

$$Z' \longrightarrow \ker T', \qquad \ell \longmapsto \ell \circ \pi,$$

donde $\pi\colon X \to X/R$ es la proyección, es un isomorfismo lineal. En efecto, $T'\varphi = 0$ equivale a que $\varphi$ se anule en $R$; en ese caso $\ell([x]) := \varphi(x)$ está bien definido y

$$|\ell([x])| = |\varphi(x - r)| \leq \|\varphi\|_{X'} \|x - r\|_X, \qquad r \in R.$$

Al tomar el ínfimo se obtiene la continuidad en la norma cociente. La inyección canónica $Z \to Z''$ es inyectiva por el Corolario B.2.30. Como $\dim Z' = m$, se sigue que $Z$ es de dimensión finita; en dimensión finita el dual tiene la misma dimensión. Por ello,

$$\dim(X/R) = \dim Z = \dim Z' = m.$$

Sea $n := \dim N$ y elijamos una base $e_1, \ldots, e_n$ de $N$. Los funcionales coordenados de esta base se prolongan a funcionales $f_1, \ldots, f_n \in X'$ mediante el Corolario B.2.29. Entonces

$$Px := \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i, \qquad X_0 := \ker P,$$

definen una proyección continua sobre $N$ y una descomposición $X = N \oplus X_0$. El operador $T \restriction_{X_0}$ es una biyección de $X_0$ sobre $R$: es inyectivo porque $N \cap X_0 = \{0\}$, y es sobreyectivo porque $T(x - Px) = Tx$.

Elegimos $y_1,\dots,y_m \in X$ cuyas clases formen una base de $X/R$. Con $Y_0 := \operatorname{span}\{y_1,\dots,y_m\}$ tenemos $X = R \oplus Y_0$. Pongamos $r := \min\{n,m\}$ y definamos el operador continuo de rango finito

$$Fx := \sum_{i=1}^{r} f_i(x) y_i.$$

Las sumas vacías se interpretan como cero. Por las Proposiciones B.2.34 y B.2.35, $K - F$ es compacto. El operador $S := T + F = I - (K - F)$ satisface la equivalencia entre inyectividad y sobreyectividad ya demostrada. Para $x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, con $x_0 \in X_0$, se tiene

$$Sx = Tx_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i y_i.$$

La suma directa $X = R \oplus Y_0$ y la biyectividad de $T\restriction_{X_0}$ dan

$$\ker S = \operatorname{span}\{e_{r+1},\dots,e_n\}, \qquad \operatorname{Ran} S = R \oplus \operatorname{span}\{y_1,\dots,y_r\}.$$

Si $n \le m$, entonces $r = n$ y $S$ es inyectivo; por tanto es sobreyectivo, lo que obliga a $r = m$. Si $m \le n$, entonces $r = m$ y $S$ es sobreyectivo; por tanto es inyectivo, lo que obliga a $r = n$. En ambos casos $n = m$, es decir,

$$\dim \ker(I - K) = \dim \ker(I - K').$$

Esto completa la prueba. □

**Definición B.2.40.** Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach. Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se llama **Fredholm** si $\ker T$ es de dimensión finita, $\operatorname{Ran}(T)$ es cerrado y $Y/\operatorname{Ran}(T)$ es de dimensión finita. Su **índice** es

$$\operatorname{ind}(T) := \dim \ker T - \dim\big(Y/\operatorname{Ran}(T)\big).$$

En particular, el Teorema B.2.39 implica que $I - K$ es Fredholm de índice cero para todo $K \in \mathcal{K}(X)$.

## B.3 Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert combinan la completitud con una geometría euclidiana dada por un producto interno. Esta estructura permite definir complementos ortogonales, proyecciones, adjuntos y gradientes, y constituye el marco natural de numerosos problemas variacionales lineales y cuadráticos. Seguimos principalmente [45, Sección 1.2], [28, 87, 120].

**Definición B.3.1.** Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un **producto interno** en $V$ es un mapeo $\langle \cdot,\cdot \rangle_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que, para cualesquiera $x,y,z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,

(a) $\langle x+y,z\rangle_V = \langle x,z\rangle_V + \langle y,z\rangle_V$ y $\langle \lambda x,z\rangle_V = \lambda\langle x,z\rangle_V$;

(b) $\langle x,y\rangle_V = \overline{\langle y,x\rangle_V}$;

(c) $\langle x,x\rangle_V \ge 0$, y $\langle x,x\rangle_V = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Así, en el caso complejo adoptamos la convención de linealidad en la primera variable y antilinealidad en la segunda.

**Teorema B.3.2.** (Desigualdad de Cauchy–Schwarz) Para cualesquiera $x, y \in V$ se tiene $|\langle x, y\rangle_V| \leq \langle x, x\rangle_V^{\frac{1}{2}} \langle y, y\rangle_V^{\frac{1}{2}}$.

*Demostración.* Si $y = 0$, la afirmación es inmediata. Si $y \neq 0$, la positividad del producto interno aplicada a $x - \dfrac{\langle x, y\rangle_V}{\langle y, y\rangle_V} y$ da

$$0 \leq \langle x, x\rangle_V - \frac{|\langle x, y\rangle_V|^2}{\langle y, y\rangle_V},$$

de donde se obtiene la desigualdad. □

**Proposición B.3.3.** La fórmula $\|x\|_V := \langle x, x\rangle_V^{\frac{1}{2}}$ define una norma en $V$. Además, se cumple la identidad del paralelogramo

$$\|x + y\|_V^2 + \|x - y\|_V^2 = 2\|x\|_V^2 + 2\|y\|_V^2.$$

*Demostración.* Sólo la desigualdad triangular requiere justificación. Por Cauchy–Schwarz,

$$\|x + y\|_V^2 = \|x\|_V^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle_V + \|y\|_V^2 \leq (\|x\|_V + \|y\|_V)^2.$$

La identidad del paralelogramo se obtiene desarrollando ambos miembros. □

**Definición B.3.4.** Un espacio vectorial con producto interno se llama **espacio de Hilbert** si es completo respecto de la norma inducida por dicho producto interno.

## B.3.1 Ortogonalidad y proyecciones

**Definición B.3.5.** Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $M \subseteq H$. El **complemento ortogonal** de $M$ es

$$M^{\perp} := \{x \in H \mid \langle m, x\rangle_H = 0 \text{ para todo } m \in M\}.$$

Dos subconjuntos $A, B \subseteq H$ son ortogonales si $\langle a, b\rangle_H = 0$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$.

**Proposición B.3.6.** Para todo $M \subseteq H$, el conjunto $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado. Si $M$ es un subespacio, entonces $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

*Demostración.* Para cada $m \in M$, el mapeo $x \mapsto \langle m, x\rangle_H$ es continuo, de modo que $M^{\perp}$ es una intersección de núcleos cerrados. Si $x \in M \cap M^{\perp}$, entonces $\|x\|_H^2 = \langle x, x\rangle_H = 0$, y por lo tanto $x = 0$. □

**Teorema B.3.7.** (de proyección sobre convexos cerrados) Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $C \subseteq H$ no vacío, cerrado y convexo. Para cada $x \in H$ existe un único $P_C x \in C$ tal que

$$\|x - P_C x\|_H = \inf_{z \in C} \|x - z\|_H.$$

Este elemento se caracteriza por

$$\operatorname{Re}\langle x - P_C x, z - P_C x\rangle_H \le 0 \qquad \text{para todo } z \in C.$$

*Demostración.* Sea $d := \inf_{z\in C} \|x - z\|_H$ y elijamos $(z_n)$ en $C$ tal que $\|x - z_n\|_H^2 < d^2 + \frac{1}{n}$. La identidad del paralelogramo y la convexidad de $C$ implican

$$\|z_n - z_m\|_H^2 = 2\|x - z_n\|_H^2 + 2\|x - z_m\|_H^2 - 4\left\|x - \frac{z_n + z_m}{2}\right\|_H^2 \le \frac{2}{n} + \frac{2}{m}.$$

Por lo tanto, $(z_n)$ es de Cauchy y converge a algún $y \in C$; necesariamente $\|x - y\|_H = d$. La misma identidad aplicada a dos minimizadores demuestra la unicidad.
Sea $z \in C$. Para $t \in (0,1)$, el punto $y + t(z - y)$ pertenece a $C$, por lo que

$$\|x - y\|_H^2 \le \|x - y - t(z - y)\|_H^2 = \|x - y\|_H^2 - 2t\operatorname{Re}\langle x - y, z - y\rangle_H + t^2\|z - y\|_H^2.$$

Dividiendo entre $t$ y haciendo $t \to 0^+$ obtenemos la desigualdad caracterizadora. Recíprocamente, dicha desigualdad implica $\|x - z\|_H^2 \ge \|x - y\|_H^2$ para todo $z \in C$. □

**Corolario B.3.8.** (Descomposición ortogonal) Si $M$ es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $H$, entonces

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Para cada $x \in H$, el elemento $P_M x$ es el único vector de $M$ tal que $x - P_M x \in M^\perp$. El operador $P_M \in \mathcal{L}(H)$ se llama **proyección ortogonal** sobre $M$ y satisface $P_M^2 = P_M$, $\|P_M\| = 1$ si $M \neq \{0\}$ y

$$\langle P_M x, y\rangle_H = \langle x, P_M y\rangle_H \qquad \text{para cualesquiera } x, y \in H.$$

*Demostración.* Aplicamos el Teorema B.3.7 a $C = M$. Como $M$ es un subespacio, la desigualdad caracterizadora aplicada a $z = P_M x \pm m$ y, en el caso complejo, a $z = P_M x \pm im$, implica $\langle m, x - P_M x\rangle_H = 0$ para todo $m \in M$. La unicidad de la descomposición es inmediata. La linealidad de $P_M$ se obtiene de esta caracterización y $\|P_M x\|_H \le \|x\|_H$ se sigue de Pitágoras. La última identidad se obtiene al descomponer $x$ y $y$ en sus componentes en $M$ y $M^\perp$. □

**Corolario B.3.9.** Para todo subconjunto $M \subseteq H$ se tiene

$$(M^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}(M)}.$$

*Demostración.* La inclusión $\overline{\operatorname{span}(M)} \subseteq (M^\perp)^\perp$ es inmediata. Aplicando el Corolario B.3.8 al subespacio cerrado $N := \overline{\operatorname{span}(M)}$, escribimos $x = P_N x + (x - P_N x)$. Si $x \in (M^\perp)^\perp$, entonces $x - P_N x \in N^\perp = M^\perp$ y, por lo tanto, $\|x - P_N x\|_H^2 = \langle x, x - P_N x\rangle_H = 0$. Así, $x = P_N x \in N$. □

### B.3.2 Sistemas ortonormales y representación de Riesz

**Definición B.3.10.** Una familia $(e_j)_{j\in J}$ en un espacio de Hilbert $H$ es **ortonormal** si $\langle e_j, e_k\rangle_H = 0$ para $j \neq k$ y $\|e_j\|_H = 1$. Se llama **base ortonormal** si $\overline{\operatorname{span}\{e_j \mid j \in J\}} = H$.

**Teorema B.3.11.** (Bessel y Parseval) Si $(e_j)_{j\in J}$ es una familia ortonormal en $H$, entonces para todo $x \in H$ y todo subconjunto finito $F \subseteq J$,

$$\sum_{j\in F} |\langle x, e_j\rangle_H|^2 \leq \|x\|_H^2.$$

Si $(e_j)_{j\in J}$ es una base ortonormal, entonces

$$x = \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle_H e_j, \qquad \|x\|_H^2 = \sum_{j\in J} |\langle x, e_j\rangle_H|^2,$$

donde sólo una cantidad numerable de coeficientes puede ser no nula.

*Demostración.* Para $F \subseteq J$ finito, el vector $p_F := \sum_{j\in F} \langle x, e_j\rangle_H e_j$ satisface $x - p_F \perp p_F$. Por Pitágoras, $\|x\|_H^2 = \|x - p_F\|_H^2 + \sum_{j\in F} |\langle x, e_j\rangle_H|^2$. La identidad de Parseval se obtiene haciendo crecer $F$ y usando la densidad del subespacio generado por la familia. □

**Teorema B.3.12.** (de representación de Riesz) Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $\ell \in H'$. Existe un único $v \in H$ tal que

$$\ell(x) = \langle x, v\rangle_H \qquad \text{para todo } x \in H.$$

Además, $\|\ell\|_{H'} = \|v\|_H$. En el caso real, el mapeo $J\colon H \longrightarrow H'$, dado por $J(v)(x) = \langle x, v\rangle_H$, es una isometría lineal; en el caso complejo es una isometría antilineal.

*Demostración.* Si $\ell = 0$, tomamos $v = 0$. Supongamos que $\ell \neq 0$ y sea $M := \ker \ell$, que es un subespacio cerrado. Por el Corolario B.3.8, $H = M \oplus M^\perp$. El espacio $M^\perp$ es unidimensional: la restricción de $\ell$ a $M^\perp$ es inyectiva y toma valores en $\mathbb{K}$. Elegimos $e \in M^\perp$ con $\|e\|_H = 1$. Cada $x \in H$ se escribe de manera única como $x = m + \alpha e$, con $m \in M$, y $\ell(x) = \alpha \ell(e)$.
En el caso real definimos $v := \ell(e)e$ y en el caso complejo $v := \overline{\ell(e)}e$. Con nuestra convención de linealidad en la primera variable, $\langle x, v\rangle_H = \alpha\ell(e) = \ell(x)$. La unicidad se sigue de que $\langle x, v-w\rangle_H = 0$ para todo $x \in H$ implica $v = w$. Cauchy–Schwarz da $\|\ell\| \leq \|v\|_H$, mientras que, si $v \neq 0$, evaluar en $\dfrac{v}{\|v\|_H}$ proporciona la desigualdad opuesta. □

**Corolario B.3.13.** (Forma compleja–lineal de Riesz) Sea $H$ un espacio de Hilbert complejo, con producto interno lineal en la primera variable. Entonces

$$\mathscr{R}_H\colon \overline{H} \longrightarrow H', \qquad \mathscr{R}_H(\overline{v})(x) := \langle x, v\rangle_H,$$

es un isomorfismo complejo–lineal e isométrico. En particular, toda identificación complejo–lineal de un espacio de Hilbert complejo con su dual que se obtenga de su producto interno debe tener como dominio

el espacio conjugado $\overline{H}$; el mapeo directo $H \to H'$ es antilineal.

*Demostración.* El Teorema B.3.12 prueba la biyectividad y la igualdad de normas. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, la multiplicación escalar de $\overline{H}$ satisface $\lambda \overline{v} = \overline{\lambda v}$; por lo tanto,

$$\mathscr{R}_H(\lambda \overline{v})(x) = \langle x, \overline{\lambda} v \rangle_H = \lambda \langle x, v \rangle_H = \lambda \mathscr{R}_H(\overline{v})(x).$$

□

**Teorema B.3.14.** (de Lax–Milgram) Sea $H$ un espacio de Hilbert real y sea $a\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal. Supongamos que existen constantes $C \geq 0$ y $\alpha > 0$ tales que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_H \|v\|_H, \qquad a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2$$

para cualesquiera $u, v \in H$. Entonces, para todo $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H$. Además, $\|u\|_H \leq \dfrac{\|F\|_{H'}}{\alpha}$.

*Demostración.* Por el Teorema B.3.12, para cada $u \in H$ existe un único $Tu \in H$ tal que $a(u,v) = \langle v, Tu \rangle_H$ para todo $v \in H$. El operador $T$ es lineal y continuo. La coercividad implica

$$\alpha \|u\|_H^2 \leq \langle u, Tu \rangle_H \leq \|u\|_H \|Tu\|_H,$$

por lo que $\|Tu\|_H \geq \alpha \|u\|_H$. En particular, $T$ es inyectivo y su rango es cerrado. Si $w \perp \operatorname{Ran}(T)$, entonces $0 = \langle w, Tw \rangle_H = a(w,w) \geq \alpha \|w\|_H^2$, así que $w = 0$. Por lo tanto, el rango de $T$ es denso y cerrado, luego es todo $H$.

Sea $f \in H$ el representante de Riesz de $F$. Existe un único $u \in H$ tal que $Tu = f$, y entonces $a(u,v) = \langle v, f \rangle_H = F(v)$. Finalmente, $\alpha \|u\|_H \leq \|Tu\|_H = \|f\|_H = \|F\|_{H'}$. □

### B.3.3 Operadores adjuntos en espacios de Hilbert

**Teorema B.3.15.** Sean $H_1$ y $H_2$ espacios de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Existe un único operador $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1} \qquad \text{para cualesquiera } x \in H_1,\ y \in H_2.$$

Además, $\|T^*\| = \|T\|$, $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ y $(T^*)^* = T$.

*Demostración.* Para cada $y \in H_2$, el mapeo $x \mapsto \langle Tx, y \rangle_{H_2}$ pertenece a $H_1'$. El Teorema B.3.12 proporciona un único vector $T^* y \in H_1$ que satisface la identidad. La unicidad permite verificar la linealidad de $T^*$, y Cauchy–Schwarz da $\|T^* y\|_{H_1} \leq \|T\| \|y\|_{H_2}$. Aplicando la misma construcción a $T^*$ y usando la identidad definitoria, se obtiene $(T^*)^* = T$, y por lo tanto $\|T\| \leq \|T^*\|$. Las demás identidades se verifican mediante el producto interno. □

**Definición B.3.16.** Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H)$.

(a) $T$ es **autoadjunto** si $T = T^*$.

(b) $T$ es **positivo** si $\langle Tx, x\rangle_H \geq 0$ para todo $x \in H$.

(c) $T$ es **unitario** si $T^*T = TT^* = I$.

Para operadores no acotados, la definición del adjunto debe incorporar su dominio.

**Definición B.3.17.** Sean $H_1$ y $H_2$ espacios de Hilbert y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ un operador lineal densamente definido. Definimos

$$\mathcal{D}(A^*) := \left\{ y \in H_2 \middle| \text{existe } z \in H_1 \text{ tal que } \langle Ax, y\rangle_{H_2} = \langle x, z\rangle_{H_1} \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A) \right\}.$$

Para $y \in \mathcal{D}(A^*)$, el vector $z$ es único y se define $A^*y := z$.

**Proposición B.3.18.** El adjunto de todo operador lineal densamente definido es cerrado.

*Demostración.* Sean $y_n \in \mathcal{D}(A^*)$ tales que $y_n \to y$ en $H_2$ y $A^*y_n \to z$ en $H_1$. Para cada $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\langle Ax, y\rangle_{H_2} = \lim_{n\to\infty} \langle Ax, y_n\rangle_{H_2} = \lim_{n\to\infty} \langle x, A^*y_n\rangle_{H_1} = \langle x, z\rangle_{H_1}.$$

Por lo tanto, $y \in \mathcal{D}(A^*)$ y $A^*y = z$. □

**Teorema B.3.19.** Sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ lineal y densamente definido. Entonces $A$ es cerrable si y sólo si $\mathcal{D}(A^*)$ es denso en $H_2$. En este caso, $\overline{A} = A^{**}$.

La demostración se basa en la identificación de $H_j$ con $H_j'$ mediante el Teorema B.3.12 y en la relación entre la gráfica de $A$ y su complemento ortogonal. Puede consultarse en [120, 28].

**Definición B.3.20.** Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq H \longrightarrow H$ lineal y densamente definido. Se dice que $A$ es **simétrico** si $\langle Ax, y\rangle_H = \langle x, Ay\rangle_H$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{D}(A)$, lo cual equivale a $A \subseteq A^*$. Se dice que $A$ es **autoadjunto** si $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ y $A = A^*$ en este dominio.

**Proposición B.3.21.** Sea $H$ un espacio de Hilbert complejo y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq H \longrightarrow H$ un operador simétrico densamente definido. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $A$ es autoadjunto.

(b) $A$ es cerrado y $\ker(A^* - iI) = \ker(A^* + iI) = \{0\}$.

(c) $\operatorname{Ran}(A - iI) = \operatorname{Ran}(A + iI) = H$.

*Demostración.* Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, la simetría implica

$$\|(A \pm iI)x\|_H^2 = \|Ax\|_H^2 + \|x\|_H^2.$$

Si $A$ es cerrado, esta estimación muestra que los rangos de $A \pm iI$ son cerrados. Además,

$$\operatorname{Ran}(A + iI)^\perp = \ker(A^* - iI), \qquad \operatorname{Ran}(A - iI)^\perp = \ker(A^* + iI).$$

Si $A$ es autoadjunto, es cerrado y los núcleos anteriores son triviales; por lo tanto, $(a) \Rightarrow (b)$. Si $(b)$ se cumple, los dos rangos son cerrados y sus complementos ortogonales son triviales, de modo que ambos coinciden con $H$. Así, $(b) \Rightarrow (c)$.
Supongamos $(c)$ y sea $y \in \mathcal{D}(A^*)$. Elegimos $x \in \mathcal{D}(A)$ tal que $(A+iI)x = (A^*+iI)y$. Como $A \subseteq A^*$, se tiene $(A^*+iI)(y-x) = 0$. Ahora bien, $\ker(A^*+iI) = \mathrm{Ran}(A-iI)^\perp = \{0\}$, por lo que $y = x \in \mathcal{D}(A)$. En consecuencia, $\mathcal{D}(A^*) \subseteq \mathcal{D}(A)$ y $A$ es autoadjunto. Esto prueba $(c) \Rightarrow (a)$. □

### B.3.4 Operadores compactos autoadjuntos

**Proposición B.3.22.** Sean $H_1$ y $H_2$ espacios de Hilbert. Un operador $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ es compacto si y sólo si existe una sucesión de operadores de rango finito $(K_n)$ tal que $\|K_n - K\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} \to 0$.

*Demostración.* Si $K$ es límite en norma de operadores de rango finito, entonces es compacto por las Proposiciones B.2.34 y B.2.35.
Supongamos recíprocamente que $K$ es compacto y pongamos

$$C := \overline{K(B_{d_{H_1}}(0,1))}, \qquad M := \overline{\mathrm{span}(C)}.$$

El conjunto $C$ es compacto porque $K(B_{d_{H_1}}(0,1))$ es relativamente compacto. Para cada $r \in \mathbb{N}$ elegimos un conjunto finito $F_r \subseteq C$ tal que las bolas de radio $\dfrac{1}{r}$ centradas en los puntos de $F_r$ cubran a $C$. La unión $D := \bigcup_{r=1}^{\infty} F_r$ es numerable y densa en $C$.
Enumeremos $D = \{y_1, y_2, \dots\}$ y sea $\mathbb{K}_0 := \mathbb{Q}$ en el caso real y $\mathbb{K}_0 := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ en el caso complejo. El conjunto

$$D_0 := \left\{ \sum_{j=1}^{s} a_j y_{n_j} \,\middle|\, s \in \mathbb{N},\ n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N},\ a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}_0 \right\}$$

es numerable, pues es una unión numerable de imágenes de los conjuntos numerables $\mathbb{N}^s \times \mathbb{K}_0^s$.
Comprobemos que $D_0$ es denso en $M$. Basta aproximar los elementos de $\mathrm{span}(C)$, ya que este subespacio es denso en $M$ por definición. Sea $z = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j c_j$, con $c_j \in C$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$, y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $j$ elegimos $y_{n_j} \in D$ suficientemente próximo a $c_j$ para que

$$\sum_{j=1}^{s} |\alpha_j| \|c_j - y_{n_j}\|_{H_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Después escogemos $a_j \in \mathbb{K}_0$ de modo que

$$\sum_{j=1}^{s} |\alpha_j - a_j| \|y_{n_j}\|_{H_2} < \frac{\varepsilon}{2};$$

si alguno de los vectores $y_{n_j}$ es nulo, el término correspondiente no impone ninguna condición sobre $a_j$.

Entonces $w := \sum_{j=1}^{s} a_j y_{n_j}$ pertenece a $D_0$ y

$$\|z-w\|_{H_2} \leq \sum_{j=1}^{s} |\alpha_j| \|c_j - y_{n_j}\|_{H_2} + \sum_{j=1}^{s} |\alpha_j - a_j| \|y_{n_j}\|_{H_2} < \varepsilon.$$

Por consiguiente, $D_0$ es numerable y denso en $M$, de modo que $M$ es separable.
Para todo $x \in H_1$ se tiene $Kx \in M$: si $x \neq 0$, basta escribir $Kx = 2\|x\|_{H_1} K\left(\frac{x}{2\|x\|_{H_1}}\right)$, y el vector entre paréntesis pertenece a $B_{d_{H_1}}(0,1)$; el caso $x = 0$ es inmediato. Si $M$ es de dimensión finita, esto muestra que $K$ ya tiene rango finito. Supongamos, pues, que $M$ es infinito dimensional. Aplicando el procedimiento de Gram–Schmidt a una sucesión densa en $M$, y descartando en cada paso los vectores que pertenecen al subespacio generado por los anteriores, obtenemos una base ortonormal numerable $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $M$. Sea $P_n$ la proyección ortogonal de $H_2$ sobre $\operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_n\}$. Como $K(H_1) \subseteq M$, el operador $K_n := P_n K$ tiene rango finito.
Por el Teorema B.3.11, $P_n y \to y$ para todo $y \in M$. Esta convergencia es uniforme en $C$. Para comprobarlo, sea $\varepsilon > 0$ y elijamos una red finita $\{z_1,\ldots,z_s\} \subseteq C$ de radio $\frac{\varepsilon}{2}$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|(I-P_n)z_i\|_{H_2} < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i \in \{1,\ldots,s\}$ y $n \geq N$. Dado $y \in C$, elegimos $z_i$ con $\|y - z_i\|_{H_2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Puesto que $I - P_n$ es una proyección ortogonal y, por lo tanto, tiene norma a lo sumo uno,

$$\|(I-P_n)y\|_{H_2} \leq \|(I-P_n)(y-z_i)\|_{H_2} + \|(I-P_n)z_i\|_{H_2} < \varepsilon.$$

En consecuencia,

$$\|K - K_n\| = \sup_{\substack{x\in H_1 \\ \|x\|_{H_1}\leq 1}} \|(I-P_n)Kx\|_{H_2} \leq \sup_{y\in C} \|(I-P_n)y\|_{H_2} \longrightarrow 0.$$

□

**Proposición B.3.23.** (Formas bilineales y operadores autoadjuntos) Sea $H$ un espacio de Hilbert real. Para cada forma bilineal continua $B\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ existe un único operador $A_B \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$B(x,y) = \langle A_B x, y\rangle_H$$

para cualesquiera $x, y \in H$. La correspondencia $B \longmapsto A_B$ es un isomorfismo lineal isométrico entre $\mathcal{L}^2(H;\mathbb{R})$ y $\mathcal{L}(H)$. Además, $B$ es simétrica si y sólo si $A_B$ es autoadjunto.
Definimos el rango de $B$ como el rango de $A_B$. Con esta convención, las formas bilineales simétricas de rango finito corresponden exactamente a los operadores autoadjuntos de rango finito. Si $\mathcal{F}_s(H)$ denota el subespacio de tales formas, entonces su cerradura en $\mathcal{L}^2_s(H;\mathbb{R})$ corresponde al espacio de operadores compactos autoadjuntos. En particular, si $H$ es infinito dimensional y $B_0(x,y) := \langle x, y\rangle_H$, entonces $B_0 \notin \overline{\mathcal{F}_s(H)}$.

*Demostración.* Fijado $x \in H$, el mapeo $y \longmapsto B(x,y)$ pertenece a $H'$. El Teorema B.3.12 proporciona un único vector $A_B x \in H$ que satisface $B(x,y) = \langle A_B x, y\rangle_H$ para todo $y \in H$. La unicidad de los representantes de Riesz muestra que $A_B$ es lineal. Asimismo,

$$\|A_B x\|_H = \sup_{\substack{y\in H \\ \|y\|_H\leq 1}} |B(x,y)| \leq \|B\| \|x\|_H,$$

de modo que $A_B \in \mathcal{L}(H)$ y $\|A_B\| \le \|B\|$. La desigualdad inversa se obtiene de $|B(x,y)| \le \|A_B\|\|x\|_H\|y\|_H$, por lo que $\|A_B\| = \|B\|$. La linealidad y la suprayectividad de la correspondencia se deducen al asociar a $A \in \mathcal{L}(H)$ la forma $B_A(x,y) := \langle Ax, y\rangle_H$.

La simetría de $B$ equivale a la identidad $\langle A_B x, y\rangle_H = \langle x, A_B y\rangle_H$ para cualesquiera $x, y \in H$, que es precisamente la condición $A_B = A_B^*$ del Teorema B.3.15. La afirmación sobre el rango es entonces inmediata por la definición adoptada.

Resta identificar la cerradura de $\mathcal{F}_s(H)$. Todo límite en norma de operadores autoadjuntos de rango finito es compacto por la Proposición B.2.35 y autoadjunto por la continuidad del adjunto establecida en el Teorema B.3.15. En sentido inverso, sea $K \in \mathcal{K}(H)$ autoadjunto. La Proposición B.3.22 proporciona operadores de rango finito $T_n$ tales que $T_n \to K$ en norma. El adjunto $T_n^*$ también tiene rango finito. En efecto, $\mathrm{Ran}(T_n)$ es cerrado por ser finito–dimensional; si $P_n$ es la proyección ortogonal sobre este rango, entonces $T_n = P_n T_n$ y, por lo tanto, $T_n^* = T_n^* P_n$. Así, el rango de $T_n^*$ está contenido en la imagen por $T_n^*$ del espacio finito–dimensional $\mathrm{Ran}(P_n)$. En consecuencia, los operadores $S_n := \dfrac{1}{2}(T_n + T_n^*)$ son autoadjuntos y de rango finito. Además, usando $K^* = K$ y $\|T_n^* - K^*\| = \|T_n - K\|$, se obtiene $\|S_n - K\| \le \|T_n - K\| \to 0$.

Por último, si $H$ es infinito dimensional, puede construirse inductivamente una sucesión ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\|e_n - e_m\|_H = \sqrt{2}$ para $n \neq m$, la sucesión $(e_n)$ no posee subsucesiones convergentes. La identidad de $H$ no es, por lo tanto, compacta. Puesto que $B_0$ corresponde a la identidad, se concluye que $B_0 \notin \overline{\mathcal{F}_s(H)}$. □

**Corolario B.3.24.** Sean $H$ un espacio de Hilbert real y $\ell, m \in H'$. La forma bilineal simétrica

$$B_{\ell,m} := \ell \otimes m + m \otimes \ell, \qquad B_{\ell,m}(x,y) = \ell(x)m(y) + m(x)\ell(y),$$

tiene rango a lo sumo dos.

*Demostración.* Sean $v_\ell, v_m \in H$ los representantes de Riesz de $\ell$ y $m$. El operador asociado a $B_{\ell,m}$ es $x \longmapsto \ell(x)v_m + m(x)v_\ell$, cuya imagen está contenida en $\mathrm{span}\{v_\ell, v_m\}$. □

**Teorema B.3.25.** (Espectral para operadores compactos autoadjuntos) Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $K \in \mathcal{K}(H)$ autoadjunto. Los valores propios no nulos de $K$ son reales, tienen multiplicidad finita y sólo pueden acumularse en 0. Existe una familia ortonormal $(e_j)_{j\in J}$ de vectores propios, con valores propios reales $(\lambda_j)_{j\in J}$, tal que

$$\overline{\mathrm{Ran}(K)} = \overline{\mathrm{span}\{e_j \mid j \in J\}}, \qquad Kx = \sum_{j\in J} \lambda_j \langle x, e_j\rangle_H e_j$$

para todo $x \in H$, y para cada $\varepsilon > 0$ sólo hay una cantidad finita de índices $j$ con $|\lambda_j| \ge \varepsilon$. En particular, si $H$ es separable, puede completarse esta familia con una base ortonormal de $\ker K$ para obtener una base ortonormal de $H$ formada por vectores propios de $K$.

La demostración puede consultarse en [45, Teorema 2.2.16] y en [120, 28].

### B.3.5 Regularidad débil y fuerte de mapeos con valores en un espacio de Hilbert

La regularidad escalar de todas las componentes de un mapeo con valores en un espacio de Hilbert determina casi toda su regularidad en norma. Aunque la conclusión se formula en términos de diferenciabilidad, el argumento

descansa en el principio de acotación uniforme y en la representación de Riesz; no requiere el cálculo diferencial sobre variedades de Banach. Por esta razón incluimos el resultado en esta sección.

**Teorema B.3.26.** (Diferenciabilidad débil y fuerte) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $F\colon U \longrightarrow H$ es de clase $C^k$ en sentido débil, es decir, que para cada $h \in H$ la función escalar $x \mapsto \langle F(x), h\rangle_H$ pertenece a $C^k(U)$. Entonces $F$ es de clase $C^{k-1}$ en norma. Más precisamente, para cada multiíndice $\alpha$ con $|\alpha| \leq k$ existe un único mapeo $F_\alpha\colon U \longrightarrow H$ tal que

$$\langle F_\alpha(x), h\rangle_H = D^\alpha \langle F(\cdot), h\rangle_H(x), \qquad h \in H,$$

y, si $|\alpha| \leq k-1$, el mapeo $F_\alpha$ es continuo en norma y coincide con $D^\alpha F$. En particular, todo mapeo débilmente suave con valores en $H$ es suave en norma. La misma afirmación vale para mapeos definidos en una variedad de dimensión finita con o sin frontera, después de trabajar en cartas.

Otra formulación de este resultado se encuentra en [74, Apéndice B.5].

*Demostración.* Para $h \in H$ escribamos $\varphi_h(y) := \langle F(y), h\rangle_H$. Comenzaremos construyendo los vectores $F_\alpha(x)$. Si $\alpha = 0$, ponemos $F_0 := F$. Fijemos ahora $x \in U$ y un multiíndice $\alpha$ de longitud $r := |\alpha| \geq 1$. Elijamos índices $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ en los que cada $i$ aparece exactamente $\alpha_i$ veces y, para una función $G$ definida cerca de $y$, denotemos por $\Delta_{t,i}G(y) := G(y + te_i) - G(y)$ su diferencia finita en la dirección $e_i$.
Tomemos una sucesión $t_\nu > 0$ que tienda a cero y sea tan pequeña que todos los puntos que intervienen en las diferencias siguientes pertenezcan a $U$. Definimos

$$v_\nu := \frac{1}{t_\nu^r} \Delta_{t_\nu, i_1} \cdots \Delta_{t_\nu, i_r} F(x) \in H.$$

El teorema fundamental del cálculo, aplicado sucesivamente a la función escalar $\varphi_h$, da

$$\langle v_\nu, h\rangle_H = \int_{[0,1]^r} D^\alpha \varphi_h \left( x + t_\nu \sum_{j=1}^{r} s_j e_{i_j} \right) ds_1 \cdots ds_r.$$

Como $D^\alpha \varphi_h$ es continua, se sigue que $\langle v_\nu, h\rangle_H \longrightarrow D^\alpha \varphi_h(x)$ para todo $h \in H$. En particular, la sucesión de funcionales antilineales continuos $T_\nu\colon H \longrightarrow \mathbb{K}$, dada por $T_\nu(h) := \langle v_\nu, h\rangle_H$, está puntualmente acotada. El Teorema de Banach–Steinhaus, Teorema B.2.15, aplicado a los funcionales lineales $h \mapsto \overline{T_\nu(h)}$, implica que existe $C_{x,\alpha} > 0$ tal que $\|T_\nu\| \leq C_{x,\alpha}$ para todo $\nu$. Por consiguiente, el límite puntual

$$T_{x,\alpha}(h) := D^\alpha \varphi_h(x)$$

es antilineal y continuo, y satisface $|T_{x,\alpha}(h)| \leq C_{x,\alpha}\|h\|_H$. La versión antilineal del Teorema de representación de Riesz, Teorema B.3.12, obtenida conjugando el funcional, determina un único vector $F_\alpha(x) \in H$ tal que $T_{x,\alpha}(h) = \langle F_\alpha(x), h\rangle_H$ para todo $h \in H$. Como $x$ era arbitrario, queda construido $F_\alpha\colon U \longrightarrow H$ para cada $|\alpha| \leq k$. La unicidad se sigue de que el producto interno separa puntos. Además, la identidad

$$\langle F_\alpha(x), h\rangle_H = D^\alpha \varphi_h(x)$$

muestra que cada $F_\alpha$ es débilmente continuo.

Probemos ahora la continuidad en norma para $|\alpha| \le k-1$. Fijemos una bola euclidiana cerrada y convexa $K \subseteq U$. Para cada $h \in H$ y cada $i \in \{1,\dots,n\}$, la función $z \mapsto \langle F_{\alpha+e_i}(z), h\rangle_H = D^{\alpha+e_i}\varphi_h(z)$ es continua y, por lo tanto, está acotada en $K$. Aplicando Banach–Steinhaus a los funcionales lineales $h \mapsto \overline{\langle F_{\alpha+e_i}(z), h\rangle_H}$, con $z \in K$ y $i \in \{1,\dots,n\}$, obtenemos una constante $C_{K,\alpha} > 0$ tal que

$$\|F_{\alpha+e_i}(z)\|_H \le C_{K,\alpha}$$

para todo $z \in K$ y todo $i$. Si $x, y \in K$, el segmento $x + t(y-x)$ está contenido en $K$. El teorema fundamental del cálculo aplicado a $D^\alpha \varphi_h$ proporciona

$$\langle F_\alpha(y) - F_\alpha(x), h\rangle_H = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\langle F_{\alpha+e_i}(x + t(y-x)), h\rangle_H \, dt.$$

Al tomar el supremo sobre $\|h\|_H \le 1$, resulta

$$\|F_\alpha(y) - F_\alpha(x)\|_H \le C_{K,\alpha} \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \le \sqrt{n}\, C_{K,\alpha} \|y - x\|.$$

Así, $F_\alpha$ es localmente Lipschitz y, en particular, continuo en norma para $|\alpha| \le k-1$.
Falta identificar estos mapeos con las derivadas fuertes de $F$. Sea $|\alpha| \le k-2$ y definamos $A_\alpha(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, H)$ mediante

$$A_\alpha(x)v := \sum_{i=1}^{n} v_i F_{\alpha+e_i}(x).$$

Fijemos $x \in U$ y tomemos $v$ tan pequeño que el segmento $x + tv$, con $0 \le t \le 1$, esté contenido en una bola cerrada $K \subseteq U$. Para todo $h \in H$, el teorema fundamental del cálculo da

$$\begin{aligned} &\langle F_\alpha(x+v) - F_\alpha(x) - A_\alpha(x)v, h\rangle_H \\ &\qquad = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} v_i \left\langle F_{\alpha+e_i}(x+tv) - F_{\alpha+e_i}(x), h\right\rangle_H dt. \end{aligned}$$

Tomando nuevamente el supremo sobre $\|h\|_H \le 1$, obtenemos

$$\frac{\|F_\alpha(x+v) - F_\alpha(x) - A_\alpha(x)v\|_H}{\|v\|_{\mathbb{R}^n}} \le \sqrt{n} \max_{1\le i\le n} \sup_{0\le t\le 1} \|F_{\alpha+e_i}(x+tv) - F_{\alpha+e_i}(x)\|_H.$$

El miembro derecho tiende a cero cuando $v \to 0$, porque los mapeos $F_{\alpha+e_i}$ son continuos en norma. Esto prueba que $F_\alpha$ es diferenciable en el sentido de Fréchet y que $DF_\alpha(x) = A_\alpha(x)$. Como los $F_{\alpha+e_i}$ son continuos, también lo es $x \mapsto A_\alpha(x)$ en la norma de operadores. Una inducción sobre $|\alpha|$ muestra que $F \in C^{k-1}(U, H)$ y que sus derivadas coordenadas son los mapeos $F_\alpha$ correspondientes.
Si el dominio es una variedad de dimensión finita, el argumento se aplica a $F$ en cada carta; como la regularidad en norma es una propiedad local e invariante bajo cambios suaves de coordenadas, las conclusiones se ensamblan globalmente. □

## B.4 Formas cerradas, cálculo espectral y semigrupos de contracción

Los operadores elípticos que aparecen en análisis global son, por lo general, operadores no acotados. Su dominio forma parte de la definición y no puede omitirse. En $L^2$, las formas cuadráticas cerradas proporcionan una manera particularmente estable de construir realizaciones autoadjuntas; en $L^p$, los semigrupos fuertemente continuos y sus generadores desempeñan el papel correspondiente. Reunimos aquí los resultados que se utilizan en la construcción del semigrupo del calor y de los potenciales de Bessel. Para las formas cerradas seguimos [74, Apéndice B], y para los semigrupos, [60, Capítulo II].

### B.4.1 Formas cerradas y realización de Friedrichs

**Definición B.4.1.** Sea $H$ un espacio de Hilbert complejo. Una **forma sesquilineal** en $H$ es un mapeo

$$\mathfrak{a}\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

donde $V \subseteq H$ es un subespacio vectorial denso, lineal en la primera variable y antilineal en la segunda. La forma se llama:

(a) **simétrica** si $\mathfrak{a}(u,v) = \overline{\mathfrak{a}(v,u)}$;

(b) **no negativa** si $\mathfrak{a}(u,u) \geq 0$;

(c) **acotada inferiormente** si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathfrak{a}(u,u) \geq c\|u\|_H^2$;

(d) **cerrada** si $V$ es completo respecto de la norma

$$\|u\|_{\mathfrak{a}}^2 := \mathfrak{a}(u,u) + (1-c)\|u\|_H^2,$$

donde $c$ es cualquier cota inferior estrictamente menor que 1.

El espacio $V$ se denomina dominio de la forma y se denota por $\mathcal{D}(\mathfrak{a})$.

La norma anterior no depende, salvo equivalencia, de la cota inferior elegida. Para una forma no negativa usaremos simplemente

$$\|u\|_{\mathfrak{a}}^2 := \|u\|_H^2 + \mathfrak{a}(u,u).$$

**Teorema B.4.2.** (Primera representación de formas cerradas) Sea $\mathfrak{a}$ una forma sesquilineal densamente definida, simétrica, no negativa y cerrada en un espacio de Hilbert $H$. Existe un único operador autoadjunto no negativo

$$A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq H \longrightarrow H$$

tal que $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{a})$ y

$$\mathfrak{a}(u,v) = \langle Au, v\rangle_H, \qquad u \in \mathcal{D}(A), \quad v \in \mathcal{D}(\mathfrak{a}).$$

Más precisamente,

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in \mathcal{D}(\mathfrak{a}) \mid \text{existe } f \in H \text{ tal que } \mathfrak{a}(u,v) = \langle f, v\rangle_H \text{ para todo } v \in \mathcal{D}(\mathfrak{a})\},$$

y entonces $Au = f$.

*Demostración.* Equipamos $V := \mathcal{D}(\mathfrak{a})$ con el producto interno

$$\langle u, v\rangle_{\mathfrak{a}} := \langle u, v\rangle_H + \mathfrak{a}(u, v).$$

Como la forma es cerrada, $V$ es un espacio de Hilbert. Para cada $f \in H$, el funcional antilineal $v \mapsto \langle f, v\rangle_H$ es continuo en $V$, pues $\|v\|_H \le \|v\|_{\mathfrak{a}}$. La versión antilineal del Teorema B.3.12 proporciona un único $Rf \in V$ tal que

$$\langle Rf, v\rangle_H + \mathfrak{a}(Rf, v) = \langle f, v\rangle_H, \qquad v \in V.$$

El operador $R\colon H \longrightarrow H$, obtenido al componer con la inclusión $V \hookrightarrow H$, es lineal y acotado. Es inyectivo: si $Rf = 0$, entonces $\langle f, v\rangle_H = 0$ para todo $v \in V$, y la densidad de $V$ da $f = 0$. Para $f, h \in H$, aplicamos la identidad definitoria a $(f, Rh)$ y a $(h, Rf)$; la simetría de $\mathfrak{a}$ da

$$\langle f, Rh\rangle_H = \langle Rf, h\rangle_H.$$

Así, $R$ es autoadjunto. Tomando $v = Rf$ obtenemos

$$\langle f, Rf\rangle_H = \|Rf\|_H^2 + \mathfrak{a}(Rf, Rf) \ge 0,$$

por lo que $R$ es positivo. Su rango es denso: si $h \perp \operatorname{Ran}(R)$, la autoadjunción implica $Rh = 0$ y la inyectividad da $h = 0$.
Definimos

$$A := R^{-1} - I, \qquad \mathcal{D}(A) := \operatorname{Ran}(R).$$

Si $u = Rf$, la identidad que define a $R$ se convierte en

$$\mathfrak{a}(u, v) = \langle f - u, v\rangle_H = \langle Au, v\rangle_H, \qquad v \in V.$$

Esta fórmula prueba la caracterización del dominio y la no negatividad. Además, $A$ es simétrico y $A+I = R^{-1}$ es sobreyectivo. Si $y \in \mathcal{D}(A^*)$, elegimos $x \in \mathcal{D}(A)$ con

$$(A + I)x = (A^* + I)y.$$

Como $A \subseteq A^*$, se tiene $(A^* + I)(y - x) = 0$. Pero

$$\ker(A^* + I) = \operatorname{Ran}(A + I)^{\perp} = \{0\},$$

así que $y = x \in \mathcal{D}(A)$. Por lo tanto, $A = A^*$, sin utilizar el cálculo espectral que se introducirá en la subsección siguiente. La unicidad se sigue de la caracterización del dominio.

□

**Corolario B.4.3.** (Caracterización variacional del resolvente) Sea $A$ el operador asociado a la forma $\mathfrak{a}$ del Teorema B.4.2. Si $\lambda > 0$ y $f \in H$, entonces $u = (\lambda I + A)^{-1} f$ es el único elemento de $\mathcal{D}(\mathfrak{a})$ que satisface

$$\mathfrak{a}(u, v) + \lambda\langle u, v\rangle_H = \langle f, v\rangle_H$$

para todo $v \in \mathcal{D}(\mathfrak{a})$.

*Demostración.* La expresión $\langle u, v\rangle_{\mathfrak{a},\lambda} := \mathfrak{a}(u,v) + \lambda\langle u, v\rangle_H$ define en $\mathcal{D}(\mathfrak{a})$ un producto interno cuya norma es equivalente a la norma de la forma. Para $f \in H$, el funcional $v \mapsto \langle f, v\rangle_H$ es continuo respecto de esa norma. El Teorema de representación de Riesz, Teorema B.3.12, proporciona un único $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{a})$ que satisface la identidad del enunciado. Al reescribirla como $\mathfrak{a}(u,v) = \langle f - \lambda u, v\rangle_H$ y usar la caracterización de $\mathcal{D}(A)$ del Teorema B.4.2, obtenemos $u \in \mathcal{D}(A)$ y $Au = f - \lambda u$. Por lo tanto, $(\lambda I + A)u = f$, y la unicidad ya demostrada muestra que $u = (\lambda I + A)^{-1} f$. □

**Definición B.4.4.** (Realización de Friedrichs) Sea $S$ un operador simétrico, densamente definido y acotado inferiormente en $H$, y elijamos $c \in \mathbb{R}$ tal que $S \geq cI$. La forma no negativa

$$\mathfrak{b}_c(u,v) := \langle Su, v\rangle_H - c\langle u, v\rangle_H, \qquad u, v \in \mathcal{D}(S),$$

es cerrable. Sea $B_c$ el operador asociado a su cerradura por el Teorema B.4.2. El operador

$$S_F := B_c + cI, \qquad \mathcal{D}(S_F) := \mathcal{D}(B_c),$$

se denomina **realización de Friedrichs** de $S$. No depende de la cota inferior $c$ elegida y es una extensión autoadjunta de $S$ con la misma cota inferior.

*Demostración.* Completamos $\mathcal{D}(S)$ respecto del producto interno

$$(u,v)_c := \langle u, v\rangle_H + \mathfrak{b}_c(u,v)$$

y denotamos por $V_c$ el espacio de Hilbert obtenido. La inclusión en $H$ se extiende a un operador continuo $J_c \colon V_c \to H$. Probemos que es inyectivo. Si $w \in \ker J_c$, elegimos $u_j \in \mathcal{D}(S)$ tales que $u_j \to w$ en $V_c$; entonces $u_j \to 0$ en $H$. Para cada $v \in \mathcal{D}(S)$, la simetría de $S$ da

$$(w,v)_c = \lim_{j\to\infty} (u_j, v)_c = \lim_{j\to\infty} \langle u_j, (S + (1-c)I)v\rangle_H = 0.$$

La densidad de $\mathcal{D}(S)$ en $V_c$ implica $w = 0$. Podemos, por tanto, identificar $V_c$ con un subespacio de $H$. El límite de $\mathfrak{b}_c(u_j, v_j)$ para sucesiones convergentes en $V_c$ define una forma cerrada sobre ese subespacio. Es precisamente la cerradura de $\mathfrak{b}_c$, pues $\mathcal{D}(S)$ es denso en la norma de la forma.
Si $u \in \mathcal{D}(S)$, la identidad $\mathfrak{b}_c(u,v) = \langle (S - cI)u, v\rangle_H$, inicialmente para $v \in \mathcal{D}(S)$, pasa al límite para todo $v \in V_c$. La caracterización del dominio del operador asociado muestra que $B_c u = (S - cI)u$; así, $S_F$ extiende a $S$. Para dos cotas inferiores $c, d$, las normas de forma son equivalentes, pues sus cuadrados difieren en $(d-c)\|u\|_H^2$, y ambas dominan $\|u\|_H^2$. Sus completaciones se identifican, por tanto, con el mismo subespacio de $H$. Las formas cerradas satisfacen

$$\overline{\mathfrak{b}_c}(u,v) + c\langle u, v\rangle_H = \overline{\mathfrak{b}_d}(u,v) + d\langle u, v\rangle_H.$$

La caracterización variacional de sus operadores da $B_c + cI = B_d + dI$, incluidos sus dominios. Esto prueba la independencia de la elección de la cota inferior. □

**Proposición B.4.5.** (Criterio de autoadjunción esencial) Sea $S$ un operador simétrico y densamente definido en un espacio de Hilbert complejo. Supongamos que $S \geq 0$. Entonces $S$ es esencialmente autoadjunto si y sólo si

$$\ker(S^* + I) = \{0\}.$$

Más generalmente, si $S \geq -cI$, puede sustituirse $I$ por $\lambda I$ con $\lambda > c$.

*Demostración.* Para $u \in \mathcal{D}(S)$,

$$\|(S+I)u\|_H \|u\|_H \geq \mathrm{Re}\langle (S+I)u, u\rangle_H \geq \|u\|_H^2,$$

de modo que $\|(S+I)u\|_H \geq \|u\|_H$. La misma estimación vale para la cerradura $\overline{S}$, por lo que $\mathrm{Ran}(\overline{S}+I)$ es cerrado. Por otra parte,

$$\mathrm{Ran}(S+I)^\perp = \ker(S^*+I).$$

Si este núcleo es trivial, $\mathrm{Ran}(S+I)$ es denso. La estimación anterior muestra además que

$$\mathrm{Ran}(\overline{S}+I) = \overline{\mathrm{Ran}(S+I)} = H.$$

Sea $y \in \mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}((\overline{S})^*)$. Elegimos $x \in \mathcal{D}(\overline{S})$ tal que

$$(\overline{S}+I)x = (S^*+I)y.$$

Como $\overline{S} \subseteq S^*$, resulta $(S^*+I)(y-x) = 0$. La hipótesis da $y = x$, de modo que $\mathcal{D}(S^*) \subseteq \mathcal{D}(\overline{S})$ y $\overline{S}$ es autoadjunto. Recíprocamente, si $\overline{S}$ es autoadjunto y no negativo, entonces $-1$ pertenece a su resolvente; por ello $\ker(S^* + I) = \ker(\overline{S}+I) = \{0\}$. Para $S \geq -cI$ se aplica el mismo argumento a $S + cI$ y a cualquier corrimiento $\lambda > c$. □

## B.4.2 Cálculo espectral para operadores autoadjuntos

**Teorema B.4.6.** (Teorema espectral) Sea $A$ un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert complejo $H$. Existe una única medida espectral $E_A$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_A(\lambda).$$

Si $m\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es boreliana, se define

$$m(A) := \int_{\mathbb{R}} m(\lambda)\, dE_A(\lambda)$$

con dominio

$$\mathcal{D}(m(A)) = \left\{ u \in H \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}} |m(\lambda)|^2 \, d\mu_u(\lambda) < \infty \right\},$$

donde $\mu_u(B) := \langle E_A(B)u, u\rangle_H$. Se tiene

$$\|m(A)u\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}} |m(\lambda)|^2 \, d\mu_u(\lambda).$$

Si $m$ es acotada, entonces $m(A) \in \mathcal{L}(H)$ y

$$\|m(A)\|_{\mathcal{L}(H)} \le \|m\|_{\infty,\mathbb{R}} := \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |m(\lambda)|.$$

Además, el cálculo respeta sumas, productos y conjugación en sus dominios naturales.

Una demostración completa, con esta formulación mediante medidas espectrales y cálculo funcional boreliano, se encuentra en [74, Teoremas B.4 y B.5]. La fórmula de la norma y las reglas del cálculo funcional se obtienen primero para funciones simples, después para funciones borelianas acotadas y finalmente por truncación espectral.

**Corolario B.4.7.** (Dominio de la raíz asociado a una forma cerrada) Sea $\mathfrak{a}$ una forma como en el Teorema B.4.2 y sea $A$ su operador autoadjunto asociado. Entonces

$$\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{D}(\mathfrak{a}), \qquad \mathfrak{a}(u,v) = \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v\rangle_H.$$

*Demostración.* Retomemos $V = \mathcal{D}(\mathfrak{a})$ y el resolvente $R$ construido en la prueba del Teorema B.4.2. El subespacio $\mathcal{D}(A) = \mathrm{Ran}(R)$ es denso en $V$ para la norma de la forma. En efecto, si $w \in V$ es ortogonal a $\mathrm{Ran}(R)$ respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{a}}$, entonces, para todo $f \in H$,

$$0 = \langle Rf, w\rangle_{\mathfrak{a}} = \langle f, w\rangle_H,$$

y por lo tanto $w = 0$.
Para $u \in \mathcal{D}(A)$, el cálculo espectral y la representación de la forma dan

$$\mathfrak{a}(u,u) = \langle Au, u\rangle_H = \|A^{\frac{1}{2}}u\|_H^2.$$

Además, $\mathcal{D}(A)$ es un núcleo para $A^{\frac{1}{2}}$. Si $u \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ y $u_N := E_A([0,N])u$, entonces $u_N \in \mathcal{D}(A)$ y

$$\|u_N - u\|_H^2 + \|A^{\frac{1}{2}}(u_N - u)\|_H^2 = \int_{(N,+\infty)} (1+\lambda)\, d\mu_u(\lambda) \longrightarrow 0.$$

Así, $V$ y $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ son las completaciones de $\mathcal{D}(A)$ respecto de la misma norma. Coinciden como subespacios de $H$, y la identidad sesquilineal se obtiene por polarización. □

**Corolario B.4.8.** Sea $A$ autoadjunto y no negativo. Para $s \in \mathbb{R}$ se definen $(I+A)^s$ y, para $s \ge 0$, $A^s$ mediante el cálculo espectral. Si $s > 0$, entonces $(I+A)^{-s}$ es acotado, inyectivo y

$$\mathrm{Ran}\big((I+A)^{-s}\big) = \mathcal{D}\big((I+A)^{s}\big).$$

Los operadores $(I+A)^s$ y $(I+A)^{-s}$ son inversos entre sí en esos dominios.

*Demostración.* Las afirmaciones se verifican fibra espectral por fibra espectral usando las funciones $(1+\lambda)^{\pm s}$. La inyectividad se sigue de que $(1+\lambda)^{-s} > 0$ para todo $\lambda \ge 0$. □

**Proposición B.4.9.** (Semigrupo espectral) Sea $A$ autoadjunto y no negativo. Entonces $T_t := e^{-tA}$, $t \geq 0$, es un semigrupo fuertemente continuo de contracciones autoadjuntas. Para cada $u \in H$, $T_t u \in \mathcal{D}(A^m)$ si $t > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, y

$$\frac{d}{dt} T_t u = -A T_t u \qquad (t > 0).$$

Si $u \in \mathcal{D}(A)$, la derivada por la derecha en $t = 0$ también existe y es $-Au$.

*Demostración.* Las propiedades algebraicas se siguen de $e^{-(t+s)\lambda} = e^{-t\lambda} e^{-s\lambda}$, y la cota $|e^{-t\lambda}| \leq 1$ da la contractividad. Para la continuidad fuerte observamos que

$$\|T_t u - u\|_H^2 = \int_{[0,+\infty)} |e^{-t\lambda} - 1|^2 \, d\mu_u(\lambda).$$

El integrando converge puntualmente a cero cuando $t \to 0^+$ y está dominado por la constante 4, integrable respecto de la medida finita $\mu_u$; la convergencia dominada prueba $T_t u \to u$.
Si $t > 0$, entonces

$$\|A^m T_t u\|_H^2 = \int_{[0,+\infty)} \lambda^{2m} e^{-2t\lambda} \, d\mu_u(\lambda) \leq \left( \sup_{\lambda \geq 0} \lambda^{2m} e^{-2t\lambda} \right) \|u\|_H^2,$$

de modo que $T_t u \in \mathcal{D}(A^m)$. Fijemos ahora $t_0 > 0$ y tomemos $|h| < \frac{t_0}{2}$. El teorema del valor medio da

$$\left| \frac{e^{-(t_0+h)\lambda} - e^{-t_0\lambda}}{h} \right| \leq \lambda e^{-\frac{t_0}{2}\lambda}.$$

Por lo tanto, la diferencia entre este cociente y $-\lambda e^{-t_0\lambda}$ está dominada por $2\lambda e^{-\frac{t_0}{2}\lambda}$, una función acotada de $\lambda$. La convergencia dominada respecto de $\mu_u$ prueba la diferenciabilidad en $t_0$ y la identidad $\frac{d}{dt} T_t u = -A T_t u$.
Finalmente, si $u \in \mathcal{D}(A)$, entonces

$$\left| \frac{e^{-t\lambda} - 1}{t} \right| \leq \lambda$$

para $t > 0$. El cuadrado del dominante es integrable respecto de $\mu_u$, precisamente porque $u \in \mathcal{D}(A)$. Una última aplicación de la convergencia dominada proporciona la derivada por la derecha en $t = 0$. □

### B.4.3 Semigrupos fuertemente continuos en espacios de Banach

**Definición B.4.10.** Sea $X$ un espacio de Banach. Una familia $(T_t)_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ es un **semigrupo fuertemente continuo**, o un $C_0$-semigrupo, si

$$T_0 = I, \qquad T_{t+s} = T_t T_s, \qquad \lim_{t \to 0^+} \|T_t x - x\|_X = 0$$

para todo $x \in X$. Es un **semigrupo de contracción** si $\|T_t\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

**Definición B.4.11.** El **generador infinitesimal** de un $C_0$-semigrupo $(T_t)$ es el operador

$$Gx := \lim_{t \to 0^+} \frac{T_t x - x}{t}$$

definido en el conjunto $\mathcal{D}(G)$ de los elementos para los cuales existe el límite en $X$.

**Proposición B.4.12.** Sea $G$ el generador de un $C_0$-semigrupo $(T_t)_{t\geq 0}$ en $X$. Entonces $G$ es cerrado y densamente definido, y $\mathcal{D}(G^m)$ es denso en $X$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Además, $T_t\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{D}(G)$, $GT_t x = T_t G x$ para $x \in \mathcal{D}(G)$ y

$$T_t x - x = \int_0^t T_s G x \, ds, \qquad x \in \mathcal{D}(G).$$

*Demostración.* Para $x \in X$ y $h > 0$, definimos $x_h := \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h T_s x \, ds$. La continuidad fuerte muestra que $x_h \to x$. Un cálculo con la propiedad de semigrupo da

$$\frac{T_t x_h - x_h}{t} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{t}\int_h^{h+t} T_s x \, ds - \frac{1}{t}\int_0^t T_s x \, ds\right),$$

y al hacer $t \to 0^+$ se obtiene $x_h \in \mathcal{D}(G)$. Por lo tanto, el dominio es denso. Para obtener la densidad de las potencias, definimos recursivamente $S_h x := \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h T_s x \, ds$ y $S_{h_1,\dots,h_m} x := S_{h_m} \cdots S_{h_1} x$. El cálculo anterior muestra que $S_h(X) \subseteq \mathcal{D}(G)$ y, como $S_h$ conmuta con $T_t$, también conmuta con $G$ sobre $\mathcal{D}(G)$. Una inducción da $S_{h_1,\dots,h_m} x \in \mathcal{D}(G^m)$. Si primero hacemos $h_m \to 0^+$, después $h_{m-1} \to 0^+$ y así sucesivamente, la continuidad fuerte implica $S_{h_1,\dots,h_m} x \to x$. Por ello, $\mathcal{D}(G^m)$ es denso en $X$.
Si $x_n \to x$ y $Gx_n \to y$, la identidad integral da

$$T_t x_n - x_n = \int_0^t T_s G x_n \, ds.$$

Al pasar al límite, $T_t x - x = \displaystyle\int_0^t T_s y \, ds$. Dividir por $t$ y hacer $t \to 0^+$ muestra que $x \in \mathcal{D}(G)$ y $Gx = y$, por lo que $G$ es cerrado. Las demás identidades se obtienen usando $T_{t+h} = T_t T_h$ y diferenciando en la topología fuerte. □

**Definición B.4.13.** Sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ densamente definido. El operador $A$ se llama **disipativo** si para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ existe $x^* \in X'$ tal que

$$\|x^*\|_{X'} = \|x\|_X, \qquad x^*(x) = \|x\|_X^2, \qquad \operatorname{Re} x^*(Ax) \leq 0.$$

Se llama **acretivo** si $-A$ es disipativo. Un operador disipativo es **maximalmente disipativo** si $\operatorname{Ran}(\lambda I - A) = X$ para alguna, y entonces para toda, $\lambda > 0$.

**Proposición B.4.14.** (Resolvente como transformada de Laplace) Sea $(T_t)_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigrupo de contracción con generador $G$. Para cada $\lambda > 0$ y $x \in X$, la integral de Bochner

$$R_\lambda x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x \, dt$$

converge y

$$R_\lambda = (\lambda I - G)^{-1}, \qquad \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

*Demostración.* La convergencia y la cota se siguen de

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T_t x\|_X\,dt \le \frac{1}{\lambda}\|x\|_X.$$

Si $x \in \mathcal{D}(G)$, entonces $\dfrac{d}{dt}T_t x = T_t G x$. Integrando por partes,

$$R_\lambda(\lambda I - G)x = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}T_t x\right)dt = x.$$

Por otra parte, las integrales truncadas pertenecen a $\mathcal{D}(G)$ y un cálculo análogo muestra $(\lambda I - G)R_\lambda x = x$. La cerradura de $G$ permite pasar al límite en el extremo infinito. □

**Teorema B.4.15.** (Lumer–Phillips) Sea $A$ un operador lineal cerrado y densamente definido en un espacio de Banach $X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $A$ es el generador de un $C_0$-semigrupo de contracción;

(b) $A$ es maximalmente disipativo;

(c) $A$ es disipativo y $\operatorname{Ran}(\lambda I - A) = X$ para alguna $\lambda > 0$.

En este caso,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda > 0.$$

*Demostración.* Supongamos primero que $A$ genera un semigrupo de contracción. Para $x \in \mathcal{D}(A)$ elegimos, por Hahn–Banach, $x^* \in X'$ con $\|x^*\| = \|x\|$ y $x^*(x) = \|x\|^2$. Como $\operatorname{Re} x^*(T_t x) \le \|x\|^2$, dividir la diferencia por $t > 0$ y pasar al límite da $\operatorname{Re} x^*(Ax) \le 0$. La Proposición B.4.14 prueba la sobreyectividad de $\lambda I - A$ para todo $\lambda > 0$.
Supongamos ahora (c). La disipatividad implica, para $x \in \mathcal{D}(A)$ y $\lambda > 0$,

$$\lambda\|x\|^2 \le \operatorname{Re} x^*((\lambda I - A)x) \le \|x\|\,\|(\lambda I - A)x\|.$$

Así, $\lambda I - A$ es inyectivo y su inversa sobre su rango tiene norma a lo más $1/\lambda$. El conjunto $I$ de parámetros positivos para los que es sobreyectivo es no vacío por hipótesis. Es abierto por la serie de Neumann. También es cerrado en $(0,\infty)$: si $\lambda_j \in I$ y $\lambda_j \to \lambda > 0$, la identidad del resolvente y sus cotas muestran que $R_{\lambda_j} := (\lambda_j I - A)^{-1}$ es de Cauchy en norma, pues

$$\|R_{\lambda_j} - R_{\lambda_k}\| \le \frac{|\lambda_j - \lambda_k|}{\lambda_j \lambda_k}.$$

Si su límite es $R$, para $y \in X$ tenemos $R_{\lambda_j} y \to Ry$ y $AR_{\lambda_j} y = \lambda_j R_{\lambda_j} y - y \to \lambda R y - y$. La cerradura de $A$ da $(\lambda I - A)Ry = y$. Como $(0,\infty)$ es conexo, $I = (0,\infty)$.
Para cada $\lambda > 0$ consideramos los aproximantes de Yosida

$$A_\lambda := \lambda A(\lambda I - A)^{-1}.$$

Son acotados, pues $A_\lambda = \lambda^2 R_\lambda - \lambda I$, y

$$\|e^{tA_\lambda}\| \le e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|R_\lambda\|} \le 1, \qquad t \ge 0.$$

Además, $\lambda R_\lambda y \to y$ para todo $y \in X$. En efecto, para $y \in \mathcal{D}(A)$,

$$\lambda R_\lambda y - y = R_\lambda A y, \qquad \|R_\lambda A y\| \le \lambda^{-1} \|A y\|,$$

y la densidad de $\mathcal{D}(A)$, junto con $\|\lambda R_\lambda\| \le 1$, extiende el límite a todo $X$. Por tanto, $A_\lambda x = \lambda R_\lambda A x \to Ax$ si $x \in \mathcal{D}(A)$.

La identidad del resolvente muestra que $A_\lambda$ y $A_\mu$ conmutan. Diferenciando $s \mapsto e^{(t-s)A_\lambda} e^{sA_\mu} x$ e integrando, obtenemos

$$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| \le t \|(A_\lambda - A_\mu) x\|, \qquad x \in \mathcal{D}(A).$$

Las contracciones convergen así fuertemente, uniformemente para $0 \le t \le T$, sobre el subespacio denso $\mathcal{D}(A)$. La cota uniforme por uno extiende esa convergencia a todo $X$. Denotemos el límite por $T_t$. Pasar al límite en $e^{(t+s)A_\lambda} = e^{tA_\lambda} e^{sA_\lambda}$ da la propiedad de semigrupo. Para $x \in \mathcal{D}(A)$, $\|T_t x - x\| \le t \|Ax\|$; la densidad y la contracción dan continuidad fuerte en cero para todo $x \in X$.

Si $G$ es su generador, la identidad

$$e^{tA_\lambda} x - x = \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds$$

pasa al límite, para $x \in \mathcal{D}(A)$, a $T_t x - x = \displaystyle\int_0^t T_s A x \, ds$. Al dividir por $t$ resulta $Gx = Ax$, de modo que $A \subseteq G$. Para $y \in \mathcal{D}(G)$ elegimos $x \in \mathcal{D}(A)$ con $(\lambda I - A)x = (\lambda I - G)y$. Entonces $(\lambda I - G)(y - x) = 0$. La fórmula del resolvente del semigrupo implica $y = x$, y por tanto $G = A$. Esto demuestra (a). El argumento también prueba que la condición de sobreyectividad para un parámetro equivale a la de todos los parámetros, y concluye la equivalencia con (b) y la cota del resolvente. □

**Proposición B.4.16.** (Fórmula exponencial) Si $G$ genera un $C_0$-semigrupo de contracción $(T_t)$, entonces

$$T_t x = \lim_{n \to \infty} \left( I - \frac{t}{n} G \right)^{-n} x$$

para todo $x \in X$, uniformemente para $t$ en intervalos compactos de $[0, \infty)$.

*Demostración.* Para $h > 0$, la fórmula de Laplace del resolvente da

$$(I - hG)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-r} T_{hr} x \, dr.$$

Iterando esta identidad, Fubini y la propiedad de semigrupo proporcionan

$$(I - hG)^{-n} x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-r} r^{n-1} T_{hr} x \, dr.$$

Para verificar el factor, el paso de $n$ a $n+1$ integra sobre $0 < s < r$ y usa $\displaystyle\int_0^r s^{n-1} \, ds = r^n / n$. La medida $d\nu_n(r) := e^{-r} r^{n-1} dr / (n-1)!$ tiene masa uno, media $n$ y varianza $n$, como se comprueba integrando por partes

los momentos de órdenes cero, uno y dos. Fijemos $T>0$ y tomemos $h=t/n$, con $0<t\le T$. Entonces

$$\int_0^\infty \left|\frac{tr}{n}-t\right|^2 d\nu_n(r)=\frac{t^2}{n}\le\frac{T^2}{n}.$$

La función $s\mapsto T_s x$ es uniformemente continua en $[0,T+1]$. Dado $0<\delta<1$, separamos la integral según $|tr/n-t|<\delta$ o $|tr/n-t|\ge\delta$. Si $\omega_x(\delta)$ es su módulo de continuidad en ese intervalo, la contracción y Chebyshev dan

$$\sup_{0<t\le T}\|(I-(t/n)G)^{-n}x-T_t x\|\le\omega_x(\delta)+\frac{2\|x\|T^2}{n\delta^2}.$$

Primero hacemos $n\to\infty$ y después $\delta\downarrow 0$. Para $t=0$ ambos operadores son la identidad, de modo que la convergencia es uniforme en $[0,T]$. □

**Proposición B.4.17.** (Perturbaciones acotadas de generadores) Sea $G$ el generador de un $C_0$-semigrupo $(T_t)_{t\ge0}$ en un espacio de Banach $X$ y supongamos que

$$\|T_t\|_{\mathcal{L}(X)}\le e^{\omega t},\qquad t\ge0,$$

para cierto $\omega\in\mathbb{R}$. Si $B\in\mathcal{L}(X)$, entonces el operador

$$G+B,\qquad \mathcal{D}(G+B)=\mathcal{D}(G),$$

genera un $C_0$-semigrupo $(S_t)_{t\ge0}$. Este semigrupo está dado por la serie de Dyson–Phillips

$$S_t=\sum_{j=0}^{\infty}S_j(t),\qquad S_0(t):=T_t,\qquad S_{j+1}(t)x:=\int_0^t T_{t-\tau}BS_j(\tau)x\,d\tau, \tag{B.2}$$

que converge en norma de operador uniformemente para $t$ en intervalos compactos. Además,

$$\|S_t\|_{\mathcal{L}(X)}\le e^{(\omega+\|B\|)t}.$$

En particular, si $(T_t)$ es de contracción y $\mu\ge\|B\|$, entonces $(e^{-\mu t}S_t)_{t\ge0}$ es un $C_0$-semigrupo de contracción con generador $G+B-\mu I$.

*Demostración.* La estimación se obtiene por inducción. Para $j=0$ es la hipótesis sobre $T_t$. Si vale para $j$, entonces

$$\begin{aligned}\|S_{j+1}(t)\|&\le\int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\|B\|e^{\omega\tau}\frac{\|B\|^j\tau^j}{j!}\,d\tau\\&=e^{\omega t}\frac{\|B\|^{j+1}t^{j+1}}{(j+1)!}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de (B.2) converge absolutamente en $\mathcal{L}(X)$, de manera uniforme cuando $t$ recorre un intervalo compacto, y

$$\|S_t\|\le e^{\omega t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t\|B\|)^j}{j!}=e^{(\omega+\|B\|)t}.$$

La continuidad fuerte resulta de la continuidad de $T_t$, de la estimación anterior y de la convergencia uniforme de la serie. La identidad de semigrupo se verifica primero término a término mediante Fubini y la relación $T_t T_s = T_{t+s}$, y después se suman las series absolutamente convergentes.
Si $x \in \mathcal{D}(G)$, la primera iteración satisface

$$\frac{1}{t} S_1(t)x = \frac{1}{t}\int_0^t T_{t-\tau} B T_\tau x \, d\tau \longrightarrow Bx$$

cuando $t \to 0^+$. Para los términos con $j \geq 2$ y $0 < t \leq 1$, la cota ya demostrada da

$$\left\| \sum_{j=2}^{\infty} S_j(t) \right\| \leq e^{\max\{\omega,0\}} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(t\|B\|)^j}{j!} \leq \frac{1}{2} e^{\max\{\omega,0\}+\|B\|} \|B\|^2 t^2.$$

La última desigualdad se obtiene de $e^a - 1 - a \leq \frac{1}{2} e^{\|B\|} a^2$ para $0 \leq a \leq \|B\|$. Por lo tanto, al dividir la suma por $t$ su norma tiende a cero cuando $t \to 0^+$. Junto con $\frac{T_t x - x}{t} \to Gx$, esto muestra que el generador de $(S_t)$ extiende a $G + B$ en $\mathcal{D}(G)$. Denotemos por $H$ ese generador. La fórmula integral

$$S_t x = T_t x + \int_0^t T_{t-\tau} B S_\tau x \, d\tau$$

permite probar también la inclusión inversa de los dominios. En efecto, si $x \in \mathcal{D}(H)$, entonces

$$\frac{T_t x - x}{t} = \frac{S_t x - x}{t} - \frac{1}{t}\int_0^t T_{t-\tau} B S_\tau x \, d\tau.$$

El primer término del lado derecho converge a $Hx$ cuando $t \to 0^+$. Para el integrando del segundo término escribimos

$$T_{t-\tau} B S_\tau x - Bx = T_{t-\tau} B(S_\tau x - x) + (T_{t-\tau} - I)Bx.$$

Si $0 < t \leq 1$, la norma del primer sumando está acotada por $e^{\max\{\omega,0\}} \|B\| \sup_{0\leq s\leq t} \|S_s x - x\|$, y la del segundo por $\sup_{0\leq s\leq t} \|(T_s - I)Bx\|$. Ambas cotas tienden a cero por la continuidad fuerte en el tiempo cero. Por lo tanto,

$$\left\| \frac{1}{t}\int_0^t T_{t-\tau} B S_\tau x \, d\tau - Bx \right\| \leq \sup_{0\leq\tau\leq t} \|T_{t-\tau} B S_\tau x - Bx\| \longrightarrow 0.$$

Se sigue que $\lim_{t\to 0^+} (T_t x - x)/t = Hx - Bx$. La definición de $G$ implica que $x \in \mathcal{D}(G)$ y $Gx = Hx - Bx$. Así, $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(G)$; junto con la inclusión anterior, esto prueba que $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(G)$ y $H = G + B$. Finalmente, $e^{-\mu t} S_t$ tiene generador $G + B - \mu I$ y, si $\omega = 0$ y $\mu \geq \|B\|$, su norma no excede uno. □

### B.4.4 Potenciales de Bessel asociados a un semigrupo

**Lema B.4.18.** (Identidad beta–gamma) Si $a, b > 0$, entonces

$$\int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\, d\theta = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

*Demostración.* Por el teorema de Tonelli,

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)}\, dy\, dx.$$

Con el cambio $r = x + y$, $\theta = \dfrac{x}{x+y}$, cuyo jacobiano es $r$, el miembro derecho se convierte en

$$\left(\int_0^\infty r^{a+b-1} e^{-r}\, dr\right)\left(\int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\, d\theta\right).$$

La primera integral es $\Gamma(a+b)$. □

**Teorema B.4.19.** (Potenciales de Bessel de un semigrupo de contracción) Sea $(T_t)_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigrupo de contracción en un espacio de Banach $X$ y sea $-A$ su generador. Para $s > 0$ definimos

$$J_s x := \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} T_t x\, dt.$$

Entonces:

(a) $J_s \in \mathcal{L}(X)$ y $\|J_s\| \leq 1$;

(b) $J_s J_r = J_{s+r}$ para $r, s > 0$;

(c) $J_2 = (I + A)^{-1}$ y $J_{2m} = (I + A)^{-m}$ para $m \in \mathbb{N}$;

(d) cada $J_s$ es inyectivo y tiene rango denso en $X$.

Para $s > 0$, sea $X_s := J_s(X)$ con la norma $\|J_s x\|_{X_s} := \|x\|_X$; sea $X_0 := X$ y, para $s < 0$, sea $X_s$ la completación de $X$ respecto de $\|x\|_{X_s} := \|J_{-s} x\|_X$. Entonces cada $X_s$ es un espacio de Banach, $X_{s_1} \hookrightarrow X_{s_0}$ continuamente si $s_1 > s_0$, y $J_r$ se extiende de manera única a un isomorfismo isométrico

$$J_r \colon X_s \longrightarrow X_{s+r}$$

para cualesquiera $s \in \mathbb{R}$ y $r > 0$.

*Demostración.* La estimación

$$\|J_s x\|_X \leq \frac{\|x\|_X}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t}\, dt = \|x\|_X$$

prueba (a). Para (b), Fubini y la propiedad de semigrupo dan

$$J_s J_r x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} \tau^{\frac{r}{2}-1} e^{-(t+\tau)} T_{t+\tau} x\, d\tau\, dt.$$

El cambio $a = t + \tau$, $\theta = \frac{t}{a}$ y el Lema B.4.18 transforman esta integral en $J_{s+r} x$. El inciso (c) se sigue de la Proposición B.4.14 con $G = -A$ y $\lambda = 1$.
Si $J_s x = 0$, elegimos $m$ con $2m > s$. Entonces

$$J_{2m} x = J_{2m-s} J_s x = 0.$$

Como $J_{2m} = (I + A)^{-m}$ es inyectivo, $x = 0$. Además, $\operatorname{Ran}(J_s)$ contiene a $\operatorname{Ran}(J_{2m}) = \mathcal{D}((I + A)^m)$, que es denso en $X$. Esto prueba (d).
Para $s > 0$, $J_s \colon X \longrightarrow X_s$ es una isometría suprayectiva, por lo que $X_s$ es completo. Los espacios de orden negativo son completos por construcción. Si $s_1 > s_0 \geq 0$ y $u = J_{s_1} x$, entonces

$$u = J_{s_0} J_{s_1 - s_0} x, \qquad \|u\|_{X_{s_0}} = \|J_{s_1 - s_0} x\|_X \leq \|x\|_X = \|u\|_{X_{s_1}}.$$

Esta identidad define $J_r$ en los espacios positivos. En los espacios negativos, la estimación $\|J_r x\|_{X_{s+r}} = \|x\|_{X_s}$ se verifica primero en el subespacio denso $X$ y permite extender el operador a la completación. La densidad de los rangos de los $J_s$ muestra que estas extensiones tienen rango cerrado y denso; por lo tanto, son suprayectivas. Las identidades de semigrupo prueban que son isométricas y que sus inversas son las traslaciones correspondientes en la escala. □

**Lema B.4.20.** (Fórmula integral para la raíz de un generador) Sea $-A$ el generador de un $C_0$-semigrupo de contracción $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ en un espacio de Banach $X$, sea $a > 0$ y pongamos $B := aI + A$. Definimos el operador acotado

$$C := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-tB}\, dt.$$

Entonces $C^2 = B^{-1}$; en particular, $C$ es inyectivo y tiene rango denso. Ponemos

$$B^{-1/2} := C, \qquad \mathcal{D}(B^{1/2}) := \operatorname{Ran}(C), \qquad B^{1/2} := C^{-1} \colon \operatorname{Ran}(C) \longrightarrow X.$$

Para todo $x \in \mathcal{D}(B)$, la integral de Bochner

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}} \left(x - e^{-tB} x\right) dt \tag{B.3}$$

converge en $X$ y su valor es $B^{\frac{1}{2}} x$. Como $\mathcal{D}(B)$ es denso en $\mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}})$ para la norma $\|x\|_{1/2} := \|B^{1/2} x\|_X$, equivalente a la norma gráfica, esta identidad determina $B^{\frac{1}{2}}$ por cerradura.

*Demostración.* Si $x \in \mathcal{D}(B)$, entonces

$$x - e^{-tB} x = \int_0^t e^{-sB} B x\, ds.$$

Por lo tanto,

$$\|x - e^{-tB} x\|_X \leq \min\{t \|Bx\|_X, 2\|x\|_X\}.$$

Esta cota prueba la convergencia de (B.3) tanto cerca de cero como en el infinito.
La cota $\|e^{-tB}\| \leq e^{-at}$ permite aplicar Fubini a la integral que define $C^2$. Con $r = t + s$ y $\theta = t/r$, la identidad beta da

$$\begin{aligned} C^2 x &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{-1/2} s^{-1/2} e^{-(t+s)B} x\, ds\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-rB} x \left( \int_0^1 \theta^{-1/2} (1 - \theta)^{-1/2}\, d\theta \right) dr \\ &= \int_0^\infty e^{-rB} x\, dr = B^{-1} x. \end{aligned}$$

Por ello $C$ es inyectivo y $\operatorname{Ran}(C) \supset \operatorname{Ran}(C^2) = \operatorname{Ran}(B^{-1}) = \mathcal{D}(B)$ es denso.
Sea $f \in X$ y tomemos $x = B^{-1}f$. El Teorema de Fubini para integrales de Bochner y la identidad anterior dan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}} \left(B^{-1}f - e^{-tB}B^{-1}f\right) dt \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}} \int_0^t e^{-sB} f \, ds \, dt \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-sB} f \, ds = B^{-\frac{1}{2}} f.\end{aligned}$$

En la última igualdad usamos la definición de $C$. Puesto que $B^{-1}f = C^2 f = C(Cf)$, el valor calculado es $Cf = C^{-1}x = B^{1/2}x$. Finalmente, bajo la isometría

$$C^{-1} \colon (\mathcal{D}(B^{1/2}), \|\cdot\|_{1/2}) \longrightarrow X,$$

el subespacio $\mathcal{D}(B) = \operatorname{Ran}(C^2)$ corresponde a $\operatorname{Ran}(C)$, que es denso en $X$. Esto prueba la densidad afirmada. Además $\|x\|_X \le \|C\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_{1/2}$, de modo que $\|\cdot\|_{1/2}$ equivale a la norma gráfica. □

**Proposición B.4.21.** (Cálculo de Laplace para un semigrupo de contracción) Sea $(T_t)_{t\ge 0}$ un $C_0$-semigrupo de contracción en un espacio de Banach $X$. Si $\nu$ es una medida de Borel finita, real o compleja, en $[0,\infty)$, entonces la integral de Bochner

$$\mathcal{L}_\nu(T)x := \int_{[0,\infty)} T_t x \, d\nu(t)$$

define un operador acotado en $X$ y

$$\|\mathcal{L}_\nu(T)\|_{\mathcal{L}(X)} \le |\nu|([0,\infty)).$$

Si $\mu$ es otra medida finita y $\nu * \mu$ denota su convolución, entonces

$$\mathcal{L}_\nu(T)\mathcal{L}_\mu(T) = \mathcal{L}_{\nu*\mu}(T).$$

En particular, el producto de dos transformadas de Laplace de medidas finitas se representa mediante el producto de los operadores correspondientes.

*Demostración.* La continuidad fuerte de $t \mapsto T_t x$ garantiza la medibilidad de Bochner, y la contractividad da

$$\int_{[0,\infty)} \|T_t x\|_X \, d|\nu|(t) \le |\nu|([0,\infty))\|x\|_X.$$

Esto prueba la existencia de la integral y la cota. Para la regla de producto, el Teorema de Fubini para integrales de Bochner proporciona

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\nu(T)\mathcal{L}_\mu(T)x &= \int_{[0,\infty)} \int_{[0,\infty)} T_{t+s} x \, d\mu(s) \, d\nu(t) \\ &= \int_{[0,\infty)} T_r x \, d(\nu * \mu)(r),\end{aligned}$$

donde usamos $T_t T_s = T_{t+s}$. La última afirmación se sigue al tomar transformadas de Laplace escalares. □

**Lema B.4.22.** (Independencia del desplazamiento positivo) Sea $-A$ el generador de un $C_0$-semigrupo de contracción $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach $X$. Para $a>0$ y $s>0$, definamos

$$J_s^{(a)}x := \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-at}e^{-tA}x\,dt.$$

Cada $J_s^{(a)}$ es inyectivo. Equipamos su rango con la norma

$$\left\|J_s^{(a)}x\right\|_{\mathrm{Ran}(J_s^{(a)})} := \|x\|_X.$$

Si $a,b>0$, entonces

$$\mathrm{Ran}(J_s^{(a)}) = \mathrm{Ran}(J_s^{(b)}),$$

y las dos normas de rango son equivalentes.

*Demostración.* Pongamos $\alpha = \frac{s}{2}$. La fórmula de Laplace para las potencias negativas da

$$J_s^{(a)} = (aI+A)^{-\alpha}.$$

La propiedad de semigrupo de estas potencias y la identidad $J_{2m}^{(a)} = (aI+A)^{-m}$ muestran que $J_s^{(a)}$ es inyectivo. En efecto, si $J_s^{(a)}x=0$, elegimos $m\in\mathbb{N}$ con $2m>s$ y obtenemos

$$(aI+A)^{-m}x = J_{2m-s}^{(a)}J_s^{(a)}x = 0.$$

El resolvente de $-A$ es inyectivo, de modo que $x=0$. Por lo tanto, la norma del enunciado está bien definida. Comenzamos con dos desplazamientos $c,d>0$ que satisfacen $|d-c|<c$. Para $\lambda\geq 0$, la serie binomial converge absolutamente y

$$\left(\frac{d+\lambda}{c+\lambda}\right)^\alpha = \left(1+\frac{d-c}{c+\lambda}\right)^\alpha = 1+\sum_{k=1}^\infty \binom{\alpha}{k}(d-c)^k(c+\lambda)^{-k}.$$

Para $k\geq 1$ se tiene

$$(c+\lambda)^{-k} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{t^{k-1}e^{-ct}}{(k-1)!}\,dt.$$

Por lo tanto, la función anterior es la transformada de Laplace de

$$\nu_{c,d} := \delta_0 + \sum_{k=1}^\infty \binom{\alpha}{k}(d-c)^k\frac{t^{k-1}e^{-ct}}{(k-1)!}\,dt.$$

Esta serie converge en variación total porque

$$\sum_{k=1}^\infty \left|\binom{\alpha}{k}\right|\left(\frac{|d-c|}{c}\right)^k < \infty.$$

La Proposición B.4.21 define entonces un operador acotado $Q_{c,d}$ cuyo multiplicador escalar es $\left(\frac{d+\lambda}{c+\lambda}\right)^\alpha$. La regla de producto da

$$(cI+A)^{-\alpha} = (dI+A)^{-\alpha}Q_{c,d}. \tag{B.4}$$

Para desplazamientos arbitrarios $a, b > 0$, elegimos $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{N}} < 2$ y ponemos

$$a_j := a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{N}}, \qquad j \in \{0, \dots, N\}.$$

Entonces $|a_{j+1} - a_j| < a_j$ para todo $j$. Al iterar (B.4), obtenemos un operador acotado $Q_{a,b}$ tal que

$$(aI + A)^{-\alpha} = (bI + A)^{-\alpha} Q_{a,b}.$$

Si $u = J_s^{(a)} x$, esta identidad escribe $u = J_s^{(b)} Q_{a,b} x$ y, en consecuencia,

$$\|u\|_{\mathrm{Ran}(J_s^{(b)})} \le \|Q_{a,b}\| \, \|u\|_{\mathrm{Ran}(J_s^{(a)})}.$$

Al intercambiar $a$ y $b$ se obtiene la inclusión y la estimación inversas. □

**Proposición B.4.23.** (Dualidad complejo–lineal de escalas consistentes) Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach complejos y sea $\mathfrak{b}\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ una forma bilineal continua tal que

$$Y \longrightarrow X', \qquad w \longmapsto \mathfrak{b}(\cdot, w),$$

es un isomorfismo complejo–lineal e isométrico. Sean $(T_t)_{t\ge 0}$ y $(S_t)_{t\ge 0}$ semigrupos de contracción en $X$ y $Y$, respectivamente, y supongamos que

$$\mathfrak{b}(T_t u, w) = \mathfrak{b}(u, S_t w) \tag{B.5}$$

para $t \ge 0$ y para $u, w$ en sendos subespacios densos invariantes. Si $X_s$ y $Y_s$ son las escalas del Teorema B.4.19, entonces la dualidad $\mathfrak{b}$ se prolonga de modo único a un isomorfismo complejo–lineal e isométrico

$$Y_{-s} \xrightarrow{\cong} (X_s)', \qquad s \in \mathbb{R}.$$

En la aplicación a un haz hermitiano $\mathbf{E}$, se toma $X = L^p(M, \mathbf{E})$, $Y = L^{p'}(M, \overline{\mathbf{E}})$ y $\mathfrak{b}(u, \overline{v}) = \displaystyle\int_M \mathbf{h}_{\mathbf{E}}(u, v)\, d\lambda_{\mathbf{g}}$; por lo tanto, el espacio que representa el dual complejo de una escala sobre $\mathbf{E}$ es una escala sobre $\overline{\mathbf{E}}$, no otra copia complejo–lineal de la escala sobre $\mathbf{E}$.

*Demostración.* La identidad (B.5), primero en los subespacios densos y luego por continuidad, y la integral de Bochner que define los potenciales de Bessel implican, para todo $r > 0$,

$$\mathfrak{b}(J_r^X u, w) = \mathfrak{b}(u, J_r^Y w). \tag{B.6}$$

Supongamos primero que $s > 0$. Si $w \in Y$ y $v = J_s^X u \in X_s$, entonces

$$|\mathfrak{b}(v, w)| = |\mathfrak{b}(u, J_s^Y w)| \le \|v\|_{X_s} \|w\|_{Y_{-s}}.$$

Por densidad, el mapeo $w \mapsto \mathfrak{b}(\cdot, w)$ se extiende isométricamente de $Y_{-s}$ a $(X_s)'$. Para ver que es suprayectiva, sea $F \in (X_s)'$. El funcional $u \mapsto F(J_s^X u)$ sobre $X$ está representado por un único $z \in Y$. Como $J_s^Y\colon Y_{-s} \to Y$ es un isomorfismo isométrico, existe un único $w \in Y_{-s}$ con $J_s^Y w = z$. La identidad (B.6), prolongada por

densidad, da $F(v) = \mathfrak{b}(v, w)$ y preserva la norma.
Sea ahora $s = -r < 0$. Si $w = J_r^Y z \in Y_r$, entonces, para $u \in X$,

$$|\mathfrak{b}(u, w)| = |\mathfrak{b}(J_r^X u, z)| \leq \|u\|_{X_{-r}} \|z\|_Y = \|u\|_{X_s} \|w\|_{Y_r}.$$

Esto prolonga $w$ a un elemento de $(X_s)'$. Recíprocamente, si $F \in (X_{-r})'$, su restricción a $X$ está representada por cierto $w \in Y$. La cota de $F$ hace continuo sobre $\mathrm{Ran}(J_r^X)$ el funcional $J_r^X u \mapsto \mathfrak{b}(u, w)$; como ese rango es denso en $X$, se prolonga a un funcional representado por algún $z \in Y$. Entonces (B.6) da $\mathfrak{b}(u, w) = \mathfrak{b}(u, J_r^Y z)$ para todo $u \in X$, luego $w = J_r^Y z \in Y_r$. El argumento conserva las normas. El caso $s = 0$ es la dualidad $Y \cong X'$ ya citada. □

## B.5 Espacios de medida

Pasamos ahora a los conceptos básicos de teoría de la medida. El objetivo de esta sección es fijar de manera unificada el lenguaje que se empleará para definir las integrales de Lebesgue y de Bochner, los espacios $L^p$ y las medidas inducidas por estructuras geométricas.

**Definición B.5.1.** Sea $X$ un conjunto. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una **$\sigma$-álgebra sobre** $X$ si $X \in \mathcal{A}$, si $X \setminus A \in \mathcal{A}$ para cada $A \in \mathcal{A}$ y si $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. En este caso, $(X, \mathcal{A})$ se llama **espacio medible** y los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman conjuntos **$\mathcal{A}$-medibles** o simplemente **medibles** cuando la $\sigma$-álgebra está implícita.

**Definición B.5.2.** Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una **medida** en $(X, \mathcal{A})$ es una función $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(\varnothing) = 0$ y $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ de conjuntos ajenos dos a dos. La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama **espacio de medida**.

Antes de construir medidas concretas, conviene recordar cómo se generan las $\sigma$-álgebras que determinan los conjuntos medibles.

**Definición B.5.3.** Sea $X$ un conjunto y sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. La **$\sigma$-álgebra generada por** $\mathcal{S}$ es $\sigma(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra sobre } X\}$. Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico, la **$\sigma$-álgebra de Borel** de $X$ es $\mathcal{B}(X) := \sigma(\tau)$ y sus elementos se llaman conjuntos de Borel.

**Definición B.5.4.** Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Un conjunto $N \in \mathcal{A}$ es **$\mu$-nulo** si $\mu(N) = 0$. La medida $\mu$, o equivalentemente el espacio $(X, \mathcal{A}, \mu)$, es **completa** si todo subconjunto de un conjunto $\mu$-nulo pertenece a $\mathcal{A}$; por monotonía, dicho subconjunto es entonces también $\mu$-nulo.

**Definición B.5.5.** Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que $\mu$ es **finita** si $\mu(X) < \infty$, y que es **$\sigma$-finita** si existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

La construcción de Carathéodory permite obtener una medida completa a partir de una función definida inicialmente sobre todos los subconjuntos de $X$. Las demostraciones completas de esta construcción, de la regu-

laridad de la medida de Lebesgue y de los teoremas de descomposición de medidas con signo que se enuncian a continuación pueden consultarse en [68, 22, 40].

**Definición B.5.6.** Una **medida exterior** en un conjunto $X$ es una función $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ tal que $\mu^*(\varnothing) = 0$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ siempre que $A \subseteq B$ y $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ para toda sucesión $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

**Teorema B.5.7.** Para un rectángulo compacto $R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, definimos $\mathrm{vol}_n(R) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sea $\mathcal{C}(A)$ la familia de las sucesiones $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de rectángulos compactos tales que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$, y definamos $\lambda_n^*(A) := \inf_{(R_j)\in\mathcal{C}(A)} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(R_j)$. Entonces $\lambda_n^*$ es una medida exterior en $\mathbb{R}^n$, llamada **medida exterior de Lebesgue $n$-dimensional**.

No todos los subconjuntos de un espacio provisto de una medida exterior son necesariamente medibles. La condición siguiente selecciona precisamente aquellos sobre los cuales la medida exterior se vuelve numerablemente aditiva.

**Definición B.5.8.** Sea $\mu^*$ una medida exterior en $X$. Un subconjunto $A \subseteq X$ es **$\mu^*$-medible** si $\mu^*(D) = \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \setminus A)$ para cada $D \subseteq X$. Denotamos por $\mathcal{A}(\mu^*)$ la familia de todos los subconjuntos $\mu^*$-medibles de $X$.

**Teorema B.5.9.** (Carathéodory) Sea $\mu^*$ una medida exterior en $X$. Entonces $\mathcal{A}(\mu^*)$ es una $\sigma$-álgebra sobre $X$ y la restricción $\mu^* \restriction_{\mathcal{A}(\mu^*)}$ es una medida completa. Esta restricción se llama la **medida inducida por** $\mu^*$.

**Definición B.5.10.** La $\sigma$-álgebra de los conjuntos **Lebesgue medibles** de $\mathbb{R}^n$ es $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{A}(\lambda_n^*)$, y la **medida de Lebesgue $n$-dimensional** es la medida completa $\lambda_n := \lambda_n^* \restriction_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$. Cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos simplemente $dx$ en lugar de $d\lambda_n(x)$.

Para relacionar la teoría de la medida con la topología, introducimos las nociones de regularidad y finitud local.

**Definición B.5.11.** Sea $X$ un espacio topológico y sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. La medida $\mu$ es **regular** si, para cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \subseteq X \text{ es abierto y } A \subseteq U\} = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A \text{ es compacto}\}$. La medida $\mu$ es **localmente finita** si cada $x \in X$ posee una vecindad abierta $U$ tal que $\mu(U) < \infty$.

**Proposición B.5.12.** Sea $X$ un espacio topológico, sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y supongamos que $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Si $\mu$ es localmente finita, entonces $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subseteq X$. Recíprocamente, si cada punto de $X$ posee una vecindad compacta y $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subseteq X$, entonces $\mu$ es localmente finita.

*Demostración.* Si $K \subseteq X$ es compacto, para cada $x \in K$ existe una vecindad abierta $U_x$ con $\mu(U_x) < \infty$. Por compacidad, existen $x_1, \ldots, x_r \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_{x_i}$, de modo que $\mu(K) \leq \sum_{i=1}^{r} \mu(U_{x_i}) < \infty$. Recíprocamente, sea $x \in X$ y sea $K$ una vecindad compacta de $x$. Existe un abierto $U$ tal que $x \in U \subseteq K$, y entonces $\mu(U) \leq \mu(K) < \infty$. □

**Definición B.5.13.** Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $P(x)$ una propiedad definida para $x \in X$. Decimos que $P$ se cumple **$\mu$-casi en todas partes**, o para **$\mu$-casi todo** $x \in X$, si existe un conjunto $N \in \mathcal{A}$ con $\mu(N) = 0$ tal que $P(x)$ se cumple para todo $x \in X \setminus N$. Cuando la medida esté implícita, escribiremos simplemente **casi en todas partes**.

**Teorema B.5.14.** La medida de Lebesgue $\lambda_n$ es regular y localmente finita.

La regularidad de $\lambda_n$ permite aproximar cualquier conjunto Lebesgue medible por conjuntos borelianos sin modificarlo salvo en un conjunto nulo. Recordemos que un conjunto $F_\sigma$ es una unión numerable de conjuntos cerrados y que un conjunto $G_\delta$ es una intersección numerable de conjuntos abiertos.

**Teorema B.5.15.** Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Existen un conjunto $F_\sigma$, denotado por $F$, y un conjunto $G_\delta$, denotado por $G$, tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\lambda_n(A \setminus F) = \lambda_n(G \setminus A) = 0$. En particular, $\lambda_n(F) = \lambda_n(A) = \lambda_n(G)$. Si $A$ está acotado, $G$ puede elegirse acotado.

**Definición B.5.16.** Sea $X$ un espacio topológico.

(a) Decimos que $X$ es **localmente compacto** si cada punto de $X$ posee una vecindad compacta.

(b) Decimos que $X$ es **$\sigma$-compacto** si existe una sucesión $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de $X$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

(c) Si $X$ es localmente compacto y de Hausdorff, una medida $\mu$ definida en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ con $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ se llama **medida de Radon** si es regular y localmente finita. Decimos que $\mu$ es **masiva** si, además, es completa y $\mu(U) > 0$ para todo abierto no vacío $U \subseteq X$.

Las dos propiedades siguientes de la medibilidad de Lebesgue se utilizarán al formular el teorema de cambio de variable sobre subconjuntos que no necesariamente son abiertos.

**Proposición B.5.17.** Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ con $A \subseteq \Omega$ y $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, donde $m \geq n$. Entonces $f(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.

*Demostración.* Por el Teorema B.5.15, existe un conjunto $F_\sigma$ tal que $F \subseteq A$ y $N := A \setminus F$ es $\lambda_n$-nulo. Escribiendo $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ con cada $C_j$ cerrado y observando que $C_j \subseteq \Omega$, obtenemos $F = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} (C_j \cap \overline{B}_{\text{euc}}(0,k))$ como unión numerable de compactos. Por continuidad, $f(F)$ es un conjunto $F_\sigma$ y, en particular, es boreliano. Por otra parte, $\Omega$ admite una cubierta numerable por bolas abiertas convexas $(U_r)_{r\in\mathbb{N}}$ con $\overline{U_r} \subseteq \Omega$, y la restricción de $f$ a cada $U_r$ es Lipschitz, pues $Df$ está acotada en $\overline{U_r}$. Un mapeo Lipschitz de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, con $m \geq n$, envía conjuntos $\lambda_n$-nulos en conjuntos $\lambda_m$-nulos; para comprobarlo, se cubre el conjunto nulo por

cubos de diámetros arbitrariamente pequeños y usando que la imagen de cada cubo queda contenida en una bola cuyo diámetro está acotado por la constante de Lipschitz multiplicada por el diámetro del cubo. Por consiguiente, cada $f(N\cap U_r)$ es $\lambda_m$-nulo y también lo es $f(N)=\bigcup_{r=1}^{\infty} f(N\cap U_r)$. Finalmente, $f(A)=f(F)\cup f(N)$ es Lebesgue medible. □

**Proposición B.5.18.** Un subconjunto $A\subseteq\mathbb{R}^n$ es Lebesgue medible si y sólo si para cada $x\in A$ existe un abierto $U_x\subseteq\mathbb{R}^n$ tal que $x\in U_x$ y $A\cap U_x$ es Lebesgue medible.

*Demostración.* La necesidad es inmediata tomando $U_x=\mathbb{R}^n$. Recíprocamente, la familia $(U_x)_{x\in A}$ es una cubierta abierta de $A$. Como $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable y, por lo tanto, de Lindelöf, existe una subcubierta numerable $(U_{x_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Así, $A=\bigcup_{j=1}^{\infty}(A\cap U_{x_j})$ es Lebesgue medible. □

## B.5.1 Medidas con signo

Para representar funcionales lineales que no son necesariamente positivos, necesitamos permitir medidas que tomen valores de ambos signos. Reunimos en una sola definición las versiones finitamente aditiva y numerablemente aditiva.

**Definición B.5.19.** Sea $X$ un conjunto no vacío y sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $X$, es decir, una familia no vacía cerrada bajo complementos relativos a $X$ y uniones finitas. Una función $\lambda\colon\mathcal{A}\longrightarrow[-\infty,\infty]$ es una **medida con signo finitamente aditiva** si $\lambda(\varnothing)=0$, toma a lo más uno de los valores $\infty$ y $-\infty$, y $\lambda(E\cup F)=\lambda(E)+\lambda(F)$ siempre que $E,F\in\mathcal{A}$ sean ajenos. Si $\mathcal{A}$ es una $\sigma$-álgebra y, para toda sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{A}$ de conjuntos ajenos dos a dos, se cumple $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)$, entonces $\lambda$ se llama **medida con signo**.

**Definición B.5.20.** Dos medidas positivas $\mu$ y $\nu$ sobre un espacio medible $(X,\mathcal{A})$ son **mutuamente singulares**, y escribimos $\mu\perp\nu$, si existe $P\in\mathcal{A}$ tal que $\mu(X\setminus P)=0$ y $\nu(P)=0$.

El teorema de Hahn–Jordan muestra que toda medida con signo se descompone de forma canónica como diferencia de dos medidas positivas mutuamente singulares.

**Teorema B.5.21.** (Descomposición de Hahn–Jordan) Sea $(X,\mathcal{A})$ un espacio medible y sea $\lambda\colon\mathcal{A}\longrightarrow[-\infty,\infty]$ una medida con signo. Existen únicas medidas positivas $\lambda^+$ y $\lambda^-$ tales que $\lambda^+\perp\lambda^-$ y $\lambda=\lambda^+-\lambda^-$; además, una de ellas es finita. Para cada $E\in\mathcal{A}$ se tiene $\lambda^+(E)=\sup\{\lambda(F)\mid F\in\mathcal{A},\,F\subseteq E\}$ y $\lambda^-(E)=-\inf\{\lambda(F)\mid F\in\mathcal{A},\,F\subseteq E\}$. Las medidas $\lambda^+$ y $\lambda^-$ se llaman, respectivamente, **variación positiva** y **variación negativa** de $\lambda$, mientras que $|\lambda|:=\lambda^++\lambda^-$ se llama **variación total**. Decimos que $\lambda$ es finita si $|\lambda|(X)<\infty$.

**Definición B.5.22.** Sea $X$ un espacio localmente compacto de Hausdorff. Una medida con signo $\nu$ en $\mathcal{B}(X)$ se llama **medida de Radon con signo** si sus variaciones $\nu^+$ y $\nu^-$ son medidas de Radon positivas.
Una **medida de Radon con signo local** es una familia $(\nu_U)_U$, indexada por los abiertos $U\subseteq X$ con cerradura

compacta, tal que cada $\nu_U$ es una medida de Radon con signo finita en $U$ y

$$\nu_V \restriction_U = \nu_U \qquad \text{si } U \subseteq V.$$

Para $u \in C_c(X)$, escogemos uno de esos abiertos $U$ que contenga $\operatorname{supp}(u)$ y definimos

$$\int_X u \, d\nu := \int_U u \, d\nu_U.$$

El valor no depende de $U$: dos elecciones pueden compararse en su unión, que también tiene cerradura compacta. La misma compatibilidad y la unicidad de Hahn–Jordan permiten definir las variaciones $\nu^+$, $\nu^-$ y $|\nu|$ sobre los borelianos relativamente compactos mediante las variaciones de $\nu_U$. En particular, $|\nu|(K) < \infty$ para cada compacto $K \subseteq X$. Una medida de Radon con signo global determina una familia de este tipo por restricción, pero una familia local no tiene por qué admitir valores en todos los borelianos de $X$.

En lo que sigue, $C_c(X)$ denota el espacio vectorial de las funciones continuas $u\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto. En un espacio localmente compacto general conviene precisar por separado la regularidad de las medidas representantes. Cuando $X$ es $\sigma$-compacto, las medidas positivas del teorema siguiente son de Radon con la convención de regularidad fijada anteriormente.

**Teorema B.5.23.** (Teorema de representación de Riesz en $C_c$) Sea $X$ un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff y sea $L\colon C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal.

(a) Si $L$ es positivo, es decir, $L(u) \geq 0$ para toda $u \in C_c(X)$ con $u \geq 0$, entonces existe una única medida de Borel positiva $\mu$, finita sobre compactos, exteriormente regular sobre los borelianos e interiormente regular sobre los abiertos y sobre los borelianos de medida finita, tal que $L(u) = \displaystyle\int_X u \, d\mu$ para toda $u \in C_c(X)$. La unicidad se entiende entre las medidas con estas propiedades de regularidad.

(b) Si $L$ es localmente acotado, es decir, si para cada compacto $K \subseteq X$ existe $c_K > 0$ tal que $|L(u)| \leq c_K \|u\|_{K,\infty}$ para toda $u \in C_c(X)$ con $\operatorname{supp}(u) \subseteq K$, donde $\|u\|_{K,\infty} := \sup_{x \in K} |u(x)|$, entonces existe una única medida de Radon con signo local $\nu$ tal que $L(u) = \displaystyle\int_X u \, d\nu$ para toda $u \in C_c(X)$. Además, existen medidas de Borel positivas $\mu_1$ y $\mu_2$, con las propiedades de finitud y regularidad del inciso (a), tales que

$$L(u) = \int_X u \, d\mu_1 - \int_X u \, d\mu_2, \qquad u \in C_c(X).$$

En cada abierto $U$ con cerradura compacta se tiene $\nu_U = \mu_1 \restriction_U - \mu_2 \restriction_U$.

Si $X$ es $\sigma$-compacto, las medidas positivas de ambos incisos son medidas de Radon en el sentido de la Definición B.5.16. Esto se aplica, en particular, a los abiertos de $\mathbb{R}^n$ y a las variedades suaves segundo numerables.

*Demostración.* La representación positiva del inciso (a), con sus propiedades de regularidad y unicidad, es el teorema de Riesz; véanse [22, 40]. Deduciremos de ella el inciso (b), sin suponer que una de las medidas representantes tenga masa total finita.

Para $f \in C_c(X)$ con $f \geq 0$, pongamos

$$L^+(f) := \sup\{L(g) \mid g \in C_c(X),\ 0 \leq g \leq f\}.$$

Si $K = \operatorname{supp}(f)$, toda función admisible $g$ tiene soporte en $K$ y $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Por la acotación local de $L$,

$$0 \leq L^+(f) \leq c_K \|f\|_\infty < \infty.$$

La homogeneidad para escalares no negativos se obtiene directamente de la definición, incluido el caso del escalar cero.

Sean $f, h \in C_c(X)$ no negativas. Si $0 \leq g_1 \leq f$ y $0 \leq g_2 \leq h$, entonces $0 \leq g_1 + g_2 \leq f + h$. Tomando supremos, obtenemos $L^+(f+h) \geq L^+(f) + L^+(h)$. Para la desigualdad opuesta, sea $0 \leq g \leq f + h$ y definamos

$$g_1 := \min\{g, f\}, \qquad g_2 := g - g_1.$$

Estas funciones son continuas y de soporte compacto, y satisfacen $0 \leq g_1 \leq f$ y $0 \leq g_2 \leq h$. Por lo tanto, $L(g) = L(g_1) + L(g_2) \leq L^+(f) + L^+(h)$. Al tomar el supremo sobre $g$ concluimos que $L^+$ es aditivo en el cono positivo.

Extendemos $L^+$ a todo $C_c(X)$ mediante $L^+(f-h) := L^+(f) - L^+(h)$ para $f, h \geq 0$. Si $f - h = f_1 - h_1$, entonces $f + h_1 = f_1 + h$, y la aditividad probada muestra que ambas expresiones dan el mismo valor. Así obtenemos un funcional lineal positivo. Como $g = f$ es admisible en el supremo cuando $f \geq 0$, se tiene $L^+(f) \geq L(f)$. En consecuencia, $L^- := L^+ - L$ es también un funcional lineal positivo. Aplicando (a) a $L^+$ y a $L^-$, obtenemos las medidas $\mu_1, \mu_2$ con la representación afirmada. Las dos integrales son finitas para cada $u \in C_c(X)$, porque las medidas son finitas sobre su soporte.

Sea ahora $U \subseteq X$ abierto con cerradura compacta. Entonces $\mu_i(U) \leq \mu_i(\overline{U}) < \infty$ para $i = 1, 2$. Las restricciones de $\mu_i$ a $U$ son regulares: todos sus borelianos tienen medida finita, y la regularidad exterior se conserva al intersectar los abiertos aproximantes con $U$. La diferencia

$$\nu_U := \mu_1 \restriction_U - \mu_2 \restriction_U$$

es una medida con signo finita. Para comprobar que sus variaciones son regulares, pongamos $\eta := \mu_1 \restriction_U + \mu_2 \restriction_U$. La descomposición de Hahn da $0 \leq \nu_U^{\pm} \leq \eta$. Dado un boreliano $E \subseteq U$ y $\varepsilon > 0$, la regularidad y finitud de $\eta$ permiten elegir un compacto $K \subseteq E$ y un abierto $O \supseteq E$ en $U$ tales que $\eta(O \setminus K) < \varepsilon$. Entonces

$$0 \leq \nu_U^{\pm}(O) - \nu_U^{\pm}(K) = \nu_U^{\pm}(O \setminus K) < \varepsilon.$$

Esto demuestra la regularidad de ambas variaciones. Así, $\nu_U$ es una medida de Radon con signo finita. Estas diferencias son compatibles al restringir de un abierto a otro, por lo que definen una medida de Radon con signo local $\nu$.

Para la unicidad, sean $\nu$ y $\widetilde{\nu}$ dos familias representantes y fijemos $U$ como antes. Una función de $C_c(U)$ se prolonga por cero a un elemento de $C_c(X)$, de modo que la medida finita $\lambda := \nu_U - \widetilde{\nu}_U$ se anula sobre $C_c(U)$. Por Hahn–Jordan, $\int_U u\, d\lambda^+ = \int_U u\, d\lambda^-$ para toda $u \in C_c(U)$. La unicidad en (a) implica $\lambda^+ = \lambda^-$; como son mutuamente singulares, ambas son nulas. Así, $\nu_U = \widetilde{\nu}_U$ para todo $U$.

Finalmente, supongamos que $X$ es $\sigma$-compacto y sea $\mu$ cualquiera de las medidas positivas obtenidas. Esco-

jamos compactos crecientes $K_j$ que cubran $X$. Para un boreliano $E$, la continuidad creciente da

$$\mu(E) = \lim_{j\to\infty} \mu(E \cap K_j).$$

Cada $E \cap K_j$ tiene medida finita y es interiormente regular por (a). Por ello $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E,\ K \text{ compacto}\}$, también cuando $\mu(E) = \infty$. La regularidad exterior ya forma parte de (a), y la finitud sobre compactos implica la finitud local en un espacio localmente compacto. Esto prueba la última afirmación. □

La familia local $\nu$ no debe confundirse con una diferencia definida sobre todos los borelianos de $X$: cuando $\mu_1(E) = \mu_2(E) = \infty$, la expresión $\mu_1(E) - \mu_2(E)$ no tiene sentido. Por ejemplo, $L(u) = \int_{\mathbb{R}} xu(x)\,dx$ es localmente acotado en $C_c(\mathbb{R})$ y se representa mediante $\max\{x,0\}\,dx$ y $\max\{-x,0\}\,dx$, ambas de masa total infinita. En cambio, sobre cada abierto relativamente compacto las dos medidas son finitas y su diferencia está bien definida.

## B.6 Integración de Lebesgue y de Bochner

Una vez fijadas las nociones básicas de medida, recordamos la construcción de la integral de Lebesgue y su extensión a funciones con valores en espacios de Banach mediante la integral de Bochner. Comenzaremos con la integral de Riemann vectorial, que permite introducir de manera natural la compatibilidad de la integración con operadores lineales. Para un tratamiento más detallado de la integral de Bochner, puede consultarse [45].

### B.6.1 La integral de Riemann con valores en un espacio de Banach

**Definición B.6.1.** Sea $E$ un espacio de Banach, sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y sea $f : [a,b] \longrightarrow E$. Una **partición etiquetada** de $[a,b]$ es un par formado por una partición $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ y puntos $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Definimos la norma de la partición por $|\mathcal{P}| := \max_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1})$. Decimos que $f$ es **Riemann integrable** si existe $I \in E$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ con la propiedad de que $\left\| \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - I \right\|_E < \varepsilon$ para toda partición etiquetada con $|\mathcal{P}| < \delta$. En este caso, $I$ es único y se denota por $\int_a^b f(t)\,dt$.

**Teorema B.6.2.** (Graves) Sea $E$ un espacio de Banach. Toda función continua $f : [a,b] \longrightarrow E$ es Riemann integrable.

*Demostración.* Como $[a,b]$ es compacto, $f$ es uniformemente continua. Para una partición etiquetada $(\mathcal{P}, \tau)$, denotemos por

$$S(f; \mathcal{P}, \tau) := \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

su suma de Riemann. Fijemos $\varepsilon > 0$. La continuidad uniforme permite elegir $\delta > 0$ de modo que

$$|s - t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(s) - f(t)\|_E < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Sean $(\mathcal{P}, \tau)$ y $(\mathcal{Q}, \sigma)$ dos particiones etiquetadas con normas menores que $\delta$, y sea $\mathcal{R}$ la partición obtenida al

reunir y ordenar los puntos de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$. Elijamos una etiqueta en cada subintervalo de $\mathcal{R}$. Cada uno de esos subintervalos está contenido en un intervalo de $\mathcal{P}$; su etiqueta y la etiqueta correspondiente de $\mathcal{P}$ distan menos que $\delta$. Por la desigualdad triangular,

$$\left\|S(f;\mathcal{P},\tau)-S(f;\mathcal{R},\rho)\right\|_E \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\sum_{J\in\mathcal{R}}|J| = \frac{\varepsilon}{4}.$$

La misma estimación vale con $\mathcal{Q}$ en lugar de $\mathcal{P}$. En consecuencia,

$$\left\|S(f;\mathcal{P},\tau)-S(f;\mathcal{Q},\sigma)\right\|_E < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para cada $k\in\mathbb{N}$, elijamos una partición etiquetada $(\mathcal{P}_k,\tau^{(k)})$ de norma menor que $1/k$, y pongamos $S_k := S(f;\mathcal{P}_k,\tau^{(k)})$. La estimación anterior muestra que $(S_k)$ es de Cauchy. Como $E$ es completo, existe $I\in E$ tal que $S_k\to I$.

Resta comprobar que todas las sumas suficientemente finas convergen a $I$. Dados $\varepsilon>0$, repetimos el argumento anterior con $\varepsilon$ en lugar de la cantidad fijada al comienzo y obtenemos el $\delta$ correspondiente. Elegimos $k$ tan grande que $|\mathcal{P}_k|<\delta$ y $\|S_k-I\|_E<\varepsilon/2$. Para cualquier partición etiquetada $(\mathcal{P},\tau)$ con $|\mathcal{P}|<\delta$, la comparación mediante una refinación común da

$$\|S(f;\mathcal{P},\tau)-I\|_E \leq \|S(f;\mathcal{P},\tau)-S_k\|_E + \|S_k-I\|_E < \varepsilon.$$

Esta es precisamente la integrabilidad de Riemann de $f$. □

**Proposición B.6.3.** Sean $E$ un espacio de Banach y $f,g\colon[a,b]\longrightarrow E$ funciones Riemann integrables. Entonces $\alpha f+\beta g$ es Riemann integrable para cualesquiera $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ y $\displaystyle\int_a^b(\alpha f+\beta g)(t)\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt+\beta\int_a^b g(t)\,dt$. Además, $\displaystyle\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_E \leq \int_a^b\|f(t)\|_E\,dt$. En particular, el mapeo $\mathcal{I}\colon C([a,b],E)\longrightarrow E$, dado por $\mathcal{I}(f) := \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, es lineal y acotado, y satisface $\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{L}(C([a,b],E),E)}\leq b-a$ respecto de la norma $\|f\|_{C([a,b],E)} := \max_{t\in[a,b]}\|f(t)\|_E$.

*Demostración.* La linealidad se obtiene tomando combinaciones lineales de las sumas de Riemann. Para la desigualdad, cada suma de Riemann satisface $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^n f(\tau_i)(t_i-t_{i-1})\right\|_E \leq \sum_{i=1}^n\|f(\tau_i)\|_E(t_i-t_{i-1})$; al pasar al límite se obtiene la afirmación. Finalmente, $\displaystyle\int_a^b\|f(t)\|_E\,dt\leq(b-a)\|f\|_{C([a,b],E)}$. □

La integral también conmuta con operadores lineales continuos y, bajo una hipótesis adicional de integrabilidad, con operadores lineales cerrados.

**Proposición B.6.4.** Sean $E$ y $F$ espacios de Banach y sea $f\colon[a,b]\longrightarrow E$ Riemann integrable.

(a) Si $T\in\mathcal{L}(E,F)$, entonces $T\circ f$ es Riemann integrable y $\displaystyle T\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b T(f(t))\,dt$.

(b) Si $T\colon \mathrm{Dom}(T)\subseteq E\longrightarrow F$ es un operador lineal cerrado, $f(t)\in\mathrm{Dom}(T)$ para todo $t\in[a,b]$ y $T\circ f$ es

Riemann integrable, entonces $\int_a^b f(t)\,dt \in \mathrm{Dom}(T)$ y se cumple la misma igualdad.

*Demostración.* La primera afirmación se sigue al aplicar $T$ a las sumas de Riemann y usar su continuidad. Para la segunda, sea $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de sumas de Riemann de $f$ asociadas a particiones cuya norma converge a cero. Como $\mathrm{Dom}(T)$ es un subespacio vectorial, $S_k \in \mathrm{Dom}(T)$ y $T(S_k)$ es la suma de Riemann correspondiente a $T\circ f$. Por lo tanto, $S_k \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ en $E$ y $T(S_k) \longrightarrow \int_a^b T(f(t))\,dt$ en $F$. La cerradura de $T$ concluye la prueba. □

**Teorema B.6.5.** (Teorema fundamental del cálculo para funciones con valores en un espacio de Banach) Sea $E$ un espacio de Banach y sea $F\colon [a,b] \longrightarrow E$ una función de clase $C^1$. Entonces

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Más generalmente, para cualesquiera $s,t \in [a,b]$ con $s \le t$ se tiene $F(t) - F(s) = \int_s^t F'(\tau)\,d\tau$.

*Demostración.* La continuidad de $F'$ y el Teorema B.6.2 garantizan que la integral está bien definida. Sea $\varphi \in E'$. La función escalar $\varphi\circ F$ es de clase $C^1$ y, por la regla de la cadena, $(\varphi\circ F)'(t) = \varphi(F'(t))$. El teorema fundamental del cálculo para funciones reales y la Proposición B.6.4 implican

$$\varphi(F(b) - F(a)) = \int_a^b \varphi(F'(t))\,dt = \varphi\left(\int_a^b F'(t)\,dt\right).$$

Por lo tanto, $\varphi\left(F(b) - F(a) - \int_a^b F'(t)\,dt\right) = 0$ para todo $\varphi \in E'$. Como el dual continuo separa puntos, se obtiene la identidad. La fórmula sobre $[s,t]$ se demuestra de la misma manera. □

**Proposición B.6.6.** (Integración por partes para funciones con valores en un espacio de Banach) Sea $E$ un espacio de Banach, sea $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ de clase $C^1$ y sea $F\colon [a,b] \longrightarrow E$ de clase $C^1$. Entonces

$$\int_a^b \alpha(t)F'(t)\,dt = \alpha(b)F(b) - \alpha(a)F(a) - \int_a^b \alpha'(t)F(t)\,dt. \tag{B.7}$$

*Demostración.* El mapeo $B\colon \mathbb{K}\times E \longrightarrow E$, definido por $B(\lambda, v) := \lambda v$, es bilineal continuo. La regla del producto proporciona

$$\frac{d}{dt}\big(\alpha(t)F(t)\big) = \alpha'(t)F(t) + \alpha(t)F'(t).$$

Aplicando el Teorema B.6.5 a la función $t \longmapsto \alpha(t)F(t)$ y utilizando la linealidad de la integral, obtenemos

$$\alpha(b)F(b) - \alpha(a)F(a) = \int_a^b \alpha'(t)F(t)\,dt + \int_a^b \alpha(t)F'(t)\,dt.$$

Al despejar la última integral se obtiene (B.7). □

## B.6.2 La integral de Lebesgue

A partir de ahora, $(M, \mathcal{A}, \mu)$ denotará un espacio de medida. La medibilidad de una función se entenderá siempre respecto de la $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ en el dominio y de la $\sigma$-álgebra de Borel en el contradominio.

**Definición B.6.7.** Sea $Y$ un espacio topológico. Una función $f\colon M \longrightarrow Y$ es **$\mathcal{A}$-medible**, o simplemente **medible**, si $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ para todo abierto $U \subseteq Y$. En particular, para funciones $f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$, consideramos en $\overline{\mathbb{R}}$ la topología del orden.

La integral de Lebesgue se construye primero para funciones simples no negativas. Utilizaremos una sola noción de función simple, válida tanto para funciones escalares como para funciones vectoriales.

**Definición B.6.8.** Sea $V$ un espacio vectorial. Una función $s\colon M \longrightarrow V$ es **simple** si existen conjuntos medibles ajenos dos a dos $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$ y vectores $v_1, \ldots, v_r \in V$ tales que $s = \sum_{i=1}^{r} v_i \mathbf{1}_{A_i}$, donde $\mathbf{1}_A$ denota la función indicadora de $A$.

**Definición B.6.9.** Sea $s\colon M \longrightarrow [0, \infty)$ una función simple y escribamos $s = \sum_{i=1}^{r} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, donde $a_i \geq 0$ y los conjuntos $A_i$ son medibles y ajenos dos a dos. Definimos $\int_M s\, d\mu := \sum_{i=1}^{r} a_i \mu(A_i)$, con la convención $0 \cdot \infty = 0$. Esta definición no depende de la representación elegida para $s$.

**Definición B.6.10.** Sea $f\colon M \longrightarrow [0, \infty]$ medible. Definimos su **integral de Lebesgue** por $\int_M f\, d\mu := \sup \left\{ \int_M s\, d\mu \;\middle|\; s\colon M \longrightarrow [0, \infty) \text{ es simple y } 0 \leq s \leq f \right\}$. Si $A \in \mathcal{A}$, definimos $\int_A f\, d\mu := \int_M f \mathbf{1}_A\, d\mu$.

El primer teorema fundamental de convergencia expresa la continuidad de la integral respecto de límites crecientes.

**Teorema B.6.11.** (Teorema de la convergencia monótona) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n\colon M \longrightarrow [0, \infty]$ tal que $f_n \leq f_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para $\mu$-casi todo $x \in M$. Entonces $f$ es medible y $\int_A f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n\, d\mu$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

*Demostración.* Al modificar todas las funciones sobre un único conjunto nulo, podemos suponer que la convergencia y la monotonía valen en todo punto. Entonces $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, por lo que $f$ es medible. Basta probar la igualdad para $A = M$, pues el caso general se obtiene aplicando el mismo argumento a $f_n \mathbf{1}_A$.
Por monotonía de la integral, la sucesión $\int_M f_n\, d\mu$ es creciente y

$$I := \lim_{n \to \infty} \int_M f_n\, d\mu \leq \int_M f\, d\mu.$$

Para la desigualdad opuesta, sea $s$ una función simple no negativa con $s \le f$, y fijemos $c \in (0,1)$. Definimos

$$A_n := \{x \in M \mid f_n(x) \ge c\, s(x)\}.$$

Los conjuntos $A_n$ son medibles, forman una sucesión creciente y su unión es $M$: si $s(x) = 0$, entonces $x \in A_n$ para todo $n$; si $s(x) > 0$, la convergencia $f_n(x) \to f(x) \ge s(x) > c\,s(x)$ implica que $x \in A_n$ para $n$ suficientemente grande. Por lo tanto,

$$\int_M f_n \, d\mu \ge c \int_{A_n} s \, d\mu.$$

Si $s = \sum_{j=1}^{r} a_j \mathbf{1}_{B_j}$ con $a_j \ge 0$ y los $B_j$ ajenos dos a dos, la continuidad desde abajo de la medida da

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} s \, d\mu = \sum_{j=1}^{r} a_j \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \cap B_j) = \sum_{j=1}^{r} a_j \mu(B_j) = \int_M s \, d\mu.$$

En consecuencia, $I \ge c \displaystyle\int_M s \, d\mu$. Haciendo $c \uparrow 1$ y tomando después el supremo sobre todas las funciones simples $0 \le s \le f$, obtenemos

$$I \ge \int_M f \, d\mu.$$

Junto con la primera desigualdad, esto prueba la igualdad. □

**Lema B.6.12.** (de Fatou) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n \colon M \longrightarrow [0,\infty]$. Entonces

$$\int_M \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu.$$

*Demostración.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $g_n := \inf_{k\ge n} f_k$. La sucesión $(g_n)$ es creciente y converge puntualmente a $\liminf_{n\to\infty} f_n$. Por el Teorema B.6.11,

$$\int_M \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M g_n \, d\mu.$$

Como $g_n \le f_k$ para todo $k \ge n$, se cumple $\displaystyle\int_M g_n \, d\mu \le \inf_{k\ge n} \int_M f_k \, d\mu$. Al hacer $n \to \infty$ se obtiene la desigualdad deseada. □

**Definición B.6.13.** Sea $f \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y definamos $f^+ := \max\{f, 0\}$ y $f^- := \max\{-f, 0\}$. Siempre que al menos una de las cantidades $\displaystyle\int_M f^+ \, d\mu$ y $\displaystyle\int_M f^- \, d\mu$ sea finita, definimos $\displaystyle\int_M f \, d\mu := \int_M f^+ \, d\mu - \int_M f^- \, d\mu$. Decimos que $f$ es **Lebesgue integrable**, o simplemente **integrable**, si $\displaystyle\int_M |f| \, d\mu < \infty$. Denotamos por $\mathcal{L}^1(M,\mu)$ el espacio vectorial de las funciones integrables y por $L^1(M,\mu)$ el espacio de sus clases de equivalencia módulo igualdad casi en todas partes. Para $A \in \mathcal{A}$, escribimos $\displaystyle\int_A f \, d\mu := \int_M f \mathbf{1}_A \, d\mu$.

**Teorema B.6.14.** (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para $\mu$-casi todo $x \in M$. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}^1(M,\mu)$ tal que $|f_n| \le g$ $\mu$-casi en todas partes para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f \in \mathcal{L}^1(M,\mu)$, $\displaystyle\int_M |f_n - f|\,d\mu \longrightarrow 0$ y $\displaystyle\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

*Demostración.* La desigualdad $|f_n| \le g$ implica $g \ge 0$ casi en todas partes; si se desea, puede reemplazarse $g$ por $|g|$. Podemos modificar las funciones sobre un conjunto nulo común y suponer que la convergencia y la dominación se cumplen en todo punto. El límite puntual $f$ es medible y satisface $|f| \le g$, de modo que $f \in \mathcal{L}^1(M,\mu)$. Además,

$$0 \le |f_n - f| \le 2g \quad \text{y} \quad 2g - |f_n - f| \longrightarrow 2g$$

puntualmente. Al aplicar el Lema de Fatou a las funciones no negativas $2g - |f_n - f|$, obtenemos

$$2\int_M g\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\left(2\int_M g\,d\mu - \int_M |f_n - f|\,d\mu\right) = 2\int_M g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_M |f_n - f|\,d\mu.$$

Como $\displaystyle\int_M g\,d\mu < \infty$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_M |f_n - f|\,d\mu = 0.$$

Finalmente, para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$\left|\int_A f_n\,d\mu - \int_A f\,d\mu\right| \le \int_A |f_n - f|\,d\mu \le \int_M |f_n - f|\,d\mu \longrightarrow 0.$$

□

En espacios euclidianos, la integral de Lebesgue se transforma mediante el jacobiano de un difeomorfismo.

**Teorema B.6.15.** (Teorema de cambio de variable) Sean $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y sea $\varphi\colon \Omega \longrightarrow \Omega'$ un difeomorfismo de clase $C^1$.

(a) Si $f\colon \Omega' \longrightarrow [0,\infty]$ es medible, entonces $\displaystyle\int_\Omega f(\varphi(x))|\det D\varphi(x)|\,d\lambda_n(x) = \int_{\Omega'} f(y)\,d\lambda_n(y)$.

(b) Una función medible $f\colon \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable si y sólo si $(f\circ\varphi)|\det D\varphi|$ es integrable en $\Omega$ y, en este caso, se cumple la misma igualdad.

Una demostración a partir de la aproximación por cubos y del comportamiento local de un difeomorfismo $C^1$ puede consultarse en [68, 22].

**Corolario B.6.16.** Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tales que $A \subseteq \Omega$ y $\lambda_n(A \setminus \operatorname{int}(A)) = 0$. Supongamos que $\Phi \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ y que $\Phi\restriction_{\operatorname{int}(A)}\colon \operatorname{int}(A) \longrightarrow \Phi(\operatorname{int}(A))$ es un difeomorfismo.

(a) Si $f\colon \Phi(A) \longrightarrow [0,\infty]$ es medible, entonces $\displaystyle\int_{\Phi(A)} f(y)\,d\lambda_n(y) = \int_A f(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|\,d\lambda_n(x)$.

(b) Una función medible $f\colon \Phi(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable si y sólo si $(f\circ\Phi)|\det D\Phi|$ es integrable en $A$ y, en este caso, se cumple la misma igualdad.

*Demostración.* Sea $N := A \setminus \operatorname{int}(A)$. Por la Proposición B.5.17, $\Phi(N)$ es Lebesgue medible y $\lambda_n(\Phi(N)) = 0$, pues $\Phi$ es localmente Lipschitz. Además, $\Phi(A) \setminus \Phi(\operatorname{int}(A)) \subseteq \Phi(N)$. Por lo tanto, las integrales sobre $A$ y $\Phi(A)$ no cambian al reemplazar estos conjuntos por $\operatorname{int}(A)$ y $\Phi(\operatorname{int}(A))$, respectivamente. El resultado se sigue del Teorema B.6.15. □

**Teorema B.6.17.** (Teorema de Tonelli) Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida $\sigma$-finitos. Si $f : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ es medible, entonces las funciones

$$x \longmapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y), \qquad y \longmapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$

son medibles y

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left( \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y),$$

con valores permitidos en $[0, \infty]$.

*Demostración.* La igualdad se verifica primero para indicadores de rectángulos medibles y, por aditividad, para funciones simples no negativas. Si $f_k$ es una sucesión creciente de funciones simples no negativas con $f_k \to f$, el Teorema B.6.11, aplicado primero a las integrales interiores y después a las exteriores, permite pasar al límite y prueba las tres igualdades. La medibilidad de las integrales parciales se obtiene en el mismo paso como límite creciente de funciones medibles. □

**Teorema B.6.18.** (Teorema de Fubini) Sea $1 \le m < n$ e identifiquemos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$, entonces, para $\lambda_{n-m}$-casi todo $y \in \mathbb{R}^{n-m}$, la función $x \longmapsto f(x,y)$ pertenece a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$. La función $F(y) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\lambda_m(x)$, definida arbitrariamente en el conjunto excepcional, pertenece a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n-m}, \lambda_{n-m})$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} F(y)\, d\lambda_{n-m}(y)$. Análogamente, para $\lambda_m$-casi todo $x \in \mathbb{R}^m$, la función $y \longmapsto f(x,y)$ es integrable. Si $H(x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-m}} f(x,y)\, d\lambda_{n-m}(y)$, entonces $H \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^m} H(x)\, d\lambda_m(x)$.

*Demostración.* Aplicamos el Teorema de Tonelli a la función no negativa $|f|$. Puesto que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\, d\lambda_m(x) \right) d\lambda_{n-m}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, d\lambda_n < \infty,$$

la integral interior de $|f|$ es finita para $\lambda_{n-m}$-casi todo $y$. Para esos $y$, la función $x \mapsto f(x,y)$ es integrable. Escribiendo $f = f^+ - f^-$ y aplicando Tonelli por separado a $f^+$ y $f^-$, obtenemos la medibilidad de

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\lambda_m(x)$$

fuera del conjunto excepcional y la identidad

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} F(y)\, d\lambda_{n-m}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f^+\, d\lambda_n - \int_{\mathbb{R}^n} f^-\, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n.$$

Asimismo,

$$|F(y)| \le \int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\, d\lambda_m(x)$$

para casi todo $y$, y el miembro derecho es integrable; por lo tanto $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n-m})$. El argumento con los papeles de $x$ y $y$ intercambiados proporciona las afirmaciones sobre $H$. □

Antes de enunciar la consecuencia que garantiza la unicidad de las derivadas débiles, fijamos la noción de integrabilidad local.

**Definición B.6.19.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Una función medible $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es **localmente integrable** si $\int_K |f|\, d\lambda_n < \infty$ para todo compacto $K \subseteq \Omega$. Denotamos por $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ el espacio de tales funciones y por $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ el espacio de sus clases de equivalencia módulo igualdad casi en todas partes.

La consecuencia siguiente expresa que una función localmente integrable queda determinada, salvo en un conjunto nulo, por sus integrales contra funciones de prueba. Se utilizará repetidamente para justificar la unicidad de las derivadas débiles.

**Proposición B.6.20.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ satisface $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\, d\lambda_n(x) = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $f = 0$ casi en todas partes en $\Omega$.

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que $f$ no se anula casi en todas partes. Una agotación de $\Omega$ por compactos y la descomposición $\{|f| > 0\} = \bigcup_{j \ge 1} \{|f| \ge j^{-1}\}$ proporcionan un compacto $K \Subset \Omega$ y un $j \ge 1$ para los cuales $K \cap \{|f| \ge j^{-1}\}$ tiene medida positiva. Dividimos el círculo unidad en un número finito de sectores de abertura menor que $\frac{\pi}{2}$. Uno de ellos determina un conjunto medible $A \subseteq K$, de medida positiva, y un número $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$, tales que

$$\mathrm{Re}(\omega f) \ge c|f| \ge \frac{c}{j} \quad \text{en } A$$

para alguna constante $c > 0$. En el caso real basta tomar uno de los dos signos.
Por la regularidad de la medida de Lebesgue elegimos un compacto $C \subseteq A$ de medida positiva. Entonces $I_C := \int_C |f|\, d\lambda_n > 0$. La continuidad absoluta de la integral y la regularidad exterior permiten elegir un abierto $U$ con $C \subseteq U \Subset \Omega$ y

$$\int_{U \setminus C} |f|\, d\lambda_n < \frac{c}{2} I_C.$$

Por la Proposición 1.3.6, existe $\eta \in C_c^\infty(U)$ tal que $0 \le \eta \le 1$ y $\eta = 1$ en $C$. Aplicando la hipótesis a $\varphi = \omega\eta$ obtenemos, en cambio,

$$\mathrm{Re} \int_\Omega f\varphi\, d\lambda_n \ge cI_C - \int_{U\setminus C} |f|\, d\lambda_n > \frac{c}{2} I_C > 0,$$

una contradicción. Por lo tanto, $f = 0$ casi en todas partes en $\Omega$. □

### B.6.3 La integral de Bochner

Consideremos ahora funciones definidas en $(M, \mathcal{A}, \mu)$ y con valores en un espacio de Banach $E$. La noción de función simple introducida anteriormente sigue siendo válida tomando $V = E$; la medibilidad fuerte se obtiene mediante aproximación puntual por dichas funciones, mientras que la integral de Bochner se obtiene mediante aproximación en norma $L^1$.

**Definición B.6.21.** Sea $E$ un espacio de Banach.

(a) Una función $f : M \longrightarrow E$ es **fuertemente medible** si existe una sucesión $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones simples $s_k : M \longrightarrow E$ tal que $s_k(x) \longrightarrow f(x)$ para $\mu$-casi todo $x \in M$.

(b) Una función simple $s : M \longrightarrow E$ es **integrable** si $\displaystyle\int_M \|s\|_E \, d\mu < \infty$. Si $s = \sum_{i=1}^{r} v_i \mathbf{1}_{A_i}$, donde los $A_i$ son medibles y ajenos dos a dos y se han omitido los términos con $v_i = 0$, entonces $\mu(A_i) < \infty$ para cada $i$ y definimos $\displaystyle\int_M s \, d\mu := \sum_{i=1}^{r} v_i \mu(A_i)$.

(c) Una función fuertemente medible $f : M \longrightarrow E$ es **Bochner integrable** si existe una sucesión $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones simples integrables tal que $\displaystyle\int_M \|f - s_k\|_E \, d\mu \longrightarrow 0$. En este caso, definimos $\displaystyle\int_M f \, d\mu := \lim_{k\to\infty} \int_M s_k \, d\mu$. Denotamos por $\mathcal{L}^1(M, \mu, E)$ el espacio de las funciones Bochner integrables y por $L^1(M, \mu, E)$ el espacio de sus clases de equivalencia módulo igualdad casi en todas partes. Para $A \in \mathcal{A}$, definimos $\displaystyle\int_A f \, d\mu := \int_M f \mathbf{1}_A \, d\mu$.

**Lema B.6.22.** La integral de una función simple integrable $s : M \longrightarrow E$ está bien definida, es decir, no depende de la representación de $s$, y satisface $\displaystyle\left\| \int_M s \, d\mu \right\|_E \leq \int_M \|s\|_E \, d\mu$.

*Demostración.* Dos representaciones de $s$ admiten una refinación común formada por las intersecciones de sus conjuntos de nivel, y la suma que define la integral coincide al calcularla sobre dicha refinación. Si $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} v_i \mathbf{1}_{A_i}$ con los $A_i$ ajenos dos a dos, entonces $\displaystyle\left\| \int_M s \, d\mu \right\|_E = \left\| \sum_{i=1}^{r} v_i \mu(A_i) \right\|_E \leq \sum_{i=1}^{r} \|v_i\|_E \mu(A_i) = \int_M \|s\|_E \, d\mu$. □

El criterio siguiente muestra que, una vez establecida la medibilidad fuerte, la integrabilidad de Bochner queda caracterizada enteramente por la integrabilidad de la norma.

**Proposición B.6.23.** Sea $E$ un espacio de Banach y sea $f : M \longrightarrow E$ fuertemente medible. Entonces $f$ es Bochner integrable si y sólo si $\|f\|_E \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$. En este caso, la integral de Bochner está bien definida, el mapeo $\mathcal{I}_B : \mathcal{L}^1(M, \mu, E) \longrightarrow E$, dado por $\mathcal{I}_B(f) := \displaystyle\int_M f \, d\mu$, es lineal y satisface $\displaystyle\left\| \int_M f \, d\mu \right\|_E \leq \int_M \|f\|_E \, d\mu$.

*Demostración.* Como la norma es continua, la medibilidad fuerte de $f$ implica que $\|f\|_E$ es medible. Supongamos primero que $f$ es Bochner integrable y sea $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples integrables tal que $\displaystyle\int_M \|f - s_k\|_E \, d\mu \longrightarrow 0$. Por el Lema B.6.22, $\displaystyle\left\| \int_M s_k \, d\mu - \int_M s_\ell \, d\mu \right\|_E \leq \int_M \|s_k - s_\ell\|_E \, d\mu \leq$

$\int_M \|s_k - f\|_E \, d\mu + \int_M \|f - s_\ell\|_E \, d\mu$, por lo que la sucesión de integrales es de Cauchy. El mismo argumento aplicado simultáneamente a dos sucesiones aproximantes demuestra que el límite no depende de la elección de la sucesión. Además, para cualquier $k$ se tiene $\int_M \|f\|_E \, d\mu \leq \int_M \|f - s_k\|_E \, d\mu + \int_M \|s_k\|_E \, d\mu < \infty$, y $\left| \int_M \|s_k\|_E \, d\mu - \int_M \|f\|_E \, d\mu \right| \leq \int_M \|s_k - f\|_E \, d\mu \longrightarrow 0$. Por consiguiente, $\left\| \int_M f \, d\mu \right\|_E = \lim_{k\to\infty} \left\| \int_M s_k \, d\mu \right\|_E \leq \lim_{k\to\infty} \int_M \|s_k\|_E \, d\mu = \int_M \|f\|_E \, d\mu$. La linealidad se obtiene aproximando dos funciones Bochner integrables por funciones simples y tomando combinaciones lineales.

Recíprocamente, supongamos que $\|f\|_E \in \mathcal{L}^1(M,\mu)$. Por la medibilidad fuerte, existe una sucesión de funciones simples $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $t_k(x) \longrightarrow f(x)$ para $\mu$-casi todo $x \in M$. Definamos $B_k := \{x \in M \mid \|t_k(x)\|_E \leq 2\|f(x)\|_E\}$ y $s_k := t_k \mathbf{1}_{B_k}$. Cada $B_k$ es medible, $s_k$ es simple y $\|s_k\|_E \leq 2\|f\|_E$, por lo que $s_k$ es integrable. Si $f(x) \neq 0$, entonces $\|t_k(x)\|_E \longrightarrow \|f(x)\|_E$ y, por lo tanto, existe $k_x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_k$ para todo $k \geq k_x$; si $f(x) = 0$, entonces $s_k(x) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, $s_k(x) \longrightarrow f(x)$ para $\mu$-casi todo $x \in M$. Finalmente, $\|s_k - f\|_E \leq 3\|f\|_E$ y el Teorema B.6.14 implica que $\int_M \|s_k - f\|_E \, d\mu \longrightarrow 0$. Por consiguiente, $f$ es Bochner integrable. □

La estabilidad de la medibilidad fuerte bajo límites casi puntuales se utilizará en el teorema de convergencia dominada.

**Lema B.6.24.** Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones fuertemente medibles $f_k \colon M \longrightarrow E$. Si $f_k(x) \longrightarrow f(x)$ para $\mu$-casi todo $x \in M$, entonces $f$ es fuertemente medible.

*Demostración.* Para cada $k$, la imagen esencial de $f_k$ está contenida en un subespacio separable de $E$, pues $f_k$ es límite casi puntual de funciones simples. Por lo tanto, fuera de un conjunto nulo, las imágenes de todas las $f_k$ y de $f$ están contenidas en un mismo subespacio separable cerrado $E_0 \subseteq E$. Además, cada $f_k$ es medible y, como $E$ es métrico, su límite casi puntual $f$ también lo es después de modificarlo en un conjunto nulo. Sea $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso de $E_0$. Para cada $r \in \mathbb{N}$, elegimos en cada punto un elemento de $\{e_1, \ldots, e_r\}$ cuya distancia a $f(x)$ sea mínima, resolviendo los empates mediante el menor índice. Las funciones así obtenidas son simples y convergen puntualmente a $f$, pues $\min_{1\leq j\leq r} \|f(x) - e_j\|_E \longrightarrow 0$. En consecuencia, $f$ es fuertemente medible. □

La versión vectorial del teorema de convergencia dominada es ahora una consecuencia directa del criterio anterior.

**Teorema B.6.25.** (Teorema de la convergencia dominada de Bochner) Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones fuertemente medibles $f_k \colon M \longrightarrow E$ tal que $f_k(x) \longrightarrow f(x)$ para $\mu$-casi todo $x \in M$. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}^1(M,\mu)$ tal que $\|f_k\|_E \leq g$ $\mu$-casi en todas partes para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces $f$ es fuertemente medible, $f_k, f \in \mathcal{L}^1(M,\mu,E)$ y $\int_M \|f_k - f\|_E \, d\mu \longrightarrow 0$. En particular, $\int_M f_k \, d\mu \longrightarrow \int_M f \, d\mu$ en $E$.

*Demostración.* Por el Lema B.6.24, $f$ es fuertemente medible. Además, $\|f\|_E \leq g$ casi en todas partes y $\|f_k - f\|_E \leq 2g$. El Teorema B.6.14 aplicado a las funciones escalares $\|f_k - f\|_E$ implica la convergencia en $\mathcal{L}^1$, mientras que la Proposición B.6.23 garantiza la integrabilidad de Bochner. Finalmente, $\left\| \int_M f_k \, d\mu - \int_M f \, d\mu \right\|_E \leq \int_M \|f_k - f\|_E \, d\mu \longrightarrow 0$. □

**Teorema B.6.26.** (Teorema de Fubini para integrales de Bochner) Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$ y $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida $\sigma$-finitos, sea $E$ un espacio de Banach y sea $F\colon X\times Y\longrightarrow E$ fuertemente medible. Si

$$\int_{X\times Y}\|F(x,y)\|_E\,d(\mu\otimes\nu)(x,y)<\infty,$$

entonces $F(x,\cdot)$ es Bochner integrable para $\mu$-casi todo $x$ y $F(\cdot,y)$ es Bochner integrable para $\nu$-casi todo $y$. Las funciones obtenidas al integrar una variable son fuertemente medibles e integrables en la otra variable, y

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y}F\,d(\mu\otimes\nu)&=\int_X\left(\int_Y F(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\\&=\int_Y\left(\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y).\end{aligned}$$

*Demostración.* Por la Proposición B.6.23, $F$ es Bochner integrable en $X\times Y$. Elegimos funciones simples integrables $S_k\colon X\times Y\longrightarrow E$ tales que

$$\int_{X\times Y}\|F-S_k\|_E\,d(\mu\otimes\nu)\longrightarrow 0.$$

El Teorema de Tonelli B.6.17, aplicado a $\|F-S_k\|_E$, permite extraer una subsucesión, que no renombramos, para la cual

$$\int_Y\|F(x,y)-S_k(x,y)\|_E\,d\nu(y)\longrightarrow 0$$

para $\mu$-casi todo $x$. En particular, esas secciones de $F$ son fuertemente medibles y Bochner integrables. Para una función simple $S_k$, Tonelli aplicado a los indicadores de sus conjuntos de nivel prueba directamente que

$$\int_{X\times Y}S_k\,d(\mu\otimes\nu)=\int_X\left(\int_Y S_k(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x).$$

Además,

$$\int_X\left\|\int_Y(F-S_k)(x,y)\,d\nu(y)\right\|_E d\mu(x)\le\int_{X\times Y}\|F-S_k\|_E\,d(\mu\otimes\nu).$$

El lado derecho tiende a cero. Por lo tanto, las integrales parciales forman una sucesión convergente en $L^1(X,\mu,E)$, su límite coincide casi en todas partes con $x\mapsto\displaystyle\int_Y F(x,y)\,d\nu(y)$ y podemos pasar al límite en la identidad para $S_k$. Intercambiar $X$ y $Y$ prueba la segunda igualdad. □

Al igual que la integral de Riemann, la integral de Bochner es compatible con operadores lineales continuos y cerrados.

**Proposición B.6.27.** Sean $E$ y $F$ espacios de Banach y sea $f\colon M\longrightarrow E$ Bochner integrable.

(a) Si $T\in\mathcal{L}(E,F)$, entonces $T\circ f$ es Bochner integrable y $\displaystyle\int_M T(f)\,d\mu=T\left(\int_M f\,d\mu\right)$.

(b) Si $T\colon\operatorname{Dom}(T)\subseteq E\longrightarrow F$ es un operador lineal cerrado, $f(x)\in\operatorname{Dom}(T)$ para $\mu$-casi todo $x\in M$ y $T\circ f$ es Bochner integrable, entonces $\displaystyle\int_M f\,d\mu\in\operatorname{Dom}(T)$ y se cumple la misma igualdad.

*Demostración.* Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aproxima a $f$ en $\mathcal{L}^1$, entonces $T\circ s_k$ es simple, $\int_M \|T(f)-T(s_k)\|_F\,d\mu \le \|T\|\int_M \|f-s_k\|_E\,d\mu \longrightarrow 0$ y la igualdad se obtiene primero para funciones simples y después por paso al límite.

Para la segunda afirmación, modificando $f$ y $T\circ f$ en un conjunto nulo, podemos suponer que $f(x)\in \mathrm{Dom}(T)$ para todo $x\in M$. Consideremos $G\colon M\longrightarrow E\times F$, dado por $G(x):=(f(x),T(f(x)))$, y equipemos $E\times F$ con la norma $\|(u,v)\|:=\|u\|_E+\|v\|_F$. La función $G$ es fuertemente medible y $\int_M \|G\|\,d\mu<\infty$, por lo que es Bochner integrable. Las proyecciones coordenadas y la primera parte muestran que $\int_M G\,d\mu = \left(\int_M f\,d\mu, \int_M T(f)\,d\mu\right)$. Como la gráfica $\mathcal{G}(T)$ es un subespacio cerrado de $E\times F$, el mapeo cociente $Q\colon E\times F\longrightarrow (E\times F)/\mathcal{G}(T)$ es lineal y continuo. Puesto que $Q\circ G=0$ casi en todas partes, la primera parte implica $Q\left(\int_M G\,d\mu\right)=\int_M Q(G)\,d\mu=0$. Por lo tanto, $\int_M G\,d\mu\in\mathcal{G}(T)$, lo cual equivale a la conclusión. □

**Observación B.6.28.** Si $f\colon M\longrightarrow E$ es Bochner integrable y $\varphi\in E'$, la Proposición B.6.27 aplicada a $\varphi\colon E\longrightarrow\mathbb{K}$ muestra que $\varphi\circ f$ es integrable y $\varphi\left(\int_A f\,d\mu\right)=\int_A \varphi(f)\,d\mu$ para todo $A\in\mathcal{A}$. En particular, toda función Bochner integrable es Pettis integrable y, por lo tanto, Dunford integrable; las tres integrales coinciden bajo la inclusión canónica $E\hookrightarrow E''$.

**Teorema B.6.29.** (Radon–Nikodym) Sean $\mu$ y $\nu$ medidas $\sigma$-finitas sobre $(X,\mathcal{A})$, con $\nu$ positiva y $\nu\ll\mu$. Existe una función medible $h\colon X\longrightarrow[0,\infty)$, única $\mu$-casi en todas partes, tal que

$$\nu(A)=\int_A h\,d\mu,\qquad A\in\mathcal{A}.$$

Si $\nu$ es una medida signada o compleja, $\nu\ll\mu$ y su variación total $|\nu|$ es $\sigma$-finita, existe de modo análogo una densidad medible $h\colon X\to\mathbb{K}$. Más precisamente, puede elegirse una agotación medible $X_k\uparrow X$ con $\mu(X_k)+|\nu|(X_k)<\infty$ y entonces $h\mathbf{1}_{X_k}\in L^1(X,\mu)$ y

$$\nu(A\cap X_k)=\int_{A\cap X_k} h\,d\mu\qquad (A\in\mathcal{A},\ k\in\mathbb{N}).$$

En particular, si $|\nu|(X)<\infty$, se tiene $h\in L^1(X,\mu)$. Esta formulación sustituye a la notación $L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$, que no es canónica en un espacio de medida abstracto sin una noción topológica de localidad.

*Demostración.* Supongamos primero que $\mu(X)+\nu(X)<\infty$ y pongamos $\lambda:=\mu+\nu$. El funcional

$$L(f):=\int_X f\,d\nu$$

es continuo en $L^2(X,\lambda)$, pues Cauchy–Schwarz da $|L(f)|\le \nu(X)^{\frac12}\|f\|_{L^2(X,\lambda)}$. Por el Teorema B.3.12 existe $g\in L^2(X,\lambda)$ tal que

$$\int_X f\,d\nu=\int_X f g\,d\lambda$$

para todo $f\in L^2(X,\lambda)$. Aplicando la identidad a indicadores se obtiene $0\le g\le 1$ casi en todas partes y

$\mu(A) = \int_A (1-g)\,d\lambda$. En el conjunto $\{g = 1\}$ se anula $\mu$; la hipótesis $\nu \ll \mu$ implica que también se anula $\nu$, y por lo tanto dicho conjunto es $\lambda$-nulo. Así,

$$h := \frac{g}{1-g}$$

está definido casi en todas partes y $d\nu = h\,d\mu$.

En el caso $\sigma$-finito elegimos una partición medible $X = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ con $\mu(X_k) + \nu(X_k) < \infty$ y aplicamos el caso anterior en cada $X_k$; las densidades se pegan por unicidad. Si dos densidades $h_1, h_2$ representan a $\nu$, integrar sobre $\{h_1 > h_2\}$ y $\{h_2 > h_1\}$ prueba que coinciden casi en todas partes. Para una medida signada o compleja se elige una agotación sobre la cual $\mu$ y $|\nu|$ sean finitas y se aplica el caso positivo a las partes de Jordan de las componentes real e imaginaria. Las densidades obtenidas son integrables en cada $X_k$ y se pegan por la misma unicidad. □

## B.7 Los espacios $L^p$

Los espacios $L^p$ serán el punto de partida para los espacios de Sobolev y para varias formulaciones débiles de ecuaciones diferenciales parciales. Recordamos aquí sus propiedades básicas y algunas desigualdades que se usarán más adelante.

**Definición B.7.1.** Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $p \in (0, \infty)$ fijo. Definimos

$$\mathcal{L}^p(X) := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} \;\middle|\; f \text{ es medible y } \int_X |f|^p\,d\mu < \infty \right\}.$$

Definimos $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)} : \mathcal{L}^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left( \int_X |f|^p\,d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, definimos

$$\mathcal{L}^\infty(X) := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es medible y está acotada casi en todas partes en } X \},$$

y

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} := \inf\{a > 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0\}.$$

**Definición B.7.2.** Sea $p \in [1, \infty]$ fijo. Definimos una relación $\sim$ en $\mathcal{L}^p(X)$ como sigue:

$$f \sim g \iff \|f - g\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0.$$

Note que $\sim$ es una relación de equivalencia, denotamos $L^p(X) := \mathcal{L}^p(X)/\sim$. Si $[f] \in L^p(X)$, definimos $\|[f]\|_{L^p(X)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ e identificamos a $[f]$ con $f$ en la práctica.

**Teorema B.7.3.** (espacios de Lebesgue) Sea $p \in [1, \infty]$, entonces:

(a) Si $p < \infty$, $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ es una norma en $L^p(X)$ y $(L^p(X), \|\cdot\|_{L^p(X)})$ es un espacio de Banach. A la desigualdad

del triángulo en $L^p(X)$ se le conoce como desigualdad de Minkowski.

(b) Si $p=\infty$, $\|\cdot\|_{L^\infty(X)}$ es una norma en $L^\infty(X)$ y $(L^\infty(X),\|\cdot\|_{L^\infty(X)})$ es un espacio de Banach.

*Demostración.* Consideremos primero $1 \le p < \infty$. La homogeneidad y la separación de puntos módulo igualdad casi en todas partes se siguen directamente de la definición. Para probar la desigualdad triangular cuando $1 < p < \infty$, recordemos primero la desigualdad de Hölder. Si $u \in L^p(X)$, $v \in L^{p'}(X)$ y ambas normas son no nulas, la desigualdad de Young aplicada a

$$\frac{|u|}{\|u\|_{L^p(X)}} \quad \text{y} \quad \frac{|v|}{\|v\|_{L^{p'}(X)}}$$

e integrada sobre $X$ proporciona

$$\int_X |uv|\,d\mu \le \|u\|_{L^p(X)}\|v\|_{L^{p'}(X)}.$$

Si alguna norma se anula, la misma desigualdad es inmediata. Aplicándola con $v = |f+g|^{p-1}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^p(X)}^p &\le \int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \\ &\le \big(\|f\|_{L^p(X)} + \|g\|_{L^p(X)}\big)\big\||f+g|^{p-1}\big\|_{L^{p'}(X)} \\ &= \big(\|f\|_{L^p(X)} + \|g\|_{L^p(X)}\big)\|f+g\|_{L^p(X)}^{p-1}.\end{aligned}$$

Si $\|f+g\|_{L^p(X)} = 0$, no hay nada que probar; en otro caso dividimos por $\|f+g\|_{L^p(X)}^{p-1}$. Para $p=1$, la desigualdad se obtiene integrando $|f+g| \le |f| + |g|$. Esto prueba que $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ es una norma.
Probemos la completitud. Sea $(f_n)$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X)$. Podemos escoger una subsucesión $(f_{n_k})$ tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p(X)} \le 2^{-k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Pongamos $g_k := |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$. Por la desigualdad de Minkowski ya demostrada,

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} g_k\right\|_{L^p(X)} \le \sum_{k=1}^{N} \|g_k\|_{L^p(X)} \le 1 \qquad (N \in \mathbb{N}).$$

El Teorema de la convergencia monótona aplicado a $(\sum_{k=1}^{N} g_k)^p$ muestra que

$$G := \sum_{k=1}^{\infty} g_k \quad \text{pertenece a } L^p(X) \quad \text{y} \quad \|G\|_{L^p(X)} \le 1.$$

Fuera de un conjunto nulo, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big)$$

converge absolutamente. Definimos allí

$$f := f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

y extendemos $f$ arbitrariamente al conjunto excepcional. La función $f$ es medible. Además, para cada $j$,

$$|f - f_{n_j}| \le \sum_{k=j}^{\infty} g_k$$

casi en todas partes. Aplicando de nuevo convergencia monótona a las colas y usando Minkowski para sus sumas finitas, se obtiene

$$\|f - f_{n_j}\|_{L^p(X)} \le \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} \longrightarrow 0.$$

En particular, $f \in L^p(X)$. Como la sucesión original es de Cauchy y una subsucesión converge a $f$, toda la sucesión converge a $f$.

Consideremos ahora $p = \infty$. Las propiedades de norma se deducen de las desigualdades puntuales

$$|\lambda f| = |\lambda||f|, \qquad |f + g| \le |f| + |g|$$

fuera de conjuntos nulos. Si $(f_n)$ es de Cauchy en $L^\infty(X)$, elegimos una subsucesión tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty \le 2^{-k}.$$

Tras modificar representantes sobre la unión de una familia numerable de conjuntos nulos, podemos suponer que

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \le 2^{-k}$$

para todo $k$ y todo $x$ fuera de un único conjunto nulo $N$. Por el criterio de Weierstrass, $f_{n_k}$ converge uniformemente en $X \setminus N$ a una función medible $f$, que extendemos arbitrariamente a $N$, y

$$\|f - f_{n_j}\|_\infty \le \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} \longrightarrow 0.$$

Otra vez, la propiedad de Cauchy implica que toda la sucesión converge a $f$ en $L^\infty(X)$. Por lo tanto, $L^\infty(X)$ también es completo. □

**Proposición B.7.4.** (Desigualdad inversa de Minkowski para exponentes menores que uno) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, sea $0 < r < 1$ y sean $f, g\colon X \longrightarrow [0, \infty]$ funciones medibles tales que $\int_X f^r \, d\mu < \infty$ y $\int_X g^r \, d\mu < \infty$. Entonces

$$\left( \int_X (f+g)^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \ge \left( \int_X f^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} + \left( \int_X g^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}}.$$

*Demostración.* Pongamos

$$A := \left(\int_X f^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}}, \qquad B := \left(\int_X g^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Si $A = 0$ o $B = 0$, una de las funciones se anula casi en todas partes y la desigualdad es inmediata. Supongamos, por lo tanto, que $A, B > 0$ y definamos $\theta := \dfrac{A}{A+B}$. La concavidad de $t \mapsto t^r$ en $[0,\infty)$ da

$$\left(\theta \frac{f}{A} + (1-\theta)\frac{g}{B}\right)^r \geq \theta \left(\frac{f}{A}\right)^r + (1-\theta)\left(\frac{g}{B}\right)^r.$$

Al integrar, el miembro derecho tiene integral igual a uno. Puesto que

$$f + g = (A+B)\left(\theta \frac{f}{A} + (1-\theta)\frac{g}{B}\right),$$

se obtiene

$$\int_X (f+g)^r \, d\mu \geq (A+B)^r.$$

Tomar la raíz $r$-ésima concluye la prueba. □

**Proposición B.7.5.** (Densidad de las funciones simples) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma$-finito y $1 \leq p < \infty$. Las funciones simples cuyo soporte tiene medida finita son densas en $L^p(X)$.

*Demostración.* Elijamos conjuntos $X_k \in \mathcal{A}$ crecientes, de medida finita y con $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k = X$. Para $f \in L^p(X)$, el Teorema de convergencia dominada B.6.14 da

$$f\mathbf{1}_{X_k \cap \{|f| \leq k\}} \longrightarrow f \quad \text{en } L^p(X).$$

Cada función del lado izquierdo es acotada y tiene soporte de medida finita. Aproximamos por debajo sus partes positiva y negativa mediante funciones escalonadas con paso $2^{-m}$; el error puntual es a lo más $2^{-m}$ en $X_k$, de modo que el error en $L^p(X)$ tiende a cero. Para funciones complejas se aplica el argumento a las partes real e imaginaria. □

**Lema B.7.6.** (Hölder en dos factores) Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $p'$ su exponente conjugado. Si $f \in L^p(X)$ y $g \in L^{p'}(X)$, entonces $fg \in L^1(X)$ y

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_{L^p(X)} \|g\|_{L^{p'}(X)}.$$

*Demostración.* Los casos $p = 1$ y $p = \infty$ se siguen directamente de la definición del supremo esencial. Si $1 < p < \infty$ y ambas normas son no nulas, aplicamos puntualmente la desigualdad de Young $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ a $a = \dfrac{|f|}{\|f\|_{L^p(X)}}$ y $b = \dfrac{|g|}{\|g\|_{L^{p'}(X)}}$ e integramos. Si alguna norma se anula, la conclusión es inmediata. □

**Teorema B.7.7.** (Dualidad, reflexividad y separabilidad de $L^p$) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma$-finito

y $1 \le p < \infty$. Si $p'$ es el exponente conjugado, el mapeo

$$\overline{L^{p'}(X)} \longrightarrow (L^p(X))', \qquad \overline{g} \longmapsto \left[ f \mapsto \int_X f\,\overline{g}\,d\mu \right]$$

es un isomorfismo complejo–lineal e isométrico (en el caso real se omiten las barras). Equivalentemente, el mapeo directo $g \mapsto [f \mapsto \int_X f\,\overline{g}\,d\mu]$ es antilineal. En consecuencia, $L^p(X)$ es reflexivo si $1 < p < \infty$. Si, además, la $\sigma$-álgebra módulo conjuntos nulos es generada por una familia numerable —en particular, para un abierto de $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue—, entonces $L^p(X)$ es separable.

*Demostración.* El Lema B.7.6 muestra que cada $\overline{g} \in \overline{L^{p'}(X)}$ define un funcional de norma a lo sumo $\|g\|_{L^{p'}(X)}$. El mapeo es complejo–lineal porque $\lambda\overline{g} = \overline{\overline{\lambda} g}$ en el espacio conjugado. Recíprocamente, sea $\Lambda \in (L^p(X))'$ y elijamos una agotación creciente $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$, con $\mu(X_k) < \infty$. La restricción de $\Lambda$ a $L^p(X_k)$ define $\nu_k(A) := \Lambda(\mathbf{1}_A)$ para $A \subset X_k$ medible. Si $(A_j)$ es una familia disjunta, las sumas parciales de sus indicadores convergen en $L^p(X_k)$ al indicador de su unión; por continuidad, $\nu_k$ es numerablemente aditiva. Para una partición finita $(A_j)_{j=1}^N$ de un subconjunto de $X_k$, elegimos números $\theta_j$ de módulo uno tales que $\theta_j \nu_k(A_j) = |\nu_k(A_j)|$. Entonces

$$\sum_{j=1}^N |\nu_k(A_j)| = \Lambda\left( \sum_{j=1}^N \theta_j \mathbf{1}_{A_j} \right) \le \|\Lambda\|\,\mu(X_k)^{1/p}.$$

Por lo tanto, $\nu_k$ tiene variación total finita; además $\nu_k \ll \mu$. El Teorema B.6.29 da $d\nu_k = \overline{g}_k\,d\mu$. La unicidad de las densidades en $X_k \cap X_\ell$ permite pegarlas en una función medible $g$ sobre $X$.
Si $1 < p < \infty$, aplicamos $\Lambda$ a $f_{N,k} := \operatorname{sgn}(g)|g|^{p'-1}\mathbf{1}_{X_k\cap\{|g|\le N\}}$ y obtenemos

$$\int_{X_k\cap\{|g|\le N\}} |g|^{p'}\,d\mu \le \|\Lambda\| \left( \int_{X_k\cap\{|g|\le N\}} |g|^{p'}\,d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por convergencia monótona, $g \in L^{p'}(X)$ y $\|g\|_{L^{p'}(X)} \le \|\Lambda\|$. Para $p = 1$, aplicar $\Lambda$ a indicadores multiplicados por la fase de $g$ muestra que $\|g\|_{L^\infty(X)} \le \|\Lambda\|$. La igualdad de normas y la representación para toda $f \in L^p(X)$ se siguen por densidad de las funciones simples.
Si $1 < p < \infty$, aplicar dos veces la representación anterior, respetando los espacios conjugados, identifica la inclusión canónica $L^p(X) \to (L^p(X))''$ con un isomorfismo; esto prueba la reflexividad. Finalmente, las funciones simples con valores en $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (en el caso real, en $\mathbb{Q}$) y conjuntos pertenecientes al álgebra numerable generadora forman un subconjunto numerable y denso, lo que prueba la separabilidad en el caso indicado. □

**Corolario B.7.8.** (Dualidad $L^p$ para haces hermitianos) Sea $(M, \mathbf{g})$ una variedad riemanniana con o sin frontera que satisface el segundo axioma de numerabilidad, y sea $\mathbf{E} \to M$ un haz hermitiano complejo suave de rango finito. Para $1 \le p < \infty$, el mapeo

$$L^{p'}(M, \overline{\mathbf{E}}) \longrightarrow (L^p(M, \mathbf{E}))', \qquad \overline{\mathbf{v}} \longmapsto \left[ u \longmapsto \int_M \mathcal{R}_{\mathbf{E}}(\overline{\mathbf{v}})(u)\,d\lambda_{\mathbf{g}} \right]$$

es un isomorfismo complejo–lineal e isométrico.

*Demostración.* Una cubierta coordenada numerable y una refinación disjunta medible $M = \bigsqcup_{j\geq 1} A_j$ permiten elegir en cada $A_j$ un marco unitario medible de $\mathbf{E}$. De este modo,

$$L^p(M,\mathbf{E}) \cong \left( \bigoplus_{j\geq 1} L^p(A_j;\mathbb{C}^r) \right)_{\ell^p}$$

isométricamente. Aplicando el Teorema B.7.7 a cada una de las $r$ componentes y usando la versión discreta del Lema B.7.6, todo elemento de $L^{p'}(M,\overline{\mathbf{E}})$ define un funcional de igual norma.
Recíprocamente, la restricción de un funcional a las secciones soportadas en $A_j$ está representada por un único $\mathbf{v}_j \in L^{p'}(A_j,\overline{\mathbf{E}})$. Para todo subconjunto finito $F$ de índices, la dualidad finito–dimensional de $\ell^p(F)$ da

$$\left( \sum_{j\in F} \|\mathbf{v}_j\|^{p'}_{L^{p'}(A_j,\overline{\mathbf{E}}\restriction_{A_j})} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|\Lambda\|$$

si $1 < p < \infty$, y $\sup_{j\in F} \|\mathbf{v}_j\|_{L^\infty(A_j,\overline{\mathbf{E}}\restriction_{A_j})} \leq \|\Lambda\|$ si $p = 1$. Al hacer crecer $F$, las secciones $\mathbf{v}_j$ se pegan en un elemento $\mathbf{v} \in L^{p'}(M,\overline{\mathbf{E}})$ de norma a lo sumo $\|\Lambda\|$. La densidad de las secciones medibles soportadas en un número finito de los $A_j$ prueba la representación; la desigualdad inversa de normas se obtiene evaluando en los extremizantes truncados de Hölder. Esto prueba la isometría y la suprayectividad. □

**Proposición B.7.9.** (desigualdad de Hölder) Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida y consideremos $r,p_1,\dots,p_m \in [1,\infty]$ tales que $\dfrac{1}{p_1}+\cdots+\dfrac{1}{p_m} = \dfrac{1}{r}$, con la convención $\dfrac{1}{\infty} = 0$. Entonces para cualesquiera $f_j \in L^{p_j}(X)$, $1 \leq j \leq m$, se cumple que $\prod_{j=1}^m f_j \in L^r(X)$ y

$$\left\| \prod_{j=1}^m f_j \right\|_{L^r(X)} \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(X)}.$$

*Demostración.* Los factores con $p_j = \infty$ se extraen usando su norma en $L^\infty(X)$, por lo que basta considerar los índices con $p_j < \infty$. Si alguno de ellos satisface $\|f_j\|_{L^{p_j}(X)} = 0$, la afirmación es inmediata. En otro caso, pongamos $q_j := \dfrac{p_j}{r}$; entonces $q_j \geq 1$ y $\sum_{j=1}^m \dfrac{1}{q_j} = 1$. Si algún $q_j = 1$, es el único índice finito y la afirmación es inmediata. En el caso restante, la desigualdad numérica de Young generalizada,

$$\prod_j a_j \leq \sum_{j=1}^m \frac{a_j^{q_j}}{q_j}, \qquad a_j \geq 0,$$

se obtiene iterando $ab \leq \dfrac{a^q}{q} + \dfrac{b^{q'}}{q'}$. Para probar esta última, con $b \geq 0$ fijo minimizamos $t \mapsto \dfrac{t^q}{q} - tb + \dfrac{b^{q'}}{q'}$; su

mínimo, alcanzado cuando $t^{q-1} = b$, es cero. Aplicando la desigualdad generalizada a

$$a_j(x) := \frac{|f_j(x)|^r}{\|f_j\|^r_{L^{p_j}(X)}}$$

e integrando, obtenemos

$$\int_X \prod_j a_j \, d\mu \le \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_j} \int_X a_j^{q_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_j} = 1.$$

Multiplicar por las normas extraídas y tomar la raíz $r$-ésima prueba el resultado. El caso en que todos los exponentes son infinitos es la desigualdad puntual para el supremo esencial. □

**Proposición B.7.10.** Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $p \in (0, \infty)$. Si $r \in (0, p)$ y $f \in \mathcal{L}^p(X)$, entonces $f \in \mathcal{L}^r(X)$ y

$$\|f\|_{\mathcal{L}^r(X)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}.$$

*Demostración.* Aplicamos la Proposición B.7.9 a $|f|^r$ y a la función constante 1, con exponentes $\frac{p}{r}$ y $\frac{p}{p-r}$. Así,

$$\int_X |f|^r \, d\mu \le \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \mu(X)^{1-\frac{r}{p}}.$$

Tomar la raíz $r$-ésima da la desigualdad anunciada. □

**Proposición B.7.11.** (desigualdad de Jensen) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito con $\mu(X) = 1$, $\varphi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa y $f \in \mathcal{L}^1(X)$, entonces, siempre que el lado derecho esté bien definido,

$$\varphi\left( \int_X f \, d\mu \right) \le \int_X \varphi(f) d\mu$$

*Demostración.* Pongamos $a := \displaystyle\int_X f \, d\mu$. La convexidad de $\varphi$ implica que existe una pendiente de apoyo $c \in \mathbb{R}$ en $a$: en efecto, cualquier número comprendido entre las pendientes laterales

$$\sup_{x \in (-\infty, a)} \frac{\varphi(a) - \varphi(x)}{a - x} \quad \text{y} \quad \inf_{y > a} \frac{\varphi(y) - \varphi(a)}{y - a}$$

satisface $\varphi(t) \ge \varphi(a) + c(t-a)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Aplicando esta desigualdad a $t = f(x)$ e integrando, obtenemos

$$\int_X \varphi(f) \, d\mu \ge \varphi(a) + c\left( \int_X f \, d\mu - a\mu(X) \right) = \varphi(a).$$

□

**Proposición B.7.12.** Sean $\omega \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y $p \in [1, \infty]$. Entonces:

(a) Si $f \in L^p(\Omega)$, entonces $f \mathbf{1}_\omega \in L^p(\omega)$ y

$$\|f \mathbf{1}_\omega\|_{L^p(\omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

(b) Si $f \in L^p(\Omega)$ y $X$ es un subconjunto medible de $\Omega$ con $\lambda_n(X) < \infty$, entonces:

(a) si $p < \infty$, se tiene $f\mathbf{1}_X \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1,p]$ y

$$\|f\mathbf{1}_X\|_{L^r(\Omega)} \leq \lambda_n(X)^{\frac{p-r}{rp}} \|f\|_{L^p(\Omega)};$$

(b) si $p = \infty$, se tiene $f\mathbf{1}_X \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1,\infty)$ y

$$\|f\mathbf{1}_X\|_{L^r(\Omega)} \leq \lambda_n(X)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

(c) Si $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$ y $\lambda_n(\omega) < \infty$, entonces:

(a) si $p < \infty$, $f_k\mathbf{1}_\omega \to f\mathbf{1}_\omega$ en $L^r(\omega)$ para todo $r \in [1,p]$;

(b) si $p = \infty$, $f_k\mathbf{1}_\omega \to f\mathbf{1}_\omega$ en $L^r(\omega)$ para todo $r \in [1,\infty)$.

*Demostración.* El inciso (a) se sigue directamente de integrar sobre $\omega \subseteq \Omega$. Para (b), si $1 \leq r < p < \infty$, aplicamos la Proposición B.7.9 en $X$ a $|f|^r$ y 1, con exponentes $\frac{p}{r}$ y $\frac{p}{p-r}$; si $r = p$, la afirmación es inmediata. Para $p = \infty$ usamos $|f| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ casi en todas partes en $X$. Esto da exactamente las dos cotas de (b). Finalmente, aplicamos esas cotas a $(f_k - f)\mathbf{1}_\omega$ para obtener (c). □

**Proposición B.7.13.** Si $f = (f_1,\dots,f_m)$ y $f_1,\dots,f_m \in L^s(\Omega)$, definimos

$$\|f\|_{(L^s(\Omega))^m} := \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^m \|f_j\|_{L^s(\Omega)}^s\right)^{\frac{1}{s}}, & 1 \leq s < \infty, \\ \max\limits_{1\leq j\leq m} \|f_j\|_{L^\infty(\Omega)}, & s = \infty. \end{cases}$$

Si $\lambda_n(\Omega) < \infty$, $1 \leq p < s \leq \infty$ y $f_1,\dots,f_m \in L^s(\Omega)$, entonces

$$\begin{cases} \|f\|_{(L^p(\Omega))^m} \leq (m\lambda_n(\Omega))^{\frac{s-p}{sp}} \|f\|_{(L^s(\Omega))^m} & \text{si } s \in [1,\infty), \\ \|f\|_{(L^p(\Omega))^m} \leq (m\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{p}} \|f\|_{(L^\infty(\Omega))^m} & \text{si } s = \infty. \end{cases}$$

*Demostración.* Consideremos $\Omega \times \{1,\dots,m\}$ con el producto de la medida de Lebesgue y la medida de conteo, y definamos $F(x,j) := f_j(x)$. Este espacio tiene medida $m\lambda_n(\Omega)$ y

$$\|F\|_{L^t(\Omega\times\{1,\dots,m\})} = \|f\|_{(L^t(\Omega))^m}$$

para $1 \leq t \leq \infty$. Si $s < \infty$, la Proposición B.7.9, aplicada a $|F|^p$ y 1 con exponentes $\frac{s}{p}$ y $\frac{s}{s-p}$, da la primera desigualdad. La segunda se obtiene integrando la cota $|F| \leq \|F\|_{L^\infty(\Omega\times\{1,\dots,m\})}$. □

**Proposición B.7.14.** Si $0 < \lambda_n(\Omega) < \infty$ y $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{p\to\infty} \lambda_n(\Omega)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

*Demostración.* La desigualdad

$$\lambda_n(\Omega)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

da la cota superior. Si $0 < a < \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$, el conjunto $A_a := \{x \in \Omega \mid |f(x)| > a\}$ tiene medida positiva y

$$\lambda_n(\Omega)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)} \ge a\left(\frac{\lambda_n(A_a)}{\lambda_n(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

El lado derecho converge a $a$ cuando $p \to \infty$. Haciendo después $a \uparrow \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ se obtiene la cota inferior y, por lo tanto, el límite. □

**Proposición B.7.15.** Sea $(f_k)$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ tal que $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$.

(a) Si $p \in [1,\infty)$, existen una subsucesión $(f_{k_j})$ de $(f_k)$ y una función $g \in L^p(\Omega)$ tales que $f_{k_j}(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in \Omega$, $|f_{k_j}| \le g(x)$ para casi todo $x \in \Omega$, para toda $j \in \mathbb{N}$.

(b) Si $p = \infty$, entonces $f_k(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in \Omega$ y existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f_k(x)| \le c$ para casi todo $x \in \Omega$ y para toda $k \in \mathbb{N}$.

*Demostración.* Supongamos primero $p < \infty$. Eligiendo inductivamente una subsucesión, podemos asegurar

$$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^p(\Omega)} \le 2^{-j} \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

La desigualdad de Minkowski y el Teorema B.6.11 muestran que

$$g := |f_{k_1}| + \sum_{j\in\mathbb{N}} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|$$

pertenece a $L^p(\Omega)$. La serie de diferencias converge absolutamente casi en todas partes; por lo tanto, $(f_{k_j})$ converge casi en todas partes a una función $h$ y $|f_{k_j}| \le g$. Además, $|h| \le g$ casi en todas partes. El Teorema de convergencia dominada B.6.14, aplicado a $|f_{k_j} - h|^p \le (2g)^p$, muestra que $f_{k_j} \to h$ en $L^p(\Omega)$. Como también $f_{k_j} \to f$ en $L^p(\Omega)$, la unicidad del límite da $h = f$ casi en todas partes.
Si $p = \infty$, elegimos representantes y un conjunto nulo común fuera del cual

$$|f_k(x) - f(x)| \le \|f_k - f\|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

La sucesión de normas $\|f_k - f\|_{L^\infty(\Omega)}$ es acotada; de aquí se obtiene una constante $c$ que domina a todos los $|f_k|$ fuera de un conjunto nulo. □

**Teorema B.7.16.** (Desigualdad de interpolación) Sean $1 \le p < s < r \le \infty$. Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, entonces $f \in L^s(\Omega)$ y se cumple que

$$\|f\|_{L^s(\Omega)} \le \|f\|^{1-\alpha}_{L^p(\Omega)}\|f\|^{\alpha}_{L^r(\Omega)},$$

donde $\alpha \in (0,1)$ satisface que $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1-\alpha}{p} + \dfrac{\alpha}{r}$ si $r < \infty$ y $\alpha := 1 - \dfrac{p}{s}$ si $r = \infty$.

*Demostración.* Si $r < \infty$, aplicamos la Proposición B.7.9 a

$$|f|^s = |f|^{(1-\alpha)s}|f|^{\alpha s}$$

con exponentes $\dfrac{p}{(1-\alpha)s}$ y $\dfrac{r}{\alpha s}$, que son conjugados por la relación entre $p, s, r$ y $\alpha$. Tras tomar la raíz $s$-ésima se obtiene la desigualdad. Si $r = \infty$, entonces $s = (1-\alpha)^{-1}p$ y

$$\int_\Omega |f|^s \, d\lambda_n \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{s-p} \int_\Omega |f|^p \, d\lambda_n,$$

lo que da la misma conclusión. □

**Proposición B.7.17.** Si $\lambda_n(\Omega) < \infty$ y $1 \leq p < s \leq \infty$, entonces $L^s(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ y esta inclusión es continua. Más aún, para todo $f \in L^s(\Omega)$,

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq (\lambda_n(\Omega))^{\frac{s-p}{sp}} \|f\|_{L^s(\Omega)} & \text{si } s \in [1, \infty), \\ \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq (\lambda_n(\Omega))^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } s = \infty. \end{cases}$$

*Demostración.* Si $s < \infty$, aplicamos la Proposición B.7.9 a $|f|^p$ y 1 con exponentes $\dfrac{s}{p}$ y $\dfrac{s}{s-p}$. Si $s = \infty$, integramos la desigualdad $|f|^p \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^p$. Las cotas resultantes prueban también la continuidad de la inclusión. □

**Proposición B.7.18.** $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para toda $p \in [1, \infty)$.

*Demostración.* Por la Proposición B.7.5, basta aproximar en $L^p(\Omega)$ el indicador de un conjunto medible $A \subseteq \Omega$ de medida finita. La regularidad de la medida de Lebesgue del Teorema B.5.15 permite elegir un compacto $K \subseteq A$ y un abierto $U$ con $K \subseteq U \Subset \Omega$ tales que

$$\lambda_n(A \setminus K) + \lambda_n(U \setminus K) < \varepsilon^p.$$

Por la Proposición 1.3.6, existe $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ en $K$ y $\operatorname{supp}(\eta) \subseteq U$. Entonces

$$\|\mathbf{1}_A - \eta\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \lambda_n(A \setminus K) + \lambda_n(U \setminus K) < \varepsilon^p.$$

Aproximando cada término de una función simple y usando la desigualdad triangular, concluimos la densidad. □

**Proposición B.7.19.** Sean $p \in [1, \infty)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathcal{K} \subseteq L^p(\Omega)$ acotado con las siguientes propiedades:

(a) Para cada $\varepsilon > 0$ y cada abierto $\omega \Subset \Omega$, existe $\delta \in (0, d(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \Omega))$ tal que $\|T_\xi f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$ para toda $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $\|\xi\| < \delta$ y para toda $f \in \mathcal{K}$.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto $\omega \Subset \Omega$ tal que $\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{K}$.

Aquí $T_\xi f(x) := f(x + \xi)$ siempre que $x, x + \xi \in \Omega$. Entonces $\mathcal{K}$ es relativamente compacto en $L^p(\Omega)$.

*Demostración.* Fijemos $\varepsilon > 0$. Por (b) elegimos $\omega \Subset \Omega$ de modo que $\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \varepsilon$ para todo $f \in \mathcal{K}$, y elegimos $\omega_1$ con $\omega \Subset \omega_1 \Subset \Omega$. Para $h > 0$ pequeño tomamos una familia finita de cubos ajenos $(Q_\ell)_{\ell=1}^N$, de lado $h$, contenidos en $\omega_1$ y cuya unión $U_h$ contiene a $\omega$. Definimos

$$P_h f := \sum_{\ell=1}^{N} \left( \frac{1}{|Q_\ell|} \int_{Q_\ell} f(y)\,dy \right) \mathbf{1}_{Q_\ell}.$$

La desigualdad de Jensen y el Teorema B.6.17 dan

$$\|P_h f - f\|_{L^p(U_h)}^p \le \frac{1}{h^n} \sum_{\ell=1}^{N} \int_{Q_\ell} \int_{Q_\ell} |f(y) - f(x)|^p \, dy\, dx.$$

Escribiendo $y = x + z$ y observando que $\|z\| \le \sqrt{n}h$, el lado derecho queda acotado por

$$Ch^{-n} \int_{\{\|z\| \le \sqrt{n}h\}} \|T_z f - f\|_{L^p(\omega_1)}^p \, dz.$$

La condición (a) hace esta cantidad menor que $C\varepsilon^p$ uniformemente en $f \in \mathcal{K}$ si $h$ es suficientemente pequeño. Como $P_h f = 0$ fuera de $U_h$ y $\Omega \setminus U_h \subseteq \Omega \setminus \omega$, se obtiene $\|P_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \le C\varepsilon$.
El conjunto $P_h(\mathcal{K})$ es acotado en el espacio finito-dimensional generado por $(\mathbf{1}_{Q_\ell})_{\ell=1}^N$ y, por lo tanto, es totalmente acotado. La aproximación uniforme anterior muestra que $\mathcal{K}$ es totalmente acotado en el espacio completo $L^p(\Omega)$; su cerradura es compacta. □

## B.8 Desigualdades integrales y herramientas de análisis armónico

Reunimos en esta sección varias herramientas que aparecerán de manera repetida en la descomposición de Littlewood–Paley y en el estudio de los espacios de Besov y de Triebel–Lizorkin. La primera parte contiene desigualdades integrales y discretas que permiten intercambiar normas, integrales y sumas de escalas. Después introducimos las funciones de Rademacher y las estimaciones maximales de Hardy–Littlewood y Fefferman–Stein. Finalmente, registramos la descomposición de Calderón–Zygmund y el control maximal de Peetre, que permiten tratar uniformemente familias de funciones localizadas en frecuencia.

En toda la sección, $\mathcal{M}$ denota el operador maximal no centrado de Hardy–Littlewood en $\mathbb{R}^n$.

**Proposición B.8.1.** (Cavalieri y Chebyshev) Si $f : X \longrightarrow [0,\infty]$ es medible y $0 < p < \infty$, entonces

$$\int_X f^p \, d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{f > \lambda\})\, d\lambda.$$

En particular, si $f \in L^p(X)$ y $\lambda > 0$, entonces

$$\mu(\{|f| > \lambda\}) \le \lambda^{-p} \|f\|_{L^p(X)}^p.$$

*Demostración.* Para cada $x \in X$,

$$f(x)^p = \int_0^{f(x)} p\lambda^{p-1}\, d\lambda = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mathbf{1}_{\{f(x)>\lambda\}}\, d\lambda.$$

El Teorema B.6.17 permite integrar primero respecto de $x$ y después respecto de $\lambda$, lo que proporciona la identidad de Cavalieri. Para la desigualdad de Chebyshev observamos que

$$\|f\|_{L^p(X)}^p \geq \int_{\{|f|>\lambda\}} |f|^p \, d\mu \geq \lambda^p \mu(\{|f| > \lambda\}).$$

□

**Teorema B.8.2.** (Desigualdad integral de Minkowski) Sean $(X,\mu)$ y $(Y,\nu)$ espacios de medida $\sigma$–finitos y sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $F\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible y

$$\int_Y \|F(\cdot,y)\|_{L^p(X)} \, d\nu(y) < \infty,$$

entonces $x \mapsto \displaystyle\int_Y F(x,y)\, d\nu(y)$ pertenece a $L^p(X)$ y

$$\left\| \int_Y F(\cdot,y)\, d\nu(y) \right\|_{L^p(X)} \leq \int_Y \|F(\cdot,y)\|_{L^p(X)} \, d\nu(y).$$

*Demostración.* Para $p = 1$, la desigualdad triangular y el Teorema B.6.17 dan

$$\int_X \left| \int_Y F(x,y)\, d\nu(y) \right| d\mu(x) \leq \int_Y \int_X |F(x,y)| \, d\mu(x) d\nu(y).$$

El caso $p = \infty$ se obtiene tomando supremos esenciales. Supongamos $1 < p < \infty$. Para $g \in L^{p'}(X)$, el Teorema de Fubini para integrales de Bochner B.6.26, aplicado al caso escalar, y la desigualdad de Hölder de la Proposición B.7.9 implican

$$\begin{aligned} \left| \int_X g(x) \int_Y F(x,y)\, d\nu(y) d\mu(x) \right| &\leq \int_Y \int_X |g(x)F(x,y)| \, d\mu(x) d\nu(y) \\ &\leq \|g\|_{L^{p'}(X)} \int_Y \|F(\cdot,y)\|_{L^p(X)} \, d\nu(y). \end{aligned}$$

La caracterización dual de la norma $L^p(X)$ del Teorema B.7.7 concluye la prueba. □

**Proposición B.8.3.** (Criterio de Schur) Sean $(X,\mu)$ y $(Y,\nu)$ espacios de medida $\sigma$-finitos, sean $r,s \in \mathbb{N}$ y sea

$$K\colon X \times Y \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$$

un núcleo medible. Supongamos que existen $A, B \geq 0$ tales que

$$\sup_{x \in X} \int_Y \|K(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)} \, d\nu(y) \leq A$$

y

$$\sup_{y \in Y} \int_X \|K(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)} \, d\mu(x) \leq B.$$

Entonces, para cada $f \in L^2(Y,\mathbb{C}^r)$, la integral

$$(T_K f)(x) := \int_Y K(x,y) f(y)\, d\nu(y)$$

existe para casi todo $x \in X$ y define un operador lineal continuo

$$T_K \colon L^2(Y,\mathbb{C}^r) \longrightarrow L^2(X,\mathbb{C}^s)$$

que satisface

$$\|T_K\|_{\mathcal{L}(L^2(Y,\mathbb{C}^r),L^2(X,\mathbb{C}^s))} \le \sqrt{AB}.$$

*Demostración.* Pongamos $k(x,y) := \|K(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^s)}$. Para $f \in L^2(Y,\mathbb{C}^r)$, Cauchy–Schwarz respecto de la medida $k(x,y)\,d\nu(y)$ da

$$\left(\int_Y k(x,y)\|f(y)\|_{\mathbb{C}^r}\, d\nu(y)\right)^2 \le A \int_Y k(x,y)\|f(y)\|_{\mathbb{C}^r}^2\, d\nu(y). \tag{B.8}$$

El Teorema de Tonelli B.6.17 y la segunda hipótesis muestran que

$$\begin{aligned}\int_X \int_Y k(x,y)\|f(y)\|_{\mathbb{C}^r}^2\, d\nu(y)\, d\mu(x) &= \int_Y \|f(y)\|_{\mathbb{C}^r}^2 \left(\int_X k(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y) \\ &\le B\|f\|_{L^2(Y,\mathbb{C}^r)}^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el último factor de (B.8) es finito para casi todo $x$; la integral que define $T_K f(x)$ es absolutamente convergente en $\mathbb{C}^s$ para esos puntos. La medibilidad de $T_K f$ se obtiene integrando componente a componente funciones medibles. Además,

$$\begin{aligned}\|T_K f\|_{L^2(X,\mathbb{C}^s)}^2 &\le A \int_X \int_Y k(x,y)\|f(y)\|_{\mathbb{C}^r}^2\, d\nu(y)\, d\mu(x) \\ &\le AB\|f\|_{L^2(Y,\mathbb{C}^r)}^2.\end{aligned}$$

Esto prueba la estimación y, en particular, la continuidad. La misma demostración vale para un núcleo medible $K(x,y)\colon E_y \longrightarrow F_x$ entre haces hermitianos medibles de rango finito, sustituyendo las normas euclidianas por las normas fibradas. □

**Proposición B.8.4.** (Young para sucesiones) Sean $1 \le q \le \infty$, $a = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^q(\mathbb{Z})$ y $b = (b_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Si

$$(a * b)_k := \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j b_{k-j}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

entonces

$$\|a * b\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \le \|a\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}\|b\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

*Demostración.* Para $q = \infty$,

$$|(a * b)_k| \le \|a\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |b_{k-j}| = \|a\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}\|b\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

Si $1 \le q < \infty$, escribimos

$$|a_j b_{k-j}|^q = |a_j|^q |b_{k-j}| |b_{k-j}|^{q-1}$$

y aplicamos Hölder a la suma en $j$ con exponentes $q$ y $q'$. Esto da

$$|(a*b)_k|^q \le \|b\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}^{q-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_j|^q |b_{k-j}|.$$

Al sumar en $k \in \mathbb{Z}$ y usar el Teorema B.6.17, obtenemos

$$\|a*b\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}^q \le \|b\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}^q \|a\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}^q.$$

□

**Teorema B.8.5.** (Desigualdades de Hardy discretas) Sean $\alpha > 0$, $1 \le q \le \infty$ y $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ una sucesión no negativa. Entonces

$$\left\| \left( \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\le k}} 2^{-\alpha(k-j)} a_j \right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} + \left\| \left( \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\ge k}} 2^{-\alpha(j-k)} a_j \right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \le C_{\alpha,q} \|(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}.$$

*Demostración.* La primera sucesión es la convolución de $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ con

$$b_m := 2^{-\alpha m} \mathbf{1}_{\{m\ge 0\}}, \qquad m \in \mathbb{Z},$$

y la segunda con $\widetilde{b}_m := 2^{\alpha m}\mathbf{1}_{\{m\le 0\}}$. Ambas sucesiones pertenecen a $\ell^1(\mathbb{Z})$. La Proposición B.8.4 proporciona las dos cotas. □

**Teorema B.8.6.** (Desigualdades integrales de Hardy) Sean $\alpha > 0$, $1 \le q \le \infty$ y sea $f\colon (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ medible. Entonces

$$\left\| r^{-\alpha} \int_0^r t^\alpha f(t) \frac{dt}{t} \right\|_{L^q((0,\infty),\frac{dr}{r})} \le \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^q((0,\infty),\frac{dt}{t})}$$

y

$$\left\| r^{\alpha} \int_r^\infty t^{-\alpha} f(t) \frac{dt}{t} \right\|_{L^q((0,\infty),\frac{dr}{r})} \le \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^q((0,\infty),\frac{dt}{t})}.$$

Las mismas afirmaciones valen para funciones con valores en un espacio de Banach si se sustituye $f(t)$ por su norma.

*Demostración.* Hacemos $r = e^x$, $t = e^y$ y ponemos $g(y) := f(e^y)$. Como $dt/t = dy$ y $dr/r = dx$, la primera expresión se convierte en

$$\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-y)} g(y)\, dy = \left(e^{-\alpha\cdot}\mathbf{1}_{[0,\infty)} * g\right)(x),$$

mientras que la segunda es la convolución de $g$ con $e^{\alpha\cdot}\mathbf{1}_{(-\infty,0]}$. Ambos núcleos tienen norma $L^1(\mathbb{R})$ igual a $\frac{1}{\alpha}$. La desigualdad de Young del Teorema 4.10.1 concluye la prueba, incluidos los extremos $q = 1$ y $q = \infty$. □

Las funciones de Rademacher permiten convertir una norma euclidiana de coeficientes en una integral escalar.

Esta randomización es el mecanismo que utilizaremos posteriormente para pasar de multiplicadores con signos arbitrarios a la función cuadrada de Littlewood–Paley.

**Lema B.8.7.** (Desigualdad de Paley–Zygmund) Sea $(A, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, sea $X \in L^2(A)$ no negativa y sea $0 < \vartheta < 1$. Entonces

$$\mu\{X > \vartheta\, \mathbb{E}X\} \geq (1-\vartheta)^2 \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Aquí $\mathbb{E}X := \displaystyle\int_A X\, d\mu$; si $\mathbb{E}(X^2) = 0$, ambos lados se interpretan como cero.

*Demostración.* El caso $\mathbb{E}X = 0$ es inmediato. Supongamos $\mathbb{E}X > 0$ y sea $E := \{X > \vartheta \mathbb{E}X\}$. Entonces

$$\mathbb{E}X = \int_{A\setminus E} X\, d\mu + \int_E X\, d\mu \leq \vartheta \mathbb{E}X + (\mathbb{E}(X^2))^{\frac{1}{2}} \mu(E)^{\frac{1}{2}},$$

donde usamos Cauchy–Schwarz, Teorema B.3.2, en el último término. Restar $\vartheta\mathbb{E}X$, elevar al cuadrado y dividir por $\mathbb{E}(X^2)$ da la afirmación. □

**Teorema B.8.8.** (Desigualdad de Khintchine) Sean $(r_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ las funciones de Rademacher en $[0,1]$. Para cada $0 < p < \infty$ existen constantes $A_p, B_p > 0$ tales que, para todo conjunto finito $J \subseteq \mathbb{N}_0$ y toda familia de escalares $(a_j)_{j\in J}$,

$$A_p \left( \sum_{j\in J} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_0^1 \left| \sum_{j\in J} a_j r_j(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left( \sum_{j\in J} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Demostración.* Supongamos primero que los coeficientes son reales y pongamos

$$S := \sum_{j\in J} a_j r_j, \qquad \sigma^2 := \sum_{j\in J} |a_j|^2.$$

La independencia de las funciones de Rademacher y la desigualdad $\cosh x \leq e^{\frac{x^2}{2}}$ implican

$$\int_0^1 e^{\lambda S(t)} dt = \prod_{j\in J} \cosh(\lambda a_j) \leq e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}.$$

Aplicamos Chebyshev, Proposición B.8.1, a $e^{\lambda S}$ y $e^{-\lambda S}$. Para $u > 0$ y $\lambda > 0$ obtenemos

$$|\{t \mid S(t) > u\}| \leq e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}},$$

y la misma cota para $-S$. Si $\sigma > 0$, la elección $\lambda = \frac{u}{\sigma^2}$ da

$$|\{t \in [0,1] \mid |S(t)| > u\}| \leq 2e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}.$$

La fórmula de Cavalieri proporciona entonces

$$\int_0^1 |S|^p\,dt = p\int_0^\infty u^{p-1}|\{|S|>u\}|\,du \le C_p\sigma^p,$$

que es la cota superior.
Para la inferior, por homogeneidad podemos suponer $\sigma = 1$. La independencia da

$$\mathbb{E}(S^2) = 1, \qquad \mathbb{E}(S^4) = \sum_{j\in J} a_j^4 + 6\sum_{\substack{j,k\in J\\ j<k}} a_j^2 a_k^2 = 3 - 2\sum_{j\in J} a_j^4 \le 3.$$

Aplicamos el Lema B.8.7 a $X = S^2$ con $\vartheta = \frac{1}{2}$. Así,

$$|\{|S| > 2^{-\frac{1}{2}}\}| \ge \frac{1}{12},$$

y, por lo tanto,

$$\int_0^1 |S|^p\,dt \ge \frac{1}{12}\,2^{-\frac{p}{2}}.$$

Esto prueba la cota inferior para coeficientes reales. En el caso complejo aplicamos las cotas reales a las partes real e imaginaria. Ambas tienen suma de cuadrados a lo más $\sigma^2$, y al menos una de ellas tiene suma de cuadrados no menor que $\frac{\sigma^2}{2}$. Las desigualdades

$$|\operatorname{Re} S|, |\operatorname{Im} S| \le |S| \le |\operatorname{Re} S| + |\operatorname{Im} S|$$

concluyen la prueba. □

Antes de estudiar el operador maximal registramos el principio de interpolación que utilizaremos para pasar de estimaciones débiles en los extremos a estimaciones fuertes en exponentes intermedios.

**Teorema B.8.9.** (Interpolación de Marcinkiewicz) Sean $(X,\mu_X)$ y $(Y,\mu_Y)$ espacios de medida $\sigma$–finitos. Sea $T$ un operador sublineal definido sobre las funciones simples de soporte de medida finita en $X$, con valores en las funciones medibles sobre $Y$, y supongamos que es de tipo débil $(p_0,p_0)$ y $(p_1,p_1)$, donde $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$. Si $p_0 < p < p_1$, entonces $T$ se extiende a un operador acotado de $L^p(X)$ en $L^p(Y)$ y

$$\|Tf\|_{L^p(Y)} \le C\|f\|_{L^p(X)}.$$

La constante depende únicamente de $p_0, p, p_1$ y de las constantes de tipo débil de $T$.

*Demostración.* Supongamos primero $p_1 < \infty$. Fijemos $\gamma > 0$ y, para cada $\lambda > 0$, escribamos

$$f = f_0^\lambda + f_1^\lambda, \qquad f_0^\lambda := f\mathbf{1}_{\{|f|>\gamma\lambda\}}, \qquad f_1^\lambda := f\mathbf{1}_{\{|f|\le\gamma\lambda\}}.$$

La sublinealidad implica

$$\{|Tf|>\lambda\} \subseteq \left\{|Tf_0^\lambda| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{|Tf_1^\lambda| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Si $C_0, C_1$ son las constantes de tipo débil, se obtiene

$$\mu_Y(\{|Tf| > \lambda\}) \leq C_0' \lambda^{-p_0} \|f_0^\lambda\|_{L^{p_0}(X)}^{p_0} + C_1' \lambda^{-p_1} \|f_1^\lambda\|_{L^{p_1}(X)}^{p_1}.$$

Aplicamos Cavalieri y Tonelli al primer término:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1} \int_{\{|f|>\gamma\lambda\}} |f(x)|^{p_0} \, d\mu_X(x) d\lambda &= \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{\frac{|f(x)|}{\gamma}} \lambda^{p-p_0-1} \, d\lambda d\mu_X(x) \\ &= \frac{\gamma^{-(p-p_0)}}{p-p_0} \|f\|_{L^p(X)}^p.\end{aligned}$$

Para el segundo término, como $p < p_1$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1} \int_{\{|f|\leq\gamma\lambda\}} |f(x)|^{p_1} \, d\mu_X(x) d\lambda &= \int_X |f(x)|^{p_1} \int_{\frac{|f(x)|}{\gamma}}^\infty \lambda^{p-p_1-1} \, d\lambda d\mu_X(x) \\ &= \frac{\gamma^{p_1-p}}{p_1-p} \|f\|_{L^p(X)}^p.\end{aligned}$$

Por Cavalieri, estas dos estimaciones implican $\|Tf\|_{L^p(Y)}^p \leq C\|f\|_{L^p(X)}^p$.
Si $p_1 = \infty$, la hipótesis en ese extremo significa $\|Tg\|_{L^\infty(Y)} \leq C_1 \|g\|_{L^\infty(X)}$. Elegimos $\gamma = (2C_1)^{-1}$. Entonces

$$\|Tf_1^\lambda\|_{L^\infty(Y)} \leq C_1 \gamma \lambda = \frac{\lambda}{2},$$

de modo que sólo queda el primer término, que se integra exactamente como arriba. La densidad de las funciones simples en $L^p(X)$ proporciona la extensión. □

**Lema B.8.10.** (Selección de Vitali para bolas) Sea $\mathcal{B}$ una familia de bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$ cuyos radios están acotados superiormente. Existe una subfamilia numerable y disjunta $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} 5B_j,$$

donde $5B_j$ denota la bola concéntrica con radio cinco veces mayor.

*Demostración.* Sea $R > 0$ una cota superior para los radios. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, consideremos la subfamilia

$$\mathcal{B}_k := \left\{ B \in \mathcal{B} \,\middle|\, 2^{-k-1}R < r(B) \leq 2^{-k}R \right\}.$$

Procedemos por niveles. En $\mathcal{B}_0$ elegimos una subfamilia maximal de bolas disjuntas. Una vez elegidas las familias de los niveles $0, \ldots, k-1$, elegimos en $\mathcal{B}_k$ una subfamilia maximal de bolas mutuamente disjuntas que además sean disjuntas de todas las bolas seleccionadas anteriormente. La existencia de cada familia maximal se obtiene por el lema de Zorn. Como toda familia de bolas abiertas disjuntas de $\mathbb{R}^n$ es numerable —cada bola contiene un punto distinto de $\mathbb{Q}^n$—, la unión de todas las familias seleccionadas es numerable; la denotamos por $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$.
Sea $B \in \mathcal{B}_k$ una bola que no fue seleccionada. Por maximalidad, $B$ intersecta una bola seleccionada $B_j$ del

mismo nivel o de un nivel anterior. En ambos casos

$$r(B_j) \geq \frac{1}{2} r(B).$$

Si $x \in B$ y $c, c_j$ son los centros de $B$ y $B_j$, respectivamente, elegimos $z \in B \cap B_j$ y obtenemos

$$\|x - c_j\| \leq \|x - c\| + \|c - z\| + \|z - c_j\| < 2r(B) + r(B_j) \leq 5r(B_j).$$

Por lo tanto, $B \subseteq 5B_j$, lo que prueba que los dilatados $(5B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ cubren la unión de las bolas de $\mathcal{B}$. □

**Teorema B.8.11.** (Operador maximal de Hardy–Littlewood) Para $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas abiertas $B \subseteq \mathbb{R}^n$ que contienen a $x$. Entonces $\mathcal{M}$ es de tipo débil $(1,1)$: para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Además, para $1 < p \leq \infty$,

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demostración.* Fijemos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$. Para cada $x \in E_\lambda := \{\mathcal{M}f > \lambda\}$ elegimos una bola $B_x \ni x$ tal que

$$\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)|\, dy > \lambda.$$

En particular,

$$|B_x| < \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\lambda},$$

de modo que los radios de la familia $(B_x)_{x\in E_\lambda}$ están uniformemente acotados. El Lema B.8.10 proporciona una familia disjunta $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $E_\lambda \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} 5B_j$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |E_\lambda| &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} |5B_j| = 5^n \sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j| \\ &< \frac{5^n}{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{B_j} |f(y)|\, dy \leq \frac{5^n}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Esto prueba el tipo débil $(1,1)$. Por otra parte, $\mathcal{M}f \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ casi en todas partes si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. El Teorema B.8.9, aplicado entre los extremos $(1,1)$ y $(\infty,\infty)$, da la cota fuerte para $1 < p < \infty$. □

**Teorema B.8.12.** (Diferenciación de Lebesgue) Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

*Demostración.* Fijemos $R > 0$ y pongamos $f_R := f\mathbf{1}_{B(0,R+1)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para $x \in B(0,R)$ y $0 < r < 1$, los promedios de $f$ y $f_R$ sobre $B(x,r)$ coinciden. Definamos

$$Dh(x) := \limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |h(y)-h(x)|\,dy.$$

Si $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, la continuidad uniforme de $g$ da $Dg(x) = 0$ para todo $x$. Además, para toda $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$Dh(x) \le \mathcal{M}h(x) + |h(x)|$$

para casi todo $x$. Elegimos ahora $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y usamos

$$Df_R(x) \le D(f_R - g)(x) + Dg(x) \le \mathcal{M}(f_R - g)(x) + |f_R(x) - g(x)|.$$

Por lo tanto, para $\varepsilon > 0$,

$$\{x \in B(0,R) \mid Df(x) > 2\varepsilon\} \subseteq \{\mathcal{M}(f_R - g) > \varepsilon\} \cup \{|f_R - g| > \varepsilon\}.$$

El tipo débil $(1,1)$ del Teorema B.8.11 y Chebyshev dan

$$|\{x \in B(0,R) \mid Df(x) > 2\varepsilon\}| \le \frac{C_n}{\varepsilon}\|f_R - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Por la Proposición B.7.18, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$, de modo que el lado derecho puede hacerse arbitrariamente pequeño. Así, $Df = 0$ casi en todas partes en $B(0,R)$. Finalmente hacemos $R \to \infty$ a través de los enteros. □

Para las normas de Triebel–Lizorkin no basta controlar cada bloque por separado: la norma $L^p$ se toma después de agregar las escalas punto a punto. Por esta razón necesitaremos una versión vectorial de la desigualdad maximal. El siguiente resultado ponderado proporciona una demostración eficiente de una parte del intervalo de exponentes y será útil por sí mismo.

**Lema B.8.13.** (Desigualdad ponderada de Fefferman–Stein) Si $1 < a < \infty$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $w\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty]$ es medible, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}f)^a w \le C_{n,a}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^a \mathcal{M}w.$$

La afirmación se entiende primero para funciones acotadas y de soporte compacto; el caso general se obtiene por truncación y convergencia monótona.

*Demostración.* Basta probar la estimación para una versión truncada del operador maximal en la que sólo se consideran bolas con radios en un intervalo compacto de $(0,\infty)$; al final se eliminan las truncaciones por convergencia monótona. Fijemos $\lambda > 0$. Aplicando el Lema B.8.10 a las bolas cuyo promedio de $|f|$ es mayor que $\lambda$, obtenemos bolas disjuntas $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\{\mathcal{M}f > \lambda\} \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} 5B_j.$$

Como la contribución de $|f|\mathbf{1}_{\{|f|\le\frac{\lambda}{2}\}}$ al promedio sobre cualquier bola es a lo más $\frac{\lambda}{2}$, para cada $j\in\mathbb{N}$ se tiene

$$|B_j|\le\frac{2}{\lambda}\int_{B_j\cap\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}}|f(y)|\,dy.$$

Si $y\in B_j$, entonces $5B_j$ contiene a $y$, y de la definición de $\mathcal{M}w(y)$ se obtiene

$$\int_{5B_j}w\le|5B_j|\,\mathcal{M}w(y)=5^n|B_j|\,\mathcal{M}w(y).$$

Tomando el ínfimo sobre $y\in B_j$ y usando la desigualdad anterior para $|B_j|$, resulta

$$\begin{aligned}\int_{\{\mathcal{M}f>\lambda\}}w&\le\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{5B_j}w\\&\le\frac{C_n}{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{B_j\cap\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}}|f(y)|\mathcal{M}w(y)\,dy\\&\le\frac{C_n}{\lambda}\int_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}}|f|\mathcal{M}w.\end{aligned}$$

Multiplicamos por $a\lambda^{a-1}$ e integramos en $\lambda\in(0,\infty)$. Por Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{M}f)^a w&=a\int_0^\infty\lambda^{a-1}\int_{\{\mathcal{M}f>\lambda\}}w\,d\lambda\\&\le C_{n,a}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\mathcal{M}w(y)\left(\int_0^{2|f(y)|}\lambda^{a-2}\,d\lambda\right)dy\\&\le C_{n,a}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^a\mathcal{M}w.\end{aligned}$$

La integral interior es finita porque $a>1$. Las truncaciones se eliminan mediante el Teorema B.6.11. □

**Teorema B.8.14.** (Fefferman–Stein vectorial) Sean $1<p,r<\infty$. Si $J$ es un conjunto finito y $(f_j)_{j\in J}$ es una familia de funciones medibles, entonces

$$\left\|\left(\sum_{j\in J}|\mathcal{M}f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le C_{n,p,r}\left\|\left(\sum_{j\in J}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

La misma desigualdad vale para familias numerables siempre que el lado derecho sea finito.

Véase también [146, Sección 2.2.2].

*Demostración.* Supongamos primero $p>r$. Entonces $\frac{p}{r}>1$. Por la dualidad de $L^{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\|\sum_{j\in J}(\mathcal{M}f_j)^r\right\|_{L^{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)}=\sup_{\substack{h\in L^{(\frac{p}{r})'}(\mathbb{R}^n),\ h\ge0\\ \|h\|_{L^{(\frac{p}{r})'}(\mathbb{R}^n)}\le1}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j\in J}(\mathcal{M}f_j)^r h.$$

Aplicamos el Lema B.8.13 a cada $f_j$, sumamos y usamos Tonelli:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in J} (\mathcal{M}f_j)^r h \le C \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in J} |f_j|^r \mathcal{M}h.$$

Hölder y la continuidad de $\mathcal{M}$ en $L^{(\frac{p}{r})'}(\mathbb{R}^n)$ proporcionan

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in J} |f_j|^r \mathcal{M}h \le C \left\| \sum_{j\in J} |f_j|^r \right\|_{L^{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Tomando la raíz $r$–ésima se obtiene la desigualdad cuando $p > r$.
Supongamos ahora $p \le r$ y fijemos una familia finita $J$. El supremo que define $\mathcal{M}$ puede calcularse, con una constante dimensional uniforme, usando una familia numerable de bolas con centros y radios racionales. Para cada $j \in J$ y para la función $|f_j|$, elegimos de manera medible una de esas bolas $B_j(x) \ni x$ cuyo promedio sea al menos la mitad del supremo correspondiente. Una vez realizada esta elección, definimos el operador lineal

$$T_j g(x) := \frac{1}{|B_j(x)|} \int_{B_j(x)} g(y)\, dy.$$

La selección depende de la familia original $(f_j)_{j\in J}$, pero queda fija mientras se interpola el operador diagonal

$$\mathcal{T}(g_j)_{j\in J} := (T_j g_j)_{j\in J}.$$

Para todo $g_j$ se tiene $|T_j g_j| \le \mathcal{M} g_j$. La cota escalar del Teorema B.8.11 implica

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(g_j)_{j\in J}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^p(J))} &= \sum_{j\in J} \|T_j g_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C \sum_{j\in J} \|g_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Además,

$$\sup_{j\in J} |T_j g_j(x)| \le \mathcal{M}\left( \sup_{j\in J} |g_j| \right)(x),$$

de modo que

$$\|\mathcal{T}(g_j)_{j\in J}\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^\infty(J))} \le C \|(g_j)_{j\in J}\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^\infty(J))}.$$

Si $r = p$, la estimación buscada es precisamente la primera de las dos cotas anteriores. Supongamos entonces $r > p$. Existe $0 < \vartheta < 1$ tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\vartheta}{p}.$$

Interpolamos las estimaciones con valores en $\ell^p(J)$ y $\ell^\infty(J)$ mediante el Teorema 5.7.5 y la Proposición 5.7.12. Obtenemos

$$\|\mathcal{T}(g_j)_{j\in J}\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^r(J))} \le C_{n,p,r} \|(g_j)_{j\in J}\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell^r(J))}.$$

Aplicamos esta cota a $g_j = |f_j|$. Por la elección de $B_j(x)$,

$$\mathcal{M}f_j(x) \le 2 T_j |f_j|(x),$$

con lo que queda probado el caso $p \le r$. La constante no depende de $J$. Para una familia numerable aplicamos el resultado a las primeras $N$ coordenadas y hacemos $N \to \infty$ mediante convergencia monótona. □

**Teorema B.8.15.** (Descomposición de Calderón–Zygmund) Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$. Existen una familia numerable de cubos diádicos disjuntos $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y funciones $g, (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$f = g + \sum_{j\in\mathbb{N}} b_j \quad \text{casi en todas partes,}$$

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le 2^n\lambda, \qquad \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

$$\operatorname{supp}(b_j) \subseteq Q_j, \qquad \int_{Q_j} b_j = 0 \quad (j \in \mathbb{N}),$$

y

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j| \le \lambda^{-1}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \sum_{j\in\mathbb{N}} \|b_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demostración.* Consideremos la familia de cubos diádicos $Q$ para los cuales

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| > \lambda.$$

Para casi todo $x$ con $|f(x)| > \lambda$, el Teorema B.8.12 garantiza la existencia de cubos diádicos suficientemente pequeños que contienen a $x$ y cuyo promedio de $|f|$ es mayor que $\lambda$: basta comparar cada cubo con una bola concéntrica de radio comparable con su lado y usar la diferenciación de Lebesgue. Por otra parte, como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, el promedio sobre cubos cuyo lado tiende a infinito converge a cero. Por ello podemos elegir los cubos maximales $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de la familia. Son disjuntos y cubren $\{|f| > \lambda\}$ salvo un conjunto nulo.
Si $\widetilde{Q}_j$ es el padre diádico de $Q_j$, la maximalidad implica

$$\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j} |f| \le \lambda.$$

Como $|\widetilde{Q}_j| = 2^n|Q_j|$, se obtiene

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f| \le 2^n\lambda.$$

Definimos

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j, \\ f_{Q_j} := \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j} f, & x \in Q_j, \end{cases}$$

y

$$b_j := (f - f_{Q_j})\mathbf{1}_{Q_j}.$$

Fuera de la unión de los $Q_j$ se tiene $|f| \le \lambda$ casi en todas partes, mientras que $|f_{Q_j}| \le 2^n\lambda$. De aquí resulta

$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le 2^n\lambda$. Además,

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \int_{\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j} |f| + \sum_{j\in\mathbb{N}} |f_{Q_j}||Q_j| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

La cancelación $\displaystyle\int_{Q_j} b_j = 0$ es inmediata. Finalmente,

$$\lambda \sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j| < \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} |f| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

y

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \|b_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \left( \int_{Q_j} |f| + |f_{Q_j}||Q_j| \right) \le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

□

El último resultado de la sección conecta directamente la localización en frecuencia con el operador maximal. Para una función cuyo espectro está contenido en una bola de radio comparable con $2^j$, el máximo de sus traslaciones, penalizado a la escala $2^{-j}$, queda controlado por un maximal de Hardy–Littlewood de una potencia de la función. Esta es la forma de la desigualdad maximal de Peetre que se utiliza en las pruebas de independencia de la resolución diádica y en los argumentos casi diagonales.

**Lema B.8.16.** (Control maximal de Peetre) Sean $j \in \mathbb{Z}$, $0 < a < \infty$, $N > \frac{n}{a}$ y $A > 0$. Supongamos que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y la identificamos con su representante suave canónico. Supongamos además que

$$\operatorname{supp}(\widehat{f}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi\| \le A2^j\}.$$

Entonces

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{(1+2^j\|y\|)^N} \le C\left[\mathcal{M}(|f|^a)(x)\right]^{\frac{1}{a}}, \tag{B.9}$$

donde $C$ depende únicamente de $n, a, N$ y $A$, en todo punto $x$ tal que $\mathcal{M}(|f|^a)(x) < \infty$. En consecuencia, si

$$K_j(x) := 2^{jn}K(2^jx)$$

y

$$|K(x)| \le C_K(1+\|x\|)^{-N-n-1},$$

entonces

$$|K_j * f(x)| \le C\left[\mathcal{M}(|f|^a)(x)\right]^{\frac{1}{a}}$$

donde $C$ depende también de $C_K$; en esos puntos la convolución converge absolutamente.

El método maximal para funciones de banda limitada se desarrolla en [146, Secciones 2.2–2.3].

*Demostración.* Elegimos $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\vartheta = 1$ en una vecindad de la bola $\{\|\xi\| \le A\}$ y ponemos $\eta := \mathcal{F}^{-1}\vartheta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si $\eta_j(x) := 2^{jn}\eta(2^jx)$, la fórmula de convolución correspondiente a la normalización unitaria

de Fourier da

$$f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \eta_j * f$$

en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. El factor constante se absorberá en las estimaciones. En particular, por la Proposición 4.10.4, $f$ posee el representante suave canónico de crecimiento a lo más polinómico utilizado en el enunciado.
Como $\eta$ es de Schwartz, para todo $L > 0$ existe $C_L$ tal que

$$|\eta_j(z)| \le C_L 2^{jn}(1 + 2^j\|z\|)^{-L}. \tag{B.10}$$

Supongamos primero $a > 1$. Para $z \in \mathbb{R}^n$, la fórmula de reproducción y la desigualdad

$$1 + 2^j\|x - w\| \le (1 + 2^j\|x - z\|)(1 + 2^j\|z - w\|)$$

dan, después de dividir por $(1 + 2^j\|x - z\|)^N$,

$$\frac{|f(z)|}{(1 + 2^j\|x - z\|)^N} \le C_L \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn}(1 + 2^j\|z - w\|)^{-L+N} \frac{|f(w)|}{(1 + 2^j\|x - w\|)^N}\, dw.$$

Aplicamos Hölder con exponentes $a$ y $a' = \frac{a}{a-1}$. Si $L$ se elige de modo que $(L - N)a' > n$, el segundo factor queda uniformemente acotado y obtenemos

$$\frac{|f(z)|}{(1 + 2^j\|x - z\|)^N} \le C \left( \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn} \frac{|f(w)|^a}{(1 + 2^j\|x - w\|)^{Na}}\, dw \right)^{\frac{1}{a}}.$$

Como $Na > n$, la descomposición de $\mathbb{R}^n$ en la bola $B(x, 2^{-j})$ y los anillos

$$2^{\ell - j} < \|x - w\| \le 2^{\ell+1-j}, \qquad \ell \in \mathbb{N}_0,$$

prueba

$$\int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn} \frac{|f(w)|^a}{(1 + 2^j\|x - w\|)^{Na}}\, dw \le C\mathcal{M}(|f|^a)(x), \tag{B.11}$$

pues la contribución del $\ell$–ésimo anillo está acotada por $C2^{-\ell(Na-n)}\mathcal{M}(|f|^a)(x)$. Tomar el supremo en $z = x - y$ demuestra (B.9) para $a > 1$.
Consideremos ahora $0 < a \le 1$. Para evitar suponer de antemano que el máximo de Peetre es finito, fijamos $\varepsilon > 0$ y definimos

$$P_\varepsilon f(x) := \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|}{(1 + 2^j\|x - z\|)^N (1 + \varepsilon 2^j\|x - z\|)^M},$$

donde $0 < \varepsilon \le 1$ y $M$ se elige mayor que un orden de crecimiento polinómico de $f$. La regularidad y el crecimiento obtenidos arriba implican $P_\varepsilon f(x) < \infty$. Usando

$$|f(w)|^{1-a} \le P_\varepsilon f(x)^{1-a}(1 + 2^j\|x - w\|)^{N(1-a)}(1 + \varepsilon 2^j\|x - w\|)^{M(1-a)}$$

en la fórmula de reproducción anterior, y aplicando las desigualdades de pesos

$$1 + 2^j\|x - w\| \le (1 + 2^j\|x - z\|)(1 + 2^j\|z - w\|)$$

y su análoga con $\varepsilon 2^j$, obtenemos, escogiendo $L$ suficientemente grande en (B.10),

$$P_\varepsilon f(x) \le C P_\varepsilon f(x)^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn} \frac{|f(w)|^a}{(1+2^j\|x-w\|)^{Na}}\, dw.$$

La constante $C$ no depende de $\varepsilon$. Si $P_\varepsilon f(x) > 0$, dividimos por $P_\varepsilon f(x)^{1-a}$; si es cero, la conclusión es inmediata. Usando (B.11) resulta

$$P_\varepsilon f(x)^a \le C\mathcal{M}(|f|^a)(x).$$

Al hacer $\varepsilon \downarrow 0$, los denominadores disminuyen y $P_\varepsilon f(x)$ crece hacia el máximo de Peetre sin regularizar. La cota anterior prueba que este máximo, que denotamos por $Pf(x)$, es finito. En este primer paso la constante puede depender de $M$, elegido según el crecimiento de $f$.

Ahora repetimos la estimación con el máximo finito $Pf(x)$ y sin el peso auxiliar. La fórmula de reproducción y

$$|f(w)|^{1-a} \le Pf(x)^{1-a}(1+2^j\|x-w\|)^{N(1-a)}$$

dan, para $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{|f(z)|}{(1+2^j\|x-z\|)^N} \le C\, Pf(x)^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn} \frac{|f(w)|^a}{(1+2^j\|x-w\|)^{Na}}\, dw.$$

En efecto, se usa $(1+2^j\|x-w\|)^N \le (1+2^j\|x-z\|)^N(1+2^j\|z-w\|)^N$ y se escoge $L > N$ en (B.10). El factor restante $(1+2^j\|z-w\|)^{-L+N}$ es a lo más uno. Esta vez $L$ depende sólo de $N$, y ninguna constante depende del orden de crecimiento de $f$. Tomamos el supremo sobre $z \in \mathbb{R}^n$, dividimos por $Pf(x)^{1-a}$ cuando es positivo y aplicamos (B.11). Se obtiene (B.9) con la dependencia de constantes afirmada en el enunciado.

Para la segunda afirmación, denotemos por $P_{j,N} f(x)$ el miembro izquierdo de (B.9). Entonces

$$\begin{aligned} |K_j * f(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |K_j(y)|\,|f(x-y)|\, dy \\ &\le P_{j,N} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} |K_j(y)|(1+2^j\|y\|)^N\, dy. \end{aligned}$$

El cambio de variable $z = 2^j y$ y la hipótesis sobre $K$ muestran que la última integral está acotada uniformemente en $j$. Aplicamos finalmente (B.9). □

**Proposición B.8.17.** (Continuidad de las traslaciones) Si $1 \le p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } \|h\| \to 0, \quad \tau_h f(x) := f(x+h).$$

*Demostración.* Si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, la convergencia se sigue de la continuidad uniforme y del hecho de que todos los trasladados con $\|h\| \le 1$ tienen soporte en un compacto fijo. Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ elegimos $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Como las traslaciones son isometrías de $L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le 2\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\tau_h g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

El último término tiende a cero cuando $\|h\| \to 0$, y después hacemos $\varepsilon \downarrow 0$. □

## B.9 Molificadores euclidianos

La regularización local que se utiliza en los espacios de Sobolev y en las ecuaciones diferenciales parciales se basa en una única construcción euclidiana. La formulamos con las propiedades que se necesitarán posteriormente; véase también [61, Apéndice C, §5].

**Teorema B.9.1.** (Existencia y propiedades de los molificadores euclidianos) Existe una función $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\rho \geq 0$, $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,1)$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, d\lambda_n = 1$. Para $\varepsilon > 0$ definimos

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Entonces $\rho_\varepsilon \geq 0$, $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subseteq \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon)$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon \, d\lambda_n = 1$. Además, se cumplen las propiedades siguientes.

(a) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}_{\mathrm{euc}}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \varepsilon\}$, entonces

$$u_\varepsilon(x) := (u * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\rho_\varepsilon(y)\, dy, \qquad x \in \Omega_\varepsilon,$$

es suave y $D^\alpha u_\varepsilon = u * D^\alpha \rho_\varepsilon$ para todo multiíndice $\alpha$.

(b) Si $1 \leq p < \infty$ y $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, entonces $u_\varepsilon \to u$ en $L^p(K)$ para todo compacto $K \subseteq \Omega$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.

(c) Si $u$ es continua, entonces $u_\varepsilon \to u$ uniformemente sobre cada compacto contenido en $\Omega$. Si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua, la convergencia es uniforme en $\mathbb{R}^n$.

(d) Si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es $L$-Lipschitz, entonces $u_\varepsilon$ también es $L$-Lipschitz,

$$|Du_\varepsilon(x)| \leq L$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq L\varepsilon m_1(\rho), \qquad m_1(\rho) := \int_{\mathbb{R}^n} \|z\| \rho(z)\, dz.$$

*Demostración.* Definamos

$$\vartheta(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right), & \|x\| < 1, \\ 0, & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

La función $\vartheta$ es suave: dentro de la bola esto es inmediato, y al aproximarse a $\|x\| = 1$ cada una de sus derivadas es el producto de una función racional en $1 - \|x\|^2$ por $\exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\right)$, que converge a cero más rápidamente que cualquier potencia de $1 - \|x\|^2$. Como $\vartheta$ es no negativa y no es idénticamente nula, la constante $c := \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta \, d\lambda_n\right)^{-1}$ está bien definida. La función $\rho := c\vartheta$ posee las propiedades requeridas. El cambio de variable $y = \varepsilon z$ prueba las afirmaciones sobre $\rho_\varepsilon$.

Sea ahora $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Si $x \in \Omega_\varepsilon$, la integral que define a $u_\varepsilon(x)$ sólo utiliza valores de $u$ en $\Omega$. También puede escribirse como

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(z)\rho_\varepsilon(x-z)\, dz.$$

En una vecindad compacta de cualquier punto de $\Omega_\varepsilon$, el integrando se anula fuera de un compacto fijo de $\Omega$. Como $u$ es integrable en ese compacto y todas las derivadas de $\rho_\varepsilon$ están acotadas, la convergencia dominada permite diferenciar bajo el signo integral cualquier número de veces. Así, $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ y $D^\alpha u_\varepsilon = u * D^\alpha \rho_\varepsilon$. Probemos la convergencia en $L^p_{\mathrm{loc}}$. Primero observemos que, para todo $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|v(\cdot - h) - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando} \qquad h \to 0.$$

En efecto, por la Proposición B.7.18 elegimos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\|v - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \delta$. La invariancia de la medida de Lebesgue bajo traslaciones da

$$\|v(\cdot - h) - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le 2\delta + \|\varphi(\cdot - h) - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

El último término converge a cero por la continuidad uniforme de $\varphi$ y porque, para $\|h\| \le 1$, todas las funciones involucradas tienen soporte en un compacto fijo. Como $\delta > 0$ es arbitrario, queda probada la continuidad de las traslaciones.

Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Como $K$ y $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ son disjuntos y el primero es compacto, el número $d_K := \operatorname{dist}_{\mathrm{euc}}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ es positivo. Pongamos $\delta_K := \dfrac{d_K}{3}$. Entonces el cerrado $F_K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}_{\mathrm{euc}}(x, K) \le 2\delta_K\}$ está contenido en $\Omega$. La Proposición 1.3.6, aplicada a $F_K \subseteq \Omega$, proporciona $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \le \eta \le 1$ y $\eta = 1$ en una vecindad de $F_K$. Extendemos $v := \eta u$ por cero a $\mathbb{R}^n$. Si $0 < \varepsilon < \delta_K$, entonces $u_\varepsilon = v * \rho_\varepsilon$ en $K$. La desigualdad integral de Minkowski y el cambio de variable $y = \varepsilon z$ proporcionan

$$\|v * \rho_\varepsilon - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) \|v(\cdot - \varepsilon z) - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dz.$$

Para cada $z$ el integrando converge a cero, y está dominado por $2\rho(z)\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. El teorema de convergencia dominada concluye que $u_\varepsilon \to u$ en $L^p(K)$.

Si $u$ es continua, para $x \in \Omega_\varepsilon$ se tiene

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y) |u(x - y) - u(x)|\, dy \le \sup_{y \in \overline{B}_{\mathrm{euc}}(0,\varepsilon)} |u(x - y) - u(x)|.$$

La continuidad uniforme de $u$ sobre una vecindad compacta de $K$ prueba la convergencia uniforme en $K$. El mismo argumento vale en todo $\mathbb{R}^n$ cuando $u$ es uniformemente continua.

Finalmente, si $u$ es $L$-Lipschitz, entonces

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(z) |u(x - z) - u(y - z)|\, dz \le L\|x - y\|.$$

Como $u_\varepsilon$ es suave, al tomar cocientes incrementales en direcciones unitarias obtenemos $\|Du_\varepsilon\| \le L$. Además,

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) |u(x - \varepsilon z) - u(x)|\, dz \le L\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \|z\| \rho(z)\, dz,$$

uniformemente respecto de $x$. Esto completa la prueba. □

## B.10 Espacios vectoriales topológicos

En muchas ocasiones, los espacios funcionales que aparecen en análisis global no están descritos de manera natural por una sola norma. Esto ocurre, por ejemplo, con los espacios de funciones suaves con soporte compacto, con los espacios de secciones de prueba y con varias topologías débiles asociadas a problemas de dualidad. Por esta razón, conviene recordar el lenguaje de los espacios vectoriales topológicos, el cual permite estudiar simultáneamente la estructura lineal y la estructura topológica de un espacio.

**Definición B.10.1.** Sea $X$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dotado con una topología $\tau$. El par $(X, \tau)$ se llama un *espacio vectorial topológico* si las funciones $X \times X \longrightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y$ y $\mathbb{K} \times X \longrightarrow X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ son continuas.

La continuidad de las operaciones lineales tiene consecuencias inmediatas. Por ejemplo, las traslaciones y las homotecias no nulas son homeomorfismos. En particular, la topología de un espacio vectorial topológico queda determinada por lo que ocurre alrededor del origen.

**Proposición B.10.2.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de vecindades del origen. Entonces, para cada $x \in X$, la familia

$$x + \mathcal{B} := \{x + U \mid U \in \mathcal{B}\}$$

es una base de vecindades de $x$. En particular, la familia

$$\{x + U \mid x \in X,\ U \in \mathcal{B}\}$$

determina los abiertos de $X$: un conjunto $O \subseteq X$ es abierto si y sólo si para cada $x \in O$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x + U \subseteq O$. Si los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, sus traslaciones forman una base de abiertos. Por consiguiente, la topología de un espacio vectorial topológico queda determinada de manera única por cualquier base de vecindades del origen.

*Demostración.* Sea $x \in X$. Como la traslación $\tau_x \colon X \longrightarrow X$, dada por $\tau_x(y) = x + y$, es un homeomorfismo, se tiene que $V$ es una vecindad de $0$ si y sólo si $x + V$ es una vecindad de $x$. Por lo tanto, si $\mathcal{B}$ es una base local en $0$, entonces $x + \mathcal{B}$ es una base local en $x$. Si $O$ es abierto y $x \in O$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x + U \subseteq O$. Recíprocamente, si esta condición se cumple en cada $x \in O$, cada punto de $O$ posee una vecindad contenida en $O$ y es interior. Esto caracteriza los abiertos y prueba la unicidad de la topología. Cuando los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, también lo son sus traslaciones, por lo que forman una base de abiertos. □

Para describir bases locales útiles, necesitamos algunas nociones geométricas elementales en espacios vectoriales.

**Definición B.10.3.** (Conjunto absorbente) Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un conjunto $A \subset X$ se dice *absorbente* si para todo $x \in X$ existe un $\lambda > 0$ tal que $x \in tA$, $\forall t \geq \lambda$, donde $tA := \{ta \mid a \in A\}$.

**Definición B.10.4.** (Conjunto balanceado) Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un conjunto $B \subset X$ se dice *balanceado* si para todo $x \in B$ y todo escalar $\alpha$ con $|\alpha| \leq 1$, se cumple que $\alpha x \in B$.

**Definición B.10.5.** (Conjunto absolutamente convexo) Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un subconjunto $A \subseteq X$ se llama *absolutamente convexo* si es convexo y balanceado.

Como primer ejemplo, toda vecindad del origen absorbe al espacio completo.

**Lema B.10.6.** Toda vecindad del origen en un espacio vectorial topológico es absorbente.

*Demostración.* Sea $U$ una vecindad del origen y sea $x \in X$. Como el mapeo

$$\mathbb{K} \longrightarrow X, \qquad \lambda \longmapsto \lambda x,$$

es continuo y $\lambda x \to 0$ cuando $\lambda \to 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda x \in U$ si $|\lambda| < \delta$. Tomando $t > \delta^{-1}$, se tiene $t^{-1}x \in U$, y por lo tanto $x \in tU$. Como $x \in X$ era arbitrario, $U$ es absorbente. □

**Lema B.10.7.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico. Entonces:

(a) para toda vecindad $U$ del origen existe una vecindad $V$ del origen tal que $V + V \subseteq U$;

(b) para toda vecindad $U$ del origen existe una vecindad balanceada $B$ del origen tal que $B \subseteq U$;

(c) si $X$ es de Hausdorff, entonces para toda vecindad $U$ del origen existe una vecindad $W$ del origen tal que $\overline{W} \subseteq U$.

*Demostración.* Para $(a)$, usamos la continuidad de la suma en $(0,0)$. Como $U$ es una vecindad de $0$, existen vecindades $V_1, V_2$ del origen tales que $V_1 + V_2 \subseteq U$. Tomando $V = V_1 \cap V_2$, se obtiene $V + V \subseteq U$.
Para $(b)$, usamos la continuidad del producto por escalar en $(0,0)$. Existe $\varepsilon > 0$ y una vecindad $V$ del origen tales que $\lambda V \subseteq U$ si $|\lambda| < \varepsilon$. Tomando $0 < r < \varepsilon$ y definiendo

$$B := \bigcup_{|\lambda| \leq r} \lambda V,$$

se tiene que $B$ es una vecindad del origen, $B \subseteq U$ y $B$ es balanceada.
Para $(c)$, por el inciso (a) podemos elegir una vecindad $V_0$ del origen tal que $V_0 + V_0 \subseteq U$. El conjunto

$$V := V_0 \cap (-V_0)$$

es una vecindad simétrica del origen y satisface $V + V \subseteq U$. Sea $W := \operatorname{Int}(V)$, que es una vecindad abierta y simétrica del origen. Si $x \in \overline{W}$, entonces la vecindad $x + W$ de $x$ intersecta a $W$. Existen, por lo tanto, $w_1, w_2 \in W$ tales que $x + w_1 = w_2$, y

$$x = w_2 - w_1 \in W + W \subseteq V + V \subseteq U.$$

Así, $\overline{W} \subseteq U$. Este argumento prueba directamente, en particular, la regularidad de todo espacio vectorial topológico de Hausdorff. □

**Observación B.10.8.** La Proposición B.10.2 muestra que, en un espacio vectorial topológico, basta describir una base local en el origen. El Lema B.10.7 permite refinar las vecindades del origen para que tengan propiedades útiles respecto a la suma, el producto por escalares y, bajo la hipótesis de Hausdorff, podemos encontrar una base de vecindades cerradas.

En un espacio vectorial topológico, tener una base local numerable en el origen es equivalente a que el espacio sea primero numerable. Podemos dar una caracterización de los espacios vectoriales topológicos metrizables en términos de esta propiedad.

**Teorema B.10.9.** Un espacio vectorial topológico $X$ es metrizable si y sólo si:

(a) $X$ es de Hausdorff;

(b) $X$ tiene una base local numerable en 0.

La construcción de una métrica invariante por traslaciones a partir de una base local numerable, así como el recíproco inmediato, se encuentra en [123, 149].

En espacios metrizables, la continuidad puede probarse mediante sucesiones. Esta observación será útil cuando se trabaje con espacios de Fréchet y otros espacios metrizables.

**Proposición B.10.10.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico metrizable y sea $Y$ un espacio vectorial topológico. Un operador lineal $L\colon X \longrightarrow Y$ es continuo si y sólo si es secuencialmente continuo en el origen; es decir, si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$ tal que $x_n \to 0$, se tiene $L(x_n) \to 0$ en $Y$.

*Demostración.* Si $L$ es continuo y $x_n \to 0$ en $X$, entonces, por continuidad, se tiene $L(x_n) \to L(0) = 0$ en $Y$.
Recíprocamente, supongamos que $L$ es secuencialmente continuo en el origen. Probaremos que $L$ es continuo. Como $L$ es lineal, basta demostrar la continuidad en 0. Supongamos, buscando una contradicción, que $L$ no es continuo en 0. Entonces existe una vecindad $U$ del origen en $Y$ tal que para toda vecindad $V$ del origen en $X$ se cumple $L(V) \nsubseteq U$.
Como $X$ es metrizable, es primero numerable. Sea $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local numerable del origen en $X$. Definimos $V_n := \bigcap_{k=1}^{n} W_k$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces cada $V_n$ es una vecindad del origen, la familia $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y sigue siendo una base local del origen.
Por la elección de $U$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $x_n \in V_n$ tal que $L(x_n) \notin U$.
Veamos que $x_n \to 0$ en $X$. Sea $W$ una vecindad arbitraria del origen. Como $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local del origen, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $V_N \subseteq W$. Dado que la familia es decreciente, para todo $n \geq N$ se tiene $V_n \subseteq V_N \subseteq W$. En consecuencia, $x_n \in W$ para todo $n \geq N$. Esto prueba que $x_n \to 0$ en $X$.
Por continuidad secuencial en el origen, concluimos que $L(x_n) \to 0$ en $Y$. Sin embargo, esto es imposible, pues $U$ es una vecindad del origen en $Y$ y $L(x_n) \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta contradicción muestra que $L$ es continuo en 0. Finalmente, por linealidad, $L$ es continuo. □

La noción de acotación en espacios vectoriales topológicos no depende de una métrica, sino de la manera en que los conjuntos son absorbidos por las vecindades del origen.

**Definición B.10.11.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico. Decimos que un conjunto $E \subseteq X$ es *topológicamente acotado* si para cada vecindad $U$ de 0 existe $t > 0$ tal que $E \subseteq tU$.

Cuando la topología $\tau$ está generada por una métrica $d$, la noción de ser acotado con respecto a la métrica y la noción de ser topológicamente acotado pueden diferir. La métrica $d_1 = \dfrac{d}{d+1}$ genera la misma topología que $d$, pero como $d_1 \leq 1$, todo conjunto en $X$ está acotado con respecto a $d_1$. Sin embargo, no necesariamente todo conjunto de $X$ estará topológicamente acotado.

También necesitaremos una noción secuencial de sucesión de Cauchy. En espacios vectoriales topológicos no metrizables, la completitud general se formula mediante filtros o redes de Cauchy. En este apéndice usaremos la versión secuencial únicamente cuando resulte suficiente, en particular en espacios metrizables.

**Definición B.10.12.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico. Una sucesión $\{x_n\}$ en $X$ se llama sucesión de Cauchy si para toda vecindad $U$ del origen existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n - x_m \in U, \quad \forall n, m \geq N.$$

Decimos que $X$ es *secuencialmente completo* si toda sucesión de Cauchy en $X$ es convergente.

**Proposición B.10.13.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico y $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $X$. Entonces el rango de la sucesión $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está topológicamente acotado.

*Demostración.* Sea $U$ una vecindad del origen. Por el Lema B.10.7, existe una vecindad balanceada $W$ del origen tal que $W + W \subseteq U$. Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_N \in W$ para todo $n \geq N$. Además, como $W$ es absorbente, existe $t_0 > 0$ tal que $x_N \in tW$ para todo $t \geq t_0$. Si $t \geq \max\{1, t_0\}$ y $n \geq N$, entonces $x_n = x_N + (x_n - x_N) \in tW + W \subseteq t(W + W) \subseteq tU$.
Por otro lado, el conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ es topológicamente acotado, pues cada uno de sus puntos es absorbido por $U$. Aumentando $t$ si es necesario, obtenemos que todos los términos de la sucesión pertenecen a un mismo múltiplo de $U$. Como $U$ era arbitraria, el rango de la sucesión está topológicamente acotado. □

La clase de espacios vectoriales topológicos más importante para nosotros será la de los espacios localmente convexos. Su importancia proviene de que sus topologías pueden describirse mediante seminormas, lo cual es especialmente adecuado para espacios de funciones y de secciones.

**Definición B.10.14.** Un espacio vectorial topológico $X$ se dice localmente convexo si posee una base local en $0$ formada por conjuntos convexos; equivalentemente, toda vecindad de $0$ contiene una vecindad convexa de $0$.

**Proposición B.10.15.** Un espacio vectorial topológico localmente convexo admite una base local en $0$ de conjuntos balanceados y convexos.

*Demostración.* Sea $U$ una vecindad del origen. Como $X$ es localmente convexo, existe una vecindad convexa $V$ del origen tal que $V \subseteq U$. Por el Lema B.10.7, existe una vecindad balanceada $B$ del origen tal que $B \subseteq V$. Entonces la envolvente convexa de $B$, denotada por $\operatorname{conv}(B)$, es balanceada y convexa. Además, como $V$ es convexa y $B \subseteq V$, se tiene $\operatorname{conv}(B) \subseteq V \subseteq U$. Así, toda vecindad del origen contiene una vecindad balanceada y convexa del origen. □

**Definición B.10.16.** Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una función $p\colon X \longrightarrow [0,\infty)$ es una seminorma si

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

para cualesquiera $x, y \in X$ y

$$p(tx) = |t|p(x)$$

para toda $x \in X$ y cualquier $t \in \mathbb{K}$.

A cada conjunto absorbente y absolutamente convexo se le asocia una seminorma mediante su funcional de Minkowski.

**Proposición B.10.17.** Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y sea $A \subseteq X$ un conjunto absorbente. Si $A$ es absolutamente convexo, entonces su funcional de Minkowski

$$p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda A\}, \qquad x \in X,$$

es una seminorma sobre $X$.

*Demostración.* Como $A$ es absorbente, para cada $x \in X$ existe $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$. Por lo tanto, el conjunto que aparece en la definición de $p_A(x)$ es no vacío y, en consecuencia, $p_A(x)$ está bien definido para todo $x \in X$.

Veamos primero la homogeneidad. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$ y sea $x \in X$. Si $\alpha = 0$, entonces $p_A(\alpha x) = p_A(0) = 0$. Supongamos ahora que $\alpha \neq 0$. Escribimos $\alpha = |\alpha|\theta$, donde $|\theta| = 1$. Como $A$ es balanceado, se tiene $\theta A = A$. Por lo tanto, para cada $\lambda > 0$,

$$\alpha x \in \lambda A \iff |\alpha|\theta x \in \lambda A \iff x \in \frac{\lambda}{|\alpha|} A.$$

De aquí se sigue que

$$p_A(\alpha x) = |\alpha|\, p_A(x).$$

Probemos ahora la subaditividad. Sean $x, y \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de ínfimo, existen $\lambda, \mu > 0$ tales que

$$x \in \lambda A, \qquad y \in \mu A, \qquad \lambda < p_A(x) + \varepsilon, \qquad \mu < p_A(y) + \varepsilon.$$

Como $A$ es convexo, se tiene

$$\lambda A + \mu A \subseteq (\lambda + \mu) A.$$

Si $a, b \in A$, entonces

$$\lambda a + \mu b = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} a + \frac{\mu}{\lambda+\mu} b\right),$$

y el término entre paréntesis pertenece a $A$ por convexidad. Por lo tanto,

$$x + y \in (\lambda + \mu) A,$$

de donde

$$p_A(x+y) \leq \lambda + \mu < p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, concluimos que

$$p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y).$$

Así, $p_A$ es una seminorma sobre $X$. □

**Definición B.10.18.** Sea $X$ un espacio vectorial y sea $\mathcal{P}$ una familia de seminormas en $X$. La *topología inducida por* $\mathcal{P}$ es la topología cuya base local del origen está formada por todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$\{x \in X \mid p(x) < r\}, \qquad p \in \mathcal{P}, \quad r > 0.$$

Equivalentemente, una base de vecindades de un punto $x \in X$ está dada por los conjuntos de la forma

$$x + \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X \mid p_i(y) < r_i\},$$

donde $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}$ y $r_1, \ldots, r_k > 0$.

**Teorema B.10.19.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo y sea $\mathcal{F}$ una base local del origen formada por vecindades abiertas absolutamente convexas. Entonces la familia $\{p_U \mid U \in \mathcal{F}\}$ de funcionales de Minkowski es una familia de seminormas continuas que genera la topología de $X$.
Recíprocamente, dada una familia $\mathcal{P}$ de seminormas en un espacio vectorial $X$, la topología inducida por $\mathcal{P}$ vuelve a $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo y cada seminorma $p \in \mathcal{P}$ es continua respecto de dicha topología.

*Demostración.* Supongamos primero que $\mathcal{F}$ es una base local del origen formada por vecindades abiertas absolutamente convexas. Sea $U \in \mathcal{F}$. Como $U$ es una vecindad del origen en un espacio vectorial topológico, por el Lema B.10.6, $U$ es absorbente. Por lo tanto, la Proposición B.10.17 garantiza que su funcional de Minkowski $p_U$ es una seminorma sobre $X$.
Veamos que $p_U$ es continua. Como $p_U$ es una seminorma, basta probar su continuidad en el origen. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que la multiplicación por el escalar no nulo $\frac{\varepsilon}{2}$ es un homeomorfismo de $X$ sobre sí mismo y $U$ es una vecindad del origen, el conjunto $\frac{\varepsilon}{2}U$ es también una vecindad del origen. Si $x \in \frac{\varepsilon}{2}U$, entonces

$$p_U(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\varepsilon}{2}U \subseteq \{x \in X \mid p_U(x) < \varepsilon\},$$

lo cual prueba que $p_U$ es continua en 0. Finalmente, para cualesquiera $x, y \in X$, la subaditividad de $p_U$ da $p_U(x) \leq p_U(x-y) + p_U(y)$ y $p_U(y) \leq p_U(x-y) + p_U(x)$, de donde $|p_U(x) - p_U(y)| \leq p_U(x-y)$.
Así, la continuidad de $p_U$ en el origen implica su continuidad en todo punto de $X$.
Probemos ahora que la familia $\{p_U \mid U \in \mathcal{F}\}$ genera la topología original. Para cada $U \in \mathcal{F}$, como $U$ es abierto, balanceado y convexo, se tiene

$$U = \{x \in X \mid p_U(x) < 1\}.$$

Si $p_U(x) < 1$, entonces existe $\lambda < 1$ tal que $x \in \lambda U$, y por ser $U$ balanceado se obtiene $x \in U$. Recíprocamente, si $x \in U$, como $U$ es abierto y el mapeo $t \mapsto tx$ es continuo, existe $r > 1$ tal que $rx \in U$. Por lo tanto, $x \in \frac{1}{r}U$ y $p_U(x) \leq \frac{1}{r} < 1$. Luego los conjuntos definidos por las seminormas $p_U$ reproducen la base local $\mathcal{F}$ y, por la Proposición B.10.2, generan la topología de $X$.

Probemos ahora la afirmación recíproca. Sea $\mathcal{P}$ una familia de seminormas sobre el espacio vectorial $X$, y denotemos por $\mathcal{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$\{x \in X \mid p(x) < r\}, \qquad p \in \mathcal{P}, \quad r > 0.$$

Cada uno de estos conjuntos es balanceado y convexo, y lo mismo vale para sus intersecciones finitas. Definimos una topología $\tau$ diciendo que $O \subseteq X$ es abierto si para cada $x \in O$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x + B \subseteq O$. Esta definición vuelve a $\mathcal{B}$ una base local del origen.

La suma es continua en $(0,0)$ porque, dado un elemento básico

$$B = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X \mid p_i(x) < r_i\},$$

el conjunto

$$C = \bigcap_{i=1}^{k} \left\{x \in X \mid p_i(x) < \frac{r_i}{2}\right\}$$

satisface $C + C \subseteq B$. La continuidad del producto por escalares se obtiene de manera similar: si $\alpha_0 \in \mathbb{K}$, $x_0 \in X$ y $B$ es como arriba, elegimos $\delta > 0$ y una vecindad básica $C$ de 0 tales que

$$|\alpha - \alpha_0| p_i(x_0) < \frac{r_i}{2} \quad \text{y} \quad |\alpha| p_i(h) < \frac{r_i}{2}$$

para $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, $h \in C$ y todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces $\alpha(x_0 + h) - \alpha_0 x_0 \in B$. Por lo tanto, $\tau$ vuelve a $X$ un espacio vectorial topológico. Como $\mathcal{B}$ está formada por conjuntos convexos, este espacio es localmente convexo. Finalmente, cada seminorma $p \in \mathcal{P}$ es continua porque $\{x \in X \mid p(x) < \varepsilon\}$ es una vecindad del origen para todo $\varepsilon > 0$. □

Ahora damos algunas consecuencias de la descripción por seminormas.

**Proposición B.10.20.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico. Entonces $X$ es de Hausdorff si y sólo si el conjunto $\{0\}$ es cerrado.

*Demostración.* Supongamos primero que $X$ es de Hausdorff. Como todo espacio de Hausdorff es $T_1$, sus conjuntos unitarios son cerrados. En particular, $\{0\}$ es cerrado.

Recíprocamente, supongamos que $\{0\}$ es cerrado. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces $x - y \neq 0$, y por lo tanto $x - y \in X \setminus \{0\}$. Como $X \setminus \{0\}$ es abierto, existe una vecindad $U$ del origen tal que

$$x - y + U \subseteq X \setminus \{0\}.$$

En particular, $x - y \notin -U$. Reemplazando $U$ por $U \cap (-U)$, podemos suponer que $U$ es simétrica, es decir, $U = -U$. Así, $x - y \notin U$.

Como la suma es continua en $(0,0)$, existe una vecindad $V$ del origen tal que $V+V \subseteq U$. Reemplazando nuevamente $V$ por $V \cap (-V)$, podemos suponer que $V$ es simétrica.
Consideremos las vecindades $x+V$ y $y+V$. Afirmamos que son disjuntas. Si existiera $z \in (x+V)\cap(y+V)$, entonces existirían $v_1, v_2 \in V$ tales que $z = x+v_1 = y+v_2$. Por lo tanto, $x-y = v_2-v_1$. Como $V$ es simétrica, se tiene $-v_1 \in V$, y entonces $v_2-v_1 \in V+V \subseteq U$, lo cual contradice que $x-y \notin U$. Por lo tanto, $(x+V)\cap(y+V) = \varnothing$. Hemos encontrado vecindades disjuntas de $x$ y de $y$. Como $x$ y $y$ fueron arbitrarios, $X$ es de Hausdorff. □

**Proposición B.10.21.** Sea $X$ un espacio vectorial y sea $\mathcal{P}$ una familia de seminormas en $X$. Entonces la topología inducida por $\mathcal{P}$ es de Hausdorff si y sólo si $\mathcal{P}$ separa puntos, es decir, si para todo $x \in X$ con $x \neq 0$ existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$. Equivalentemente,

$$\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \{x \in X \mid p(x) = 0\} = \{0\}.$$

*Demostración.* Supongamos primero que la topología inducida por $\mathcal{P}$ es de Hausdorff. Sea $x \in X$ con $x \neq 0$. Como la topología es de Hausdorff, existen vecindades disjuntas del origen y de $x$. En particular, existe una vecindad $U$ del origen tal que $x \notin U$. Por definición de la topología inducida, existen $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}$ y $r_1, \ldots, r_k > 0$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X \mid p_i(y) < r_i\} \subseteq U.$$

Como $x \notin U$, también se tiene

$$x \notin \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X \mid p_i(y) < r_i\}.$$

Por lo tanto, existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $p_i(x) \geq r_i > 0$. En particular, $p_i(x) \neq 0$. Así, la familia $\mathcal{P}$ separa puntos.
Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{P}$ separa puntos. Consideremos

$$N := \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \{x \in X \mid p(x) = 0\}.$$

Como toda seminorma satisface $p(0) = 0$, se tiene $0 \in N$. Por otro lado, si $x \neq 0$, por hipótesis existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$, de modo que $x \notin \{y \in X \mid p(y) = 0\}$. Por consiguiente, $x \notin N$. Esto prueba que $N = \{0\}$.
Veamos ahora que $N$ es cerrado. Para cada $p \in \mathcal{P}$, el conjunto $\{x \in X \mid p(x) = 0\}$ es cerrado en la topología inducida. Si $x_0$ no pertenece a dicho conjunto, entonces $p(x_0) > 0$. Tomando $r := \frac{p(x_0)}{2}$, la vecindad

$$x_0 + \{y \in X \mid p(y) < r\}$$

de $x_0$ no intersecta a $\{x \in X \mid p(x) = 0\}$. Si $p(x) = 0$ y $p(x - x_0) < r$, entonces

$$p(x_0) = p(x_0 - x + x) \leq p(x_0 - x) + p(x) < r,$$

lo cual contradice la elección de $r$. Por lo tanto, $\{x \in X \mid p(x) = 0\}$ es cerrado.
Como $N$ es intersección de conjuntos cerrados, $N$ es cerrado. Pero $N = \{0\}$, así que $\{0\}$ es cerrado. Por la Proposición B.10.20, la topología inducida por $\mathcal{P}$ es de Hausdorff. □

**Corolario B.10.22.** Sea $\mathcal{P}$ una familia de seminormas en un espacio vectorial $X$ y sea $\tau_{\mathcal{P}}$ la topología localmente convexa generada por $\mathcal{P}$. Entonces:

(a) $\tau_{\mathcal{P}}$ es de Hausdorff si y sólo si $p(x) = 0$ para toda $p \in \mathcal{P}$ implica $x = 0$.

(b) Un conjunto $A \subseteq X$ está topológicamente acotado si y sólo si el conjunto $p(A) \subseteq \mathbb{R}$ está acotado en $\mathbb{R}$ para toda $p \in \mathcal{P}$.

Un espacio vectorial topológico se llama *seminormable* si su topología se puede inducir por una seminorma $p$. Al espacio $(X, p)$ se le llama espacio *seminormado*.

*Demostración.* La primera afirmación es la Proposición B.10.21.
Para $(b)$, supongamos primero que $A$ es topológicamente acotado. Si $p \in \mathcal{P}$, entonces $\{x \in X \mid p(x) < 1\}$ es una vecindad del origen. Existe $t > 0$ tal que $A \subseteq t\{x \in X \mid p(x) < 1\}$. Por lo tanto, si $a \in A$, se tiene $p(a) < t$, y así $p(A)$ está acotado.
Recíprocamente, supongamos que $p(A)$ está acotado para toda $p \in \mathcal{P}$. Sea $U$ una vecindad del origen. Como la topología está generada por $\mathcal{P}$, existe una vecindad básica

$$B = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X \mid p_i(x) < r_i\}$$

tal que $B \subseteq U$. Por hipótesis, para cada $i$ existe $M_i > 0$ tal que $p_i(a) \leq M_i$ para toda $a \in A$. Tomemos $t > 0$ tal que $M_i < tr_i$ para todo $i$. Entonces $A \subseteq tB \subseteq tU$. Por lo tanto, $A$ es topológicamente acotado. □

**Proposición B.10.23.** Sea $X$ un espacio vectorial y sea $\mathcal{P}$ una familia, no necesariamente numerable, de seminormas en $X$. Denotemos por $\tau_{\mathcal{P}}$ la topología inducida por $\mathcal{P}$. Entonces:

(a) Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ respecto de $\tau_{\mathcal{P}}$ si y sólo si $p(x_n - x) \to 0$ para toda $p \in \mathcal{P}$.

(b) Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy respecto de $\tau_{\mathcal{P}}$ si y sólo si $p(x_n - x_m) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, para toda $p \in \mathcal{P}$.

*Demostración.* Probemos primero la afirmación sobre convergencia. Supongamos que $x_n \to x$ respecto de $\tau_{\mathcal{P}}$. Sea $p \in \mathcal{P}$ y sea $\varepsilon > 0$. El conjunto

$$x + \{y \in X \mid p(y) < \varepsilon\}$$

es una vecindad de $x$. Por la convergencia de la sucesión, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, entonces $x_n$ pertenece a dicha vecindad. Por lo tanto, $p(x_n - x) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto prueba que $p(x_n - x) \to 0$.
Recíprocamente, supongamos que $p(x_n - x) \to 0$ para toda $p \in \mathcal{P}$. Sea $U$ una vecindad de $x$. Por la definición de la topología inducida, existen $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}$ y $r_1, \ldots, r_k > 0$ tales que

$$x + \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X \mid p_i(y) < r_i\} \subseteq U.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, como $p_i(x_n - x) \to 0$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $p_i(x_n - x) < r_i$ para todo $n \geq N_i$. Tomando

$N := \max\{N_1, \dots, N_k\}$, se obtiene que, para todo $n \geq N$, se tiene

$$x_n - x \in \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X \mid p_i(y) < r_i\}.$$

Por lo tanto, $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Como $U$ era una vecindad arbitraria de $x$, concluimos que $x_n \to x$ respecto de $\tau_{\mathcal{P}}$.

Probemos ahora la afirmación sobre sucesiones de Cauchy. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy respecto de $\tau_{\mathcal{P}}$. Sea $p \in \mathcal{P}$ y sea $\varepsilon > 0$. El conjunto $\{y \in X \mid p(y) < \varepsilon\}$ es una vecindad del origen. Por la propiedad de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq N$, entonces $x_n - x_m \in \{y \in X \mid p(y) < \varepsilon\}$. Por lo tanto, $p(x_n - x_m) < \varepsilon$ para cualesquiera $n, m \geq N$. Esto prueba que $p(x_n - x_m) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$.

Recíprocamente, supongamos que, para toda $p \in \mathcal{P}$, se tiene $p(x_n - x_m) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Sea $U$ una vecindad del origen. Por la definición de la topología inducida, existen $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ y $r_1, \dots, r_k > 0$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X \mid p_i(y) < r_i\} \subseteq U.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $p_i(x_n - x_m) < r_i$ para cualesquiera $n, m \geq N_i$. Tomando $N := \max\{N_1, \dots, N_k\}$, se tiene, para cualesquiera $n, m \geq N$, que

$$x_n - x_m \in \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X \mid p_i(y) < r_i\} \subseteq U.$$

Por lo tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy respecto de $\tau_{\mathcal{P}}$. □

**Proposición B.10.24.** (Metrización por una familia numerable de seminormas) Sea $X$ un espacio vectorial y sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una familia numerable de seminormas que separa puntos. Para $x, y \in X$, definimos

$$d(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}.$$

Entonces:

(a) $d$ es una métrica en $X$ invariante bajo traslaciones.

(b) La topología inducida por $d$ coincide con la topología localmente convexa generada por la familia $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

*Demostración.* Definimos $\theta\colon [0, \infty) \longrightarrow [0, 1)$ por

$$\theta(t) := \frac{t}{1+t}.$$

Esta función es continua, estrictamente creciente, satisface $\theta(0) = 0$ y $\theta(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$. Además, es subaditiva. Si $s, t \geq 0$, entonces

$$\theta(s+t) = \frac{s+t}{1+s+t} \leq \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t} = \theta(s) + \theta(t).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$\delta_n(x,y) := \theta(p_n(x-y)), \qquad x,y \in X.$$

Como $p_n$ es una seminorma, se tiene

$$\delta_n(x+a,y+a) = \delta_n(x,y)$$

para cualesquiera $x,y,a \in X$, de modo que $\delta_n$ es invariante bajo traslaciones. Además, como $p_n(x-y) = p_n(y-x)$, también es simétrica.

Veamos que $\delta_n$ satisface la desigualdad del triángulo. Si $x,y,z \in X$, entonces, por la subaditividad de $p_n$ y de $\theta$, se tiene

$$\delta_n(x,z) = \theta(p_n(x-z)) \leq \theta(p_n(x-y)+p_n(y-z)) \leq \theta(p_n(x-y)) + \theta(p_n(y-z)) = \delta_n(x,y) + \delta_n(y,z).$$

Por lo tanto, cada $\delta_n$ es una pseudométrica invariante bajo traslaciones. En general no es una métrica, pues una seminorma puede anularse en vectores no nulos.

Como $0 \leq \delta_n(x,y) < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y para cualesquiera $x,y \in X$, la serie

$$d(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n(x,y)$$

converge, pues está dominada por la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$. La simetría y la invariancia bajo traslaciones de $d$ se obtienen término a término. Además, si $x,y,z \in X$, entonces

$$\delta_n(x,z) \leq \delta_n(x,y) + \delta_n(y,z)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Multiplicando por $2^{-n}$ y sumando en $n$, obtenemos

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Así, $d$ satisface la desigualdad del triángulo.

Resta verificar que $d(x,y) = 0$ implica $x = y$. Si $d(x,y) = 0$, como todos los términos de la serie son no negativos, necesariamente $\delta_n(x,y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Como $\theta(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$, se sigue que $p_n(x-y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Puesto que la familia $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ separa puntos, concluimos que $x - y = 0$, es decir, $x = y$. Por lo tanto, $d$ es una métrica invariante bajo traslaciones. Esto prueba (a).

Probemos ahora (b). Denotemos por $\tau$ la topología localmente convexa generada por la familia $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, y por $\tau_d$ la topología inducida por la métrica $d$. Como $d$ es invariante bajo traslaciones, la topología $\tau_d$ también es invariante bajo traslaciones. Por otra parte, $\tau$ es una topología de espacio vectorial topológico por el Teorema B.10.19, de modo que también es invariante bajo traslaciones. Por ello basta comparar las vecindades del origen.

Veamos primero que toda vecindad del origen respecto de $\tau_d$ es una vecindad del origen respecto de $\tau$. Basta probarlo para las bolas $B_d(0,\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\theta(t) \to 0$ cuando $t \to 0^+$, para cada $n \in \{0,\dots,N\}$ existe $\eta_n > 0$ tal que

$$\frac{1}{2^n}\theta(\eta_n) < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}.$$

Definimos

$$V := \bigcap_{n=0}^{N} \{x \in X \mid p_n(x) < \eta_n\}.$$

Entonces $V$ es una vecindad del origen para $\tau$. Si $x \in V$, entonces $p_n(x) < \eta_n$ para todo $n \in \{0,\dots,N\}$, y por la monotonía de $\theta$ se tiene

$$\begin{aligned} d(x,0) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}\theta(p_n(x)) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\theta(p_n(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $V \subseteq B_d(0,\varepsilon)$. Así, toda bola centrada en el origen para $d$ contiene una vecindad del origen de $\tau$, y en consecuencia toda vecindad del origen de $\tau_d$ es una vecindad del origen de $\tau$.
Recíprocamente, probemos que toda vecindad del origen para $\tau$ es una vecindad del origen para $\tau_d$. Basta hacerlo para una vecindad básica

$$W := \bigcap_{j=1}^{r} \{x \in X \mid p_{n_j}(x) < \varepsilon_j\},$$

donde $n_1,\dots,n_r \in \mathbb{N}_0$ y $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r > 0$. Definimos

$$\rho := \min_{1\le j\le r} \frac{1}{2^{n_j}}\theta(\varepsilon_j).$$

Como cada $\varepsilon_j$ es positivo y $\theta(t) > 0$ para $t > 0$, se tiene $\rho > 0$.
Afirmamos que $B_d(0,\rho) \subseteq W$. Si $x \in B_d(0,\rho)$, entonces $d(x,0) < \rho$. Para cada $j \in \{1,\dots,r\}$ se tiene

$$\frac{1}{2^{n_j}}\theta(p_{n_j}(x)) \le d(x,0) < \rho \le \frac{1}{2^{n_j}}\theta(\varepsilon_j).$$

Por lo tanto,

$$\theta(p_{n_j}(x)) < \theta(\varepsilon_j).$$

Como $\theta$ es estrictamente creciente, se concluye que $p_{n_j}(x) < \varepsilon_j$. Esto vale para todo $j \in \{1,\dots,r\}$, de modo que $x \in W$. Así, $B_d(0,\rho) \subseteq W$.
Hemos probado que las vecindades del origen de $\tau$ y de $\tau_d$ coinciden. Como ambas topologías son invariantes bajo traslaciones, sus vecindades en cualquier punto también coinciden. Por consiguiente, $\tau = \tau_d$. □

**Teorema B.10.25.** Sean $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo cuya topología está generada por una familia de seminormas $\mathcal{P}$, y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio normado. Un operador lineal $L\colon X \longrightarrow Y$ es continuo si y sólo si existen una constante $C > 0$ y un número finito de seminormas $p_1,\dots,p_k \in \mathcal{P}$ tales que

$$\|L(x)\|_Y \le C \max_{1\le i\le k} p_i(x) \qquad \forall x \in X.$$

En particular, si la familia de seminormas es creciente o dirigida, basta encontrar una única seminorma

$p \in \mathcal{P}$ y una constante $C > 0$ tal que

$$\|L(x)\|_Y \leq C p(x) \qquad \forall x \in X.$$

*Demostración.* Supongamos primero que $L$ es continuo. Entonces $L^{-1}(B_{d_Y}(0,1))$ es una vecindad del origen en $X$. Como la topología de $X$ está generada por $\mathcal{P}$, existen $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\{x \in X \mid p_i(x) < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\} \subseteq L^{-1}(B_{d_Y}(0,1)).$$

Sea $q(x) := \max_{1 \leq i \leq k} p_i(x)$. Si $x \neq 0$ y $q(x) > 0$, entonces $\dfrac{\varepsilon}{2q(x)} x$ pertenece a la vecindad anterior, y por lo tanto

$$\left\| L\left( \frac{\varepsilon}{2q(x)} x \right) \right\|_Y < 1.$$

De aquí se obtiene $\|L(x)\|_Y \leq \dfrac{2}{\varepsilon} q(x)$. Si $q(x) = 0$, entonces $tx$ pertenece a la vecindad anterior para todo $t > 0$, y por linealidad se concluye que $L(x) = 0$. Por lo tanto, la desigualdad vale para toda $x \in X$ con $C = \frac{2}{\varepsilon}$.
Recíprocamente, si existe una constante $C > 0$ y seminormas $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}$ tales que

$$\|L(x)\|_Y \leq C \max_{1 \leq i \leq k} p_i(x),$$

entonces, dado $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$\left\{ x \in X \,\middle|\, p_i(x) < \frac{\varepsilon}{C},\ i = 1, \ldots, k \right\}$$

es una vecindad del origen que se manda dentro de $B_{d_Y}(0, \varepsilon)$. Luego $L$ es continuo en 0, y por linealidad es continuo en todo punto.
La última afirmación se sigue de que, si la familia es creciente o dirigida, existe una seminorma $p \in \mathcal{P}$ que domina simultáneamente a $p_1, \ldots, p_k$ hasta constantes irrelevantes. □

La siguiente proposición da una forma abstracta de construir topologías localmente convexas a partir de una base local prescrita.

**Proposición B.10.26.** Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de $X$ que satisface:

(a) cada $U \in \mathcal{B}$ es absolutamente convexo y absorbente;

(b) si $U, V \in \mathcal{B}$, entonces existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq U \cap V$;

(c) para cada $U \in \mathcal{B}$ y cada $\lambda > 0$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq \lambda U$.

Entonces existe una única topología $\tau$ tal que $(X, \tau)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo y $\mathcal{B}$ es una base de vecindades del origen.

*Demostración.* Para cada $U \in \mathcal{B}$ consideremos su funcional de Minkowski

$$p_U(x) := \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda U\}, \qquad x \in X.$$

Como cada $U \in \mathcal{B}$ es absolutamente convexo y absorbente, la Proposición B.10.17 garantiza que $p_U$ es una seminorma sobre $X$.
Definamos

$$\mathcal{P} := \{p_U \mid U \in \mathcal{B}\}.$$

Por el Teorema B.10.19, la familia $\mathcal{P}$ determina una topología $\tau$ que vuelve a $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base local del origen para esta topología.
Tomemos primero $U \in \mathcal{B}$. Si $x \in \{y \in X \mid p_U(y) < 1\}$, entonces existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $x \in \lambda U$. Como $U$ es balanceado, $\lambda U \subseteq U$, y por lo tanto

$$\{y \in X \mid p_U(y) < 1\} \subseteq U.$$

Como el conjunto del lado izquierdo es una vecindad del origen respecto de $\tau$, concluimos que $U$ también es una vecindad del origen.
Resta probar que toda vecindad del origen contiene algún elemento de $\mathcal{B}$. Basta hacerlo para una vecindad básica de la forma

$$N = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X \mid p_{U_i}(x) < r_i\},$$

donde $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{B}$ y $r_1, \dots, r_k > 0$. Para cada $i$, por la tercera hipótesis existe $W_i \in \mathcal{B}$ tal que $W_i \subseteq \frac{r_i}{2} U_i$. Si $x \in W_i$, entonces $p_{U_i}(x) \leq \frac{r_i}{2} < r_i$. Por lo tanto, $W_i \subseteq \{x \in X \mid p_{U_i}(x) < r_i\}$. Aplicando repetidamente la segunda hipótesis, encontramos $W \in \mathcal{B}$ tal que

$$W \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} W_i \subseteq N.$$

Así, toda vecindad básica del origen contiene algún elemento de $\mathcal{B}$, y por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base local del origen para $\tau$.
Finalmente, la unicidad de $\tau$ se sigue de la Proposición B.10.2, pues una topología de espacio vectorial topológico queda determinada de manera única por cualquier base local del origen. □

La noción de operador lineal ya fue introducida en la Definición B.2.4. Si $X$ y $Y$ son espacios vectoriales topológicos, conservamos la notación $\mathcal{L}(X,Y)$ para el espacio de operadores lineales continuos de $X$ en $Y$. En particular, $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ es el dual topológico de $X$ y sus elementos son los funcionales lineales continuos.

**Observación B.10.27.** El mapeo bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X',X} \colon X' \times X \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad (L, x) \mapsto L(x)$$

se llama el *apareamiento dual*. El espacio dual de $X'$, denotado $X''$, se llama el espacio *bidual* de $X$.

**Definición B.10.28.** Sean $X$ y $Y$ espacios vectoriales topológicos. Un operador $L \colon X \longrightarrow Y$ se dice *acotado* si manda subconjuntos topológicamente acotados en $X$ en subconjuntos topológicamente acotados en $Y$.

En espacios normados, la continuidad y la acotación de operadores lineales son equivalentes. En espacios vectoriales topológicos generales, la relación es más delicada, aunque se conservan implicaciones útiles. En el caso metrizable, la continuidad se puede caracterizar mediante sucesiones.

**Teorema B.10.29.** Sean $X, Y$ espacios vectoriales topológicos y sea $L\colon X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Consideremos las siguientes propiedades:

(a) $L$ es continuo.

(b) $L$ es acotado.

(c) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $X$ y $x_n \to 0$, entonces $\{L(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$ es un conjunto topológicamente acotado.

(d) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $X$ y $x_n \to 0$, entonces $L(x_n) \to 0$.

Entonces $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$. Si además $X$ es metrizable, entonces $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$ y las cuatro propiedades son equivalentes.

*Demostración.* Si $L$ es continuo, entonces manda conjuntos topológicamente acotados en conjuntos topológicamente acotados. Sea $A \subseteq X$ acotado y sea $U$ una vecindad del origen en $Y$. Por continuidad de $L$ en 0, existe una vecindad $V$ del origen en $X$ tal que $L(V) \subseteq U$. Como $A$ es acotado, existe $t > 0$ tal que $A \subseteq tV$. Por linealidad, $L(A) \subseteq tL(V) \subseteq tU$. Por lo tanto, $L(A)$ es acotado. Esto prueba $(a) \Rightarrow (b)$.
Si $L$ es acotado y $x_n \to 0$ en $X$, entonces el conjunto $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es topológicamente acotado. Por lo tanto, su imagen bajo $L$ también es topológicamente acotada. Esto prueba $(b) \Rightarrow (c)$.
Supongamos ahora que $X$ es metrizable y que se cumple $(c)$. Probaremos $(d)$ por contradicción. Sea $x_n \to 0$ en $X$ y supongamos que $L(x_n)$ no converge a 0. Entonces existe una vecindad balanceada $U$ del origen en $Y$ y una subsucesión, que denotamos nuevamente por $x_n$, tal que $L(x_n) \notin U$ para toda $n$.
Como $X$ es metrizable, podemos elegir la subsucesión de manera que $nx_n \to 0$ en $X$. Por hipótesis, el conjunto $\{L(nx_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ debe ser topológicamente acotado. Sin embargo, si dicho conjunto fuera acotado, existiría $t > 0$ tal que $nL(x_n) \in tU$ para toda $n$. Tomando $n > t$, y usando que $U$ es balanceado, se tendría $L(x_n) \in \frac{t}{n}U \subseteq U$, contradicción. Por lo tanto, $L(x_n) \to 0$. Esto prueba $(c) \Rightarrow (d)$.
Finalmente, si $X$ es metrizable, la implicación $(d) \Rightarrow (a)$ es precisamente la Proposición B.10.10. □

**Teorema B.10.30.** (Extensión de operadores lineales) Sea $X$ un espacio vectorial topológico metrizable, sea $D \subseteq X$ un subespacio vectorial denso, y sea $Y$ un espacio vectorial topológico de Hausdorff y secuencialmente completo. Si $L\colon D \longrightarrow Y$ es un operador lineal y continuo, donde $D$ tiene la topología inducida por $X$, entonces existe a lo más un operador lineal continuo $\widetilde{L}\colon X \longrightarrow Y$ tal que $\widetilde{L}(x) = L(x)$ para todo $x \in D$. Además, si para cada $x \in X$ y cada sucesión $\{x_n\} \subseteq D$ con $x_n \to x$ la sucesión $\{L(x_n)\}$ es de Cauchy en $Y$, entonces tal extensión existe y es única.

*Demostración.* La unicidad se sigue de la densidad de $D$ y de que $Y$ es de Hausdorff. Si $\widetilde{L}_1$ y $\widetilde{L}_2$ son dos extensiones continuas de $L$, entonces coinciden en $D$. Como el conjunto de puntos donde coinciden es cerrado y contiene a $D$, coincide con todo $X$.
Supongamos ahora que se satisface la condición adicional. Sea $x \in X$. Como $D$ es denso y $X$ es metrizable, existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq D$ tal que $x_n \to x$. Por hipótesis, $\{L(x_n)\}$ es de Cauchy en $Y$ y, como $Y$ es secuencialmente completo, converge a un punto de $Y$. Definimos

$$\widetilde{L}(x) := \lim_{n\to\infty} L(x_n).$$

Veamos que la definición no depende de la sucesión elegida. Si $\{y_n\} \subseteq D$ también converge a $x$, entonces la sucesión intercalada $z_1 = x_1, z_2 = y_1, z_3 = x_2, z_4 = y_2, \dots$ converge a $x$. Por hipótesis, $\{L(z_n)\}$ es de Cauchy y por lo tanto sus dos subsucesiones $\{L(x_n)\}$ y $\{L(y_n)\}$ tienen el mismo límite. Así, $\widetilde{L}$ está bien definida.
La linealidad se obtiene tomando sucesiones en $D$ que converjan a los puntos correspondientes y usando la linealidad de $L$ antes de pasar al límite.
Finalmente, probemos la continuidad sin suponer que $Y$ sea primero numerable. Fijemos una métrica compatible e invariante por traslaciones $d$ en $X$. Sea $x_n \to 0$ y supongamos, por contradicción, que $\widetilde{L}(x_n) \not\to 0$. Existen una vecindad $U$ de 0 en $Y$ y una subsucesión, que no renombramos, para la cual $\widetilde{L}(x_n) \notin U$ para todo $n$. Elijamos una vecindad $V$ de 0 tal que $V + V \subseteq U$.
Para cada $n$, la definición de $\widetilde{L}(x_n)$ proporciona una sucesión de puntos de $D$ que converge a $x_n$ y cuyas imágenes convergen a $\widetilde{L}(x_n)$. Podemos elegir un término $d_n \in D$ de esa sucesión de modo que

$$d(d_n, x_n) < \frac{1}{n}, \qquad \widetilde{L}(x_n) - L(d_n) \in V.$$

Entonces $d_n \to 0$ en $X$. La continuidad de $L$ en $D$ implica $L(d_n) \to 0$, de modo que $L(d_n) \in V$ para todo $n$ suficientemente grande. Para esos índices,

$$\widetilde{L}(x_n) \in L(d_n) + V \subseteq V + V \subseteq U,$$

una contradicción. Por lo tanto, $\widetilde{L}$ es secuencialmente continua en el origen. Como $X$ es metrizable, la Proposición B.10.10 prueba que $\widetilde{L}$ es continua. □

Las formas geométricas del teorema de Hahn–Banach que siguen complementan la forma analítica presentada en la sección de espacios normados y proporcionan los resultados de separación que utilizaremos más adelante. Sus demostraciones, obtenidas al aplicar la forma analítica al funcional de Minkowski de un abierto convexo apropiado, pueden consultarse en [123, 149].

**Teorema B.10.31.** (Hahn–Banach, primera forma geométrica) Sea $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo real y sean $A, B \subseteq X$ conjuntos convexos no vacíos. Supongamos que $\operatorname{Int}(A) \neq \varnothing$ y $B \cap \operatorname{Int}(A) = \varnothing$. Entonces existe un funcional lineal continuo $L\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sup_{x \in A} L(x) \leq \inf_{y \in B} L(y)$, y además $L(a) < \inf_{y \in B} L(y)$ para todo $a \in \operatorname{Int}(A)$. En particular $L \neq 0$.

**Corolario B.10.32.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo de Hausdorff. Entonces $X' \neq \{0\}$ si y sólo si $X$ posee una vecindad convexa del origen estrictamente contenida en $X$.

**Teorema B.10.33.** (Hahn–Banach, segunda forma geométrica) Sea $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo real y sean $C, K \subseteq X$ conjuntos convexos, ajenos y no vacíos, con $C$ cerrado y $K$ compacto. Entonces existe un funcional lineal continuo $L\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ y dos números $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $L(x) \leq a - \varepsilon$ para toda $x \in C$ y $L(x) \geq a + \varepsilon$ para todo $x \in K$.

**Teorema B.10.34.** (Mazur) Sea $X$ un espacio vectorial topológico y sea $M \subseteq X$ un subespacio vectorial. Sea $K \subseteq X$ un subconjunto convexo, abierto y no vacío tal que $M \cap K = \varnothing$.

Entonces existe un hiperplano cerrado $N \subseteq X$ tal que

$$M \subseteq N \qquad \text{y} \qquad N \cap K = \varnothing.$$

**Corolario B.10.35.** (Separación de un subespacio y un abierto convexo) Sea $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo y de Hausdorff. Sea $M \subseteq X$ un subespacio vectorial y sea $U \subseteq X$ un subconjunto convexo, abierto y no vacío tal que $M \cap U = \varnothing$.
Entonces existe un funcional lineal continuo $f \in X'$ tal que

$$f(m) = 0 \text{ para todo } m \in M, \text{ y } \operatorname{Re} f(x) > 0 \text{ para todo } x \in U.$$

**Definición B.10.36.** Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ espacios vectoriales topológicos. Decimos que $X$ *está encajado de manera continua en* $Y$, y escribimos $X \hookrightarrow Y$, si $X$ es un subespacio de $Y$ y la inclusión $\iota_X \colon X \longrightarrow Y$, dada por $\iota_X(x) = x$, es continua.

## B.10.1 Espacios de Fréchet

Los espacios de Fréchet generalizan a los espacios de Banach al permitir que la topología esté determinada por una familia numerable de seminormas en lugar de una única norma. Esta clase aparece de manera natural al estudiar espacios de funciones suaves y espacios de secciones suaves.

**Definición B.10.37.** Sea $(X, \tau_X)$ un espacio vectorial topológico. Decimos que $X$ es un *espacio de Fréchet* si se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $X$ es localmente convexo.

(b) La topología $\tau_X$ puede inducirse por una métrica invariante bajo traslaciones, es decir, existe una métrica $d \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que
$$d(x + z, y + z) = d(x, y)$$
para cualesquiera $x, y, z \in X$.

(c) Alguna, y equivalentemente toda, métrica invariante bajo traslaciones que induce $\tau_X$ es completa.

**Teorema B.10.38.** Sea $(X, \tau_X)$ un espacio vectorial topológico. Entonces $X$ es un espacio de Fréchet si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $X$ es de Hausdorff.

(b) La topología $\tau_X$ está inducida por una familia numerable de seminormas $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$.

(c) $X$ es completo respecto de alguna, y equivalentemente toda, métrica invariante bajo traslaciones que induce dicha topología.

La equivalencia entre una métrica invariante completa y una familia numerable separante de seminormas se demuestra en [123, 149].

Antes de pasar a las topologías débiles, recordemos dos construcciones topológicas generales. La topología inicial será la herramienta natural para definir topologías débiles, mientras que la topología final aparecerá al

construir límites inductivos.

### B.10.2 Topologías iniciales y finales

**Definición B.10.39.** (Topología inicial) Sea $X$ un conjunto, sea $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y, para cada $i \in I$, sea $f_i \colon X \longrightarrow Y_i$ un mapeo. La *topología inicial* sobre $X$ asociada a la familia $(f_i)_{i\in I}$ es la topología generada por la subbase

$$\mathcal{S}_{\text{in}} := \left\{ f_i^{-1}(U) \;\middle|\; i \in I,\ U \in \tau_i \right\}.$$

La denotaremos por $\tau_{\text{in}}$.

**Proposición B.10.40.** La topología $\tau_{\text{in}}$ es la topología menos fina sobre $X$ para la cual todos los mapeos $f_i \colon (X, \tau_{\text{in}}) \longrightarrow (Y_i, \tau_i)$ son continuos.
Además, si $(Z, \tau_Z)$ es un espacio topológico y $g \colon Z \longrightarrow X$ es un mapeo, entonces $g \colon (Z, \tau_Z) \longrightarrow (X, \tau_{\text{in}})$ es continuo si y sólo si cada composición $f_i \circ g \colon Z \longrightarrow Y_i$ es continua.

*Demostración.* Por definición de $\tau_{\text{in}}$, si $i \in I$ y $U \subseteq Y_i$ es abierto, entonces $f_i^{-1}(U)$ es abierto en $(X, \tau_{\text{in}})$. Por lo tanto, cada mapeo $f_i \colon (X, \tau_{\text{in}}) \longrightarrow (Y_i, \tau_i)$ es continuo.
Veamos que $\tau_{\text{in}}$ es la topología menos fina con esta propiedad. Sea $\tau$ una topología sobre $X$ tal que todos los mapeos $f_i \colon (X, \tau) \longrightarrow (Y_i, \tau_i)$ sean continuos. Entonces, si $U$ es abierto en $Y_i$, el conjunto $f_i^{-1}(U)$ pertenece a $\tau$. Como $\tau_{\text{in}}$ es la topología generada por todos estos conjuntos, se sigue que $\tau_{\text{in}} \subseteq \tau$.
Probemos ahora la caracterización de continuidad. Supongamos primero que $g \colon (Z, \tau_Z) \longrightarrow (X, \tau_{\text{in}})$ es continuo. Como cada $f_i$ es continuo, la composición $f_i \circ g \colon Z \longrightarrow Y_i$ es continua para todo $i \in I$.
Recíprocamente, supongamos que cada composición $f_i \circ g$ es continua. Para probar que $g$ es continuo, basta verificar que la preimagen mediante $g$ de cada elemento de la subbase $\mathcal{S}_{\text{in}}$ es abierta en $Z$. Sea $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{S}_{\text{in}}$, con $U$ abierto en $Y_i$. Entonces

$$g^{-1}\left(f_i^{-1}(U)\right) = (f_i \circ g)^{-1}(U).$$

El conjunto del lado derecho es abierto en $Z$ por la continuidad de $f_i \circ g$. Por lo tanto, $g$ es continuo. □

**Proposición B.10.41.** Sea $X$ un conjunto, sea $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y, para cada $i \in I$, sea $f_i \colon X \longrightarrow Y_i$ un mapeo. Una red $(x_\alpha)_\alpha$ en $X$ converge a $x \in X$ respecto a la topología inicial asociada a $(f_i)_{i\in I}$ si y sólo si

$$f_i(x_\alpha) \to f_i(x)$$

en $Y_i$ para todo $i \in I$. En particular, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x$ en la topología inicial si y sólo si

$$f_i(x_n) \to f_i(x)$$

en $Y_i$ para todo $i \in I$.

*Demostración.* Si $x_\alpha \to x$ en la topología inicial, entonces, como cada $f_i$ es continuo, se tiene $f_i(x_\alpha) \to f_i(x)$ para todo $i \in I$.
Recíprocamente, supongamos que $f_i(x_\alpha) \to f_i(x)$ para todo $i \in I$. Sea $U$ una vecindad de $x$ en la topología

inicial. Por definición de la topología inicial, existe una vecindad básica $V$ de $x$ tal que $x \in V \subseteq U$, donde $V$ es una intersección finita de elementos subbásicos. Es decir, existen $i_1, \ldots, i_k \in I$ y abiertos $U_1 \subseteq Y_{i_1}, \ldots, U_k \subseteq Y_{i_k}$ tales que

$$x \in \bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(U_j) \subseteq U.$$

Como $f_{i_j}(x_\alpha) \to f_{i_j}(x)$ y $U_j$ es una vecindad de $f_{i_j}(x)$, para cada $j$ existe $\alpha_j$ tal que, si $\alpha \geq \alpha_j$, entonces $f_{i_j}(x_\alpha) \in U_j$. Por ser el conjunto de índices dirigido, existe $\alpha_0$ tal que $\alpha_0 \geq \alpha_j$ para todo $j$. Entonces, si $\alpha \geq \alpha_0$, se tiene $x_\alpha \in V \subseteq U$. Por lo tanto, $x_\alpha \to x$.
La afirmación para sucesiones es el caso particular en que la red está indexada por $\mathbb{N}$. □

**Definición B.10.42.** (Topología final) Sea $Y$ un conjunto, sea $\{(X_i, \sigma_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y, para cada $i \in I$, sea $g_i \colon X_i \longrightarrow Y$ un mapeo. La *topología final* sobre $Y$ asociada a la familia $(g_i)_{i \in I}$ es la colección

$$\tau_{\text{fin}} := \left\{ U \subseteq Y \;\middle|\; g_i^{-1}(U) \in \sigma_i \text{ para todo } i \in I \right\}.$$

**Proposición B.10.43.** La colección $\tau_{\text{fin}}$ es una topología sobre $Y$. Además, es la topología más fina sobre $Y$ para la cual todos los mapeos $g_i \colon (X_i, \sigma_i) \longrightarrow (Y, \tau_{\text{fin}})$ son continuos.
Por otra parte, si $(Z, \tau_Z)$ es un espacio topológico y $h \colon Y \longrightarrow Z$ es un mapeo, entonces $h \colon (Y, \tau_{\text{fin}}) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ es continuo si y sólo si cada composición $h \circ g_i \colon X_i \longrightarrow Z$ es continua.

*Demostración.* Veamos primero que $\tau_{\text{fin}}$ es una topología. Como $g_i^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y $g_i^{-1}(Y) = X_i$ para todo $i \in I$, se tiene que $\varnothing, Y \in \tau_{\text{fin}}$.
Sea ahora $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia arbitraria de elementos de $\tau_{\text{fin}}$. Para cada $i \in I$,

$$g_i^{-1}\left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} g_i^{-1}(U_\lambda).$$

Como cada conjunto $g_i^{-1}(U_\lambda)$ es abierto en $X_i$, la unión del lado derecho es abierta. Por lo tanto,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau_{\text{fin}}.$$

Si $U_1, \ldots, U_r \in \tau_{\text{fin}}$, entonces, para cada $i \in I$,

$$g_i^{-1}\left( \bigcap_{q=1}^{r} U_q \right) = \bigcap_{q=1}^{r} g_i^{-1}(U_q).$$

Como las intersecciones finitas de abiertos son abiertas, se concluye que

$$\bigcap_{q=1}^{r} U_q \in \tau_{\text{fin}}.$$

Así, $\tau_{\text{fin}}$ es una topología.
Por definición de $\tau_{\text{fin}}$, todos los mapeos $g_i \colon (X_i, \sigma_i) \longrightarrow (Y, \tau_{\text{fin}})$ son continuos.

Veamos que $\tau_{\text{fin}}$ es la topología más fina con esta propiedad. Sea $\tau$ una topología sobre $Y$ tal que todos los mapeos $g_i\colon (X_i,\sigma_i)\longrightarrow (Y,\tau)$ sean continuos. Si $U\in\tau$, entonces $g_i^{-1}(U)$ es abierto en $X_i$ para todo $i\in I$. Por la definición de $\tau_{\text{fin}}$, se sigue que $U\in\tau_{\text{fin}}$. Por lo tanto, $\tau\subseteq\tau_{\text{fin}}$.
Probemos finalmente la caracterización de continuidad. Si $h\colon (Y,\tau_{\text{fin}})\longrightarrow (Z,\tau_Z)$ es continuo, entonces cada composición $h\circ g_i\colon X_i\longrightarrow Z$ es continua.
Recíprocamente, supongamos que cada composición $h\circ g_i$ es continua. Sea $V\subseteq Z$ un abierto. Para cada $i\in I$,

$$g_i^{-1}\left(h^{-1}(V)\right)=(h\circ g_i)^{-1}(V),$$

y este conjunto es abierto en $X_i$. Por la definición de $\tau_{\text{fin}}$, se obtiene que $h^{-1}(V)\in\tau_{\text{fin}}$. Como esto vale para todo abierto $V\subseteq Z$, concluimos que $h$ es continuo. □

**Observación B.10.44.** En algunos textos, la topología inicial y la topología final asociadas a una familia de mapeos se denominan, respectivamente, *topología débil* y *topología fuerte*. En lo que sigue preferiremos los términos *inicial* y *final*, para evitar confusión con las topologías débiles y débiles-$*$ que aparecen en análisis funcional.

# B.11 Topologías débiles

## B.11.1 Topologías iniciales definidas por operadores lineales

Las topologías débiles son casos particulares de las topologías iniciales introducidas en la Definición B.10.39. En particular, utilizaremos la propiedad universal de la Proposición B.10.40 y la caracterización de convergencia de la Proposición B.10.41. Cuando los mapeos que determinan la topología son lineales, la construcción puede describirse mediante seminormas.

**Proposición B.11.1.** Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Para cada $i\in I$, sea $T_i\colon X\longrightarrow Y_i$ un operador lineal. Entonces la topología inicial sobre $X$ asociada a $(T_i)_{i\in I}$ es una topología de espacio vectorial localmente convexo. Si la topología de $Y_i$ está generada por una familia de seminormas $\mathcal{P}_i$, entonces la topología inicial sobre $X$ está generada por las seminormas

$$x\longmapsto p(T_ix),\qquad i\in I,\quad p\in\mathcal{P}_i.$$

*Demostración.* Para $i\in I$ y $p\in\mathcal{P}_i$, definimos $q_{i,p}\colon X\longrightarrow[0,\infty)$ por $q_{i,p}(x):=p(T_ix)$. Como $T_i$ es lineal y $p$ es una seminorma, $q_{i,p}$ es una seminorma sobre $X$. Sea $\tau$ la topología generada por la familia $\{q_{i,p}\mid i\in I,\ p\in\mathcal{P}_i\}$. Por el Teorema B.10.19, $\tau$ vuelve a $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo, y cada $T_i\colon (X,\tau)\longrightarrow Y_i$ es continuo.
Si $\sigma$ es otra topología sobre $X$ respecto a la cual todos los $T_i$ son continuos, entonces cada seminorma $q_{i,p}=p\circ T_i$ es continua respecto a $\sigma$. Por lo tanto, $\tau\subseteq\sigma$, lo que prueba que $\tau$ es la topología inicial asociada a $(T_i)_{i\in I}$. □

**Corolario B.11.2.** Sea $X$ un espacio vectorial y sea $\mathcal{T}$ una familia de operadores lineales $T\colon X\longrightarrow W_T$, donde cada $W_T$ es un espacio normado. Entonces la topología inicial sobre $X$ asociada a $\mathcal{T}$ está generada

por las seminormas

$$x \longmapsto \|Tx\|_{W_T}, \qquad T \in \mathcal{T}.$$

En particular, una base de vecindades del origen está formada por las intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$\{x \in X \mid \|T_j x\|_{W_{T_j}} < \varepsilon_j,\ j = 1, \dots, k\},$$

donde $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{T}$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$.

*Demostración.* Es un caso particular de la Proposición B.11.1, pues la topología de un espacio normado está generada por su norma. □

**Corolario B.11.3.** Bajo las hipótesis del corolario anterior, supongamos además que cada $W_T$ es de dimensión finita. Entonces la topología inicial también está generada por las seminormas

$$x \longmapsto |\ell(Tx)|, \qquad T \in \mathcal{T}, \quad \ell \in W_T'.$$

*Demostración.* En dimensión finita, la topología de $W_T$ está generada por los funcionales lineales de $W_T'$. La afirmación se sigue de la Proposición B.11.1, componiendo dichos funcionales con los operadores $T$. □

**Proposición B.11.4.** Sea $X$ un espacio vectorial y sea $\mathcal{T}$ una familia de operadores lineales $T\colon X \longrightarrow W_T$, donde cada $W_T$ es un espacio normado. Una red $(x_\alpha)_\alpha$ converge a $x \in X$ respecto a la topología inicial determinada por $\mathcal{T}$ si y sólo si $\|T(x_\alpha) - T(x)\|_{W_T} \to 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$. La misma caracterización es válida para sucesiones.

*Demostración.* Por la caracterización de la convergencia en una topología inicial, $x_\alpha \to x$ si y sólo si $T(x_\alpha) \to T(x)$ en $W_T$ para todo $T \in \mathcal{T}$. Como cada $W_T$ es normado, esto equivale a que $\|T(x_\alpha) - T(x)\|_{W_T} \to 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$. □

## B.11.2 Topologías débiles asociadas a dualidades

**Definición B.11.5.** (Dualidad) Sean $X$ y $Y$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una *dualidad* entre $X$ y $Y$ es un mapeo bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Decimos que la dualidad separa puntos de $X$ si, para todo $x \in X \setminus \{0\}$, existe $y \in Y$ tal que $\langle x, y \rangle \neq 0$. Análogamente, separa puntos de $Y$ si, para todo $y \in Y \setminus \{0\}$, existe $x \in X$ tal que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

**Definición B.11.6.** (Topología débil asociada a una dualidad) Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ una dualidad. La *topología débil* $\sigma(X, Y)$ sobre $X$ es la topología inicial asociada a los mapeos lineales

$$e_y\colon X \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad e_y(x) := \langle x, y \rangle, \qquad y \in Y.$$

Equivalentemente, $\sigma(X, Y)$ es la topología menos fina sobre $X$ respecto a la cual todos los mapeos $e_y$, con $y \in Y$, son continuos.

**Proposición B.11.7.** (Descripción mediante seminormas) La topología $\sigma(X,Y)$ está generada por las seminormas

$$p_y(x) := |\langle x, y\rangle|, \qquad y \in Y.$$

En particular, $\sigma(X,Y)$ es localmente convexa y es de Hausdorff si y sólo si la dualidad separa puntos de $X$.

*Demostración.* La primera afirmación se sigue de la Proposición B.11.1, aplicada a la familia $(e_y)_{y\in Y}$. Por la Proposición B.10.21, la topología resultante es de Hausdorff si y sólo si $p_y(x) = 0$ para todo $y \in Y$ implica $x = 0$, lo cual equivale a que la dualidad separe puntos de $X$. □

**Proposición B.11.8.** Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ una dualidad. Una red $(x_\alpha)_\alpha$ converge a $x \in X$ respecto a $\sigma(X,Y)$ si y sólo si

$$\langle x_\alpha, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle \qquad \text{para todo } y \in Y.$$

La misma caracterización es válida para sucesiones.

*Demostración.* La topología $\sigma(X,Y)$ es la topología inicial asociada a los mapeos $e_y\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$. La afirmación se sigue de la caracterización de la convergencia en topologías iniciales. □

Si $X$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, podemos aplicar la construcción anterior a la dualidad natural entre $X$ y su dual topológico $X'$.

**Definición B.11.9.** (Topología débil de un espacio localmente convexo) Sea $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo. La *topología débil* sobre $X$ es la topología $\sigma(X,X')$ asociada a la dualidad

$$\langle x, L\rangle := L(x), \qquad x \in X, \quad L \in X'.$$

Cuando una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ respecto a esta topología, escribimos $x_n \rightharpoonup x$.

**Proposición B.11.10.** (Descripción mediante seminormas) La topología débil $\sigma(X,X')$ está generada por las seminormas

$$p_L(x) := |L(x)|, \qquad L \in X'.$$

*Demostración.* Es la Proposición B.11.7 aplicada a la dualidad natural entre $X$ y $X'$. □

**Proposición B.11.11.** Una red $(x_\alpha)_\alpha$ en $X$ converge débilmente a $x \in X$ si y sólo si $L(x_\alpha) \to L(x)$ para todo $L \in X'$. En particular, $x_n \rightharpoonup x$ si y sólo si

$$L(x_n) \longrightarrow L(x) \qquad \text{para todo } L \in X'.$$

*Demostración.* Es la Proposición B.11.8 aplicada a la dualidad natural entre $X$ y $X'$. □

Las propiedades siguientes permiten transportar la convergencia y la compacidad débiles mediante los operadores lineales que aparecen de manera natural en las aplicaciones. La primera muestra que la continuidad lineal usual ya contiene la continuidad respecto de las topologías débiles.

**Proposición B.11.12.** (Continuidad respecto de las topologías débiles) Sean $X$ y $Y$ espacios vectoriales topológicos localmente convexos y sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal continuo. Entonces

$$T : \big(X, \sigma(X, X')\big) \longrightarrow \big(Y, \sigma(Y, Y')\big)$$

es continuo. En particular, la imagen mediante $T$ de un conjunto débilmente compacto es débilmente compacta.

*Demostración.* Sea $L \in Y'$. Como $T$ es lineal y continuo, la composición $L \circ T : X \longrightarrow \mathbb{K}$ pertenece a $X'$. Por la definición de $\sigma(X, X')$, el funcional $L \circ T$ es continuo sobre $\big(X, \sigma(X, X')\big)$. Puesto que esto ocurre para todo $L \in Y'$ y $\sigma(Y, Y')$ es la topología inicial determinada por los funcionales de $Y'$, la propiedad universal de la topología inicial implica que

$$T : \big(X, \sigma(X, X')\big) \longrightarrow \big(Y, \sigma(Y, Y')\big)$$

es continuo. La última afirmación se sigue de que la imagen continua de un compacto es compacta. □

Para relacionar convergencias débiles obtenidas mediante encajes isométricos con la topología débil del subespacio, utilizaremos también la siguiente consecuencia del teorema de Hahn–Banach.

**Proposición B.11.13.** (Topología débil de un subespacio normado) Sea $X$ un espacio normado y sea $Y \subseteq X$ un subespacio lineal provisto de la norma inducida. Entonces la topología débil $\sigma(Y, Y')$ coincide con la topología que $\sigma(X, X')$ induce sobre $Y$. En particular, si una red $(y_\alpha)_\alpha \subseteq Y$ y un elemento $y \in Y$ satisfacen $y_\alpha \rightharpoonup y$ en $X$, entonces $y_\alpha \rightharpoonup y$ en $Y$, y recíprocamente.

*Demostración.* La topología inducida por $\sigma(X, X')$ sobre $Y$ está generada por las seminormas

$$y \longmapsto |L(y)|, \qquad L \in X'.$$

Cada restricción $L \restriction_Y$ pertenece a $Y'$. Recíprocamente, si $\ell \in Y'$, el teorema de Hahn–Banach, en la forma del Corolario B.2.29, proporciona un funcional $L \in X'$ tal que $L \restriction_Y = \ell$. Por lo tanto,

$$\{L \restriction_Y \mid L \in X'\} = Y',$$

y las seminormas que generan la topología inducida son exactamente las que generan $\sigma(Y, Y')$. La caracterización de la convergencia se sigue de la igualdad de ambas topologías. □

La siguiente propiedad describe la topología débil de un producto finito. La finitud es la que permite recuperar un funcional sobre el producto a partir de una suma finita de funcionales sobre sus componentes.

**Proposición B.11.14.** (Topología débil de un producto finito) Sean $X_1, \ldots, X_N$ espacios vectoriales topológicos localmente convexos y sea

$$X := \prod_{j=1}^{N} X_j$$

provisto de la topología producto. Entonces

$$\sigma(X, X') = \prod_{j=1}^{N} \sigma(X_j, X_j').$$

En particular, una red $x^\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_N^\alpha)$ converge débilmente a $x = (x_1, \dots, x_N)$ en $X$ si y sólo si

$$x_j^\alpha \rightharpoonup x_j \qquad \text{en } X_j$$

para todo $j \in \{1, \dots, N\}$.

*Demostración.* Supongamos primero que $x^\alpha \rightharpoonup x$ en $X$. Para cada $j \in \{1, \dots, N\}$, la proyección canónica

$$\pi_j \colon X \longrightarrow X_j$$

es lineal y continua respecto de las topologías originales. Por la Proposición B.11.12, también es continua respecto de las topologías débiles. Por lo tanto,

$$x_j^\alpha = \pi_j(x^\alpha) \rightharpoonup \pi_j(x) = x_j \qquad \text{en } X_j.$$

Recíprocamente, supongamos que $x_j^\alpha \rightharpoonup x_j$ en $X_j$ para todo $j \in \{1, \dots, N\}$. Sea $L \in X'$ y, para cada $j$, sea

$$\iota_j \colon X_j \longrightarrow X, \qquad \iota_j(z) := (0, \dots, 0, z, 0, \dots, 0),$$

la inclusión canónica en la $j$-ésima componente. Como $\iota_j$ es lineal y continua, $L_j := L \circ \iota_j$ pertenece a $X_j'$. Además, para todo $(z_1, \dots, z_N) \in X$,

$$L(z_1, \dots, z_N) = \sum_{j=1}^{N} L_j(z_j).$$

En consecuencia,

$$L(x^\alpha) = \sum_{j=1}^{N} L_j(x_j^\alpha) \longrightarrow \sum_{j=1}^{N} L_j(x_j) = L(x),$$

donde el paso al límite es válido porque la suma tiene un número finito de términos. Por la Proposición B.11.11, $x^\alpha \rightharpoonup x$ en $X$. Así, ambas topologías tienen exactamente las mismas redes convergentes y, por lo tanto, coinciden. □

Recordaremos también una caracterización topológica de la semicontinuidad inferior que será útil más adelante.

**Proposición B.11.15.** (Caracterización mediante conjuntos de subnivel) Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y sea $F \colon X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $F$ es $\tau$–inferiormente semicontinua.

(b) Para todo $c \in \mathbb{R}$, el conjunto de subnivel

$$\{x \in X \mid F(x) \leq c\}$$

es $\tau$–cerrado.

*Demostración.* Por la caracterización topológica de la semicontinuidad inferior, $F$ es $\tau$–inferiormente semicontinua si y sólo si $\{x \in X \mid F(x) > c\}$ es $\tau$–abierto para todo $c \in \mathbb{R}$. Como

$$\{x \in X \mid F(x) > c\} = X \setminus \{x \in X \mid F(x) \leq c\},$$

esta condición equivale a que todos los conjuntos de subnivel de $F$ sean $\tau$–cerrados. □

**Teorema B.11.16.** Sea $(X, \tau)$ un espacio vectorial topológico localmente convexo de Hausdorff y sea $C \subseteq X$ convexo. Entonces

$$\overline{C}^{\tau} = \overline{C}^{\sigma(X,X')}.$$

En particular, $C$ es $\tau$–cerrado si y sólo si es débilmente cerrado.

*Demostración.* Como $\sigma(X, X') \subseteq \tau$, se tiene $\overline{C}^{\tau} \subseteq \overline{C}^{\sigma(X,X')}$. Para probar la otra inclusión, sea $x \notin \overline{C}^{\tau}$. Por el teorema de separación de Hahn–Banach, existen $L \in X'$ y números reales $\alpha < \beta$ tales que

$$\operatorname{Re} L(y) \leq \alpha < \beta \leq \operatorname{Re} L(x) \qquad \text{para todo } y \in \overline{C}^{\tau}.$$

Entonces $\{z \in X \mid \operatorname{Re} L(z) > \alpha\}$ es una vecindad débil de $x$ que no intersecta a $C$. Por lo tanto, $x \notin \overline{C}^{\sigma(X,X')}$. □

**Corolario B.11.17.** Sea $(X, \tau)$ un espacio vectorial topológico localmente convexo de Hausdorff y sea $F \colon X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ una función convexa y $\tau$–inferiormente semicontinua. Entonces $F$ es débilmente inferiormente semicontinua.

*Demostración.* Por la Proposición B.11.15, para todo $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $C_c := \{x \in X \mid F(x) \leq c\}$ es $\tau$–cerrado. Como $F$ es convexa, $C_c$ es convexo. Por el Teorema B.11.16, $C_c$ es débilmente cerrado. Aplicando nuevamente la Proposición B.11.15, concluimos que $F$ es débilmente inferiormente semicontinua. □

El principio de acotación uniforme ya fue establecido en el Teorema B.2.15; lo utilizaremos ahora para relacionar la acotación débil con la acotación en norma.

También necesitaremos la inmersión canónica de un espacio normado en su bidual.

**Proposición B.11.18.** Sea $X$ un espacio normado y sea $J \colon X \longrightarrow X''$ el operador lineal definido por

$$J(x)(L) := L(x), \qquad x \in X, \quad L \in X'.$$

Entonces $\|J(x)\|_{X''} = \|x\|_X$ para todo $x \in X$. En particular, $J$ es una isometría lineal.

*Demostración.* Si $\|L\|_{X'} \leq 1$, entonces $|J(x)(L)| = |L(x)| \leq \|x\|_X$, por lo que $\|J(x)\|_{X''} \leq \|x\|_X$. Si $x \neq 0$, el Teorema B.2.29 proporciona $L \in X'$ tal que $\|L\|_{X'} = 1$ y $L(x) = \|x\|_X$. Por lo tanto, $\|J(x)\|_{X''} \geq \|x\|_X$. El caso $x = 0$ es inmediato. □

**Teorema B.11.19.** Sea $X$ un espacio de Banach y sea $A \subseteq X$. Entonces $A$ es acotado en norma si y sólo si es acotado respecto a $\sigma(X, X')$.

*Demostración.* Si $A$ es acotado en norma, entonces $\sup_{x\in A}|L(x)| \le \|L\|_{X'}\sup_{x\in A}\|x\|_X < \infty$ para todo $L \in X'$, de modo que $A$ es débilmente acotado.
Recíprocamente, si $A$ es débilmente acotado, entonces $\sup_{x\in A}|L(x)| < \infty$ para todo $L \in X'$. La familia $\{J(x) \mid x \in A\} \subseteq X''$ es, por lo tanto, puntualmente acotada sobre $X'$. Por el Teorema B.2.15,

$$\sup_{x\in A}\|J(x)\|_{X''} < \infty.$$

Como $\|J(x)\|_{X''} = \|x\|_X$, concluimos que $A$ es acotado en norma. □

**Proposición B.11.20.** Sea $X$ un espacio de Banach. Si $x_n \rightharpoonup x$ en $X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y

$$\|x\|_X \le \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|_X.$$

*Demostración.* Para cada $L \in X'$, la sucesión $(L(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y, por lo tanto, acotada. Así, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es débilmente acotado y, por el Teorema B.11.19, también es acotado en norma.
Por otra parte, la norma es convexa y continua respecto a la topología normada. Por el Corolario B.11.17, es débilmente inferiormente semicontinua. Por consiguiente,

$$\|x\|_X \le \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|_X.$$

□

### B.11.3 Topología débil-∗ y convergencia puntual

**Definición B.11.21.** (Topología débil-∗) Sea $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo. La *topología débil-∗* sobre $X'$ es la topología inicial $\sigma(X', X)$ asociada a los mapeos

$$\mathrm{ev}_x \colon X' \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad \mathrm{ev}_x(L) := L(x), \qquad x \in X.$$

Cuando $L_n \to L$ respecto a esta topología, escribimos $L_n \overset{*}{\rightharpoonup} L$.

**Proposición B.11.22.** (Descripción mediante seminormas) La topología débil-∗ $\sigma(X', X)$ está generada por las seminormas

$$p_x(L) := |L(x)|, \qquad x \in X.$$

En particular, una red $(L_\alpha)_\alpha$ converge débilmente-∗ a $L$ si y sólo si

$$L_\alpha(x) \longrightarrow L(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

La misma caracterización es válida para sucesiones.

*Demostración.* La descripción mediante seminormas se sigue de la Proposición B.11.7, aplicada a la dualidad entre $X'$ y $X$. La caracterización de la convergencia se obtiene de la Proposición B.11.8. □

Cuando el espacio de llegada no es el cuerpo escalar, la construcción análoga recibe el nombre de topología de convergencia puntual.

**Definición B.11.23.** (Topología de convergencia puntual) Sea $X$ un espacio vectorial topológico y sea $W$ un espacio vectorial normado de dimensión finita. La *topología de convergencia puntual* sobre $\mathcal{L}(X,W)$ es la topología inicial asociada a los mapeos

$$\mathrm{ev}_x \colon \mathcal{L}(X,W) \longrightarrow W, \qquad \mathrm{ev}_x(T) := T(x), \qquad x \in X.$$

**Proposición B.11.24.** La topología de convergencia puntual sobre $\mathcal{L}(X,W)$ está generada por las seminormas

$$p_x(T) := \|T(x)\|_W, \qquad x \in X.$$

Como $W$ es de dimensión finita, también está generada por las seminormas

$$p_{x,\ell}(T) := |\ell(T(x))|, \qquad x \in X, \quad \ell \in W'.$$

En particular, una red $(T_\alpha)_\alpha$ converge a $T$ respecto a esta topología si y sólo si

$$T_\alpha(x) \longrightarrow T(x) \qquad \text{en } W$$

para todo $x \in X$. La misma caracterización es válida para sucesiones.

*Demostración.* La primera descripción se sigue del Corolario B.11.2, aplicado a los mapeos $\mathrm{ev}_x$. Como $W$ es de dimensión finita, su topología está generada por las seminormas $w \mapsto |\ell(w)|$, con $\ell \in W'$, lo que proporciona la segunda descripción. La caracterización de la convergencia se sigue de la Proposición B.11.4. □

**Observación B.11.25.** Esta construcción aparece de manera natural en los espacios de distribuciones con valores en un espacio vectorial finito dimensional. Si $\mathcal{E}$ es un espacio de prueba, el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{E},W)$ se dota de la topología de convergencia puntual, de modo que $F_\alpha \to F$ si y sólo si

$$F_\alpha(\varphi) \longrightarrow F(\varphi) \qquad \text{en } W$$

para toda $\varphi \in \mathcal{E}$. Esta es precisamente la convergencia débil de distribuciones $W$–valuadas.

## B.11.4 Compacidad débil y reflexividad

Los teoremas de Banach–Alaoglu, Eberlein–Šmulian y Kakutani, junto con los criterios de metrizabilidad débil y débil-$*$ que se enuncian en esta subsección, pueden consultarse con sus demostraciones en [28, 123]. Incluimos las consecuencias elementales que se usan después.

**Definición B.11.26.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico y sea $A \subseteq X$. El *polar* de $A$ es el conjunto

$$A^\circ := \{L \in X' \mid |L(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in A\}.$$

**Teorema B.11.27.** (Banach–Alaoglu) Si $U$ es una vecindad del origen en un espacio vectorial topológico localmente convexo $X$, entonces $U^\circ$ es compacto respecto a la topología débil-$*$ $\sigma(X', X)$.

**Corolario B.11.28.** Si $X$ es un espacio normado, entonces la bola unitaria cerrada de $X'$ es débilmente-$*$ compacta.

*Demostración.* La bola unitaria cerrada de $X'$ es el polar de la bola unitaria abierta de $X$. La afirmación se sigue del Teorema B.11.27. □

**Teorema B.11.29.** Sea $X$ un espacio normado separable y sea $K \subseteq X'$ un conjunto acotado y débilmente-$*$ compacto. Entonces la topología débil-$*$ inducida sobre $K$ es metrizable. En particular, la bola unitaria cerrada de $X'$ es débilmente-$*$ compacta y metrizable.

*Demostración.* Sea $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un subconjunto numerable denso de $X$. Para $L_1, L_2 \in K$, definimos

$$d(L_1, L_2) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|(L_1 - L_2)(x_j)|}{1 + |(L_1 - L_2)(x_j)|}.$$

Si $d(L_1, L_2) = 0$, entonces $L_1 - L_2$ se anula sobre el conjunto denso $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ y, por continuidad, sobre todo $X$. Por lo tanto, $d$ es una métrica.
Cada sumando es continuo respecto a la topología débil-$*$ y la serie converge uniformemente, por estar dominada por $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}$. Por consiguiente, la identidad de $K$ con la topología débil-$*$ en $K$ con la topología inducida por $d$ es continua. Como el primer espacio es compacto y el segundo es de Hausdorff, dicha identidad es un homeomorfismo. Así, $d$ metriza la topología débil-$*$ sobre $K$. □

**Corolario B.11.30.** Sea $X$ un espacio de Banach separable. Toda sucesión acotada en $X'$ admite una subsucesión débilmente-$*$ convergente.

*Demostración.* Toda sucesión acotada está contenida en una bola cerrada de $X'$. Por los Teoremas B.11.27 y B.11.29, dicha bola es débilmente-$*$ compacta y metrizable. La conclusión se sigue de la compacidad secuencial de los espacios métricos compactos. □

**Teorema B.11.31.** Sea $X$ un espacio de Banach. La bola unitaria cerrada de $X'$, provista de la topología débil-$*$, es metrizable si y sólo si $X$ es separable.

**Proposición B.11.32.** Sea $X$ un espacio de Banach. Si $L_n \xrightarrow{*} L$ en $X'$, entonces $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y

$$\|L\|_{X'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|L_n\|_{X'}.$$

*Demostración.* Para cada $x \in X$, la sucesión $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y, por lo tanto, acotada. El Teorema B.2.15 implica que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{X'} < \infty$.
Por el Teorema B.11.27, las bolas cerradas de $X'$ son débilmente-$*$ compactas y, como la topología débil-$*$

es de Hausdorff, son débilmente-$*$ cerradas. Estos conjuntos son precisamente los conjuntos de subnivel de la norma. Por la Proposición B.11.15, la norma de $X'$ es débilmente-$*$ inferiormente semicontinua, lo que proporciona la desigualdad. □

**Proposición B.11.33.** Sea $X$ un espacio de Banach. Si $X'$ es separable, entonces $X$ es separable.

*Demostración.* Si $X' = \{0\}$, la caracterización dual de la norma, Corolario B.2.30, implica que $X = \{0\}$. Supongamos $X' \neq \{0\}$. Como $X'$ es separable, su esfera unitaria contiene una sucesión densa $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n$, por la definición de la norma dual, podemos escoger $x_n \in X$, $\|x_n\|_X = 1$, tal que

$$|\varphi_n(x_n)| > \frac{1}{2}.$$

Sea $Y := \overline{\operatorname{span}}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Si $Y \neq X$, Hahn–Banach proporciona $\varphi \in X'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi \restriction_Y = 0$. Elegimos $n$ con $\|\varphi_n - \varphi\| < \frac{1}{2}$. Como $x_n \in Y$,

$$|\varphi_n(x_n)| = |(\varphi_n - \varphi)(x_n)| \leq \|\varphi_n - \varphi\|\|x_n\| < \frac{1}{2},$$

lo cual contradice la elección de $x_n$. Por lo tanto $Y = X$. El subespacio generado por $\{x_n\}$ usando coeficientes racionales —racionales complejos si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$— es numerable y denso en $X$, de modo que $X$ es separable. □

El recíproco es falso. Por ejemplo, $L^1(\mathbb{R}^n)$ es separable, pero su dual $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ no lo es.

**Teorema B.11.34.** Sea $X$ un espacio de Banach cuyo dual $X'$ es separable. Entonces la bola unitaria cerrada de $X$, provista de la topología débil $\sigma(X, X')$, es metrizable.

**Definición B.11.35.** Sea $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo. Un conjunto $K \subseteq X$ es *secuencialmente débilmente compacto* si toda sucesión en $K$ admite una subsucesión que converge débilmente a un punto de $K$.

**Teorema B.11.36.** (Eberlein–Šmulian) Sea $X$ un espacio de Banach y sea $K \subseteq X$. Entonces $K$ es débilmente compacto si y sólo si es secuencialmente débilmente compacto.

**Definición B.11.37.** Un espacio de Banach $X$ es *reflexivo* si la inmersión canónica $J\colon X \longrightarrow X''$ es suprayectiva.

En este caso, la inmersión canónica permite identificar isométricamente a $X$ con su bidual $X''$.

**Teorema B.11.38.** (Kakutani) Un espacio de Banach es reflexivo si y sólo si su bola unitaria cerrada es débilmente compacta.

**Corolario B.11.39.** Sea $X$ un espacio de Banach reflexivo. Toda sucesión acotada en $X$ admite una subsucesión débilmente convergente.

*Demostración.* Toda sucesión acotada está contenida en una bola cerrada. Por el Teorema B.11.38, dicha bola es débilmente compacta y, por el Teorema B.11.36, es secuencialmente débilmente compacta. □

**Proposición B.11.40.** Un espacio de Banach $X$ es reflexivo si y sólo si $X'$ es reflexivo.

*Demostración.* Supongamos primero que $X$ es reflexivo y sea $\Phi \in X'''$. Definimos $\varphi \in X'$ por

$$\varphi(x) := \Phi(J_X x), \qquad x \in X,$$

donde $J_X \colon X \to X''$ es la inmersión canónica. Dado $x'' \in X''$, la reflexividad proporciona $x \in X$ tal que $x'' = J_X x$. Entonces

$$(J_{X'}\varphi)(x'') = x''(\varphi) = \varphi(x) = \Phi(J_X x) = \Phi(x'').$$

Así, $J_{X'}$ es suprayectiva y $X'$ es reflexivo.
Recíprocamente, supongamos que $X'$ es reflexivo. La imagen $J_X(X)$ es un subespacio cerrado de $X''$, pues $J_X$ es una isometría y $X$ es completo. Si $J_X(X) \neq X''$, el teorema de Hahn–Banach proporciona un funcional no nulo $\Phi \in X'''$ que se anula en $J_X(X)$. Por la reflexividad de $X'$, existe $\varphi \in X'$ tal que $\Phi = J_{X'}\varphi$. Para cada $x \in X$,

$$0 = \Phi(J_X x) = (J_X x)(\varphi) = \varphi(x),$$

de modo que $\varphi = 0$ y, por lo tanto, $\Phi = 0$, una contradicción. En consecuencia, $J_X$ es suprayectiva y $X$ es reflexivo. □

## B.12 Productos tensoriales topológicos y espacios nucleares

En esta sección desarrollamos la parte de la teoría de productos tensoriales topológicos que se necesita para el teorema del núcleo de Schwartz. La distinción entre las topologías proyectiva, inyectiva e inductiva es esencial: sobre los espacios de Fréchet nucleares que aparecen al fijar los soportes, las topologías proyectiva e inyectiva coinciden; sobre los espacios $LF$ globales, en cambio, el producto que representa la continuidad separada es el inductivo. La exposición sigue los Capítulos 43, 50 y 51 de [149]. Incluimos las demostraciones de los resultados elementales que se usarán posteriormente y señalamos explícitamente el único teorema hereditario de nuclearidad que se toma de esa referencia.

### B.12.1 Las topologías proyectiva, inyectiva e inductiva

Sean $X$ y $Y$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Recordemos que el producto tensorial algebraico $X \otimes Y$, junto con el mapeo bilineal canónico $(x, y) \mapsto x \otimes y$, se caracteriza por la propiedad universal de la Definición 1.10.5. Cuando $X$ y $Y$ son localmente convexos existen varias topologías naturales sobre este mismo espacio vectorial algebraico.

**Definición B.12.1.** (Topología tensorial proyectiva) Sean $X$ y $Y$ espacios localmente convexos. Si $p$ es una seminorma continua en $X$ y $q$ es una seminorma continua en $Y$, definimos, para $\mathbf{u} \in X \otimes Y$,

$$(p \otimes_\pi q)(\mathbf{u}) := \inf\left\{ \sum_{j=1}^{r} p(x_j) q(y_j) \;\middle|\; \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{r} x_j \otimes y_j \right\}.$$

La topología localmente convexa generada por estas seminormas se llama *topología tensorial proyectiva*; el espacio resultante se denota por $X \otimes_\pi Y$ y su completación de Hausdorff por $X \widehat{\otimes}_\pi Y$.

El ínfimo se toma sobre un conjunto no vacío, pues todo elemento del producto tensorial algebraico es una suma finita de tensores elementales. Si alguno de los espacios no es de Hausdorff, por completación entenderemos siempre la completación del cociente por la cerradura de $\{0\}$; en las aplicaciones todos los espacios serán de Hausdorff.

**Proposición B.12.2.** (Propiedad universal del producto proyectivo) Para toda pareja de seminormas continuas $p$ y $q$, el mapeo $p \otimes_\pi q$ es una seminorma y satisface

$$(p \otimes_\pi q)(x \otimes y) = p(x)q(y).$$

Además, la topología proyectiva es la topología localmente convexa más fina sobre $X \otimes Y$ para la cual el mapeo bilineal canónico $X \times Y \to X \otimes Y$ es continuo.
Más generalmente, si $Z$ es un espacio localmente convexo y $b\colon X \times Y \longrightarrow Z$ es bilineal, entonces $b$ es continuo si y sólo si su linealización algebraica

$$\widetilde{b}\colon X \otimes Y \longrightarrow Z, \qquad \widetilde{b}(x \otimes y) := b(x, y),$$

es continua sobre $X \otimes_\pi Y$. Si $Z$ es completo, $\widetilde{b}$ se extiende de manera única a un operador continuo $X \widehat{\otimes}_\pi Y \to Z$.

*Demostración.* La homogeneidad de $p \otimes_\pi q$ se obtiene multiplicando uno de los factores de cada representación tensorial por el escalar correspondiente. Si $\mathbf{u}, v \in X \otimes Y$, concatenar una representación de $\mathbf{u}$ con una de $v$ proporciona una representación de $\mathbf{u} + v$; al tomar ínfimos se obtiene la desigualdad triangular.
Para un tensor elemental, la representación $x \otimes y$ da $(p \otimes_\pi q)(x \otimes y) \leq p(x)q(y)$. Para la desigualdad opuesta, pasamos a los espacios normados $X_p := X/\ker p$ y $Y_q := Y/\ker q$. Por Hahn–Banach existen funcionales $\lambda \in X_p'$ y $\mu \in Y_q'$ de norma a lo más uno tales que $\lambda([x]) = p(x)$ y $\mu([y]) = q(y)$, después de multiplicarlos por escalares de módulo uno cuando sea necesario. Si $x \otimes y = \sum_{j=1}^{N} x_j \otimes y_j$, entonces

$$p(x)q(y) = \left| \sum_{j=1}^{N} \lambda([x_j])\mu([y_j]) \right| \leq \sum_{j=1}^{N} p(x_j)q(y_j).$$

Tomando el ínfimo sobre todas las representaciones se obtiene la igualdad.
La igualdad anterior implica que el mapeo canónico es continuo para la topología proyectiva. Sea ahora $\tau$ otra topología localmente convexa sobre $X \otimes Y$ que hace continuo dicho mapeo. Si $r$ es una seminorma continua para $\tau$, la continuidad en $(0, 0)$ permite elegir vecindades absolutamente convexas $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ tales que $r(x \otimes y) \leq 1$ cuando $x \in U$ y $y \in V$. Si $p_U$ y $q_V$ son sus funcionales de Minkowski, la homogeneidad y un argumento de aproximación dan $r(x \otimes y) \leq p_U(x)q_V(y)$. Por lo tanto, para $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{N} x_j \otimes y_j$,

$$r(\mathbf{u}) \leq \sum_{j=1}^{N} p_U(x_j)q_V(y_j),$$

y, al tomar el ínfimo, $r(\mathbf{u}) \leq (p_U \otimes_\pi q_V)(\mathbf{u})$. Así, toda seminorma continua para $\tau$ es continua para la topología

proyectiva, lo que prueba su maximalidad.
Si $b$ es continuo y $r$ es una seminorma continua en $Z$, el mismo argumento aplicado a $(x,y)\mapsto r(b(x,y))$ proporciona seminormas continuas $p$ y $q$ tales que $r(b(x,y))\le p(x)q(y)$. En consecuencia,

$$r(\widetilde{b}(\mathbf{u}))\le (p\otimes_\pi q)(\mathbf{u}),$$

de modo que $\widetilde{b}$ es continua. El recíproco se obtiene componiendo $\widetilde{b}$ con el mapeo bilineal canónico. La última afirmación se sigue de la propiedad universal de la completación de Hausdorff para mapeos lineales continuos, que son uniformemente continuos. □

**Proposición B.12.3.** (Producto proyectivo y productos finitos) Sean $X_1,\dots,X_A$ y $Y_1,\dots,Y_B$ espacios localmente convexos de Hausdorff. Si $\mathrm{pr}_a$ y $\mathrm{pr}_b$ denotan las proyecciones coordenadas correspondientes, el operador

$$\Theta:\left(\prod_{a=1}^{A}X_a\right)\otimes_\pi\left(\prod_{b=1}^{B}Y_b\right)\longrightarrow\prod_{a=1}^{A}\prod_{b=1}^{B}(X_a\otimes_\pi Y_b),\qquad \Theta(u):=\big((\mathrm{pr}_a\otimes\mathrm{pr}_b)u\big)_{a,b},$$

es un isomorfismo topológico. En consecuencia, induce un isomorfismo topológico entre las completaciones

$$\left(\prod_{a=1}^{A}X_a\right)\widehat{\otimes}_\pi\left(\prod_{b=1}^{B}Y_b\right)\cong\prod_{a=1}^{A}\prod_{b=1}^{B}\left(X_a\widehat{\otimes}_\pi Y_b\right).$$

*Demostración.* Sean $\iota_a\colon X_a\longrightarrow\prod_c X_c$ y $\jmath_b\colon Y_b\longrightarrow\prod_d Y_d$ las inclusiones coordenadas. Para cada pareja $(a,b)$, el mapeo bilineal

$$(x,y)\longmapsto \mathrm{pr}_a(x)\otimes\mathrm{pr}_b(y)$$

es continuo con valores en $X_a\otimes_\pi Y_b$: es la composición de las proyecciones continuas con el mapeo bilineal canónico. La Proposición B.12.2 muestra que $\mathrm{pr}_a\otimes\mathrm{pr}_b$ es continuo; como sólo hay un número finito de parejas, $\Theta$ también lo es.
Algebraicamente, la inversa de $\Theta$ está dada por

$$\Psi\big((u_{a,b})_{a,b}\big):=\sum_{a=1}^{A}\sum_{b=1}^{B}(\iota_a\otimes\jmath_b)u_{a,b}.$$

El mismo argumento prueba que cada $\iota_a\otimes\jmath_b$ es continuo y, por ser finita la suma, $\Psi$ es continua. Para $x=(x_a)_a$ y $y=(y_b)_b$ se tiene

$$\Psi\Theta(x\otimes y)=\sum_{\substack{1\le a\le A\\1\le b\le B}}\iota_a(x_a)\otimes\jmath_b(y_b)=\left(\sum_{a=1}^{A}\iota_a(x_a)\right)\otimes\left(\sum_{b=1}^{B}\jmath_b(y_b)\right)=x\otimes y,$$

mientras que la identidad $\Theta\Psi=\mathrm{Id}$ se comprueba en cada coordenada. Como los tensores elementales generan el producto tensorial algebraico, $\Theta$ y $\Psi$ son inversas.
Todo isomorfismo topológico entre espacios localmente convexos de Hausdorff se extiende, junto con su inversa, a sus completaciones. Finalmente, una red es de Cauchy en un producto finito si y sólo si cada

una de sus componentes lo es; por ello, la completación de $\prod_{a,b}(X_a \otimes_\pi Y_b)$ se identifica canónicamente con $\prod_{a,b}(X_a \widehat{\otimes}_\pi Y_b)$. Esto prueba la segunda afirmación. □

Para definir la topología inyectiva necesitaremos la noción de equicontinuidad.

**Definición B.12.4.** (Familia equicontinua) Sea $X$ un espacio localmente convexo. Un subconjunto $A \subseteq X'$ es *equicontinuo* si existe una vecindad $U$ del origen en $X$ tal que

$$|\lambda(x)| \le 1 \qquad \text{para todo } \lambda \in A \text{ y todo } x \in U.$$

Equivalentemente, el mapeo $p_A(x) := \sup_{\lambda \in A} |\lambda(x)|$ es una seminorma continua en $X$.

*Justificación de la equivalencia.* Si $A$ satisface la primera condición, entonces $p_A \le p_U$, donde $p_U$ es el funcional de Minkowski de una vecindad absolutamente convexa contenida en $U$; por lo tanto, $p_A$ es continua. Recíprocamente, si $p_A$ es continua, el conjunto $\{x \in X \mid p_A(x) < 1\}$ es una vecindad del origen y $|\lambda(x)| < 1$ sobre ella para toda $\lambda \in A$. □

Todo tensor $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{r} x_j \otimes y_j$ determina una forma bilineal sobre $X' \times Y'$ mediante

$$\mathbf{u}(\lambda, \mu) := \sum_{j=1}^{r} \lambda(x_j)\mu(y_j).$$

La propiedad universal algebraica muestra que esta expresión no depende de la representación elegida.

**Definición B.12.5.** (Topología tensorial inyectiva) Sean $X$ y $Y$ espacios localmente convexos de Hausdorff. Para subconjuntos equicontinuos $A \subseteq X'$ y $B \subseteq Y'$ definimos

$$\varepsilon_{A,B}(u) := \sup_{\lambda \in A,\, \mu \in B} |u(\lambda, \mu)|.$$

La topología localmente convexa generada por las seminormas $\varepsilon_{A,B}$ se llama *topología tensorial inyectiva*. Denotamos el espacio resultante por $X \otimes_\varepsilon Y$ y su completación por $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$.

**Proposición B.12.6.** (Comparación entre $\varepsilon$ y $\pi$) La topología inyectiva es menos fina que la proyectiva. Más precisamente, si $A \subseteq X'$ y $B \subseteq Y'$ son equicontinuos, existen seminormas continuas $p$ en $X$ y $q$ en $Y$ tales que

$$\varepsilon_{A,B}(\mathbf{u}) \le (p \otimes_\pi q)(\mathbf{u}) \qquad \text{para todo } \mathbf{u} \in X \otimes Y.$$

En particular, la identidad algebraica induce operadores continuos

$$X \otimes_\pi Y \longrightarrow X \otimes_\varepsilon Y, \qquad X \widehat{\otimes}_\pi Y \longrightarrow X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y.$$

*Demostración.* Por equicontinuidad existen seminormas continuas $p$ y $q$ tales que $|\lambda(x)| \le p(x)$ y $|\mu(y)| \le q(y)$ para $\lambda \in A$ y $\mu \in B$. Si $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{N} x_j \otimes y_j$, entonces

$$|\mathbf{u}(\lambda,\mu)| \le \sum_{j=1}^{N} p(x_j)q(y_j).$$

Tomar primero el supremo sobre $A \times B$ y luego el ínfimo sobre las representaciones de $\mathbf{u}$ proporciona la desigualdad. Las afirmaciones de continuidad se siguen de ella y de la propiedad universal de la completación. □

La tercera topología que necesitaremos representa mapeos bilineales separadamente continuos. Para un subconjunto $U \subseteq X \otimes Y$ y $x \in X$, $y \in Y$, escribimos

$$U_x := \{v \in Y \mid x \otimes v \in U\}, \qquad {}_yU := \{u \in X \mid u \otimes y \in U\}.$$

**Definición B.12.7.** (Topología tensorial inductiva) Sean $X$ y $Y$ espacios localmente convexos. La *topología tensorial inductiva* $\iota$ sobre $X \otimes Y$ es la topología localmente convexa cuya base de vecindades del origen está formada por los subconjuntos absolutamente convexos y absorbentes $U \subseteq X \otimes Y$ tales que $U_x$ es una vecindad del origen en $Y$ para todo $x \in X$ y ${}_yU$ es una vecindad del origen en $X$ para todo $y \in Y$. Denotamos los espacios correspondientes por $X \otimes_\iota Y$ y $X \widehat{\otimes}_\iota Y$.

**Proposición B.12.8.** (Propiedad universal del producto inductivo) La topología $\iota$ es la topología localmente convexa más fina para la cual el mapeo canónico $X \times Y \to X \otimes Y$ es separadamente continuo. Si $Z$ es localmente convexo y $b\colon X \times Y \longrightarrow Z$ es bilineal, entonces $b$ es separadamente continuo si y sólo si su linealización $\widetilde{b}\colon X \otimes_\iota Y \longrightarrow Z$ es continua. En consecuencia,

$$\varepsilon \subseteq \pi \subseteq \iota.$$

*Demostración.* La familia descrita en la definición es estable bajo intersecciones finitas y multiplicaciones por escalares no nulos; además, para cada uno de sus elementos $U$, el conjunto $\frac{1}{2}U$ pertenece a la misma familia y satisface $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U \subseteq U$. Por la Proposición B.10.26, determina una topología localmente convexa. Para $x \in X$, la preimagen de $U$ bajo el mapeo lineal $y \mapsto x \otimes y$ es precisamente $U_x$; análogamente, la preimagen bajo $x \mapsto x \otimes y$ es ${}_yU$. Por lo tanto, el mapeo canónico es separadamente continuo. Si $\tau$ es otra topología localmente convexa con esta propiedad y $V$ es una vecindad absolutamente convexa del origen para $\tau$, entonces $V_x$ y ${}_yV$ son vecindades para todo $x$ y todo $y$; así, $V$ es una vecindad para $\iota$. Esto prueba la maximalidad.

Sea ahora $b$ separadamente continuo y sea $V$ una vecindad absolutamente convexa del origen en $Z$. Entonces $U := \widetilde{b}^{-1}(V)$ es absolutamente convexo y absorbente. Para cada $x$, $U_x$ es la preimagen de $V$ bajo el mapeo continuo $y \mapsto b(x,y)$; de igual modo, ${}_yU$ es una vecindad. Por lo tanto, $U$ es una vecindad en $X \otimes_\iota Y$ y $\widetilde{b}$ es continua. El recíproco se obtiene por composición con el mapeo canónico. Finalmente, todo mapeo bilineal continuo es separadamente continuo, de modo que la maximalidad de ambas topologías da $\pi \subseteq \iota$; la otra inclusión ya fue probada en la Proposición B.12.6. □

**Observación B.12.9.** (Una precaución para los espacios $LF$) La continuidad separada no implica, en general, continuidad conjunta sobre el producto de dos espacios $LF$. Por esta razón, el producto global de dos espacios de funciones de prueba se describirá mediante $\widehat{\otimes}_\iota$ y no mediante $\widehat{\otimes}_\pi$. La topología proyectiva sí será la correcta después de fijar los soportes, porque entonces los factores son espacios de Fréchet y se aplica la proposición siguiente.

**Proposición B.12.10.** (Continuidad separada sobre espacios de Fréchet) Sean $X$ y $Y$ espacios de Fréchet, sea $Z$ un espacio localmente convexo y sea $b\colon X\times Y\longrightarrow Z$ un mapeo bilineal separadamente continuo. Entonces $b$ es continuo.

Más precisamente, si $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son familias crecientes de seminormas que definen las topologías de $X$ y $Y$, respectivamente, entonces, para toda seminorma continua $r$ en $Z$, existen $C>0$ e índices $k,\ell\in\mathbb{N}$ tales que

$$r(b(x,y))\le C\,p_k(x)q_\ell(y)\qquad\text{para todo } x\in X \text{ y todo } y\in Y.$$

*Demostración.* Fijemos $r$. Para $a,j\in\mathbb{N}$ definimos

$$S_{a,j}:=\{x\in X\mid r(b(x,y))\le aq_j(y)\ \text{para todo } y\in Y\}.$$

Para cada $x\in X$, la continuidad del mapeo lineal $y\mapsto b(x,y)$ proporciona $a$ y $j$ tales que $x\in S_{a,j}$; por lo tanto, $X=\bigcup_{a,j\in\mathbb{N}} S_{a,j}$. Cada $S_{a,j}$ es cerrado: si $x_\nu\to x$ y $x_\nu\in S_{a,j}$, la continuidad de $x\mapsto b(x,y)$ para cada $y$ permite pasar al límite en la desigualdad definitoria.

Como $X$ es un espacio métrico completo, el Teorema de Baire implica que algún $S_{a,j}$ tiene interior no vacío. El conjunto $S_{a,j}$ es absolutamente convexo. Si $x_0+U\subseteq S_{a,j}$ para alguna vecindad $U$ del origen, entonces $U-U\subseteq S_{a,j}-S_{a,j}\subseteq 2S_{a,j}$; por consiguiente, $S_{a,j}$ contiene una vecindad del origen. Existen, pues, $k\in\mathbb{N}$ y $\delta>0$ tales que $p_k(x)<\delta$ implica $x\in S_{a,j}$. Por homogeneidad se obtiene

$$r(b(x,y))\le\frac{2a}{\delta}p_k(x)q_j(y).$$

Cuando $p_k(x)=0$, se tiene $p_k(tx)<\delta$ para todo $t>0$; por lo tanto, $tx\in S_{a,j}$ y $t\,r(b(x,y))\le aq_j(y)$. Al hacer $t\to\infty$ obtenemos $r(b(x,y))=0$. Esto prueba la estimación con $C=\dfrac{2a}{\delta}$ y, por la Proposición B.12.2, la continuidad conjunta. □

## B.12.2 Espacios nucleares

La nuclearidad permite comparar las topologías $\pi$ y $\varepsilon$. Comenzamos con la noción de operador nuclear entre espacios de Banach.

**Definición B.12.11.** (Operador nuclear) Sean $G$ y $H$ espacios de Banach. Un operador $T\in\mathcal{L}(G,H)$ es *nuclear* si existen sucesiones $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{K}$, $(g_j')_{j\in\mathbb{N}}\subseteq G'$ y $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}\subseteq H$ tales que

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|<\infty,\qquad \|g_j'\|_{G'}\le 1,\qquad \|h_j\|_H\le 1,$$

y

$$Tg = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j g_j'(g) h_j \qquad \text{para todo } g \in G.$$

La serie converge absolutamente y uniformemente para $g$ en la bola unitaria de $G$.

**Lema B.12.12.** (Propiedad de ideal) Si $T\colon G \longrightarrow H$ es nuclear, $R\colon G_0 \longrightarrow G$ y $S\colon H \longrightarrow H_0$ son operadores continuos entre espacios de Banach, entonces $S \circ T \circ R\colon G_0 \longrightarrow H_0$ es nuclear.

*Demostración.* Si $Tg = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j g_j'(g) h_j$, entonces

$$(S \circ T \circ R) g_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (g_j' \circ R)(g_0) S(h_j).$$

Si $R$ y $S$ son no nulos, escribimos $g_j' \circ R = \|R\| \widetilde{g}_j'$ y $S(h_j) = \|S\| \widetilde{h}_j$, con normas a lo más uno, y absorbemos $\|R\|\|S\|$ en los coeficientes. El caso en que alguno de los operadores es nulo es inmediato. □

Sea $X$ un espacio localmente convexo de Hausdorff y sea $p$ una seminorma continua. Denotamos por $X_p$ la completación del espacio normado $X/\ker p$, cuya norma es $\|[x]\|_p := p(x)$, y por $Q_p\colon X \longrightarrow X_p$ el mapeo canónico. Si $q \geq p$, la identidad de $X$ induce un operador de norma a lo más uno

$$J_{q,p}\colon X_q \longrightarrow X_p, \qquad J_{q,p} Q_q x := Q_p x.$$

**Definición B.12.13.** (Espacio nuclear) Un espacio localmente convexo de Hausdorff $X$ es *nuclear* si, para toda seminorma continua $p$ en $X$, existe una seminorma continua $q \geq p$ tal que el operador $J_{q,p}\colon X_q \longrightarrow X_p$ es nuclear.

Esta definición es independiente de la familia de seminormas usada para describir la topología: si una familia cofinal de seminormas satisface la condición, toda seminorma continua está dominada, salvo una constante positiva, por un máximo finito de miembros de esa familia, y la propiedad de ideal permite pasar a ella.

**Teorema B.12.14.** (Nuclearidad e igualdad de las topologías tensoriales) Sea $X$ un espacio nuclear y sea $Y$ un espacio localmente convexo de Hausdorff. Entonces las topologías proyectiva e inyectiva coinciden en $X \otimes Y$. En particular, la identidad algebraica induce un isomorfismo topológico canónico

$$X \widehat{\otimes}_\pi Y \cong X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y.$$

*Demostración.* Por la Proposición B.12.6, sólo debemos probar que cada seminorma proyectiva es continua para la topología inyectiva. Sean $p$ y $r$ seminormas continuas en $X$ y $Y$, respectivamente. Elijamos $q \geq p$ de modo que $J_{q,p}\colon X_q \longrightarrow X_p$ sea nuclear y escribamos

$$J_{q,p} z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j(z) z_j, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty, \quad \|\alpha_j\| \leq 1, \quad \|z_j\|_{X_p} \leq 1.$$

Los funcionales $a_j := \alpha_j \circ Q_q$ forman un subconjunto equicontinuo $A \subseteq X'$, pues $|a_j(x)| \le q(x)$. Sea $B \subseteq Y'$ la imagen, mediante la composición con $Q_r$, de la bola unitaria de $Y_r'$. Este conjunto también es equicontinuo y Hahn–Banach proporciona

$$r(y) = \sup_{b \in B} |b(y)|.$$

Si $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{s} x_i \otimes y_i$, en $X_p \widehat{\otimes}_\pi Y_r$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{s} Q_p x_i \otimes Q_r y_i = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z_j \otimes \left( \sum_{i=1}^{s} a_j(x_i) Q_r y_i \right).$$

Por la definición de la norma proyectiva y la caracterización dual de $r$,

$$\begin{aligned} (p \otimes_\pi r)(\mathbf{u}) &\le \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| r \left( \sum_{i=1}^{s} a_j(x_i) y_i \right) \\ &\le \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \right) \sup_{a \in A,\, b \in B} |\mathbf{u}(a,b)| \\ &= \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \right) \varepsilon_{A,B}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Así, $p \otimes_\pi r$ es continua para $\varepsilon$. Se concluye que $\pi = \varepsilon$ sobre el producto algebraico. Sus completaciones de Hausdorff son, por lo tanto, canónicamente isomorfas. □

Necesitaremos dos propiedades de estabilidad. Las formulamos únicamente en la generalidad utilizada más adelante.

**Proposición B.12.15.** (Subespacios y productos finitos) Todo subespacio de un espacio nuclear, provisto de la topología de subespacio, es nuclear. Todo producto finito de espacios nucleares es nuclear. En consecuencia, la nuclearidad se conserva bajo isomorfismos topológicos y al pasar a subespacios complementados o cerrados.

La heredabilidad por subespacios es el teorema de [149, (50.3)].

*Demostración.* La afirmación sobre subespacios es el teorema hereditario citado. No se deduce sólo de la propiedad de ideal, pues la inclusión del subespacio en el codominio no tiene por qué admitir una proyección continua.

Sea ahora $X = X_1 \times \cdots \times X_m$. Toda seminorma continua $p$ en $X$ está dominada por una seminorma de la forma $p_1 + \cdots + p_m$, donde $p_i$ denota también su levantamiento mediante la proyección $X \to X_i$. Para cada $i$ elegimos $q_i \ge p_i$ de manera que $J_{q_i,p_i}$ sea nuclear y ponemos $q := q_1 + \cdots + q_m$. Las identificaciones

$$X_q \cong \prod_{i=1}^{m} (X_i)_{q_i}, \qquad X_{p_1+\cdots+p_m} \cong \prod_{i=1}^{m} (X_i)_{p_i}$$

muestran que $J_{q,p_1+\cdots+p_m}$ es la suma diagonal finita de los operadores $J_{q_i,p_i}$. Por lo tanto, es nuclear: basta

concatenar sus representaciones nucleares. La propiedad de ideal permite pasar de $p_1 + \cdots + p_m$ a $p$. Esto prueba la afirmación sobre productos finitos. La estabilidad bajo isomorfismos topológicos se obtiene componiendo los mapeos canónicos con el isomorfismo y su inversa; los subespacios complementados y los cerrados son casos particulares del teorema hereditario. □

El modelo básico de espacio nuclear de Fréchet es el espacio de sucesiones de rápido decaimiento. Para $d \in \mathbb{N}$, sea

$$s(\mathbb{Z}^d) := \left\{ a = (a_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}^d} \;\middle|\; p_k(a) := \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^d} (1 + \|\nu\|)^k |a_\nu| < \infty \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Lo dotamos de la topología de Fréchet definida por la familia creciente $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

**Teorema B.12.16.** (Nuclearidad de las sucesiones de rápido decaimiento) El espacio $s(\mathbb{Z}^d)$ es nuclear.

*Demostración.* Fijemos $k \in \mathbb{N}_0$ y pongamos $q := p_{k+d+1}$. Para $\nu \in \mathbb{Z}^d$, sea $e_\nu$ la sucesión que vale uno en $\nu$ y cero en los demás índices. En la completación asociada a $q$, el funcional

$$\alpha_\nu(a) := (1 + \|\nu\|)^{k+d+1} a_\nu$$

tiene norma a lo más uno, mientras que $z_\nu := (1 + \|\nu\|)^{-k} e_\nu$ tiene norma uno en la completación asociada a $p_k$. Si $\lambda_\nu := (1 + \|\nu\|)^{-d-1}$, entonces

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} \lambda_\nu < \infty$$

y, para toda sucesión de rápido decaimiento $a$,

$$J_{q,p_k} a = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} \lambda_\nu \alpha_\nu(a) z_\nu.$$

En efecto, el término indexado por $\nu$ es exactamente $a_\nu e_\nu$. Esta es una representación nuclear de $J_{q,p_k}$. Como $k$ era arbitrario, $s(\mathbb{Z}^d)$ es nuclear. □

**Teorema B.12.17.** (Series de Fourier suaves) Sea $\mathbb{T}^d := \big(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})\big)^d$. El mapeo de coeficientes de Fourier

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}} \colon C^\infty(\mathbb{T}^d) \longrightarrow s(\mathbb{Z}^d), \qquad \mathcal{F}_{\mathbb{T}}(f)_\nu := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-i\langle \nu, x \rangle}, dx,$$

es un isomorfismo topológico. Su inversa está dada por

$$a \longmapsto \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} a_\nu e^{i\langle \nu, x \rangle},$$

donde la serie y todas sus series derivadas convergen uniformemente. En particular, $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ es nuclear.

*Demostración.* Si $f \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, integrar por partes da, para todo multiíndice $\alpha$,

$$\nu^\alpha \widehat{f}(\nu) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} D^\alpha f(x) e^{-i\langle \nu, x \rangle}, dx,$$

salvo un factor complejo de módulo uno. Al aplicar esta identidad a $(1-\Delta)^r f$ obtenemos

$$(1+\|\nu\|^2)^r|\widehat{f}(\nu)| \le C_{d,r}\max_{|\alpha|\le 2r}\|D^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}_{\mathbb{T}}(f)$ es de rápido decaimiento y el mapeo de Fourier es continuo.
Recíprocamente, sea $a \in s(\mathbb{Z}^d)$. Para un multiíndice $\alpha$, elegimos $N > |\alpha| + d$. Entonces

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d}\|\nu\|^{|\alpha|}|a_\nu| \le p_N(a)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d}\frac{\|\nu\|^{|\alpha|}}{(1+\|\nu\|)^N} < \infty.$$

El criterio de Weierstrass muestra que la serie y su serie derivada de orden $\alpha$ convergen uniformemente. La suma define, pues, una función suave y la estimación anterior prueba la continuidad del mapeo inverso. La unicidad de los coeficientes de Fourier muestra que los dos mapeos son inversos. La nuclearidad se sigue del Teorema B.12.16 y de la estabilidad bajo isomorfismos topológicos.
Las fórmulas se escribieron sobre espacios complejos. En el caso real se agrupan los términos $\nu$ y $-\nu$ en senos y cosenos; las mismas estimaciones prueban el resultado y la nuclearidad. □

**Proposición B.12.18.** (Carácter inyectivo de $\varepsilon$) Sean $X_0 \hookrightarrow X$ y $Y_0 \hookrightarrow Y$ encajes lineales topológicos entre espacios localmente convexos de Hausdorff. Entonces el mapeo algebraico canónico

$$X_0 \otimes_\varepsilon Y_0 \longrightarrow X \otimes_\varepsilon Y$$

es un encaje topológico. El mapeo inducido entre las completaciones también es un encaje topológico.

*Demostración.* La inyectividad algebraica se sigue de la exactitud del producto tensorial de espacios vectoriales sobre un campo. Probemos la afirmación topológica. Sea $A_0 \subseteq X_0'$ equicontinuo. Existe una seminorma continua $p_0$ en $X_0$ tal que $|\lambda_0(x)| \le p_0(x)$ para $\lambda_0 \in A_0$. Como la topología de $X_0$ es la inducida por $X$, existen una seminorma continua $p$ en $X$ y $C > 0$ tales que $p_0(x) \le Cp(x)$ sobre $X_0$. Por Hahn–Banach, cada $\lambda_0 \in A_0$ admite una extensión $\lambda \in X'$ que satisface $|\lambda(x)| \le Cp(x)$. Al elegir una extensión para cada elemento obtenemos un conjunto equicontinuo $A \subseteq X'$ cuya restricción a $X_0$ contiene a $A_0$. El mismo argumento se aplica a todo conjunto equicontinuo $B_0 \subseteq Y_0'$.
En consecuencia, cada seminorma $\varepsilon_{A_0,B_0}$ está dominada por la restricción de alguna seminorma $\varepsilon_{A,B}$ de $X \otimes_\varepsilon Y$. La desigualdad recíproca para seminormas restringidas es inmediata, pues las restricciones de conjuntos equicontinuos siguen siendo equicontinuas. Por lo tanto, la topología de $X_0 \otimes_\varepsilon Y_0$ coincide con la inducida por $X \otimes_\varepsilon Y$.
Un encaje lineal uniforme entre espacios localmente convexos se extiende a un encaje entre sus completaciones. En efecto, si una red de Cauchy tiene imagen convergente a cero, las igualdades de seminormas inducidas muestran que la red converge a cero en el espacio original. Esto prueba la última afirmación. □

**Lema B.12.19.** (Extensión suave desde semiespacios y cuadrantes) Para $d \in \mathbb{N}$ y $r \in \{0,\dots,d\}$ pongamos $G_{d,r} := \mathbb{R}^{d-r} \times [0,\infty)^r$. Una función pertenece a $C^\infty(G_{d,r})$ si es suave en el interior y todas sus derivadas ordinarias se prolongan continuamente a cada cara. Existe un operador lineal continuo

$$E_{d,r}\colon C^\infty(G_{d,r}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{tal que} \quad (E_{d,r}f)|_{G_{d,r}} = f.$$

La continuidad se refiere a los seminormas de derivadas sobre compactos. Si $K \subseteq G_{d,r}$ es compacto, existe un compacto $\widehat{K} \subseteq \mathbb{R}^d$, independiente de $f$, tal que

$$\operatorname{supp} f \subseteq K \implies \operatorname{supp} E_{d,r} f \subseteq \widehat{K}, \qquad \|E_{d,r} f\|_{C^m(\mathbb{R}^d)} \le C_{m,r} \|f\|_{C^m(G_{d,r})}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Los operadores pueden elegirse de modo que la extensión en grupos distintos de variables conmute, dependa continuamente de parámetros suaves y satisfaga

$$E_{d+e,r+s}(f \boxtimes g) = (E_{d,r} f) \boxtimes (E_{e,s} g),$$

después de la permutación de coordenadas que reúne las variables normales.

*Demostración.* Construimos primero coeficientes que empalmen simultáneamente todos los jets. Para $N \in \mathbb{N}_0$ y $\ell \in \{0, \dots, N\}$ definimos

$$a_{\ell,N} := \prod_{\substack{j \in \{0,\dots,N\} \\ j \neq \ell}} \frac{1 + 2^j}{2^j - 2^\ell}.$$

La interpolación de Lagrange en los nodos $-2^0, \dots, -2^N$, evaluada en $1$, da

$$\sum_{\ell=0}^{N} a_{\ell,N} (-2^\ell)^m = 1, \qquad m \in \{0, \dots, N\}.$$

Para cada $\ell$ fijo existe $a_\ell := \lim_{N \to \infty} a_{\ell,N}$. En efecto, para $j > \ell$ el factor es $(1 + 2^{-j})/(1 - 2^{\ell - j})$, y los productos de sus numeradores y denominadores convergen a números positivos. Sean

$$P_+ := \prod_{j=0}^{\infty} (1 + 2^{-j}) < \infty, \qquad P_- := \prod_{j=1}^{\infty} (1 - 2^{-j}) > 0.$$

Estas convergencias se siguen aplicando el logaritmo: salvo un número finito de factores, $|\log(1 \pm 2^{-j})| \le 2^{1-j}$. Separar los factores $j < \ell$ y $j > \ell$ proporciona

$$|a_{\ell,N}| = 2^{-\ell(\ell+1)/2} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{0 \le j \le N \\ j \neq \ell}} (1 + 2^{-j})}{\displaystyle\prod_{j=1}^{\ell} (1 - 2^{-j}) \prod_{j=1}^{N-\ell} (1 - 2^{-j})} \le \frac{P_+}{P_-^2} \, 2^{-\ell(\ell+1)/2}.$$

La misma cota vale para $a_\ell$. En particular,

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} |a_\ell| 2^{\ell m} < \infty, \qquad \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} a_\ell (-2^\ell)^m = 1, \qquad m \in \mathbb{N}_0.$$

Para la segunda igualdad se prolonga $a_{\ell,N}$ por cero si $\ell > N$ y se pasa al límite en la identidad finita mediante la cota sumable anterior, con $m$ fijo y $N \ge m$.

Fijemos $R > 0$ y $\chi \in C_c^\infty((-R,R))$ igual a uno cerca de cero. Para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times [0,\infty))$ ponemos

$$(E_{d,1}f)(x',t) := \begin{cases} f(x',t), & t \geq 0, \\ \displaystyle\sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} a_\ell \chi(-2^\ell t) f(x',-2^\ell t), & t < 0. \end{cases}$$

Para cada $t < 0$ sólo intervienen un número finito de índices. Más precisamente, si $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d-1}$ y $q \in \mathbb{N}_0$, la derivada del sumando correspondiente es

$$a_\ell(-2^\ell)^q \left[\partial_\tau^q \left(\chi(\tau) D_{x'}^\alpha f(x',\tau)\right)\right]_{\tau=-2^\ell t}.$$

En todo compacto de las variables $x'$, su norma infinito para $t \leq 0$ está acotada por $C_q|a_\ell|2^{\ell q}$ multiplicado por la mayor de las normas de las derivadas de $f$ de orden a lo más $|\alpha|+q$ sobre el producto de ese compacto con $[0,R]$. El criterio de Weierstrass permite derivar la serie y prolongar cada serie derivada continuamente a $t = 0$. Puesto que $\chi = 1$ cerca de cero, su valor allí es

$$\left(\sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} a_\ell(-2^\ell)^q\right) D_{x'}^\alpha \partial_t^q f(x',0) = D_{x'}^\alpha \partial_t^q f(x',0).$$

Así coinciden los límites de todas las derivadas desde ambos lados. Para justificar el empalme, se aplica el teorema fundamental del cálculo a cada derivada normal a través de $t = 0$: la primitiva de la derivada continua pegada coincide con la función en ambos semiejes y en cero. Por inducción en el orden, junto con las derivadas tangenciales, la función pegada es $C^\infty$. Las mismas estimaciones prueban la continuidad para los seminormas locales y, cuando son finitas las normas globales, la cota $C^m$ del enunciado.

Si $\operatorname{supp} f \subseteq K$, la parte de la extensión con $t < 0$ está sostenida en $\operatorname{pr}_{x'} K \times [-R,0]$, mientras que la parte con $t \geq 0$ está sostenida en $K$. Su unión es un compacto fijo. La construcción no altera las variables $x'$; al incluir parámetros entre ellas, todas sus derivadas satisfacen las mismas estimaciones.

Para $r > 1$ aplicamos esta fórmula sucesivamente a cada variable normal, dejando las demás como parámetros, y para $r = 0$ tomamos la identidad. Las estimaciones de derivadas se iteran un número finito de veces; el soporte permanece en una caja compacta fija. Si se extienden dos variables diferentes, las dos series dobles y todas sus series derivadas convergen absolutamente sobre compactos, por las sumas $\displaystyle\sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} |a_\ell| 2^{\ell m}$. Se puede, por tanto, intercambiar su orden. Sobre un producto $f(x)g(y)$ cada operador actúa sólo sobre su factor; esto prueba la conmutación y la identidad de productos afirmadas. □

**Corolario B.12.20.** (Nuclearidad de los espacios de prueba con soporte fijo) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y sea $K \subseteq U$ compacto. Entonces $\mathcal{D}_K(U)$ es un espacio nuclear de Fréchet.

*Demostración.* La extensión por cero identifica topológicamente a $\mathcal{D}_K(U)$ con el espacio de funciones de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ cuyo soporte está contenido en $K$. Elijamos un cubo abierto que contenga a $K$ y cuya cerradura esté contenida en el interior de un cubo mayor. Después de identificar caras opuestas del cubo mayor, la extensión periódica determina un encaje topológico de $\mathcal{D}_K(U)$ en $C^\infty(\mathbb{T}^d)$. Su imagen es el subespacio

$$\{f \in C^\infty(\mathbb{T}^d) \mid f = 0 \text{ en } \mathbb{T}^d \setminus K\},$$

que es cerrado porque la convergencia en $C^\infty$ implica convergencia uniforme. El Teorema B.12.17 y la Proposición B.12.15 concluyen la prueba. □

**Teorema B.12.21.** (Tensorización de funciones suaves en toros) El mapeo $(f,g)\mapsto((x,y)\mapsto f(x)g(y))$ induce un isomorfismo topológico

$$C^\infty(\mathbb{T}^m)\widehat{\otimes}_\pi C^\infty(\mathbb{T}^n)\cong C^\infty(\mathbb{T}^{m+n}).$$

*Demostración.* La continuidad del mapeo bilineal se sigue de

$$\|D_x^\alpha D_y^\beta(f\boxtimes g)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^{m+n})}\le\|D^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^m)}\|D^\beta g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)};$$

por la Proposición B.12.2, obtenemos un operador continuo desde el producto proyectivo completado. Mediante el isomorfismo de Fourier del Teorema B.12.17, basta probar que

$$s(\mathbb{Z}^m)\widehat{\otimes}_\pi s(\mathbb{Z}^n)\longrightarrow s(\mathbb{Z}^{m+n}),\qquad e_\mu\otimes e_\nu\longmapsto e_{(\mu,\nu)},$$

es un isomorfismo. Si $a=(a_{\mu,\nu})\in s(\mathbb{Z}^{m+n})$, consideremos la serie

$$R(a):=\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^m}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}a_{\mu,\nu}e_\mu\otimes e_\nu.$$

Para las seminormas $p_k$ y $p_\ell$ de los dos factores,

$$\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^m\\ \nu\in\mathbb{Z}^n}}|a_{\mu,\nu}|p_k(e_\mu)p_\ell(e_\nu)\le p_N(a)\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^m\\ \nu\in\mathbb{Z}^n}}\frac{(1+\|\mu\|)^k(1+\|\nu\|)^\ell}{(1+\|\mu\|+\|\nu\|)^N},$$

y la última serie es finita si $N>k+\ell+m+n$. Por lo tanto, la serie que define $R(a)$ converge absolutamente para cada seminorma proyectiva y $R$ es continuo. Es inmediato sobre las sucesiones de soporte finito que $R$ es inverso del mapeo canónico. Estas sucesiones son densas en $s(\mathbb{Z}^d)$: si $a^{(R)}$ se obtiene de $a$ anulando los términos con $\|\nu\|>R$, entonces, para cada $k$, se tiene

$$p_k(a-a^{(R)})\le\frac{1}{1+R}p_{k+1}(a)\longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, los tensores de sucesiones con soporte finito son densos en el producto completado, y la continuidad extiende ambas identidades a las completaciones. □

**Lema B.12.22.** (Tensorización localizada en espacios euclidianos) Sean $K_0\subseteq\operatorname{Int}(K_1)\subseteq U\subseteq\mathbb{R}^m$ y $L_0\subseteq\operatorname{Int}(L_1)\subseteq V\subseteq\mathbb{R}^n$, donde $K_0,K_1,L_0,L_1$ son compactos. El mapeo canónico

$$T_{K_1,L_1}:\mathcal{D}_{K_1}(U)\widehat{\otimes}_\pi\mathcal{D}_{L_1}(V)\longrightarrow\mathcal{D}_{K_1\times L_1}(U\times V)$$

es un encaje topológico. Su imagen contiene a $\mathcal{D}_{K_0\times L_0}(U\times V)$ y el mapeo inverso restringido a este último espacio es continuo.

*Demostración.* Comenzamos reduciendo los compactos a los cubos fundamentales de dos toros. Como $K_1$ y $L_1$ son acotados, existen difeomorfismos afines $A\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $B\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$A(K_1) \subseteq (-\pi,\pi)^m, \qquad B(L_1) \subseteq (-\pi,\pi)^n.$$

El cambio de variables $f \mapsto f \circ A^{-1}$ es un isomorfismo topológico de $\mathcal{D}_{K_1}(U)$ sobre $\mathcal{D}_{A(K_1)}(A(U))$. En efecto, la regla de la cadena expresa cada derivada de $f \circ A^{-1}$ como una combinación lineal, con coeficientes constantes, de derivadas de $f$ del mismo orden. El cambio inverso satisface las mismas estimaciones. La afirmación correspondiente vale para $B$ y para $A \times B$. Podemos, por lo tanto, reemplazar los abiertos y los compactos por sus imágenes y conservar la notación original. De este modo supondremos en lo sucesivo que

$$K_1 \subseteq (-\pi,\pi)^m, \qquad L_1 \subseteq (-\pi,\pi)^n.$$

Las inclusiones $K_0 \subseteq \operatorname{Int}(K_1)$ y $L_0 \subseteq \operatorname{Int}(L_1)$ permiten elegir $\chi \in \mathcal{D}_{K_1}(U)$ y $\eta \in \mathcal{D}_{L_1}(V)$ iguales a uno en vecindades de $K_0$ y $L_0$, respectivamente. Si una función de $\mathcal{D}_{K_1}(U)$ se extiende por cero a $\mathbb{R}^m$, la extensión se anula en una vecindad de la frontera de $[-\pi,\pi]^m$. Por ello determina una función suave en $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/(2\pi\mathbb{Z})^m$. Obtenemos así un encaje topológico

$$J_m\colon \mathcal{D}_{K_1}(U) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^m).$$

Se construyen de la misma manera los encajes $J_n$ y $J_{m+n}$ para el segundo factor y para el producto. La topología inducida por $C^\infty$ coincide con la topología usual de cada espacio con soporte fijo, pues en ambos casos está definida por los supremos de las derivadas sobre un compacto fijo.
Si $\Phi \in \mathcal{D}_{K_0\times L_0}(U \times V)$ y

$$\Phi(x,y) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^m,\, \nu\in\mathbb{Z}^n} c_{\mu,\nu}(\Phi) e^{i\langle \mu, x\rangle} e^{i\langle \nu, y\rangle}$$

es su serie de Fourier periódica, definimos

$$R^{K_1,L_1}_{K_0,L_0}\Phi := \sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^m\\ \nu\in\mathbb{Z}^n}} c_{\mu,\nu}(\Phi)\big(\chi e^{i\langle \mu,\cdot\rangle}\big) \otimes \big(\eta e^{i\langle \nu,\cdot\rangle}\big).$$

Para cada $a, b \in \mathbb{N}_0$ existen constantes $C_a, C_b > 0$ tales que

$$\|\chi e^{i\langle \mu,\cdot\rangle}\|_{C^a} \le C_a(1+\|\mu\|)^a, \qquad \|\eta e^{i\langle \nu,\cdot\rangle}\|_{C^b} \le C_b(1+\|\nu\|)^b.$$

Por integración por partes, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$|c_{\mu,\nu}(\Phi)| \le C_N(1+\|\mu\|+\|\nu\|)^{-N} \max_{|\gamma|\le 2N} \|D^\gamma \Phi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^{m+n})}.$$

Al elegir $N > a+b+m+n$, la serie que define $R^{K_1,L_1}_{K_0,L_0}\Phi$ converge absolutamente para la seminorma proyectiva $\|\cdot\|_{C^a} \otimes_\pi \|\cdot\|_{C^b}$. La misma estimación muestra que $R^{K_1,L_1}_{K_0,L_0}$ es continuo. Como $\chi(x)\eta(y) = 1$ sobre $K_0 \times L_0$, el Teorema B.12.21 proporciona

$$T_{K_1,L_1} R^{K_1,L_1}_{K_0,L_0}\Phi = \chi(x)\eta(y)\Phi(x,y) = \Phi(x,y).$$

Resta probar que $T_{K_1,L_1}$ induce la topología correcta sobre su imagen. Por el Corolario B.12.20 y el Teore-

ma B.12.14, en el dominio de $T_{K_1,L_1}$ podemos sustituir $\widehat{\otimes}_\pi$ por $\widehat{\otimes}_\varepsilon$. Los espacios $C^\infty(\mathbb{T}^m)$ y $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ también son nucleares, de modo que la misma sustitución es válida para ellos. La Proposición B.12.18, aplicada a $J_m$ y $J_n$, muestra que

$$J_m \widehat{\otimes} J_n : \mathcal{D}_{K_1}(U) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_{L_1}(V) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^m) \widehat{\otimes}_\pi C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

es un encaje topológico. Si $T_{\mathbb{T}}$ denota el isomorfismo del Teorema B.12.21, entonces

$$J_{m+n} \circ T_{K_1,L_1} = T_{\mathbb{T}} \circ (J_m \widehat{\otimes} J_n).$$

El miembro derecho es un encaje topológico. Como $J_{m+n}$ también lo es, la igualdad prueba que $T_{K_1,L_1}$ es inyectivo y que su inversa sobre la imagen es continua. Por lo tanto, $T_{K_1,L_1}$ es un encaje topológico. La identidad obtenida antes muestra finalmente que $R^{K_1,L_1}_{K_0,L_0}$ coincide con su inversa sobre $\mathcal{D}_{K_0\times L_0}(U\times V)$. □

## B.13 Ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach

La teoría local de ecuaciones diferenciales ordinarias conserva en espacios de Banach el argumento de aproximaciones sucesivas. La completitud del espacio modelo sustituye a la completitud de los espacios euclidianos, pero no aparece ninguna forma de compacidad local. Esta distinción será esencial al estudiar la prolongación de curvas integrales en variedades de Banach.

Todas las integrales de esta sección son integrales de Riemann con valores en un espacio de Banach. Para integrandos continuos sobre intervalos compactos coinciden con las correspondientes integrales de Bochner.

Sea $E$ un espacio de Banach real, sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times E$ un abierto y sea $F\colon \Omega \longrightarrow E$. Diremos que $F$ es **localmente Lipschitz respecto de la variable de estado, uniformemente en el tiempo**, si para cada $(t_0,x_0)\in\Omega$ existen $a,r,L>0$ tales que

$$[t_0-a,t_0+a]\times \overline{B}_E(x_0,r)\subseteq\Omega$$

y

$$\|F(t,x)-F(t,y)\|_E \le L\|x-y\|_E$$

para cualesquiera $t\in[t_0-a,t_0+a]$ y $x,y\in\overline{B}_E(x_0,r)$. Cuando interviene un parámetro $\lambda$ en un espacio de Banach $P$, la expresión *uniformemente en el tiempo y en el parámetro* tendrá el significado análogo sobre productos de la forma

$$[t_0-a,t_0+a]\times\overline{B}_E(x_0,r)\times\overline{B}_P(\lambda_0,\rho).$$

Toda función de clase $C^1$ es localmente Lipschitz en la variable de estado. La continuidad de $D_2F$ permite acotar su norma en un producto suficientemente pequeño alrededor del punto considerado, y las desigualdades del valor medio del Teorema 23.1.10 proporcionan la estimación de Lipschitz sobre una bola convexa.

**Teorema B.13.1.** (Picard–Lindelöf en espacios de Banach) Sea $E$ un espacio de Banach, sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times E$ abierto y sea $F\colon\Omega\longrightarrow E$ continua y localmente Lipschitz respecto de la variable de estado, uniformemente en el tiempo. Para cada $(t_0,x_0)\in\Omega$ existen $h>0$ y una única función

$$x\in C^1([t_0-h,t_0+h],E)$$

cuya gráfica está contenida en $\Omega$ y que satisface

$$x'(t) = F(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Más precisamente, pueden elegirse $a, r, L, M > 0$ de modo que

$$Q := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_E(x_0, r) \subseteq \Omega, \qquad \|F(t, y)\|_E \leq M$$

en $Q$ y que la constante de Lipschitz respecto de $y$ sea $L$. Entonces sirve cualquier $h > 0$ tal que

$$h \leq a, \qquad hM \leq r, \qquad hL < 1.$$

La solución es el único elemento de $C([t_0 - h, t_0 + h], \overline{B}_E(x_0, r))$ que satisface la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds. \tag{B.12}$$

*Demostración.* Por la continuidad de $F$ en $(t_0, x_0)$ y la hipótesis local de Lipschitz, podemos disminuir $a$ y $r$ hasta obtener el cilindro $Q$, la cota $M$ y la constante $L$ del enunciado. Sea

$$\mathcal{X} := \left\{ u \in C([t_0 - h, t_0 + h], E) \;\middle|\; \sup_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \|u(t) - x_0\|_E \leq r \right\}.$$

El espacio $C([t_0 - h, t_0 + h], E)$, provisto de la norma del supremo, es de Banach. El límite uniforme de una sucesión de Cauchy de funciones continuas existe puntualmente por la completitud de $E$ y es continuo por la convergencia uniforme. Por lo tanto, $\mathcal{X}$ es un espacio métrico completo, al ser un subconjunto cerrado. Definimos $\mathcal{T} : \mathcal{X} \longrightarrow C([t_0 - h, t_0 + h], E)$ por

$$(\mathcal{T} u)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))\, ds.$$

La integral está bien definida por el Teorema B.6.2. Para $u \in \mathcal{X}$ se tiene

$$\|(\mathcal{T} u)(t) - x_0\|_E \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq r,$$

de modo que $\mathcal{T}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$. Asimismo, para $u, v \in \mathcal{X}$,

$$\|\mathcal{T} u - \mathcal{T} v\|_\infty \leq hL \|u - v\|_\infty.$$

Así, $\mathcal{T}$ es una contracción. El Teorema 23.3.1 proporciona un único punto fijo $x \in \mathcal{X}$, y éste satisface (B.12). Como el integrando es continuo, el teorema fundamental del cálculo para funciones con valores en Banach, Teorema B.6.5, muestra que $x \in C^1$ y $x'(t) = F(t, x(t))$.
Recíprocamente, toda solución con valores en $\overline{B}_E(x_0, r)$ satisface (B.12) por el mismo teorema fundamental del cálculo y, por lo tanto, es un punto fijo de $\mathcal{T}$. Si $y$ es cualquier otra solución con el mismo dato inicial, la continuidad permite restringir ambas soluciones a un intervalo en el que permanecen en un cilindro de contracción común. El conjunto de tiempos en los que $x$ e $y$ coinciden es cerrado y, al repetir este argumento

local en cada uno de sus puntos, también es abierto. La conexidad del intervalo común muestra que ambas soluciones coinciden mientras estén simultáneamente definidas. Esto prueba la unicidad afirmada. □

La unicidad anterior no está restringida al cilindro particular empleado en la construcción.

**Proposición B.13.2.** (Unicidad en dominios comunes) Bajo las hipótesis del Teorema B.13.1, sean $x_1 : I_1 \longrightarrow E$ y $x_2 : I_2 \longrightarrow E$ dos soluciones y supongamos que $t_* \in I_1 \cap I_2$ y $x_1(t_*) = x_2(t_*)$. Entonces

$$x_1(t) = x_2(t)$$

para todo $t$ en la componente conexa de $I_1 \cap I_2$ que contiene a $t_*$. En particular, dos soluciones con el mismo dato inicial coinciden en la intersección de sus intervalos de definición.

*Demostración.* Sea $J$ la componente indicada y sea $A := \{t \in J \mid x_1(t) = x_2(t)\}$. Este conjunto es cerrado en $J$ por la continuidad de las soluciones y no es vacío. Si $s \in A$, aplicamos la construcción local del Teorema B.13.1 al punto $(s, x_1(s))$. Por continuidad, ambas soluciones permanecen en el cilindro de unicidad al restringirlas a un intervalo suficientemente pequeño alrededor de $s$; por la unicidad del punto fijo coinciden en ese intervalo. Por lo tanto, $A$ es también abierto en $J$. La conexidad de $J$ implica que $A = J$. □

**Teorema B.13.3.** (Solución maximal) Bajo las hipótesis del Teorema B.13.1, para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe una única solución maximal

$$x_{t_0,x_0} : I_{t_0,x_0} \longrightarrow E,$$

donde $I_{t_0,x_0} \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto que contiene a $t_0$. Toda otra solución con dato inicial $(t_0, x_0)$ es la restricción de ésta.

*Demostración.* Consideremos todas las soluciones definidas en intervalos abiertos que contienen a $t_0$ y tienen valor $x_0$ en $t_0$. La Proposición B.13.2 muestra que cualesquiera dos de ellas coinciden en la intersección de sus dominios. Su unión define, por lo tanto, una función en la unión $I_{t_0,x_0}$ de todos esos intervalos. Esta unión es un intervalo abierto que contiene a $t_0$, y la función obtenida es localmente una de las soluciones de la familia; en consecuencia, es una solución. Por su construcción extiende a todas las demás y es maximal. La unicidad se sigue de nuevo de la Proposición B.13.2. □

El criterio de prolongación debe formularse en términos de convergencia, no de compacidad de bolas cerradas, pues estas bolas no son compactas en un espacio de Banach infinito–dimensional.

**Teorema B.13.4.** (Criterio de prolongación) Sea $x : (a, b) \longrightarrow E$ una solución maximal de $x' = F(t, x)$ y supongamos que $b < \infty$.

(a) Si existe $x_b \in E$ tal que

$$x(t) \longrightarrow x_b \qquad \text{cuando } t \to b^-$$

y $(b, x_b) \in \Omega$, entonces $x$ se prolonga a un intervalo que contiene estrictamente a $(a, b)$, en contradicción con la maximalidad.

(b) Si existe $t_1 \in (a, b)$ y una constante $M > 0$ tales que

$$\|F(t, x(t))\|_E \leq M \qquad \text{para } t \in [t_1, b),$$

entonces existe el límite $x_b := \lim_{t\to b^-} x(t)$. En particular, una solución maximal con extremo derecho finito sólo puede dejar de prolongarse si $(b, x_b) \notin \Omega$.

Las afirmaciones simétricas valen en un extremo izquierdo finito.

*Demostración.* Supongamos primero que existe $x_b$ y que $(b, x_b) \in \Omega$. Definimos $x(b) := x_b$. Al pasar al límite en la ecuación integral entre un tiempo fijo $t_1 < b$ y $t < b$, usando la continuidad de $F$, obtenemos

$$x_b = x(t_1) + \int_{t_1}^{b} F(s, x(s))\, ds.$$

El Teorema B.13.1, aplicado al dato $(b, x_b)$, produce una solución en un intervalo alrededor de $b$. La unicidad permite pegarla con $x$ y obtener una prolongación más allá de $b$. Esto prueba (a).
Para (b), si $t_1 \le s < t < b$, el teorema fundamental del cálculo da

$$\|x(t) - x(s)\|_E \le \int_s^t \|F(\tau, x(\tau))\|_E \, d\tau \le M|t - s|.$$

Por lo tanto, $x(t)$ es de Cauchy cuando $t \to b^-$. La completitud de $E$ proporciona un límite $x_b \in E$, y la última afirmación se sigue de (a). El argumento hacia atrás se obtiene invirtiendo la orientación del tiempo. □

Registramos ahora la dependencia respecto de datos y parámetros en la forma que se utilizará para construir flujos.

**Teorema B.13.5.** (Dependencia de datos iniciales y parámetros) Sean $E$ y $P$ espacios de Banach, sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E \times P$ abierto y sea $F\colon \Omega \longrightarrow E$ continua y localmente Lipschitz respecto de la variable de estado, uniformemente en el tiempo y en el parámetro. Denotemos por

$$x(t; t_0, x_0, \lambda)$$

la solución maximal del problema

$$x'(t) = F(t, x(t), \lambda), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Entonces el dominio natural

$$\mathcal{D} := \left\{ (t, t_0, x_0, \lambda) \;\middle|\; t \in I_{t_0, x_0, \lambda} \right\}$$

es abierto en $\mathbb{R}^2 \times E \times P$, y el mapeo solución

$$\mathcal{D} \longrightarrow E, \qquad (t, t_0, x_0, \lambda) \longmapsto x(t; t_0, x_0, \lambda),$$

es continuo.
Si $F$ es de clase $C^k$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, el mapeo solución es de clase $C^k$. En particular, para $k \ge 1$ sus derivadas respecto del estado inicial y del parámetro satisfacen las ecuaciones variacionales

$$D_{x_0} x(t)h = h + \int_{t_0}^{t} D_2 F(s, x(s), \lambda)\big(D_{x_0} x(s)h\big)\, ds, \tag{B.13}$$

$$D_\lambda x(t)\mu = \int_{t_0}^{t} \big[D_2F(s,x(s),\lambda)\big(D_\lambda x(s)\mu\big) + D_3F(s,x(s),\lambda)\mu\big]\,ds. \tag{B.14}$$

*Demostración.* Fijemos un dato $(t_0, x_0, \lambda_0)$ y un intervalo compacto contenido en el intervalo maximal de la solución correspondiente. La gráfica de esta solución sobre el intervalo compacto es compacta, aun cuando ninguna vecindad del espacio de Banach lo sea. Una cubierta finita por cilindros de existencia local permite dividir el intervalo en un número finito de subintervalos en los que la misma constante de Lipschitz sirve para los datos suficientemente próximos.

En uno de esos subintervalos, sea $x_*$ la solución de referencia y sea $u$ la solución correspondiente a un dato y un parámetro próximos. Al restar sus ecuaciones integrales, separar el término de variación del parámetro a lo largo de $x_*$ y aplicar la desigualdad de Grönwall del Lema 1.8.19, se obtiene una estimación de la forma

$$\sup_{t\in J}\|u(t)-x_*(t)\|_E \le C_J\left(\|u(t_*)-x_*(t_*)\|_E + \sup_{t\in J}\|F(t,x_*(t),\lambda)-F(t,x_*(t),\lambda_0)\|_E\right).$$

El último supremo tiende a cero cuando $\lambda \to \lambda_0$. La imagen del mapeo $t \mapsto (t, x_*(t), \lambda_0)$ es compacta y una subcubierta finita de vecindades de continuidad proporciona una estimación uniforme para $t \in J$. Iterando la estimación sobre la partición finita se obtiene la dependencia continua en todo intervalo compacto. La misma construcción local muestra que los datos próximos poseen soluciones en un intervalo ligeramente mayor; de aquí se deduce que $\mathcal{D}$ es abierto. El cambio de variable $s = t - t_0$ convierte la variación del tiempo inicial en la variación de un parámetro del campo

$$(s, x, t_0, \lambda) \longmapsto F(t_0 + s, x, \lambda),$$

por lo que el mismo argumento prueba también la dependencia continua respecto de $t_0$.

Supongamos ahora que $F$ es de clase $C^k$. En un intervalo compacto $J = [t_0-h, t_0+h]$ suficientemente pequeño consideremos el espacio de Banach $C(J,E)$ y el mapeo

$$\mathscr{F}(u,a,\lambda)(t) := u(t) - a - \int_{t_0}^{t} F(s,u(s),\lambda)\,ds.$$

En una vecindad de la solución de referencia, $\mathscr{F}$ es de clase $C^k$. Esto se sigue de la regla de la cadena, de la continuidad de la integración y de la uniformidad sobre la imagen compacta de la curva; sus derivadas se obtienen derivando el integrando. Además,

$$D_1\mathscr{F}(u,a,\lambda)w(t) = w(t) - \int_{t_0}^{t} D_2F(s,u(s),\lambda)w(s)\,ds.$$

Al disminuir $h$, el operador integral del miembro derecho tiene norma menor que uno. El Teorema B.2.10 muestra entonces que $D_1\mathscr{F}$ es invertible. El Teorema 23.3.8 implica que la solución, considerada como elemento de $C(J,E)$, depende de manera $C^k$ de $(a,\lambda)$. La evaluación en cada tiempo es lineal y continua. Más aún, las derivadas respecto de $(a,\lambda)$ obtenidas en $C(J,E)$ son funciones continuas del tiempo, y su evaluación depende conjuntamente de $(t,a,\lambda)$. La identidad

$$\partial_t x(t;a,\lambda) = F(t, x(t;a,\lambda), \lambda)$$

y la regla de la cadena muestran inductivamente que todas las derivadas mixtas de orden total a lo sumo $k$ existen y son continuas. Esto proporciona la regularidad conjunta en el tiempo. La dependencia respecto de $t_0$ se reduce al mismo argumento mediante el cambio $s = t - t_0$ y el campo $(s, x, t_0, \lambda) \mapsto F(t_0 + s, x, \lambda)$. Finalmente, derivar la ecuación integral respecto de $a$ y $\lambda$ da (B.13) y (B.14). La prolongación sobre un intervalo compacto arbitrario se obtiene componiendo un número finito de estos mapeos locales de solución. □

**Corolario B.13.6.** (Existencia global para campos acotados) Sea $E$ un espacio de Banach y sea $F\colon \mathbb{R}\times E \longrightarrow E$ continua y localmente Lipschitz respecto de la variable de estado, uniformemente en el tiempo. Supongamos que existe $M \geq 0$ tal que

$$\|F(t,x)\|_E \leq M$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$. Entonces toda solución maximal está definida en $\mathbb{R}$ y satisface

$$\|x(t) - x(s)\|_E \leq M|t - s|$$

para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$. Si $F$ posee regularidad $C^k$, la regularidad del mapeo solución es la del Teorema B.13.5.

*Demostración.* Sea $(a, b)$ el intervalo maximal de una solución. Si $b < \infty$, la cota de $F$ y el Teorema B.13.4 proporcionan un límite $x_b \in E$ cuando $t \to b^-$. Como el dominio del campo es todo $\mathbb{R} \times E$, el dato $(b, x_b)$ pertenece a ese dominio y la solución se prolonga, en contradicción con la maximalidad. Por lo tanto, $b = +\infty$. El mismo argumento hacia atrás prueba que $a = -\infty$. La estimación se obtiene integrando la ecuación entre $s$ y $t$. □

# C

# Álgebra lineal

Este apéndice reúne algunos resultados de álgebra lineal que se emplean en el estudio de métricas, formas bilineales, operadores y tensores. Seguimos principalmente las referencias [83, 122]; el lector puede consultarlas para una exposición más amplia.

## C.1 Formas bilineales y matrices

Las formas bilineales y las matrices asociadas proporcionan el punto de partida para las construcciones consideradas en este apéndice.

**Definición C.1.1.** Sea $V$ un espacio vectorial real de dimensión $n$. Decimos que $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal en $V$ si:

(a) $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$ y $f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$ para cualesquiera $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x,y+z) = f(x,y) + f(x,z)$ y $f(x,\lambda y) = \lambda f(x,y)$ para cualesquiera $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $V$, definimos la matriz asociada a la forma bilineal $f$ como

$$A_{ij} = f(e_i, e_j).$$

**Proposición C.1.2.** Si $V$ es un espacio vectorial real de dimensión $n$, $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base para $V$, entonces

$$f(x,y) = [x]_\beta^T A [y]_\beta,$$

para cualesquiera $x, y \in V$, donde $A$ es la matriz asociada a $f$ y $[x]_\beta, [y]_\beta$ son las representaciones coordenadas de $x$ y $y$ respectivamente, respecto a la base $\beta$.

*Demostración.* Si $x = x^i e_i$ y $y = y^j e_j$, la bilinealidad da

$$f(x,y) = x^i y^j f(e_i, e_j) = x^i A_{ij} y^j = [x]_\beta^T A [y]_\beta.$$

□

**Definición C.1.3.** Sean $V$ un espacio vectorial real de dimensión finita $n$ y $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Decimos que:

(a) Simétrica si $f(x,y) = f(y,x)$ para cualesquiera $x, y \in V$. En ese caso, la matriz asociada $A$ resulta ser simétrica.

(b) No degenerada si $f(x,y) = 0$ para toda $y \in V$ implica $x = 0$.

**Ejemplo C.1.4.** Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^2(U)$. Definimos la matriz Hessiana de $f$ en $x \in U$ como $H(x) = \left( \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces $H(x)$ es una matriz simétrica y está asociada a la forma bilineal $\nabla^2 f(x) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (la segunda derivada total de $f$).

**Definición C.1.5.** Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es Hermitiana si $A = A^*$, donde $A^*$ es la matriz obtenida de conjugar las entradas de la matriz transpuesta de $A$. Una matriz Hermitiana es *positiva semidefinida* si $x^* A x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$, y es *positiva definida* si $x^* A x > 0$ para todo $x \neq 0$. Para matrices reales, emplearemos estos términos para matrices simétricas con la condición correspondiente sobre $x \in \mathbb{R}^n$.

**Proposición C.1.6.** Toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica es Hermitiana.

*Demostración.* Como las entradas son reales, la conjugación no las modifica. Por lo tanto, $A^* = \overline{A^T} = A^T = A$. □

**Teorema C.1.7.** Toda matriz hermitiana de $n \times n$ es diagonalizable mediante una matriz unitaria y tiene valores propios reales.

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre $n$. El polinomio característico de una matriz compleja tiene una raíz, así que $A$ posee un vector propio $v \neq 0$, digamos $Av = \lambda v$. Como $A = A^*$,

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, Av \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle,$$

y $\lambda \in \mathbb{R}$. Después de normalizar $v$, su complemento ortogonal es invariante: si $w \perp v$, entonces

$$\langle Aw, v \rangle = \langle w, Av \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = 0.$$

La restricción de $A$ a $v^\perp$ sigue siendo Hermitiana. La hipótesis inductiva proporciona una base ortonormal de vectores propios en $v^\perp$, que junto con $v$ diagonaliza $A$. □

**Teorema C.1.8.** (de Rayleigh) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ Hermitiana. Entonces

$$\lambda_{\max} = \max_{x\neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} \text{ y } \lambda_{\min} = \min_{x\neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x},$$

donde $\lambda_{\max}$ y $\lambda_{\min}$ son el máximo y el mínimo valor propio de $A$ respectivamente y $x^*$ es la matriz obtenida al transponer el vector $x$ y tomar el conjugado complejo de cada entrada.

*Demostración.* Por el teorema anterior, existe una matriz unitaria $Q$ tal que

$$Q^*AQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Si $y = Q^*x$, entonces

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2}{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}.$$

Este cociente es una combinación convexa de los valores propios, de modo que está entre $\lambda_{\min}$ y $\lambda_{\max}$. Ambos extremos se alcanzan tomando un vector propio correspondiente. □

**Teorema C.1.9.** (de descomposición de Schur) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, entonces $A = QUQ^{-1}$, donde $Q$ es una matriz unitaria ($Q$ es invertible y $Q^{-1} = Q^*$) y $U$ es una matriz triangular superior cuyas entradas en la diagonal son los valores propios de $A$.

*Demostración.* La prueba es por inducción sobre $n$. Elegimos un vector propio unitario $v_1$ de $A$ y lo completamos a una base ortonormal. En esa base, la primera columna de la matriz de $A$ es $(\lambda_1, 0, \ldots, 0)^T$, por lo que la matriz tiene forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Por la hipótesis inductiva, un cambio unitario de base en $\operatorname{span}\{v_1\}^\perp$ triangulariza $A_1$. Al extenderlo por la identidad sobre $\operatorname{span}\{v_1\}$, se obtiene una matriz unitaria $Q$ para la cual $Q^*AQ$ es triangular superior. Las entradas diagonales son sus valores propios porque el polinomio característico de una matriz triangular es el producto de $\lambda - U_{ii}$. □

**Teorema C.1.10.** Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ y sea $\lambda$ un valor propio de $A$. Si

$$\|A\|_F := \left( \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es la norma de Frobenius de $A$, entonces $|\lambda| \leq \|A\|_F$.

*Demostración.* Por el Teorema C.1.9, existen una matriz unitaria $Q$ y una matriz triangular superior $U$ tales que $A = QUQ^{-1}$. La identidad $\|C\|_F^2 = \operatorname{tr}(C^*C)$ y la igualdad $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ dan $\|Q^*AQ\|_F^2 = \operatorname{tr}(Q^*A^*AQ) =$

$\operatorname{tr}(A^*A)$; por tanto, $\|A\|_F = \|U\|_F$. Como los elementos diagonales de $U$ son los valores propios de $A$, se tiene

$$\|U\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |U_{ii}|^2 + \sum_{1\le i<j\le n} |U_{ij}|^2 \ge |\lambda|^2.$$

Por lo tanto, $|\lambda| \le \|U\|_F = \|A\|_F$. □

**Teorema C.1.11.** Sea $A$ una matriz Hermitiana de $n \times n$ positiva semidefinida y sea $k \in \mathbb{N}$, con $k \ge 2$. Entonces:

(a) Existe una única matriz Hermitiana $B$, positiva semidefinida, tal que $A = B^k$.

(b) Existe un polinomio $p$ con coeficientes reales tal que $B = p(A)$. En consecuencia, $B$ conmuta con cualquier matriz que conmuta con $A$.

(c) Si $A$ es real, entonces $B$ es real.

*Demostración.* Por el teorema espectral,

$$A = Q\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)Q^*, \qquad \lambda_i \ge 0,$$

con $Q$ unitaria. Definimos

$$B := Q\operatorname{diag}(\lambda_1^{1/k},\dots,\lambda_n^{1/k})Q^*.$$

Entonces $B$ es Hermitiana positiva semidefinida y $B^k = A$.
Si $C$ es otra matriz Hermitiana positiva semidefinida con $C^k = A$, entonces $C$ conmuta con $A = C^k$ y preserva cada espacio propio $E_\lambda$ de $A$. La restricción de $C$ a $E_\lambda$ es Hermitiana positiva semidefinida y satisface $(C\restriction_{E_\lambda})^k = \lambda I$. Sus valores propios son no negativos y su $k$-ésima potencia es $\lambda$; todos son, por lo tanto, $\lambda^{1/k}$. El teorema espectral implica $C\restriction_{E_\lambda} = \lambda^{1/k} I$, así que $C = B$.
Sean $\mu_1,\dots,\mu_s$ los valores propios distintos de $A$. La interpolación de Lagrange proporciona un polinomio real $p$ con $p(\mu_j) = \mu_j^{1/k}$. El cálculo sobre cada espacio propio muestra que $B = p(A)$. Si una matriz conmuta con $A$, conmuta con $p(A)$; y si $A$ es real, también lo es $p(A)$. □

**Teorema C.1.12.** Si $A$ es una matriz Hermitiana positivo semidefinida, entonces $A$ es positiva definida si y sólo si $A$ es invertible.

*Demostración.* Por el teorema espectral, $A$ es unitariamente semejante a $\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ con $\lambda_i \ge 0$. Es positiva definida si y sólo si todos los $\lambda_i$ son estrictamente positivos, y es invertible si y sólo si ninguno de ellos es cero. Las dos condiciones son equivalentes. □

**Observación C.1.13.** Para toda matriz real simétrica $A$ positiva definida existe una única matriz real simétrica positiva definida $B$ tal que $A = B^2$. A dicha matriz se le conoce como la raíz cuadrada de $A$.

**Proposición C.1.14.** Una matriz simétrica positiva (semi)definida tiene una raíz cuadrada positiva (semi)definida que también es una matriz simétrica.

*Demostración.* Se aplica el Teorema C.1.11 con $k = 2$. Como la matriz original es real, el inciso (c) de ese teorema muestra que su raíz positiva es real; al ser Hermitiana y real, es simétrica. Si la matriz original es definida positiva, la raíz no tiene valores propios nulos y también es definida positiva. □

# D

# Convenio de suma de Einstein

Este apéndice fija el convenio de suma utilizado en las expresiones con índices.

## D.1 Convenio de suma de Einstein

En una expresión tensorial, un índice que aparece exactamente dos veces en un mismo monomio, una vez como subíndice y otra como superíndice, se denomina *índice mudo*. Salvo indicación contraria, se entiende que se suma respecto de todos los valores posibles de dicho índice. Así, si los índices varían en $\{1,\dots,n\}$, escribimos

$$\lambda_i x^i := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i$$

y

$$g^{ij} F_i G_j := \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} F_i G_j.$$

Los índices que aparecen una sola vez se denominan *índices libres*. En una igualdad tensorial, los índices libres deben aparecer en ambos miembros, en las mismas posiciones. Por ejemplo,

$$T^i{}_j X^j = Y^i$$

representa una familia de igualdades, una para cada valor del índice libre $i$, y contiene una suma respecto del índice mudo $j$.

En cada monomio evitaremos utilizar un mismo índice más de dos veces. Cuando sea necesario efectuar varias sumas, emplearemos índices mudos distintos. Esta regla evita ambigüedades y permite reconocer de manera inmediata cuáles son los índices libres de la expresión.

Las coordenadas locales se escribirán normalmente como $(x^1,\dots,x^n)$. En particular,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathbf{d}x^i := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathbf{d}x^i.$$

# Glosario

**campo pseudogradiente** Campo localmente Lipschitz que queda controlado por la norma de la derivada y produce descenso uniforme del funcional; véase la Definición 31.2.1. 1611, *véase* condición de Palais–Smale

**coercividad** Propiedad de un funcional cuyo valor tiende a $+\infty$ cuando la norma del argumento tiende a $+\infty$. 1600, *véase* método directo del cálculo de variaciones

**condición de Palais–Smale** Condición de compacidad para sucesiones de energía acotada cuya derivada tiende a cero; véanse las Definiciones 31.1.2 y 31.4.1. 1610, *véase* campo pseudogradiente y estructura Banach–Finsler

**conexión** Operador que deriva secciones de un haz en direcciones tangentes y satisface las reglas de linealidad y de Leibniz; véase la Definición 2.4.2. 139, *véase* derivada covariante y conexión compatible

**conexión compatible** Conexión que preserva la métrica fibrada bajo derivación; véase la Definición 2.4.39. 170, *véase* conexión y métrica fibrada

**conjunto de nivel regular** Nivel de un funcional cuya derivada no se anula en sus puntos y que, en el marco desarrollado, posee estructura de subvariedad; véase el Teorema 24.7.2. 1434, *véase* subvariedad de Banach y multiplicador de Lagrange

**derivada covariante** Derivada de una sección determinada por una conexión y una dirección tangente. 139, *véase* conexión y derivada covariante débil

**derivada covariante débil** Extensión distribucional de la derivada covariante definida mediante integración por partes; véase la Definición 9.1.5. 611, *véase* derivada covariante y espacio de Sobolev

**derivada de Fréchet** Aproximación lineal continua de primer orden de una función entre espacios de Banach; véase la Definición 23.1.1. 1370, *véase* variedad de Banach

**desigualdad de Kato** Estimación que compara la derivada débil de la norma de una sección con su derivada covariante; véase el Teorema 7.2.6. 531, *véase* derivada covariante débil

**desigualdad de Poincaré** Estimación de una función o sección mediante sus derivadas, bajo las condiciones geométricas o de frontera correspondientes; véanse los Teoremas 3.3.7 y 9.6.3. 307, *véase* espacio de Sobolev

**distribución en un haz vectorial** Operador lineal continuo definido sobre las secciones de prueba del haz dual; véase la Definición 10.2.1. 768, *véase* haz vectorial suave

**distribución temperada** Funcional lineal continuo sobre la clase de Schwartz; véase la Definición 4.9.1. 397, *véase* transformada de Fourier

**dual topológico de un espacio de Banach** Espacio de funcionales lineales continuos, denotado por $X'$; véase la Proposición 25.1.2. 1450, *véase* haz dual topológico de Banach y haz cotangente de Banach

**escala de Hilbert** Cadena de espacios de Hilbert con inclusiones continuas y densas que registra la regularidad Sobolev; véase la Definición 27.5.4. 1550, *véase* variedad ILH y variedad Sobolev de mapeos

**espacio de configuraciones** Espacio funcional de objetos geométricos dotado de la topología o estructura diferenciable adecuada para formular ecuaciones y simetrías. *véase* variedad Sobolev de mapeos y variedad ILH

**espacio de potenciales de Bessel** Espacio $H^{s,p}$ definido por el multiplicador $(1+\|\xi\|^2)^{\frac{s}{2}}$; véase la Definición 6.1.2. 448, *véase* espacio de Sobolev–Slobodeckij

**espacio de Sobolev** Espacio funcional que controla una función o sección y sus derivadas débiles hasta un orden dado; véanse las Definiciones 3.2.1 y 9.1.47. 295, *véase* derivada covariante débil y operador de traza

**espacio de Sobolev–Slobodeckij** Espacio de orden no entero definido mediante diferencias y la seminorma de Gagliardo; véase la Definición 6.2.1. 457, *véase* espacio de potenciales de Bessel

**espacios $BC^j$ y $BUC^j$** Espacios de funciones de clase $C^j$ con derivadas acotadas y, en el segundo caso, uniformemente continuas; véase la Definición 6.4.1. 479, *véase* variedad uniformemente regular

**espectro esencial** Parte del espectro de un operador autoadjunto que no está formada por valores propios aislados de multiplicidad finita; véase la Definición 27.4.8. 1545, *véase* geometría acotada

**estructura Banach–Finsler** Familia continua de normas tangentes uniformemente equivalentes en cartas; véase la Definición 26.3.1. 1490, *véase* métrica riemanniana fuerte y condición de Palais–Smale

**estructura de Finsler clásica** Geometría finito–dimensional definida por un funcional de Minkowski suave y fuertemente convexo fuera de la sección cero; véase la Definición 26.4.2. 1495, *véase* estructura Banach–Finsler

**estructura uniforme** Filtro de entornos de la diagonal que permite definir continuidad uniforme, filtros de Cauchy y completitud; véase la Definición 27.2.1. 1513, *véase* variedad uniformemente regular

**frente de onda** Subconjunto cónico del cotangente sin la sección cero que localiza los puntos y codirecciones en los que una distribución no es suave. 1097, *véase* operador pseudodiferencial y distribución temperada

**función de Carathéodory** Función medible en la variable geométrica y continua en la variable real; véase la Definición 29.1.1. 1586, *véase* solución débil y funcional de energía

**función flan en un espacio de Banach** Función diferenciable no nula cuyo soporte es acotado; véase la Definición 24.8.1. 1436, *véase* variedad de Banach y partición suave de la unidad en una variedad de Banach

**funcional de energía** Funcional variacional cuyos puntos críticos representan soluciones débiles de la ecuación de Euler–Lagrange asociada; véase la Sección 29.3. 1592, *véase* punto crítico y método variacional

**geometría acotada** Condición geométrica uniforme formulada mediante el radio de inyectividad y cotas de las derivadas de la curvatura; véase la Definición 13.1.5. 879, *véase* variedad riemanniana

**haz cotangente de Banach** Haz dual topológico del haz tangente de una variedad de Banach, denotado por $T'M$; véase la Definición 25.2.2. 1460, *véase* dual topológico de un espacio de Banach y haz dual topológico de Banach

**haz dual topológico de Banach** Haz de Banach cuyas fibras son los duales topológicos de las fibras del haz original; véase la Proposición 25.1.14. 1457, *véase* dual topológico de un espacio de Banach y haz cotangente de Banach

**haz vectorial suave** Haz vectorial cuya proyección, espacio total y trivializaciones locales poseen estructura suave; véase la Definición 1.7.2. 51, *véase* métrica fibrada y conexión

**inmersión entre variedades de Banach** Mapeo cuyo diferencial admite una inversa izquierda lineal continua; véase la Definición 24.5.1. 1423, *véase* variedad de Banach y subvariedad de Banach

**interpolación compleja** Método de Calderón mediante funciones holomorfas en una franja; véase la Definición 5.7.4. 427, *véase* interpolación real

**interpolación real** Método de construcción de espacios intermedios mediante los funcionales $K$ y $J$; véase la Definición 5.2.3. 411, *véase* interpolación compleja

**laplaciano de Bochner** Operador de segundo orden construido a partir de una conexión y de su adjunto formal; véase la Definición 8.2.10. 586, *véase* operador formalmente adjunto y laplaciano de Hodge–DeRham

**laplaciano de Hodge–DeRham** Operador sobre formas diferenciales dado por la suma de las composiciones de la derivada exterior y su adjunto formal; véase la Definición 8.2.14. 588, *véase* operador formalmente adjunto y laplaciano de Bochner

**medida de Riemann–Lebesgue** Medida canónica asociada a una métrica riemanniana, utilizada para formular integrales globales sin imponer orientabilidad; véase la Definición 2.15.5. 266, *véase* variedad riemanniana

**método directo del cálculo de variaciones** Principio de existencia de minimizadores basado en compacidad débil, coercividad y semicontinuidad inferior; véase el Teorema 30.1.8. 1600, *véase* semicontinuidad inferior y coercividad

**método variacional** Procedimiento que traduce una ecuación diferencial en un problema de puntos críticos para un funcional; véase la Sección 29.3. 1585, *véase* funcional de energía y método directo del cálculo de variaciones

**métrica extendida** Función distancia que puede tomar el valor $+\infty$ y cuya restricción a cada componente de distancia finita es una métrica; véase la Definición 27.2.9. 1515, *véase* estructura uniforme

**métrica fibrada** Elección suave de un producto interno en cada fibra de un haz vectorial; véase la Definición 2.3.1. 133, *véase* haz vectorial suave y conexión compatible

**métrica riemanniana** Campo tensorial métrico que determina el producto interno en cada espacio tangente; véase la Definición 2.1.1. 128, *véase* variedad riemanniana

**métrica riemanniana débil** Métrica suave cuyo mapeo musical puede no ser sobreyectivo sobre el dual topológico; véase la Definición 26.1.1. 1477, *véase* métrica riemanniana fuerte y variedad de Hilbert

**métrica riemanniana fuerte** Métrica suave cuya norma tangente induce la topología de Hilbert y cuyo morfismo musical es un isomorfismo; véase la Sección 26.1. 1477, *véase* variedad de Hilbert y estructura Banach–Finsler

**multiplicador de Lagrange** Escalar que expresa la dependencia entre la derivada de un funcional y la derivada de una restricción en un punto crítico restringido; véase el Corolario 23.4.2. 1631, *véase* conjunto de nivel regular y variedad de Nehari

**operador de traza** Extensión continua de la restricción a la frontera para clases de Sobolev con regularidad suficiente; véase el Teorema 9.4.12. 716, *véase* espacio de Sobolev

**operador formalmente adjunto** Operador diferencial caracterizado por la identidad de integración por partes respecto de las métricas y de la medida de Riemann–Lebesgue; véase la Definición 8.2.1. *véase* laplaciano de Bochner y laplaciano de Hodge–DeRham

**operador pseudodiferencial** Operador definido localmente mediante la cuantización de un símbolo y estable bajo el cálculo simbólico módulo operadores regularizantes. 1071, *véase* parametrix y frente de onda

**parametrix** Inversa bilateral de un operador módulo operadores regularizantes. 1091, *véase* operador pseudodiferencial

**partición suave de la unidad en una variedad de Banach** Familia localmente finita de funciones suaves no negativas, subordinada a una cubierta abierta y cuya suma es uno; véase el Teorema 24.8.9. 1441, *véase* función flan en un espacio de Banach y variedad de Banach

**punto crítico** Punto en el que se anula la derivada de Fréchet del funcional considerado. 1592, *véase* derivada de Fréchet y funcional de energía

**semicontinuidad inferior** Propiedad de estabilidad inferior de un funcional respecto de la topología considerada; véanse las Definiciones 30.1.1 y 30.1.6. 1597, *véase* método directo del cálculo de variaciones

**solución débil** Elemento del espacio funcional que satisface la identidad integral obtenida al probar la ecuación contra funciones admisibles; véase la Definición 29.2.3. 1592, *véase* funcional de energía y método variacional

**submersión entre variedades de Banach** Mapeo cuyo diferencial admite una inversa derecha lineal continua; véase la Definición 24.5.1. 1423, *véase* variedad de Banach y conjunto de nivel regular

**subvariedad de Banach** Subconjunto localmente enderezable sobre un subespacio cerrado y complementado del espacio modelo; véase la Definición 24.3.1. 1419, *véase* variedad de Banach y conjunto de nivel regular

**transformada de Fourier** Operador que descompone una función o distribución temperada en frecuencias; véanse las Definiciones 4.11.1 y 4.11.12. 400, *véase* distribución temperada

**valor regular split** Valor cuya fibra está formada por puntos donde el diferencial admite una inversa derecha lineal continua; véase la Definición 24.6.4. 1431, *véase* submersión entre variedades de Banach y subvariedad de Banach

**variedad de Banach** Variedad cuyas cartas toman valores en abiertos de espacios de Banach y cuyos cambios de coordenadas son diferenciables en el sentido de Fréchet; véase la Definición 24.1.1. 1406, *véase* derivada de Fréchet y subvariedad de Banach

**variedad de Hilbert** Variedad de Banach modelada sobre un espacio de Hilbert; véase la Definición 26.1.1. 1477, *véase* variedad de Banach y métrica riemanniana fuerte

**variedad de Nehari** Conjunto no nulo definido por la condición $DI(u)(u) = 0$, utilizado como restricción natural para ciertos funcionales; véase la Sección 32.1. 1632, *véase* multiplicador de Lagrange y funcional de energía

**variedad ILH** Límite inverso suave de una torre compatible de variedades de Hilbert; véase la Definición 27.5.6. 1550, *véase* escala de Hilbert

**variedad riemanniana** Variedad suave equipada con una métrica riemanniana; véase la Definición 2.1.1. 128, *véase* métrica riemanniana y medida de Riemann–Lebesgue

**variedad Sobolev de mapeos** Componente de mapeos Sobolev modelada en secciones de $f^{*}TN$ mediante cartas exponenciales; véase el Teorema 27.3.4. 1528, *véase* variedad de Banach y escala de Hilbert

**variedad uniformemente regular** Variedad provista de una clase de atlas normalizados, encogibles, de multiplicidad finita y con cambios de carta uniformemente controlados en el sentido de Amann; véase la Definición 13.2.2. 909, *véase* geometría acotada y estructura uniforme

# Créditos de imágenes

Las siguientes imágenes históricas proceden de Wikimedia Commons. La indicación de derechos reproduce la ficha consultada para cada archivo; en los casos marcados únicamente como dominio público en Estados Unidos, la reutilización en otros países puede depender de la legislación aplicable.

- **Isaac Newton.** Copia de James Thornhill del retrato de Godfrey Kneller (1689), Wikimedia Commons, dominio público. Aparece en las Figuras 1 y 1.1.
- **Gottfried Wilhelm von Leibniz.** Retrato de Christoph Bernhard Francke, ca. 1695, Wikimedia Commons, dominio público. Aparece en las Figuras 1 y 1.1.
- **Carl Friedrich Gauss.** Retrato de Christian Albrecht Jensen (1840), Wikimedia Commons, dominio público. Aparece en las Figuras 1 y 2.1.
- **Bernhard Riemann.** Fotografía de 1863, autor no identificado, Wikimedia Commons, dominio público según la ficha del archivo (*PD-old*). Aparece en las Figuras 1 y 2.1.
- **Henri Poincaré.** Imagen publicada como frontispicio de *Last Thoughts* (1913), autor no identificado, Wikimedia Commons, dominio público en Estados Unidos (*PD-US*). Aparece en las Figuras 1 y 2.1.
- **Élie Cartan.** Fotografía de 1904, autor no identificado, reproducida en Wikimedia Commons, dominio público en Estados Unidos (*PD-US*). Aparece en la Figura 1.2.
- **Oliver Heaviside.** Retrato de autor no identificado, Wikimedia Commons, reproducción de una obra en dominio público (*PD-Art*). Aparece en la Figura 4.1.

# Bibliografía


[1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, 1978.

[2] Ethan Akin. *The Metric Theory of Banach Manifolds*, volume 662 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1978.

[3] Claudianor O. Alves and Giovany M. Figueiredo. Multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems. *Advanced Nonlinear Studies*, 11(2):265–294, 2011.

[4] H. Amann and J. Escher. *Analysis III*. Birkhäuser Verlag AG, Berlin, 2009.

[5] Herbert Amann. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Volume II: Function Spaces*, volume 106 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Cham, 2019.

[6] Herbert Amann. Function spaces on uniformly regular and singular riemannian manifolds. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 32(5):95, 2025. Article 95, 43 pages.

[7] Eric Amar. Sobolev embeddings with weights in complete riemannian manifolds. *Indagationes Mathematicae*, 31(3):411–435, 2020.

[8] Antonio Ambrosetti and Paul H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14(4):349–381, 1973.

[9] Michael F. Atiyah. *K-Theory*. W. A. Benjamin, New York, 1967. Lecture notes by D. W. Anderson.

[10] Michael F. Atiyah and Raoul Bott. On the periodicity theorem for complex vector bundles. *Acta Mathematica*, 112:229–247, 1964.

[11] Michael F. Atiyah and Isadore M. Singer. The index of elliptic operators. I. *Annals of Mathematics*, 87(3):484–530, 1968.

[12] C. J. Atkin. The hopf–rinow theorem is false in infinite dimensions. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 7(3):261–266, 1975.

[13] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo, and Gérard Michaille. *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces: Applications to PDEs and Optimization*, volume 17 of *MOS-SIAM Series on Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics and Mathematical Optimization Society, Philadelphia, 2nd edition, 2014.

[14] T. Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.

[15] Thierry Aubin. Espaces de sobolev sur les variétés riemanniennes. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 100:149–173, 1976.

[16] G. Bachman and L. Narici. *Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1966.

[17] Christian Baer, Nicolas Ginoux, and Frank Pfaeffle. Wave equations on lorentzian manifolds and quantization, 2008.

[18] Stefan Banach. *Théorie des opérations linéaires*, volume 1 of *Monografje Matematyczne*. Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, Warszawa, 1932.

[19] David Bao, Shiing-Shen Chern, and Zhongmin Shen. *An Introduction to Riemann–Finsler Geometry*, volume 200 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2000.

[20] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation Spaces: An Introduction*, volume 223 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[21] David D. Bleecker and Bernhelm Booß-Bavnbek. *Index Theory with Applications to Mathematics and Physics*. International Press, Somerville, MA, 2013.

[22] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory*, volume I–II. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[23] Juliane Bokobza-Haggiag. Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété différentiable. *Annales de l'Institut Fourier*, 19(1):125–177, 1969.

[24] Robert Bonic and John Frampton. Differentiable functions on certain Banach spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 71(2):393–395, 1965.

[25] Robert Bonic and John Frampton. Smooth functions on Banach manifolds. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 15(5):877–898, 1966.

[26] David Borthwick. *Spectral Theory: Basic Concepts and Applications*, volume 284 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2020.

[27] Simon Brendle. *Ricci Flow and the Sphere Theorem*, volume 111 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[28] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[29] Rolf Brigola. *Fourier Analysis and Distributions: A First Course with Applications*, volume 79 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Nature Switzerland, Cham, 2025.

[30] Ovidiu Calin. *Stochastic Geometric Analysis*, volume 201 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[31] N. L. Carothers. *A Short Course on Banach Space Theory*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2004.

[32] Celso Martínez Carracedo and Miguel Sanz Alix. *The Theory of Fractional Powers of Operators*, volume 187 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier, 2001.

[33] Chi Hin Chan and Magdalena Czubak. The meyers-serrin theorem on riemannian manifolds: A survey, 2024.

[34] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Orlando, 1984.

[35] Bennett Chow and Dan Knopf. *The Ricci Flow: An Introduction*, volume 110 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[36] Bennett Chow, Peng Lu, and Lei Ni. *Hamilton's Ricci Flow*, volume 77 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[37] Philippe G. Ciarlet. *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, volume 130 of *SIAM Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 2013.

[38] M. Clapp. *Análisis matemático*. Papirhos, UNAM, 2015.

[39] James A. Clarkson. Uniformly convex spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 40(3):396–414, 1936.

[40] Donald L. Cohn. *Measure Theory*. Birkhäuser, New York, 2 edition, 2013.

[41] Velázquez-Mendoza Carlos Daniel and Sandoval-Romero María de los Ángeles. Geometric integration by parts and sobolev spaces on vector bundles: A unified global approach, 2026.

[42] Ma. de los A. Sandoval-Romero. *Introducción al análisis geométrico*. Las Prensas de Ciencias, UNAM, Facultad de Ciencias, 2023.

[43] Dennis M. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their ricci tensors. *Journal of Differential Geometry*, 18(1):157–162, 1983.

[44] Marcelo M. Disconzi, Yuanzhen Shao, and Gieri Simonett. Some remarks on uniformly regular riemannian manifolds. *Mathematische Nachrichten*, 289(2–3):232–242, 2016.

[45] Pavel Drábek and Jaroslav Milota. *Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser, Basel, 2007.

[46] David G. Ebin and Jerrold Marsden. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. *Annals of Mathematics*, 92(1):102–163, 1970.

[47] J. Eichhorn. Elliptic differential operators on noncompact manifolds, 1986/87. Seminar Analysis of the Karl-Weierstrass-Institute of Mathematics.

[48] J. Eichhorn. The boundedness of connection coefficients and their derivatives. *Mathematische Nachrichten*, 152:145–158, 1991.

[49] Jürgen Eichhorn. The manifold structure of maps between open manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 11(3):253–300, 1993.

[50] Jürgen Eichhorn. Spaces of riemannian metrics on open manifolds. *Results in Mathematics*, 27(3–4):256–283, 1995.

[51] Jürgen Eichhorn. Uniform structures of metric spaces and open manifolds. *Results in Mathematics*, 40(1–4):144–191, 2001.

[52] Jürgen Eichhorn. A slice theorem for open manifolds. *Geometriae Dedicata*, 91(1):85–116, 2002.

[53] Jürgen Eichhorn. *Global Analysis on Open Manifolds*. Nova Science Publishers Mathematics Research Developments. Nova Science Publishers, New York, 2007.

[54] Jürgen Eichhorn. *Relative Index Theory, Determinants and Torsion for Open Manifolds*, volume 3 of *World Scientific Series in Analysis*. World Scientific, Singapore, 2009.

[55] Jürgen Eichhorn and Gerd Heber. The configuration space of gauge theory on open manifolds of bounded geometry. In Robert Budzyński, Stanisław Janeczko, W. Kondracki, and A. F. Künzle, editors, *Symplectic Singularities and Geometry of Gauge Fields*, volume 39 of *Banach Center Publications*, pages 269–286. Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1997.

[56] Jürgen Eichhorn and Rudolf Schmid. Form preserving diffeomorphisms on open manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 14(2):147–176, 1996.

[57] Jürgen Eichhorn and Rudolf Schmid. Lie groups of Fourier integral operators on open manifolds. *Communications in Analysis and Geometry*, 9(5):983–1040, 2001.

[58] Ivar Ekeland. The hopf–rinow theorem in infinite dimension. *Journal of Differential Geometry*, 13(2):287–301, 1978.

[59] H. I. Eliasson. Geometry of manifolds of maps. *Journal of Differential Geometry*, 1(1–2):169–194, 1967.

[60] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2000.

[61] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2nd edition, 2010.

[62] Maurice Fréchet. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22:1–72, 1906.

[63] R. Fry. Smooth partitions of unity on banach spaces. *Canadian Mathematical Bulletin*, 41(2):145–150, 1998.

[64] Vera Ganglberger. The kernel theorem and microlocal analysis for distributions on manifolds. Diplomarbeit, University of Vienna, Vienna, 2010.

[65] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Typis Dieterichianis, Gottingae, 1828.

[66] Peter B. Gilkey. *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem*. Publish or Perish, 1st edition, 1984.

[67] Helge Glöckner. Fundamentals of submersions and immersions between infinite-dimensional manifolds, 2015.

[68] G. Grabinsky. *Teoría de la medida*. Las prensas de ciencias, UNAM, Facultad de Ciencias, 2016.

[69] Alexander Grigor'yan. *Heat Kernel and Analysis on Manifolds*, volume 47 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[70] Neal Grossman. Hilbert manifolds without epiconjugate points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16:1365–1371, 1965.

[71] Nadine Große, Mirela Kohr, and Victor Nistor. The $L^2$-unique continuation property on manifolds with bounded geometry and the deformation operator. *Forum Mathematicum*, 38(1):259–272, 2026.

[72] Nadine Große and Cornelia Schneider. Sobolev spaces on riemannian manifolds with bounded geometry: General coordinates and traces. *Mathematische Nachrichten*, 286(16):1586–1613, 2013.

[73] Davide Guidetti, Batu Güneysu, and Diego Pallara. $\mathsf{L}^1$-elliptic regularity and $h = w$ on the whole $\mathsf{L}^p$-scale on arbitrary manifolds. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, 42(1):497–521, 2017.

[74] Batu Güneysu. *Covariant Schrödinger Semigroups on Riemannian Manifolds*, volume 264 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser, Cham, 2017.

[75] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2):255–306, 1982.

[76] Allen Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. Version 2.2 edition, 2017.

[77] Richard Haydon. Smooth functions and partitions of unity on certain banach spaces. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 47(4):455–468, 1996.

[78] E. Hebey. *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.

[79] E. Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1999.

[80] J. Heinonen. Lectures on lipschitz analysis. Lectures at the 14th Jyväskylä Summer School, August 2004.

[81] Juha Heinonen, Pekka Koskela, Nageswari Shanmugalingam, and Jeremy T. Tyson. *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces: An Approach Based on Upper Gradients*, volume 27 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[82] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1976.

[83] R. Horn and C. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 2013.

[84] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators*. Classics in Mathematics. Springer, Berlin Heidelberg, 2007. Reprint of the 1994 edition; originally published as volume 274 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.

[85] Jr. James Eells. A setting for global analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72(5):751–807, 1966.

[86] Michal Johanis. Smooth partitions of unity on banach spaces. *Journal of Functional Analysis*, 273(2):694–704, 2017.

[87] S. Kesavan. *Functional Analysis*. Hindustan Book Agency, second edition, 2023.

[88] Andreas Kriegl and Peter W. Michor. *The Convenient Setting of Global Analysis*, volume 53 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[89] Peter Kristel and Alexander Schmeding. The stacey–roberts lemma for banach manifolds. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 21:037, 2025.

[90] Demeter Krupka and David J. Saunders, editors. *Handbook of Global Analysis*. Elsevier Science B.V. Handbooks in Global Analysis. Elsevier, Amsterdam, 2008.

[91] Serge Lang. *Fundamentals of Differential Geometry*, volume 191 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[92] H. Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn. *Spin Geometry*, volume 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[93] Dan A. Lee. *Geometric Relativity*, volume 201 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.

[94] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, NY, 2 edition, 2013.

[95] J. M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Nature Switzerland AG, 2018.

[96] Giovanni Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces*, volume 105 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[97] Giovanni Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces*, volume 181 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2017.

[98] Giovanni Leoni. *A First Course in Fractional Sobolev Spaces*, volume 229 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2023.

[99] Gary M. Lieberman. The natural generalization of the natural conditions of ladyzhenskaya and ural'tseva for elliptic equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 16(2–3):311–361, 1991.

[100] Nick Lindemulder and Emiel Lorist. A discrete framework for the interpolation of Banach spaces. *Advances in Mathematics*, 440:109506, 2024.

[101] Paolo Marcellini. Regularity and existence of solutions of elliptic equations with $(p,q)$-growth conditions. *Journal of Differential Equations*, 90:1–30, 1991.

[102] N. G. Meyers and J. Serrin. H = w. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1964.

[103] Dorina Mitrea, Irina Mitrea, Marius Mitrea, and Michael Taylor. *The Hodge-Laplacian: Boundary Value Problems on Riemannian Manifolds*, volume 64 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016.

[104] John W. Morgan and Gang Tian. *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*, volume 3 of *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[105] John W. Morgan and Gang Tian. Correction to Section 19.2 of Ricci Flow and the Poincaré Conjecture. arXiv:1512.00699 [math.DG], 2015.

[106] U. Müller, C. Schubert, and A. E. M. van de Ven. A closed formula for the riemann normal coordinate expansion. *General Relativity and Gravitation*, 31(10):1759–1768, 1999.

[107] Karl-Hermann Neeb. A cartan–hadamard theorem for banach–finsler manifolds. *Geometriae Dedicata*, 95(1):115–156, 2002.

[108] Zeev Nehari. On a class of nonlinear second-order differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95(1):101–123, 1960.

[109] Liviu Nicolaescu. *Lectures on the Geometry of Manifolds*. World Scientific Publishing Company, 2020.

[110] Hideki Omori. *Infinite-Dimensional Lie Groups*, volume 158 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Translated by the author; revised English edition of the 1979 Japanese original.

[111] Richard S. Palais. *Foundations of Global Non-Linear Analysis*. Number 16 in Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1968.

[112] Richard S. Palais. Critical point theory and the minimax principle. In Shiing-Shen Chern and Stephen Smale, editors, *Global Analysis*, volume 15 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 185–212. American Mathematical Society, Providence, RI, 1970.

[113] Richard S. Palais and Stephen Smale. A generalized morse theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70(1):165–172, 1964.

[114] Grisha Perelman. The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications, 2002.

[115] Grisha Perelman. Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds, 2003.

[116] Grisha Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds, 2003.

[117] R. S. Phillips. On linear transformations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 48(3):516–541, 1940.

[118] Henri Poincaré. Analysis situs. *Journal de l'École Polytechnique*, 1:1–121, 1895.

[119] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, volume 2 of *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, New York, 1975.

[120] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Volume I: Functional Analysis*. Academic Press, revised and enlarged edition edition, 1980.

[121] Bernhard Riemann. Über die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13:133–152, 1868. Habilitationsvortrag de 1854, publicado póstumamente por Richard Dedekind.

[122] S. Roman. *Advanced Linear Algebra*. Springer, 2005.

[123] Walter Rudin. *Functional Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York, 2 edition, 1991.

[124] Vyacheslav S. Rychkov. On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains. *Journal of the London Mathematical Society*, 60(1):237–257, 1999.

[125] Vyacheslav S. Rychkov. Linear extension operators for restrictions of function spaces to irregular open sets. *Studia Mathematica*, 140(2):141–162, 2000.

[126] Yoshihiro Sawano. *Theory of Besov Spaces*, volume 56 of *Developments in Mathematics*. Springer Nature Singapore, Singapore, 2018.

[127] Jean Van Schaftingen and Leon Winter. Trace theory for gauge-covariant sobolev spaces, 2025.

[128] Thomas Schick. Manifolds with boundary and of bounded geometry. *Mathematische Nachrichten*, 223:103–120, 2001.

[129] Alexander Schmeding. *An Introduction to Infinite-Dimensional Differential Geometry*, volume 202 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2022.

[130] Cornelia Schneider. *Beyond Sobolev and Besov: Regularity of Solutions of PDEs and Their Traces in Function Spaces*, volume 2291 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2021.

[131] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, Paris, 1950–1951. Dos volúmenes.

[132] R. T. Seeley. Complex powers of an elliptic operator. In *Singular Integrals*, volume 10 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 288–307. American Mathematical Society, Providence, RI, 1967.

[133] Ziming Shi and Liding Yao. New estimates of Rychkov's universal extension operator for Lipschitz domains and some applications. *Mathematische Nachrichten*, 297(4):1407–1443, 2024.

[134] M. A. Shubin. *Spectral Theory of Elliptic Operators on Noncompact Manifolds*. Number 207 in Astérisque. Astérisque, Paris, 1992.

[135] Mikhail A. Shubin. *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*. Springer, Berlin Heidelberg, 2nd edition, 2001.

[136] Sergei L. Sobolev. Sur un théorème d'analyse fonctionnelle. *Matematicheskii Sbornik*, 4 (46)(3):471–497, 1938.

[137] Robert S. Strichartz. Analysis of the laplacian on the complete riemannian manifold. *Journal of Functional Analysis*, 52(1):48–79, 1983.

[138] Michael Struwe. *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer, Berlin, 4 edition, 2008.

[139] Andrzej Szulkin and Tobias Weth. The method of nehari manifold. In David Y. Gao and Dumitru Motreanu, editors, *Handbook of Nonconvex Analysis and Applications*, pages 597–632. International Press, Boston, 2010.

[140] Michael E. Taylor. *Pseudodifferential Operators*, volume 416 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.

[141] Michael E. Taylor. *Pseudodifferential Operators and Nonlinear PDE*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1991.

[142] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations I: Basic Theory*, volume 115 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2 edition, 2011.

[143] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations II: Qualitative Studies of Linear Equations*, volume 116 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2 edition, 2011.

[144] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations III: Nonlinear Equations*, volume 117 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2 edition, 2011.

[145] Hans Triebel. *Theory of Function Spaces*, volume 78 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 1983.

[146] Hans Triebel. *Theory of Function Spaces II*, volume 84 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 1992.

[147] Hans Triebel. *Theory of Function Spaces III*, volume 100 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 2006.

[148] Hans Triebel. *Theory of Function Spaces IV*, volume 101 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Cham, Cham, 2020.

[149] François Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, volume 25 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1967.

[150] Carlos Daniel Velázquez-Mendoza, María de los Ángeles Sandoval-Romero, and Romulo D. Carlos. An intrinsic sobolev trace theory for riemannian vector bundles with applications to quasilinear elliptic equations. Manuscript in preparation, 2026.

[151] Juan Luis Vázquez. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Applied Mathematics and Optimization*, 12:191–202, 1984.

[152] Michel Willem. *Minimax Theorems*, volume 24 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, Boston, 1996.

[153] Nobuo Yoshida. Sobolev spaces on a Riemannian manifold and their equivalence. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 32(3):621–654, 1992.

[154] Qi S. Zhang. *Sobolev Inequalities, Heat Kernels under Ricci Flow, and the Poincaré Conjecture*. CRC Press, Boca Raton, FL, first edition, 2011.

# Índice analítico


abiertos regularmente cubiertos, 1663
acción suave, 103
acotación débil en espacios de Banach, 1792
adjunto formal, 584, 598, *véase* operador diferencial, adjunto formal
adjunto formal interior, 706
álgebra de Clifford, 276
álgebra de Lie
    de un centralizador, 102
    de un grupo de Lie, 97
Amann, regularidad uniforme de, *véase* variedad, uniformemente regular
amplitud
    pseudodiferencial, 1059
ángulo de Agmon, 1137
anulación sobre gérmenes de orden, 563
aplicación al problema sublineal, 1602
aproximación de la identidad, 1766
atlas encogible, 909
atlas, estructura suave y compatibilidad de cartas, 18
atlas geodésico, 880
atlas normalizado, 909
atlas uniformemente regular, 909

Banach–Alaoglu, 1795
Banach–Steinhaus, 1685
base ortonormal, 1699
Bochner, laplaciano de, *véase* laplaciano de Bochner
bola coordenada normal
    control euclidiano, 219
bola coordenada regular, 21
bola dual
    metrizabilidad débil-$*$ en el caso separable, 1796
brecha espectral, 1545

cálculo pseudodiferencial uniforme, 1113
cálculo simbólico
    adjunto, 1068
    composición, 1066
campo covectorial, 77
    en una variedad de Banach, 1460
campo de Jacobi, 243
    y exponencial, 244
campo fundamental
    positivo, 103
campo geodésico, 209
campo tensorial
    mixto, 113
campo tensorial simétrico, 119
campo variacional, 243
campo vectorial, 75
    en una variedad de Banach, 1463
    invariante por la izquierda, 97
campos vectoriales relacionados, 84
caracterización de los puntos críticos de restricciones, 1633
caracterización de mapeos cocientes, 1663
caracterización local en una media bola, 340
caracterización mediante conjuntos de subnivel, 1791
carta adaptada a una subvariedad, 45
carta de rebanada, 45
casi en todas partes, 1725
caso sin secciones paralelas, 753
centralizador, 102
    de la holonomía, 186
cerradura convexa
    coincidencia de las cerraduras fuerte y débil, 1792
clase de Schwartz, 395
codiferencial, 587

coercividad, 1600
collar de una variedad, 49
collar uniforme, 996
compacidad
    obstrucciones geométricas, 1578
comparación de campos de Jacobi, 249
compatibilidad de la conexión con el producto cuña, 154
compatibilidad de la restricción con el soporte, 794
compatibilidad de la restricción con el soporte singular, 797
compatibilidad de la restricción con operadores diferenciales, 794
compatibilidad entre la traza y la norma fibrada, 754
complemento ortogonal, 1697
completación, 1680
    extensión de operadores, 1692
completación de espacio métrico, 1681
completación de un espacio normado, 1683
completitud
    Finsler hacia delante, 1505
completitud secuencial de una intersección proyectiva, 350
componente de distancia finita, 1516
condición de Coulomb, 1560
condición de Palais–Smale, 1610
    en una variedad Finsler, 1619
conexión, 139
conexión compatible con una métrica fibrada, 170
conexión compatible y libre de torsión, 142
conexión inducida, 589
    compatibilidad con contracciones, 169
    en haces tensoriales, 147
    en productos tensoriales, duales y homomorfismos, 160
conexión inducida sobre el haz restringido, 715
conexión pullback, 207
conexión
    compatible con una métrica fibrada, 170
    dual en un haz de Banach, 1470
    pullback en un haz de Banach, 1470
conexión de Chern, 1500
conexión de Levi–Civita
    compatibilidad con el producto interno de tensores, 152
    compatibilidad métrica, 150
conexión lineal
    en un haz de Banach, 1468
conexión no lineal
    Finsler, 1498
conexión principal, 177
conjetura de Poincaré, 1363
conjunto absolutamente convexo, 1769
conjunto absorbente, 1768
conjunto balanceado, 1768
conjunto crítico, 1609
conjunto de Lebesgue medible, 1724
conjunto de medida nula, 1723
conjunto de nivel
    regular, 1434
conjunto medible
    según Carathéodory, 1724
conjuntos topologicamente acotados en D(Omega), 359
conmutador del laplaciano con derivadas covariantes, 657
conmutador iterado
    evaluación puntual, 556
consistentemente orientadas, 253
continuidad de la multiplicación por funciones suaves, 713
continuidad mediante seminormas, 1779
continuidad uniforme, 1513
control uniforme del volumen de bolas geodésicas, 902
convergencia en D(Omega), 361
convexidad uniforme, 619
convexidad uniforme y reflexividad, 623
coordenadas de Fermi, 241
corchete cuña, 178
corte espectral, 1137
covector alternante
    asociado a un multiíndice, 119
criterio de metrizabilidad para EVT, 1770
criterio de Schur, 1752
criterio de suavidad para campos tensoriales, 113
criterio del marco local suave para subhaces, 79
criterio integral para la derivada covariante, 201

criterio local de rebanada, 45
cuantización
de Kohn–Nirenberg, 1058
riemanniana pseudodiferencial, 1085
cubierta uniformemente localmente finita, 897
curva integral, 80
en una variedad de Banach, 1464
curva minimizante, 224
curvatura
de una conexión en un haz de Banach, 1474
curvatura de una conexión, 592
antiautoadjunción, 594
derivada covariante, 592
curvatura escalar, 232
curvatura seccional, 233

débilmente diferenciable, 292
densidad
de peso $w$ en un espacio vectorial, 260
riemanniana, 262
derivada, *véase también* diferencial
composición con un operador lineal continuo, 1380
covariante, 139
covariante a lo largo de una curva
expresión local, 192
covariante débil, 611
de Fréchet
en espacios euclidianos, 6
derivada covariante
a lo largo de una curva en Banach, 1472
expresión local de la $s$-ésima derivada, 631
segunda y tercera, 163
total, 153
derivada covariante a lo largo de una curva, 190
derivada covariante de orden superior, 608
derivada covariante débil de orden superior, 611
derivada covariante débil en variedades con frontera, 707
derivada covariante horizontal, 207
derivada covariante mediante transporte paralelo, 199
derivada covariante vertical, 207
derivada de Fréchet, 1370
derivada de Fréchet
criterio mediante la derivada de Gâteaux, 1380
de orden superior, 1389
simetría, 1390
derivada de Gâteaux, 1371
derivada de Gâteaux
continuidad, 1380
de orden superior, 1389
derivada direccional, 8, 1371
derivada direccional distribucional de orden superior, 384
derivada distribucional, 383
derivada exterior con valores en un haz, 589
derivada parcial
criterio de diferenciabilidad, 1383
de Fréchet, 1381
de Gâteaux, 1381
en una variedad, 39
relación con la derivada total, 1382
derivadas direccionales de orden superior, 9
derivadas direccionales iteradas como funciones, 9
desarrollo asintótico
de símbolos, 1054
descomposición de Hahn–Jordan, 1726
descomposición de Schur, 1819
descomposición ortogonal, 1698
descomposición de Littlewood–Paley, 407
descripción mediante seminormas, 1789, 1793
desigualdad de Bernstein, 407
desigualdad de Bessel, 1699
desigualdad de Cauchy–Schwarz, 1697
desigualdad de Gagliardo–Nirenberg para haces vectoriales, 702
desigualdad de Gagliardo–Nirenberg–Sobolev, 301
desigualdad de Grönwall, 91
desigualdad de Hausdorff–Young, 429
desigualdad de Hölder, 1746
desigualdad de interpolación, 1749
desigualdad de Jensen, 1747
desigualdad de Kato–Simon, 848
desigualdad de Peetre, 448
desigualdad de Poincaré, 307, 756
módulo el núcleo de la conexión, 752
desigualdad de Poincaré con promedio, 753
desigualdad de Young

convoluciones, 399
desigualdad débil de Kato, 746, 748
desigualdad del valor medio
en espacios normados, 1372
desigualdades de tipo Clarkson en espacios de Hilbert, 619
diagonalizable, 1818
difeomorfismo
entre abiertos de espacios de Banach, 1397
difeomorfismo local, 43
diferenciabilidad de Fréchet en espacios euclidianos, 6
diferenciabilidad mediante extensión local, 7
diferencial, *véase* derivada
de una función en una variedad de Banach, 1460
diferencial de una restricción, 1435
distancia riemanniana
estructura métrica de la variedad, 221
distancia riemanniana de p a q, 221
distribución conormal, 1074
distribución regular asociada, 786
distribución regular con valores, 786
distribución regular en un haz, 773
distribuciones orden cero y medidas, 379
distribuciones regulares suaves y soporte, 795
distribución
en un abierto euclidiano, 374
en un haz vectorial, 768
orden, 377
representación en coordenadas, 790
representación local como derivada, 391
temperada, 397
divergencia, 273
divergencia de un campo tensorial, 274
doble de una variedad con frontera, 49
dual, 626
algebraico, 1450
topológico, 1450
dual continuo, 1683
caracterización de la norma, 1690
dualidad, 1788
interpolación real, 423
Dunford–Pettis, 741
Dunford–Pettis para haces vectoriales, 741
Eberlein–Šmulian, 1796
ecuación de Jacobi, 243
ecuación local del transporte paralelo, 198
ecuaciones de Euler, 1566
Eichhorn, uniformidad de, *véase* estructura uniforme, de Eichhorn
el espacio de secciones paralelas y su proyección, 751
elevación horizontal, 184
elipticidad
con parámetro, 1138
uniforme, 1117
encaje
entre variedades de Banach, 1426
encaje continuo de espacios vectoriales topológicos, 1784
encaje isométrico, 618
encaje suave, 44
encajes de Sobolev
localizados en una media bola, 336
endomorfismo de Ricci, 231
energía de Dirichlet, 1556
*entourage*, 1513
equicontinuidad
en el dual topológico, 1800
equivalencias de continuidad en D'(M,E,W), 769
equivalencias de continuidad en D'(Omega), 372
escala de Hilbert, 1550
espacio $BC^j$, 479
espacio $BUC^j$, 479
espacio cociente, 1662
de un espacio de Banach, 1687
vectorial, 1686
espacio cotangente, 76
espacio de Asplund, 1443
espacio de Baire, 1682
espacio de Banach, 1683
espacio de Besov, 467
espacio de Bessel, 448
en un abierto, 450
espacio de distribuciones, 374
espacio de distribuciones temperadas, 397
espacio de formas diferenciales, 586
espacio de Fréchet

clase de Schwartz, 395
espacio de Fréchet, 1784
caracterización mediante seminormas, 1784
espacio de funciones de prueba
topología de $\mathcal{D}(\Omega)$, 354
topología de subespacio de $\mathcal{D}_K(\Omega)$, 358
espacio de Hilbert, 1697
espacio de Hölder, 320
espacio de Lebesgue
funciones medibles integrables, 1741
secciones de un haz vectorial como espacio de Banach, 615
espacio de Lebesgue como espacio cociente, 1741
espacio de Lorentz, 443
espacio de mapeos Sobolev, 1525
espacio de medida separable, 623
espacio de operadores lineales entre secciones, 543
espacio de Slobodeckij, 457
para secciones, 719
espacio de Sobolev, 295, 297
caracterización del subespacio con traza nula, 729
completitud de $W^{1,p}$, 296
completitud de $W^{m,p}$, 310
con traza nula, 714
de orden superior, 309
de secciones mediante completación, 677
definición mediante $C^{m,p}(M, \mathbf{E})$ en variedades con frontera, 710
global y local en variedades con frontera, 707
independencia de la trivialización admisible, 926
norma equivalente mediante el laplaciano, 649
norma equivalente mediante el laplaciano de Bochner, 659
espacio de Sobolev asociado a una trivialización admisible, 924
espacio de Sobolev euclidiano mediante completación, 677
espacio de Sobolev fraccionario
en un haz vectorial, 865
espacio de Sobolev fraccionario, 923
espacio de Triebel–Lizorkin, 467
espacio localmente convexo, 1771
espacio métrico completo, 1680
espacio nuclear, 1803
espacio tangente
de una subvariedad encajada, 46
espacio tangente de una variedad de Banach, 1415
espacio tangente definido por curvas, 31
espacio tangente mediante derivaciones, 31
espacio topológico, 1661
espacio uniforme
completo, 1513
espacio vectorial topológico, 1768
espacios de Lebesgue, 1741
espacios de Sobolev globales y locales, 613
espacios de Triebel–Lizorkin y Besov
independencia de la trivialización admisible, 930
espectro
de un operador acotado, 1685
espectro esencial, 1545
estabilizador gauge
y holonomía, 188
estimación para operadores diferenciales, 778
estructura de Banach–Finsler, 1490
estructura de Finsler
reversible, 1490
estructura spinorial, 276
estructura suave en una variedad con frontera, 22
estructura uniforme, 1513
base, 1513
de Eichhorn, 1551
estructura uniformemente regular, 909
existencia de funciones flan, 27
existencia de marcos locales ortonormales, 131
existencia de métricas riemannianas, 130
existencia de particiones de la unidad, 26
existencia de vecindades tubulares, 240
existencia, unicidad y maximalidad de las geodésicas, 211
existencia, unicidad y suavidad para ODEs lineales, 194
existencia y unicidad de la derivada exterior, 123
existencia y unicidad del adjunto formal interior, 706
existencia y unicidad del transporte paralelo, 195
exponente crítico de Sobolev, 299
de orden superior, 313
expresión local de un PDO usando marcos locales, 575

expresión local del adjunto formal, 642
extensión de funciones suaves, 27
extensión de McShane, 1679
extensión de operadores lineales, 1782
    desde un subespacio denso, 1692
extensión por cero
    con soporte interior, 310
extensión por cero desde una media bola, 334

filtro de Cauchy, 1513
Finsler, estructura de Banach–, *véase* estructura de Banach–Finsler
fluido incompresible, 1566
flujo, 87
flujo de Ricci, 1285
flujo global, 85
flujo local
    en una variedad de Banach, 1465
forma bilineal, 1817
    no degenerada, 1818
    representación mediante un operador, 1703
    simétrica, 1818
forma cerrada
    dominio de la raíz, 1711
forma de volumen
    riemanniana, 254
forma diferencial, 122
    en una variedad de Banach, 1462
forma índice, 246
    integración por partes, 246
formas diferenciales con valores en un haz, 589
fórmula de Faà di Bruno para multiíndices, 16
fórmula de Green para el laplaciano de Bochner, 641
fórmula de integración por partes
    para derivadas covariantes de orden superior, 632
fórmula de integración por partes para el $p$-laplaciano, 648
fórmula de Jacobi, 256
fórmula de Leibniz generalizada, 12
fórmula de McKean–Singer, 1160
frente de onda, 1097
frontera
    como subvariedad encajada, 48
    uniformemente Lipschitz continua, 330

Fréchet, derivada de, *véase* derivada, de Fréchet
función con derivada covariante débil nula, 749
función con derivadas débiles nulas, 294
función de Carathéodory, 1586
función de clase $C^1$, 1370
función de corte
    en una variedad completa, 842
función de rápido decrecimiento, 395
función flan
    en un espacio de Banach, 1436
función fuertemente medible, 1737
función Lipschitz
    extensión, 1679
función localmente integrable, 1736
función medible, 1732
función simple, 1732
funcional de Einstein–Hilbert, 1286
funcional de Minkowski, 1495
funcional J, 415
funcional K, 410
función
    de clase $C^k$, 10
función cuadrada de Littlewood–Paley, 465
función de clase $C^1$
    caracterización mediante derivadas parciales, 1385
función de clase $C^k$
    caracterización mediante Gâteaux, 1390
    entre espacios de Banach, 1389
función de clase $C^1$
    caracterización mediante Gâteaux, 1381
fundamental de flujos, 88
fórmula de Taylor
    en espacios de Banach, 1391
fórmula integral del valor medio
    en espacios de Banach, 1375

generador infinitesimal, 85, 859
geodésica, 208
geometría acotada, 879
    caracterizaciones equivalentes, 881
    caso de variedades compactas, 896
geometría acotada, 1551
    caso compacto con frontera, 1001
    con frontera, 997

germen de una función, 1412
germen de una función suave, 36
gradiente, 272
    en un espacio de Hilbert, 1372
gráfica de un mapeo suave, 46
grupo calibre, 1560
grupo de difeomorfismos
    que preservan volumen, 1566
grupo de holonomía
    de un haz vectorial, 185
    principal, 185
grupo de Lie, 96
grupo de Lie *strong ILH*, 1551
grupo ILH, 1550
grupo lineal general, 96
grupo ortogonal, 96
grupo Spin, 276
grupo unitario, 96
Gâteaux, derivada de, *véase* derivada, de Gâteaux

hahn–Banach, primera forma geométrica, 1783
hahn–Banach, segunda forma geométrica, 1783
haz adjunto, 176
haz asociado, 175
haz cotangente, 77
    de una variedad de Banach, 1460
haz de densidades
    de peso $w$, 260
haz de $k$-tensores alternantes, 121
haz dual, 71
haz dual topológico, 1457
haz principal, 174
haz tangente, 39
haz tensorial
    mixto, 108
haz vectorial
    de Banach, 1451
    de geometría acotada, 940
    distribución, 768
    espacio de Sobolev de secciones, 677
    métrica fibrada, 133
    suave, 51
haz vectorial real de rango, 51
haz vectorial suave de rango, 51

Hilbert, variedad de, *véase* variedad, de Hilbert
Hodge–DeRham, laplaciano de, *véase* laplaciano de Hodge–DeRham
homomorfismo de haces, 63
homomorfismos suaves de haces paralelos, 166
Hopf–Rinow, 224

identidad de Parseval, 404, 1699
identidad de Ricci
    para tensores con valores en un haz, 592
identidad de Weitzenböck, 600
ILH, 1551
ILH, variedad, *véase* variedad ILH
índice analítico, 1171
índice de Fredholm, 1696
    estabilidad, 1134, 1167
    operador elíptico, 1132
índice topológico, 1223
inmersión, 40
    entre variedades de Banach, 1423
integración por partes, 292
integración por partes
    para funciones con valores en un espacio de Banach, 1731
integral de Bochner, 1737
integral de densidades en dominios euclidianos, 261
integral de densidades en variedades, 261
integral de formas en dominios euclidianos, 259
integral de formas en variedades orientadas, 259
integral de Lebesgue
    de una función medible no negativa, 1732
integral de Riemann
    con valores en un espacio de Banach, 1729
integral de una función simple, 1732
integral local de formas en variedades orientadas, 259
integral respecto de la forma de volumen, 260
integral respecto de la medida de Riemann–Lebesgue, 263
interpolación compleja, 427
interpolación de operadores
    método complejo, 427
    método K, 413
interpolación real
    equivalencia de los métodos K y J, 416

espacios de Slobodeckij, 460
método J, 415
método K, 411
invariancia de la frontera, 23
invariancia de los flujos bajo difeomorfismos, 90
isometría, 1680
isomorfismo de haces, 64
isomorfismos musicales, 131

jet
de orden finito, 558

Kakutani, 1796

la multiplicación interior define un campo tensorial, 118
Laplace–Beltrami, operador de, *véase* operador de Laplace–Beltrami
laplaciano de Bochner, 586
en formas con valores en un haz, 600
laplaciano de conexión, 838
autoadjunción esencial, 843
laplaciano de Hodge
con valores en un haz, 600
laplaciano de Hodge–DeRham, 588
laplaciano fraccionario, 1157
las variedades son paracompactas, 20
Lebesgue integrable, 1733
Lebesgue medible, 264
lema
de la carta suave, 24
lema de Borel simbólico, 1055
lema de caracterización de homomorfismos de haces, 65
lema de caracterización tensorial, 114
lema de dualidad, 1632
lema de escape, 90
lema de Fatou, 1733
lema de Gauss, 222
lema de Hadamard, 33
lema de las tres líneas, 426
lema de reescalamiento
para curvas integrales, 83
para geodésicas, 213
lema de Riemann–Lebesgue, 403
lema de traslación
para curvas integrales, 83
lema de Zorn, 1661
lema del haz vectorial suave, 54
lema del índice, 247
levantamiento horizontal, 205
en el haz cotangente, 206
levantamiento vertical, 204
límite inductivo estricto, 364
límite proyectivo realizado como intersección, 349
límite uniforme de secciones continuas, 759
localidad de la traza en el semiespacio, 340
localidad de los operadores diferenciales sobre distribuciones, 794
localidad de operadores diferenciales y soporte singular, 797
localmente compacto, 1725
lp(E) es separable, 624

mapeo
de clase $C^{1,1}$, 1408
mapeo de clase $C^k$ entre variedades de Banach, 1408
mapeo armónico, 1556
mapeo bilineal
continuidad separada, 1802
mapeo cociente, 1662
mapeo cubriente, 1663
mapeo cubriente universal, 1663
mapeo cubriente universal del círculo, 1663
regularidad, 1663
mapeo de Carathéodory
fibra a fibra, 1587
mapeo de conexión, 204
mapeo exponencial, 214
de un grupo de Lie, 99
diferencial, 244
equivariancia, 101
naturalidad, 101
mapeo exponencial normal, 239
mapeo suave, 25
mapeo tangente o diferencial, 37
marco local
de un haz vectorial, 60

marco local suave, 60
marco síncrono, 198
matriz Hermitiana, 1818
    criterio de positividad definida, 1820
mazur, 1783
medida, 1723
    finita, 1723
    $\sigma$-finita, 1723
medida completa, 1723
medida con signo, 1726
medida con signo finitamente aditiva, 1726
medida de Haar
    grupo compacto, 105
medida de Lebesgue, 1724
    aproximación por conjuntos $F_\sigma$ y $G_\delta$, 1725
    regularidad, 1725
medida de Radon, 1725
medida de Radon con signo, 1726
medida de Radon con signo local, 1726
medida de Riemann–Lebesgue, 266
    propiedad de Radon, 268
medida de Riemann–Lebesgue
    completación boreliana y sigma-finitud, 270
medida exterior, 1724
    medida completa inducida, 1724
medida exterior de Lebesgue $n$-dimensional, 1724
medida local de Riemann–Lebesgue, 265
medida localmente finita, 1724
medida regular, 1724
medidas mutuamente singulares, 1726
método directo del cálculo de variaciones, 1600
métrica, 1679
métrica fibrada, 133
métrica riemanniana, 128
metrización por una familia numerable de seminormas, 1777
Meyers–Serrin, 677
    en abiertos euclidianos con frontera uniformemente Lipschitz, 709
meyers–Serrin para haces vectoriales, 678
meyers–Serrin para haces vectoriales en variedades con frontera, 711
milman–Pettis, 619
minimax, 1624
molificador euclidiano, 1766
multiíndice, 10
multilineal, 106
multiplicación interior, 117
multiplicadores de Lagrange, 1401
multiplicidad de un punto conjugado, 245
multiplicidad de una cubierta, 909
método, *véase también* principio variacional
    de multiplicadores de Lagrange, 1402
    de Nehari, 1631
    directo, 1600
métrica de Finsler
    clásica, 1495
métrica extendida, 1515
métrica invariante a derecha, 1566
métrica riemanniana
    débil, 1477
    fuerte, 1477

Nehari, variedad de, *véase* variedad, de Nehari
nivel regular, 46
norma, 1682
    caracterización dual, 1690
    cociente, 1687
    en espacios de Lebesgue, 1741
    Finsler, 1490
norma de Frobenius
    cota de los valores propios, 1819
norma de secciones
    independencia de métricas y conexiones auxiliares, 758
norma del espacio de Sobolev de primer orden, 295
norma dual
    Finsler, 1491
normas y seminormas locales, 610
notación para mapeos de clase $C^k$, 26
nucleo del calor
    covariante, 850

operador acotado
    entre espacios vectoriales topológicos, 1781
operador adjunto
    densamente definido, 1701

en espacios de Banach, 1691
operador autoadjunto, 1700, 1701
representación de formas bilineales, 1703
operador cerrable, 1688
operador cerrado, 1688
operador compacto, 1691
operador de alternación, 589
operador de clase traza
pseudodiferencial, 1130
operador de Dirac, 601
como operador pseudodiferencial, 1073
símbolo principal, 821
operador de extensión
del semiespacio, 331
en abiertos con frontera uniformemente Lipschitz, 330
operador de Fredholm, 1696
caracterización de Atkinson, 1165
operador de Hilbert–Schmidt
pseudodiferencial, 1130
operador de Hodge, 598
operador de Jacobi, 1556
operador de Laplace–Beltrami, 275
operador de Nemytski, 1588
operador de superposición
continuidad, 1588
entre haces, 1588
operador de tipo Dirac, 601
operador de traza
caracterización del núcleo, 729
de orden entero para haces vectoriales, 716
en espacios de Slobodeckij intrínsecos, 725
operador del calor
regularización, 1159
operador densamente definido, 1688
operador diferencial, *véase también* símbolo principal
laplaciano de Bochner, 586
laplaciano de Hodge–DeRham, 588
operador diferencial parcial, 543
caracterización local
caso trivial, 566
en haces vectoriales, 570
operador elíptico, 820
propiedad de Fredholm, 1132
índice, 1171
operador lineal, 1683
acotado, 1683
inversión, 1394
operador multilineal continuo, 1386
operador nuclear, 1802
operador positivo, 1700
operador pseudodiferencial
acción en espacios de Sobolev, 1106
cambio de coordenadas, 1070
sobre una variedad, 1071
uniforme, 1113
operador pseudolocal, 1065
operador regularizante, 1064
compacidad, 1129
sobre una variedad, 1071
uniforme no compacto, 1127
operador simétrico, 1701
operador traza, 132
operador unitario, 1700
orden de la derivada parcial, 9
orden de una distribución en un haz, 771
orientación, 253
orientación puntual, 253

p-laplaciano escalar y en haces vectoriales, 647
Palais–Smale, condición de, *véase* condición de Palais–Smale
par compatible de espacios de Banach, 409
par de geometría acotada, 980
paracompacidad
de los espacios métricos, 1439
parametrix, 1091
partición de la unidad
en un espacio de Banach, 1437
partición de la unidad subordinada, 26
paso de la montaña, 1624
polar, 1794
potencia compleja
de operador elíptico, 1149
potencial de Bessel, 448, 860
de un semigrupo de contracción, 1718
descripción pseudodiferencial, 1157

principio de contracción, 1393
problema de Neumann, 1569
producto cuña, 120
producto externo de haces vectoriales, 800
producto interno, 1696
producto interno Ad-invariante, 106
producto simétrico, 119
producto tensorial, 106
producto tensorial inductivo, 1801
producto tensorial inyectivo, 1800
producto tensorial proyectivo, 1797
promedio sobre un grupo compacto, 106
propiedad universal del producto tensorial, 107
propiedades de las coordenadas normales, 218
propiedades de las derivadas parciales con multiíndices, 13
propiedades del mapeo exponencial, 215
propiedades LF, 367
proyección de Hodge–Leray, 1569
pseudogradiente, 1611
pullback
  de un tensor covariante, 115
  de una forma diferencial en Banach, 1461
pullback de haces vectoriales, 189
punto conjugado, 245
punto crítico, 1609
punto frontera de una variedad, 23
punto inicial
  de una curva integral, 80
punto interior de una variedad con frontera, 23
pushforward, 116
pérdida de derivadas, 1578

radio de inyectividad, 876
  continuidad, 252
raíz positiva de una matriz Hermitiana positiva semidefinida, 1820
rango de un mapeo suave, 40
rebanada, 1523
reflexivo, 1796
regla de la cadena
  para funciones de Sobolev, 680
  para la derivada de Fréchet, 1379
  para la derivada de Gâteaux, 1379
regla de Leibniz
  segunda derivada, 1391
regla de Leibniz para el gradiente, 272
regla de Leibniz para el laplaciano, 276
regla de Leibniz para el operador, 655
regla de Leibniz para la divergencia, 274
regla de Leibniz para la multiplicación interior, 165
regla de Leibniz para tensores, 166
regla de Leibniz para varios factores, 15
relación entre continuidad y acotación en espacios vectoriales topológicos, 1782
Rellich–Kondrashov en haces vectoriales, 685
representación adjunta, 101
resolvente
  caracterización variacional, 1708
restricción, 377
restricción de distribuciones en haces, 787
restricción de distribuciones regulares, 795
Riemann–Lebesgue, medida de, *véase* medida de Riemann–Lebesgue

sección con valor prescrito en una fibra, 64
sección de Hölder, 688
  hasta la frontera, 736
sección local, 59
sección (local o global) suave, 59
secciones
  espacios de Lebesgue, 610
  localmente integrables, 610
secciones a lo largo de una curva, 190
secciones de clase Ck y de soporte compacto, 59
secciones de prueba
  de un haz vectorial, 767
  topología, 765
secciones paralelas a lo largo de una curva, 193
secciones suaves
  topología sobre soporte compacto, 762
sección
  norma $C^m$ sobre un compacto, 758
secuencialmente completo, 1771
secuencialmente débilmente compacto, 1796
segmento de curva, 220
segunda forma fundamental
  derivadas covariantes, 237

segunda variación
de la energía, 247
semiconcavidad local, 1343
semicontinuidad inferior, 1597
débil, 1599
existencia de mínimo en compactos, 1599
semigrupo fuertemente continuo, 1712
seminorma, 1772
seminorma de Gagliardo, 457
para secciones, 719
separabilidad, 623, 626
separación de un subespacio y un abierto convexo, 1784
serie de Neumann, 1684
sigma-álgebra, 1723
$\sigma$-álgebra de Borel, 1723
sigma-álgebra generada, 1723
$\sigma$-compacto, 1725
símbolo
clase de símbolos, 1053
símbolo clásico, 1054
símbolo con parámetro, 1138
símbolo elíptico, 1054
símbolo geométrico, 1083
símbolo principal, 816
pseudodiferencial, 1072
símbolo regularizante, 1053
simetrías del tensor de curvatura, 230
simétrico, 119
sistema cuadrático de localización, 899
sistema de localización de Amann, 914
sistema ortonormal, 1699
Sobolev, espacio de, *véase* espacio de Sobolev
soporte de una distribución, 788
soporte propio
operador pseudodiferencial, 1063
soporte singular, 791
spray, 1484
subespacio complementado, 1416
subgrupo de Lie
cerrado, 102
subgrupo de un parámetro, 100
subhaz horizontal, 204
subhaz vectorial, 79
subhaz vertical, 204
submersión, 40
entre variedades de Banach, 1423
subnivel, 1609
subvariedad con frontera, 46
subvariedad encajada, 44, 1419
subvariedad inmersa, 44
sucesión, 1680
suma de Whitney, 58

tensor
mixto en un espacio vectorial, 108
tensor covariante
alternante, 119
tensor de curvatura de Riemann, 227, 229
tensor de curvatura para espacios de curvatura constante, 233
tensor de Ricci, 231
tensor fundamental
Finsler, 1495
tensorización de espacios de prueba, 810
teorema de Atiyah–Singer, 1242
teorema de Atkinson, 1165
teorema de Calderón–Vaillancourt, 1105
teorema de cambio de variable, 1734
teorema de Clairaut–Schwarz, 10
teorema de convergencia
dominada de Bochner, 1738
dominada de Lebesgue, 1734
monótona, 1732
teorema de encaje de Sobolev, 307
en el semiespacio, 332
en geometría acotada, 1035
en variedades con frontera, 734
orden superior, 313
para haces sobre variedades con frontera, 732
para haces vectoriales, 683
teorema de Fubini, 1735
para integrales de Bochner, 1739
teorema de Hahn–Banach
extensión que preserva la norma, 1690
forma analítica, 1689
teorema de inversión de Fourier, 402
teorema de la categoría de Baire, 1682

teorema de la divergencia, 263
teorema de la función inversa, 43
teorema de la función implícita
en espacios de Banach, 1400
teorema de la función inversa
en espacios de Banach, 1395
global, 1399
teorema de la gráfica cerrada, 1688
teorema de la preimagen regular, 46
teorema de Lax–Milgram, 1700
teorema de Lumer–Phillips, 1714
teorema de Mikhlin, 463
teorema de Morrey
primer orden, 324
teorema de Plancherel, 404
teorema de proyección, 1697
teorema de Radon–Nikodym, 1740
teorema de Rayleigh, 1819
teorema de reiteración
interpolación real, 419
teorema de Rellich–Kondrashov
en el semiespacio, 332
en variedades con frontera, 735
orden superior, 316, 317
para haces sobre variedades con frontera, 733
primer orden, 317
teorema de Rellich–Kondrashov
hacia espacios de Hölder, 328
hacia secciones de Hölder, 698
hacia secciones de Hölder hasta la frontera, 739
teorema de representación de formas cerradas, 1707
teorema de representación de Riesz, 1699
teorema de representación de Riesz, 1727
teorema de Riesz–Schauder, 1693
teorema de Riesz–Thorin, 428
teorema de Schauder
adjunto de un operador compacto, 1692
teorema de Sobolev–Morrey
orden superior, 325
para haces sobre variedades con frontera, 738
para haces vectoriales, 696
teorema de Stokes, 263
teorema de Taylor
con multiíndices, 32
teorema de Tonelli, 1735
teorema de traza
en geometría acotada, 993
variedad con frontera, 1015
teorema de traza en el semiespacio, 337
teorema del inverso acotado, 1686
teorema del mapeo abierto, 1686
teorema del núcleo de Schwartz para haces vectoriales, 812
teorema del rango, 29, 44
teorema del subgrupo cerrado, 102
teorema espectral
operadores autoadjuntos no acotados, 1710
operadores compactos autoadjuntos, 1704
teorema Fundamental de la Geometría riemanniana, 143
teorema fundamental del cálculo covariante, 200
teorema fundamental del cálculo
para funciones con valores en un espacio de Banach, 1731
teorema fundamental para sistemas autónomos, 82
topología cociente, 1662
topología de convergencia puntual, 1794
topología de subespacio, 1661
topología débil
continuidad de operadores lineales, 1790
productos finitos, 1790
subespacios, 1790
topología débil asociada a una dualidad, 1788
topología débil de un espacio localmente convexo, 1789
topología débil-*, 1793
topología final, 1786
topología final localmente convexa, 362
topología inducida por seminormas, 1773
topología inicial, 1785
topología proyectiva, 347
topológicamente acotado, 1770
topología débil-*
metrizabilidad de la bola dual, 1795
metrizabilidad en compactos acotados, 1795
transformada de Fourier, 400
transporte paralelo, 196

en un haz de Banach, 1473
principal, 184
separación fibrada, 686
trazas de orden superior, 727
triángulo de Pascal, 12
Triebel–Lizorkin y Besov en variedades, 928
trivialización, 897
trivialización admisible, 897
compatibilidad uniforme con atlas geodésicos, 897
trivialización geodésica, 903
truco de DeTurck, 1285
tubo equivariante, 1523

valor regular, 46
en variedades de Banach, 1431
variación de curvas, 243
variación total, 1726
variedad, *véase también* espacio tangente
de Banach, 1406
de Banach de clase $C^{1,1}$, 1408
de geometría acotada, 879
de Nehari, 1632
medida de Riemann–Lebesgue, 266
riemanniana, 128
riemanniana con frontera, 128
subvariedad de Banach, 1419
subvariedad de nivel regular, 1434
variedad de Banach, 1406
$C^k$–paracompacta, 1442
variedad de Hilbert, 1477
variedad ILH, 1550
variedad riemanniana
uniformemente regular, 910
variedad suave, 19
variedad suave con frontera, 23
variedad topológica con frontera de dimensión, 22
variedad topológica de dimensión, 18
vecindad tubular, 239
vector tangente cinemático, 1411
vector tangente operacional, 1412

Yang–Mills, 1560